PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

CLAUDE CASTELLA
MICHEL JULLIEN

La différentiation institutionnelle : « qu'est-ce que savoir ? »

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1991, fascicule S6
« Vième école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique », , p. 174-178
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1991___S6_174_0>

THEME 1

Travaux dirigés : "*La différentiation institutionnelle : "qu'est-ce que savoir ?"*"

par Claude CASTELLA et Michel JULLIEN

I.R.E.M. d'Aix-Marseille, 163, avenue de Luminy
13009 MARSEILLE

Cette séance de travaux dirigés a pour but d'amorcer l'étude de la classe de problèmes dont l'énoncé générique est le suivant :

Soit un objet O.
Soient une première institution I_1 et une deuxième institution I_2 pour lesquelles l'objet O est un objet institutionnel. Dans chacune de ces institutions émerge un rapport institutionnel à l'objet O, soit R_1 et R_2.
Les rapports institutionnels R_1 et R_2 sont-ils identiques ?

Nous rappelons que, selon la théorie dans laquelle ce champ de problèmes se situe, un individu ne peut rencontrer un savoir S que par l'intermédiaire d'une institution I, c'est-à-dire en devenant le sujet de cette institution. Celle-ci découpe le savoir S en objets de savoir O et définit - ou, plus exactement, fait émerger - un rapport institutionnel à l'objet O, noté $R_I(O)$. Ce rapport n'est le rapport de personne, d'aucun sujet réel : il serait le rapport d'un sujet idéal de l'institution. Chaque sujet X de l'institution, occupant la position p dans cette institution, a un rapport personnel à l'objet O, $R_p(X,O)$. On dit alors que « X sait O » si et seulement si $R_p(X,O)$ est réputé conforme au rapport institutionnel $R_I(O)$ (1).

Nous abordons l'étude de ce champ de problèmes par l'examen de deux d'entre eux.

I. Les problèmes étudiés

Problème 1

Soit O = « fractions ».
Soient les institutions I_1 = « enseignement des mathématiques au Collège, en France » et I_2 = « enseignement des mathématiques à des élèves d'âge équivalent, en Angleterre ».

1. Il resterait à définir dans quelles conditions et par quels dispositifs la réputation de conformité peut émerger dans l'institution. Nous laisserons cet aspect de côté : ce n'est pas l'objet du travail de cette séance. Pour des précisions sur le sujet, voir Chevallard Y., *Evaluation, véridiction, objectivation - La relation didactique comme caprice et miniature*, Conférence inaugurale des *Rencontres internationales sur l'évaluation en éducation 1989* (Paris, 27-29 septembre 1989), à paraître.

Nous poserons comme hypothèse : le rapport R_1 (soit le rapport institutionnel aux fractions dans l'enseignement des mathématiques au Collège, en France) contient l'idée que, dans les problèmes comportant des fractions, comme dans les autres problèmes, la solution doit montrer de manière explicite l'emploi soit d'une mise en équation soit d'une (au moins) des quatre opérations.

*1°) A l'aide du **document 1**, montrer que R_1 diffère de R_2.*

2°) D'après les résultats de la question précédente, concevoir une expérimentation permettant de confirmer la discrimination de ces deux rapports.

*3°) A l'aide du **document 2**, retrouver les résultats de la question 1.*

Le document 1 est la reproduction d'une partie de la page 71 de l'ouvrage décrivant les travaux de l'équipe « Concepts in Secondary Mathematics and Science », Chelsea College, University of London et intitulé *Children's Understanding of Mathematics : 11-16* (K.M. Hart (éd.), John Murray, 1981). Les travaux décrits dans cet ouvrage consistent à mettre en évidence des niveaux de compréhension des élèves âgés de 11 à 16 ans à propos de certains thèmes mathématiques, dont les fractions. Pour ce faire, les membres de l'équipe ont testé plusieurs centaines d'élèves après avoir effectué une enquête sur l'enseignement de ces thèmes.

Le document 2 est extrait d'un article de K. Hasemann paru dans *Educationnal Studies in Mathematics*, vol.12, pp.71-87, 1981, intitulé « On Difficulties with Fractions » dans lequel l'auteur présente des travaux semblables à ceux de l'équipe du CSMS (il y fait d'ailleurs longuement référence). Il s'agit en fait d'un montage présentant la page 73 et le premier item présenté en Appendice, page 83.

Problème 2

Soit O = « repère ».
Soit I_1 = « enseignement de la physique » et I_2 = « enseignement des mathématiques ».

*1°) En utilisant l'ensemble des documents proposés (soit les **documents 3, 4, 5 et 6**), montrer que $R_1(O)$ et $R_2(O)$ sont différents. Préciser la (ou les) différence(s) constatée(s).*

*2°) Montrer que le deuxième exercice qui figure dans le **documement 7** fournit une preuve supplémentaire de ce qui a été montré dans la question précédente.*

(Indication : *on observera que la propriété que l'on demande d'établir dans l'exercice de mathématiques considéré reste vraie si le point A est un point quelconque de la droite D et non le pied de la perpendiculaire commune à D et D'.)*

Les documents 3 et 4 présentent chacun un problème de mécanique entièrement traité (ils sont extraits du *Cours de Physique* de G. Dévoré et J. Rivaud, 1967). Le document 5 offre l'ensemble des exercices du chapitre « Repères orthonormés » du manuel de *Mathématiques élémentaires* (1963) de G. Cagnac et L. Thiberge. Le document 6 est la reproduction de la première page du chapitre « Problèmes élémentaires de géométrie analytique plane » qui est le deuxième chapitre de l'ouvrage de N. Efimov, intitulé *Eléments de géométrie analytique* (1969). Enfin, le document 7 est extrait du *Nouveau cours de Mathématiques Spéciales* (1965) de G. Cagnac, E. Ramis et J. Commeau, et, plus précisément, le tome 3 de ce cours portant sur la géométrie. Il présente, à la page 315 (et suivantes), un exercice de géométrie dans l'espace. Le corrigé qui suit l'énoncé de l'exercice montre que les auteurs le traitent en utilisant la géométrie analytique.

II. La correction proposée

Problème 1

Question 1

Dans le document 1, l'auteur analyse, à partir de l'enquête effectuée par l'équipe du CSMS, les principales causes d'erreur des élèves à propos des fractions équivalentes. A la fin de ce paragraphe on trouve un énoncé de problème :« Une course de relais est courue en six relais de 1/8 de km chacun. Chaque coureur court un relais. Combien de coureurs sont nécessaires pour une course de 3/4 km ? ». Ce problème est ainsi rangé, par l'auteur, dans la catégorie des problèmes à résoudre à l'aide des fractions équivalentes : en effet, $3/4=6/8=6\times1/8$, il faut donc six coureurs. Une telle réponse, obtenue d'un élève de collège français, mettrait son professeur dans l'embarras : d'une part, il ne peut mettre en cause la validité mathématique de la réponse obtenue mais d'autre part, une telle réponse n'est pas conforme à ses attentes puisque, sous l'hypothèse retenue, s'il a posé ce problème c'est qu'il attend que ses élèves mobilisent soit une mise en équation (« soit x le nombre de coureurs ; on a $(1/8)x=3/4$, d'où $x=(3/4)/(1/8)=6$, il faut donc 6 coureurs ») soit l'une des quatre opérations (« le nombre de coureurs est $(3/4):(1/8)$, soit 6 »). Cela montre que le rapport R_1 diffère sur ce point du rapport R_2.

Question 2

Une variable importante de toute expérimentation est son coût. Et il n'est sans doute pas inutile de rappeler qu'un coût élevé n'est pas à lui seul une garantie de qualité, c'est-à-dire qu'une expérimentation d'un coût très faible peut être tout à fait probante. Par exemple, dans le cas présent, on peut interviewer quelques professeurs de Collège français sur le problème énoncé ci-dessus en leur demandant 1) s'ils proposeraient un tel exercice à leurs élèves et à quel niveau du cursus 2) de quelle manière attendraient-ils que les élèves le résolvent s'ils le proposaient et 3) quelle serait leur réaction devant la résolution « à l'anglaise ». Il est à noter que l'interview du professeur est ici préférable à l'interview de l'élève parce que le professeur est le garant du rapport institutionnel dans l'institution considérée et, par conséquent, on peut penser que son rapport personnel (qui apparaît dans l'interview) est extrêmement proche du rapport institutionnel (2).

Question 3

Le document 2 propose un classement d'un certain nombre d'items portant sur les fractions selon trois axes, le premier intitulé « Operations with fractions » et comprenant quatre modalités : recognizing equivalent fractions, ordering fractions, addition and subtraction, multiplication and division. L'item, dont l'énoncé peut se traduire approximativement par : « A un goûter d'anniversaire il y a du cake à manger. A la fin du goûter il reste 2/7 du cake soit 4 morceaux. Combien y avait-il de morceaux au départ ? » est classé par l'auteur sous la rubrique « recognizing equivalent fractions ». Ce qui, sous l'hypothèse retenue, accrédite bien l'idée d'une différence entre R_1 et R_2.

2. Une expérimentation de ce type a été réalisée à l'IREM d'Aix-Marseille à propos justement du rapport institutionnel R_1 décrit ci-dessus et on pourra en trouver un compte rendu détaillé dans Y. Chevallard et M. Jullien (1989), *Sur l'enseignement des fractions au Collège. Ingénierie, recherche, société*, Publication de l'IREM d'Aix-Marseille, n°15.

Problème 2

Question 1

Tous les exercices contenus dans le document 5 (exercices de mathématiques donc) utilisent un repère othonormé du plan ou de l'espace qui a été choisi au préalable, sans que la question de ce choix ne fasse l'objet... d'une question : « Soient F et G les cercles qui ont pour équation... », ou encore « On donne le cylindre C ($x^2+y^2=R^2$)... », etc. Dans les documents 3 et 4 la question du choix du repère fait manifestement partie de la résolution du problème. Dans les deux cas, la structure du problème peut se décrire ainsi : un système physique est donné et il s'agit de résoudre à son propos un certain nombre de questions ; mais le choix des outils à mobiliser pour y parvenir (et, en particulier, le choix du repère, ou plutôt du « bon » repère) est laissé à la charge de l'élève (3). Par ailleurs, Efimov, dans le document 6, explicite l'usage que l'on fait, en mathématiques, du repère : « Dans le cours de notre exposé, lorsque nous poserons des questions quelles qu'elles soient, nous considérerons qu'un certain système de coordonnées est fixé. ». Ainsi les rapports R_1 et R_2 diffèrent-ils, au moins sur ce point.

Question 2

Cette deuxième question va permettre d'affiner l'analyse effectuée dans la première question. En effet, il est des cas, en mathématiques aussi, où le choix d'un repère bien adapté à la question facilite sa résolution ou même la rend possible. Mais ce document 7 montre le malaise des auteurs lorsqu'ils se trouvent confrontés à la nécessité, inhabituelle en mathématiques - c'est-à-dire non inscrite dans le rapport institutionnel R_1 à l'objet « repère » en mathématiques -, de faire en sorte que l'énoncé de l'exercice suggère aux élèves l'idée du « bon » repère. L'énoncé, tel qu'il est proposé est le suivant : « Soient D et D' deux droites orientées, A et A' les pieds sur ces droites de leur perpendiculaire commune, A_1 un point fixe de D' ; deux points M et M' se déplacent respectivement sur D et D' de façon que $AM=A_1M'$; montrer que le plan médiateur P de [MM'] pivote autour d'une droite fixe L. ». Cet énoncé fait intervenir les points A et A', « pieds sur ces droites de la perpendiculaire commune ». Or, la propriété que l'on cherche à démontrer reste vraie si A, comme A_1 sur D', est un point fixe *quelconque* de D. Si donc l'attention des élèves est attirée sur A (et A') au prix d'une restriction de la généralité de la propriété démontrée, c'est évidemment pour leur suggérer le repère : la perpendiculaire commune pour axe z'z, le milieu de [AA'] pour origine O et, comme axes x'x et y'y les bissectrices des angles formés par les parallèles à D et D' menées par O. Cette petite entorse à la généralité de la propriété (dont la démonstration n'offre pas plus de difficultés dès lors que l'on a choisi le « bon » repère) fournit une preuve a contrario du fait que l'idée du choix du repère n'est en général pas inscrite dans R_1.

III. Eléments pour une technique d'étude

Que nous apprend l'étude de ces deux problèmes particuliers pour la mise au point d'une technique d'étude du problème générique dont ils relèvent ? On peut déjà constater que, dans chaque cas, c'est dans les exercices, et plus précisément dans la façon dont sont résolus les exercices à l'intérieur des institutions considérées, que nous avons pu repérer des aspects du rapport institutionnel prévalent. On peut penser qu'il y a là un trait général et qu'il sera donc utile de porter un regard attentif (c'est-à-dire dégagé de son propre assujettissement - éventuel - au rapport institutionnel examiné) aux exercices et à leur mode de résolution.

3. En fait, cette affirmation doit être nuancée. Il ne faudrait pas entendre par là que c'est *à l'élève* de faire le choix du repère. En réalité, il émerge du cours de physique une connaissance des systèmes physiques étudiés, connaissance inscrite dans R_2, qui comprend le choix du repère bien adapté à leur étude. Par exemple, si le système est un plan incliné, la tradition fournit comme axe x'x la ligne de plus grande pente de ce plan et comme axe y'y, une normale à ce plan.

Un deuxième aspect, corrélé au précédent (mais qui a peu été mis en évidence dans ce travail), concerne l'approche du rapport institutionnel à un objet de savoir au travers des rapports personnels à cet objet des sujets de l'institution. Il est clair que, dans le cas d'une institution didactique, ce sont les professeurs qui ont un rapport personnel le plus adéquat au rapport institutionnel, puisqu'ils sont ceux par qui le rapport institutionnel va émerger dans l'institution.

Par ailleurs, et de façon plus générale, on peut s'attendre à ce que la réponse à la question du problème générique « Les rapports institutionnels sont-ils identiques ? » soit négative : les rapports institutionnels à un « même » objet dans deux institutions différentes sont bel et bien différents (non absolument identiques). Ainsi, bien des conflits latents, ou plus simplement des malaises, entre institutions didactiques ayant un objet de savoir commun O comme objet d'enseignement proviennent-ils d'une méconnaissance de cette non superposabilité des rapports institutionnels : savoir les repères en classe de physique, ce n'est pas exactement la même chose que savoir les repères en classe de mathématiques.