GÉRARD NIN

Concepts fondamentaux de la didactique, l'articulation des assujettissements dans le système didactique

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1991, fascicule S6
« Vième école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique », , p. 187-192
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1991___S6_187_0>

THEME 1

Exposé : "*Concepts fondamentaux de la didactique, l'articulation des assujettissements dans le système didactique*"

par Gérard NIN

**I.R.E.M. d'Aix-Marseille, 163, avenue de Luminy
13009 MARSEILLE**

Un thème qui a émergé du travail du Groupe 8 depuis la précédente école d'été peut être résumé de la façon suivante : certaines petites pathologies qui se manifestent dans un système didactique donné (hésitations, silence ou, au contraire, remplissage verbal intempestif, ...) sont directement liées à un objet de savoir mathématique. Je vais donc étudier comment la complexité inhérente à certains objets de savoir mathématique peut faire problème.

Pour écarter tout malentendu, je précise que je ne m'intéresserai pas ici aux difficultés classiques que peut toujours rencontrer celui qui, en même temps qu'il expose des mathématiques, s'expose à des questions dont le caractère approfondi ou totalement imprévu entraîne l'aveu, souvent douloureux, d'ignorance.

En vérité les difficultés que je veux examiner avec vous sont à l'opposé de celles dont je viens de parler, car elles sont partie intégrante de ce que l'enseignant a pris, en première personne, la responsabilité d'exposer. Tout se passe alors comme si la difficulté n'apparaissait en tant que telle qu'en situation de classe. La situation d'exposition joue alors un véritable rôle de révélateur.

Avant d'aborder les quelques moments du corpus qui illustreront mon propos, je voudrais revenir sur l'affirmation, banale en apparence, qui consiste à dire que le savoir mathématique peut faire problème. J'utiliserai pour cela la notion de rapport au savoir telle que l'a introduite Yves Chevallard. Je dirai que l'usage courant consiste souvent, dans l'étude d'un système didactique, à confondre le rapport de l'enseignant à un objet de savoir mathématique, avec le rapport que celui-ci entretient au rapport que ses élèves pourront entretenir à ce même objet de savoir.

L'anecdote suivante permettra peut-être mieux à l'auditeur peu familier du concept de rapport au savoir, de situer mon propos. Lorsque, vers les années 1985-1986 je crois, la méthode numérique d'approximations successives du point fixe d'un processus discret fut introduite dans les classes terminales scientifiques, les réactions de nombreux enseignants traduisaient le plus grand embarras. "Qu'allait-on bien pouvoir faire faire aux élèves sur un thème aussi difficile?", demandaient-ils. "Les élèves allaient-ils comprendre?". Convié, avec d'autres collègues, à une réunion de présentation de ces nouveaux programmes, je peux témoigner que rares furent ceux qui manifestèrent le besoin de se procurer une bibliographie, si mince soit-elle, sur ce thème nouveau pour l'enseignement au lycée. J'étais entouré de collègues qui, à l'évidence, ignoraient tout du sujet quelques instants auparavant et ne se posaient que des questions relatives au rapport que leurs élèves allaient pouvoir entretenir avec ce nouvel objet de savoir.

Le savoir mathématique apparaît ainsi comme un toujours "déjà là" dans lequel les enseignants n'auraient qu'à piocher. Seul le rapport de l'élève au savoir semble susciter le souci de l'enseignant et requérir son attention.

Venons-en maintenant au corpus étudié. Dès le début du cours, G. parle à ses élèves de points isolés. Cette notion fondamentale de topologie n'est pas et n'a jamais été, à ma connaissance, au programme de l'enseignement secondaire français. Comme je l'ai écrit dans une lettre du colloque épistolaire, certains manuels, plus ambitieux que le texte des programmes de 1971, n'hésitaient pourtant pas à l'utiliser, ou plus exactement à utiliser le mot plutôt que le concept. Je ne peux pas être sûr que G. ait été influencée par ce type de pratique, mais je pense malgré tout qu'elle opère ici un rabattement du sens mathématique du mot sur le sens culturel courant. Un point est alors isolé dans un intervalle s'il n'est pas tout à fait comme les points qui lui sont "voisins"; ce qui se produit s'il possède une propriété - par exemple annuler la dérivée d'une fonction donnée - que ses voisins ne possèdent pas.

Ce qui me semble remarquable c'est que G. paraisse découvrir en situation la difficulté soulevée par l'utilisation de ces points isolés. Comme elle entretient avec sa classe des rapports détendus, elle va même jusqu'à oraliser l'interrogation qui la préoccupe : "qu'est-ce qu'un point isolé? ... et bien c'est un point qui ...". J'avance qu'à partir de cet instant là, et à partir de cet instant là seulement, elle prend une conscience pleine de l'existence d'une difficulté mathématique.

Bien sûr, je n'exclus pas que G. ait les connaissances mathématiques nécessaires pour donner une définition correcte d'un point isolé; mais didactiquement il ne lui est, à ce moment là, plus possible de le faire : car il lui faudrait d'une manière ou d'une autre préciser la notion de voisinage. Elle **ne peut plus que faire comme si** ce qu'elle venait de dire aux élèves allait de soi.

Les effets didactiques de tels points de tension dans la relation didactique sont difficiles à analyser et n'ont guère, me semble t-il, été étudiés jusqu'ici. Ils dépendent assurément des élèves, du groupe qu'ils constituent. Dans le cas particulier observé, les élèves n'interviennent pas, alors qu'ils n'hésitent pas à le faire en d'autres circonstances. Je pense qu'ils ont compris que ce nouvel élément de vocabulaire ne leur est pas destiné, que jamais, par exemple, le professeur ne leur demandera de démontrer que tel ou tel point d'un intervalle en est un point isolé : il s'agit là tout au plus d'une notion paramathématique. La forme même de l'introduction de ce nouvel objet trace d'une façon très sûre la frontière topogénétique qui va déterminer durablement les positions et donc les obligations du professeur et des élèves sur cette question. A l'instar du professeur, les élèves devront faire comme si les choses allaient de soi.

Le second moment est constitué par l'énoncé du théorème qui précise le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle réel. Pour simplifier la présentation du problème, disons que ce théorème possède deux versions : l'une, "simple", qui ne donne que des monotonies larges et l'autre, "perfectionnée", qui donne des monotonies strictes lorsque la dérivée est strictement positive sauf en certains points qui seraient précisément ceux que G. qualifie d'isolés.

Or, voici ce qui se passe : G. énonce assez difficultueusement d'ailleurs, une CNS qui, en vérité, est inexacte; plus précisément, elle affirme qu'une fonction f, dérivable sur un intervalle réel I, dont la dérivée est positive ou nulle sur I, n'est strictement croissante sur I que si les points de I qui annulent f' sont des points isolés de I (c'est la condition nécessaire du théorème). En réalité, la condition effectivement nécessaire (et suffisante, bien sûr) s'obtient en modifiant la fin de la phrase de la façon suivante : ... f ... n'est strictement croissante sur I que si l'ensemble des points de I qui annulent f' ne contient pas d'intervalle (ou encore si le complémentaire des points de I qui annulent f' est dense dans I).

Pour situer la faille de l'énoncé donné par G., il est bon d'avoir en tête que, entre les points isolés et les intervalles de R, il existe des ensembles de points qui sont d'une autre nature et qui peuvent être ensembles des zéros de fonctions dérivées (certains d'entre eux pouvant même être non dénombrables). Un des tout premiers exemples de fonction dérivable, strictement croissante sur un intervalle, et dont la dérivée s'annule beaucoup plus souvent que ne l'imagine G., a été donné en 1906 par un mathématicien roumain, D. Pompéïu. Depuis, des généralisations variées de cet exemple ont été très systématiquement étudiées, grâce, en particulier, aux outils forgés par des mathématiciens français comme René Baire. Je ne peux pas présenter ici, en détail, la construction complète d'un contre-exemple, mais le lecteur intéressé pourra se reporter à l'une de mes lettres du colloque épistolaire.

A ce stade de l'exposé, je dois insister sur le point didactique clé : ce qui importe c'est de comprendre que l' embarras de G. à propos de l'énoncé qu'elle donne n'est dû ni au hasard ni à quelque idiosyncrasie de ce professeur. J'ai consulté plusieurs ouvrages d'enseignement secondaire sur le sujet, un seul d'entre eux signale que la question est délicate, et bien peu donnent un énoncé satisfaisant (on pourra, sur ce point, consulter les lettres du colloque). En revanche, tous les ouvrages de première année d'enseignement supérieur que j'ai pu consulter énoncent la CNS telle que je l'ai rappelée précédemment, cela indépendamment de la technique de démonstration utilisée.

Il faut bien en déduire que la clarification de cette question mathématique n'est pas prise en charge à l'intérieur de l'institution que constitue l'enseignement des mathématiques au lycée. Et cela, du double point de vue de la formation initiale des enseignants et des outils de travail et de développement que constituent les manuels, les instructions officielles, les travaux noosphériens de toutes sortes.

Pour qu'apparaisse mieux le caractère particulier, sinon singulier, du domaine évoqué, il est bon de le comparer à un autre domaine mathématique non trivial et pourtant d'un usage courant dans l'enseignement secondaire. Je veux parler de la construction et des propriétés élémentaires des différents ensembles de nombres. Sur un tel domaine on peut penser que l'assurance manifestée par le professeur ne dépend pas de sa capacité à fournir les justifications complètes, à partir d'une axiomatique donnée, des propriétés qu'il énonce. Le système d'enseignement prend en charge tacitement la question de la justification du traitement des nombres dans l'enseignement secondaire. Il garantit le caractère inattaquable des résultats énoncés.

Un premier effort d'analyse de la différence entre les deux domaines conduit à remarquer que ce n'est pas dans le savoir savant qu'il faut espérer la trouver, puisque, dans les deux cas, les théorèmes idoines ont été, souvent depuis longtemps, énoncés et démontrés, mais bien plutôt dans la réalité du travail transpositif et de l'histoire de la transposition dont ces domaines ont été les objets.

Les constructions des différents ensembles de nombres occupent une place importante, non seulement dans la formation des enseignants, mais aussi dans les travaux que certains mathématiciens soucieux des problèmes de l'enseignement secondaire lui ont consacrés. Le texte d'Henri Lebesgue sur la mesure des grandeurs en est un éclatant exemple. Il est un des éléments constitutifs de ce que j'appellerai, conformément à la terminologie introduite par Julia Centeno, la mémoire permanente du système. Cette mémoire joue le rôle d'un patrimoine qui garantit aux acteurs de l'institution concernée que les difficultés mathématiques de la question ont été réglées, à leur intention, une fois pour toute.

Le texte du savoir à enseigner trahit l'attention que le système d'enseignement porte à ces questions. Les constructions de l'ensemble Z et de l'ensemble Q, par des procédés qui s'apparentent à la symétrisation d'un demi-groupe, sont restées longtemps dans les programmes et la technique d'Hamilton de construction du corps des complexes n'a cessé d'y figurer que depuis quelques années. On comprendra mieux alors le sentiment de complète sécurité qu'éprouve l'enseignant qui énonce : "Soit z un nombre complexe ...". Qu'il ait ou qu'il n'ait pas "construit" l'ensemble des nombres complexes, il est fort peu vraisemblable qu'il éprouve le besoin de s'interroger sur la nature de la légitimation des propriétés des nombres complexes ou, de la même façon, sur celle des nombres réels. A ce stade il est prudent de préciser que nous ne nous sommes pas engagés dans l'étude des mécanismes de la transposition didactique qui peuvent conduire une question mathématique à devenir un point aveugle de la culture d'un système didactique donné.

La partie la plus délicate du travail entrepris consiste à mettre en relation ces points aveugles avec les manifestations de ce que j'ai appelé l'embarras de l'enseignant.

Si l'on s'en tient au cas de G., comment se convertit, dans son travail d'enseignant, le point aveugle mathématique qu'elle rencontre? Tout d'abord on peut observer qu'elle comble la béance créée par son incursion dans une zone d'ombre de la culture du système, par un discours; un discours laborieux par lequel elle tente de faire oublier, et peut-être d'oublier, le silence du système. Il lui faut emporter l'adhésion des élèves coûte que coûte, faire en sorte que les choses dites leur paraissent aller de soi.

Deux techniques de camouflage, si j'ose dire, sont à l'oeuvre. Premièrement, il s'agit de maintenir le rythme, de ne pas tomber dans le piège du silence ou du demi-silence, aveu du manque de maîtrise de la situation. Secondement, il faut s'attacher la connivence de l'autre. Elle y parvient en usant subtilement du passage du mathématique au paramathématique.

Le théorème et la définition dictés sont peu nets. Qu'à cela ne tienne, elle leur donne aussitôt mieux qu'une définition, une règle pratique : "étudier une fonction c'est partager son intervalle de définition ...", voilà qui "pourra vous servir ..." dit-elle. Les élèves se mettraient-ils à douter d'elle? Elle leur parle et ne leur dit pas n'importe quoi : "c'est important ce que je vous dis là ...", prend-elle soin de leur préciser. Comment se montrer inquisiteur avec quelqu'un qui met autant de soin à vous préparer aux difficultés à venir?

L'analyse de l'attitude de G. appelle à approfondir le mécanisme de ce que Yves Chevallard a appelé la conversion didactique. Il est, à mon avis, important de signaler que la question mérite d'être étudiée, quelles que soient les causes de l'embarras manifesté. Manque dans la culture mathématique du systéme ou singularité de la position d'une femme professeur de mathématiques face au problème de la légitimité et de l'autorité? L'étude du cas de G. montre que ces deux hypothèses ont toute chance d'entrer en résonance plutôt que de s'exclure.