

GUY BROUSSEAU

**Concepts fondamentaux en didactique des mathématiques et théorie des situations didactiques : plan à débattre d'un cours de base**

*Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1991, fascicule S6 « Vième école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique », , p. 13-19*

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1991\\_\\_S6\\_13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1991__S6_13_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## THEME 1

*Cours : "Concepts fondamentaux en Didactique des Mathématiques et théorie des situations didactiques : plan à débattre d'un cours de base"*

par Guy BROUSSEAU

Université de Bordeaux, Département de Mathématiques  
351, cours de la Libération 33400 TALENCE

## FONDEMENTS (METADIDACTIQUE)

### A. SITUATIONS MATHÉMATIQUES

#### 1. DEFINITIONS RELATIVES A UNE SITUATION.

##### 1.1. Concepts primitifs

- Une situation mathématique est un automate (pas nécessairement fini, déterministe et sans mémoire) dont les changements pertinents de stratégie sont commandés par des théorèmes de mathématique. éléments primitifs: joueurs, états, règles, trait, gain, choix, partie, stratégie, etc);

On peut alors définir et présenter

- des exemples de fonctions de coût d'une situation. coût et intérêt d'une stratégie, incertitude, fiabilité etc.
- les rétroactions qu'exerce sur le joueur la fonction de gain par l'intermédiaire de ses anticipations.
- les connaissances associées à une stratégie ou à un changement de stratégie. Ce sont les connaissances, et non les situations qui sont "reconnaissables" par mathématiques. Mais toute reformulation de ces connaissances est acceptable, équivalente et donc sans signification didactique. (Ex)
- les anticipations associées à une connaissance
- les erreurs par rapport aux règles ou par rapport à une stratégie, les connaissances "fausses", inadéquates etc
- la notion de situation d'apprentissage (potentielle): elle présente diverses stratégies de complexité "assez voisines" et d'intérêt très différents. Elle ne garantit nullement que tout joueur effectuera un "apprentissage au sens de la psychologie cognitive.
- le coût et l'intérêt d'une connaissance, d'un apprentissage selon le domaine déterminé par les valeurs des variables cognitives (qui rendent optimales des connaissances différentes dans une même situation)
- le domaine dans lequel une connaissance l'emporte sur tout autre (en économie) pour la détermination de la stratégie gagnante etc.
- le coût de l'apprentissage des règles d'une situation nouvelle, à comparer avec celui de l'apprentissage des connaissances qu'elle permet de faire apparaître, et l'intérêt qu'elles présentent.
- les seuils "informationnels" entre les domaines des stratégies ou des connaissances

Il faut bien souligner que les définitions visent des objets théoriques (et non leur "réalité", toujours beaucoup plus complexe comme le mettent en évidence la multiplicité des sens et des approches) relatifs à des situations (et non aux systèmes en présence. Par exemple il s'agit de "la connaissance en jeu" et non pas de celle du joueur, a fortiori de celle de tel joueur effectif. Les automates dont il s'agit ne sont pas les protagonistes: la didactique ne vise pas à modéliser les protagonistes de la situation, maître ou élève, même si elle fait usage de modèles psychologiques, sociologiques ou anthropologiques.

##### 1.2. Intérêt théorique.

Cette théorisation permet de faire des catégories de situations, d'en déterminer certaines caractéristiques et de maintenir par là un certain niveau d'exigences à propos de la consistance des analyses. Il reste à éprouver sans cesse les vertus "explicatives" des catégories ou des propriétés ainsi envisagées et à les remplacer par d'autres si nécessaire (si elles sont trop compliquées pour une faible valeur explicative.

Ces notions permettent de représenter certaines parties du fonctionnement des institutions.

Rq. Le fonctionnement de toute institution pourrait-il se modéliser en termes de situations?

La tentation est grande d'intégrer dans "la théorie" tout ce qui peut être appréhendé comme relations pertinentes et intéressantes dans l'observation ou dans la pratique de l'enseignement. L'ambition de tout comprendre et de tout expliquer conduit à une complexification excessive et à la disparition de la théorisation.

### 1.3. Interêt pratique:

Du côté des applications pratiques ces notions permettent dès leur introduction de:

- représenter certaines parties du fonctionnement des **institutions**.

Rq. Le fonctionnement de toute institution pourrait-il se modéliser en termes de situations?

- reconnaître les connaissances en oeuvre dans certaines activités du joueur ou de l'élève.
- comparer les connaissances visées par un exercice et les résultats obtenus.
- rechercher des situations mettant en oeuvre des connaissances données.
- identifier la part modélisée et celle qui ne l'est pas dans une observation.
- identifier une situation effective et une situation intériorisée
- Distinguer les différents statuts du vocabulaire utilisé dans une analyse de l'enseignement.

### 1.4. Analyse à priori

L'analyse à priori d'un exercice consiste (nous supposons que c'est toujours possible)

- à le modéliser en termes de situation:  $m(e)$ . Distinguer les éléments de la situation qui sont effectifs de ceux qui sont fictifs (ref rôle du maître).
- puis à rechercher les connaissances  $c(e)$  qui commandent la mise en oeuvre des diverses stratégies concevables. Si possible à évaluer le coût et l'intérêt de ces diverses stratégies, et donc à déterminer la stratégie optimale et la connaissance  $c(e)$  qui lui correspond.

En ingénierie didactique la théorie est supposée faciliter l'activité inverse qui consiste à faire correspondre à une connaissance donnée  $c$ , une famille de situations générées par les variables cognitives d'une (ou de plusieurs) situation(s) (plus) "fondamentale(s)"  $F(c)$ .

L'analyse à priori se poursuivra généralement par la comparaison de la situation  $m(e)$  aux situations  $m(c)$  caractéristiques de la connaissance  $c$ . Assez souvent il suffira par un travail d'ingénierie de mettre en évidence certaines variables ou circonstances dont la fermeture dans l'exercice limite le sens de la connaissance en jeu.

Exemple: recherche d'une situation fonctionnalisant l'implication.

Si un exercice  $e$  est déclaré comme visant (ou s'il paraît viser) directement une connaissance  $c$  on peut donc le modéliser en termes de situation  $m(e)$ , et comparer le résultat aux situations caractéristiques  $m(c)$  de la connaissance annoncée. Les connaissances qui correspondent à la stratégie optimale de  $m(e)$  ne sont pas nécessairement  $c$ . Plus grave,  $m(e)$  peut ne pas appartenir à  $M(c)$  lorsqu'il y a méprise sur la nature de l'exercice.

### 1.5. Analyse à postériori, connaissances et sens.

Fixer des conditions ou des variables de  $M(c)$  pour déterminer une situation particulière  $m(c)$  limite les choix laissés au joueur. L'étude de ces choix fait apparaître d'autres connaissances possibles correspondant à des stratégies non optimales ou fausses. Le paradigme de ces connaissances est le sens (ou la signification) de la connaissance, donné par la situation à la connaissance visée.

Les choix attestés de l'élève peuvent être étudiés dans les mêmes conditions ce qui peut faire apparaître les connaissances effectives de l'élève (et donc détermine le sens de ses réponses).

### 1.6. Méthode.

a) La méthode d'élaboration des situations consiste à rechercher et à introduire dans l'automate toutes les justifications de l'action du joueur par des dispositions adéquates soit du milieu, soit des règles, soit du but annoncé.

Pour cela il faut d'abord remonter aussi loin que nécessaire la chaîne des justifications: pourquoi telle action serait préférée à telle autre? quelle connaissance signifierait le changement de stratégie? quels renseignements le joueur peut-il avoir sur la qualité de sa décision, après qu'il l'ait prise, avant de la prendre, etc.

b) Ce qui précède montre comment s'effectue la confrontation entre les modèles résultants de l'effort de théorisation et les circonstances qu'ils sont susceptibles d'expliquer. Les méthodes d'attestation ou de preuve en découlent.

### **1.7. Limites, précautions.**

L'usage des évidences "rationnelles" dans l'analyse ergonomique est toujours délicat et souvent trompeur; il est indispensable de soumettre les raisonnements à priori à l'expérience et à l'observation. Néanmoins un certain nombre de questions intéressantes ont pu être ouvertes et quelques conclusions commencent à pouvoir être tirées dans le cadre de cette théorie.

## **2. RELATIONS ENTRE SITUATIONS**

### **2.1. Différents types de relations entre situations ou institutions**

#### **a) relations structurelles**

- Situations ayant la même structure mais des règles ou des valeurs de variables différentes.
- Situations utilisant les mêmes connaissances, sous la même forme, ou sous des formes différentes, ou Situations opposant des connaissances différentes et voisines etc.

#### **b) dépendance fonctionnelle (synchronique):**

Etablir une dépendance fonctionnelle entre deux situations A et B revient à envisager une sur-situation S dans laquelle elles s'inscrivent sans modification:

par ex. les états terminaux de A et de B sont des états de S,  
ou encore les conditions et règles de A et de B figurent intégralement dans S. etc

Ceci permet d'envisager des interactions entre situations en tant qu'institutions, le découpage d'une situation générale en situations particulières ou locales etc.

Assujettissement d'une situation à une autre: finalité d'une situation

#### **c) dépendance diachronique**

- parties d'une même situation vs occurrences différentes d'une même situation.
- situation B utilisant dans ses règles ou comme stratégie de base la stratégie optimale d'une situation A
- Situation A conduisant à envisager une autre situation B. etc

Remarquons que dans le cas de dépendance, qu'elle soit synchronique ou diachronique, tous les concepts définis sur une situation et relatifs à un ensemble ou à une suite d'états peuvent être transposés à une suite de situations.

### **2.2 Situation fondamentale, connaissance fondamentale**

### **2.3. Différents types d'interaction et de situations:**

- **action** (l'action ou la décision du joueur change les états effectivement laissés aux autres) vs **information** (les états sont inchangés, c'est l'incertitude du partenaire qui est modifiée).

- connaissance et anticipation
- Structure des relations, formes de connaissances, formes d'apprentissage, **(situations d'action, de formulation, de validation)**

- reconnaissance des connaissances, **types d'institutions**

- connaissance outil, connaissance objet,

- connaissances et savoirs.

### 3. RELATIONS ENTRE SITUATIONS ET CONNAISSANCES.

**3.1 Effet des situations sur les connaissances: transposition cognitive.**

**3.2. Effet des connaissances sur les situations:**

**dialectique outil objet.**

processus d'apprentissage,

**3.3. genèse d'une connaissance ou d'un savoir.**

Evolution corrélatrice des situations et des connaissances.

3.4. Percolation d'une information dans un ensemble d'institutions.

### 4. RELATIONS ENTRE CONNAISSANCES.

Le remplacement d'une stratégie par une autre suppose le remplacement d'une connaissance par une autre.

La comparaison de ces connaissances aussi bien de leurs relations logiques et culturelles que celle des situations fondamentales qui leur sont associées peut donner une idée de la complexité du processus d'apprentissage requis pour ce remplacement et par là établir (comme hypothèse de travail) une sorte de distance entre les connaissances en question:

distance "faible" requiert une "assimilation" de la situation et des connaissances

distance "forte" requiert une "accommodation" une réorganisation des connaissances et des situations associées.

La structuration des connaissances est aussi une réponse adaptative.

Certaines connaissances se constituent en **obstacles cognitifs**, lorsque la distance forte concerne aussi les situations de validation. Ils peuvent être d'origine ontogénique, didactique, ou épistémologique selon les institutions affectées par le phénomène.

Théorème de "séparation" des connaissances. La structuration, et les obstacles sont deux conséquences de l'hypothèse fondamentale de la théorie des situations:

**Les connaissances et les savoirs sont des réponses d'adaptation des systèmes aux situations dans lesquelles ils sont impliqués.**

D'autre part des connaissances différentes interviennent généralement dans la résolution d'une situation. Cette co-présence établit entre elles des liens d'une nature différente de ceux qui sont utilisés pour la structuration "savante" du savoir.

## B. SITUATIONS MATHÉMATIQUES DIDACTIQUES .

### 1. DEFINITIONS.

a) Une situation didactique est une situation composite où l'un (au moins) des joueurs vise comme état final de son automate, une transformation des connaissances, donc des stratégies des autres joueurs. (finalité didactique d'un des joueurs).

Un des joueurs agit en fonction d'au moins deux situations:

- comme partenaire de la situation didactique qui le lie aux élèves
- comme partenaire d'un système didactique ou plutôt d'une institution qui détermine ses finalités.

b) Une situation qui ne comprend aucun joueur de cette sorte est une **situation non-didactique**.

Rq. Toute une gamme de possibilités semblent s'offrir à l'enseignant:

- proposition de diverses sortes de situations d'apprentissages provoquant des adaptations spontanées,

- communication directe de l'information

selon ce qu'il estime possible et économique, et selon qu'il peut déclarer ou non son objectif.

Les positions des divers types de situations correspondant aux possibilités d'interventions de l'enseignant sont esquissées dans "le rôle du maître.

c) Une situation "autonome" est une situation telle que le passage d'un état à un autre jusqu'à la fin de la partie, celui d'une stratégie à une autre, celui d'une partie à une autre sont toujours possibles sans intervention extérieure pour chacun des joueurs dès lors que les règles et le milieu dans son état initial sont donnés. intrinsèquement non didactique

C'est une situation qui peut parvenir à son terme sans autres interventions que celles qui sont permises par les règles.

Une situation didactique n'est pas autonome puisqu'elle ménage des choix pour les décisions didactique de l'enseignant, mais elle peut comprendre des sous situations qui le sont.

## **2. PREMIERS THEOREMES ET PREMIERS PARADOXES DE LA THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES.**

a) (Théorème) L'enseignant doit proposer des sous situations non didactique (un milieu) qui servent de référence de fonctionnement (véridique ou fictif) pour les connaissances qu'il enseigne.

Une activité d'enseignement qui possède un modèle local non didactique est dite **a-didactique**. Elle est en général le résultat d'un activité didactique spécifique de dédidactification (dévolution) pour que le joueur la considère comme non didactique.

Rq une situation non didactique peut donc être utilisée comme situation d'apprentissage à des fins didactiques, elle apparaît alors comme phase non didactique d'une situation didactique.

b) Transformation des causes d'apprentissage en raison de savoir. Par conséquent l'enseignant doit "transformer" la signification des situations qu'il a utilisées pour provoquer l'apprentissage. Il doit faire voir des raisons de savoirs là où l'élève a appris sous l'effet de causes (le plus souvent sans rapport avec ces raisons de savoir: par exemple par répétition ou par analogie). Transformer les situations didactiques en situations "lues" comme non didactiques.

c) (théorème) Lorsque l'enseignement porte sur l'articulation des connaissances, les situations doivent présenter au moins une genèse (effective ou supposée) de ces connaissances (épistémologie didactique)

d) Une situation didactique est automate à pile de mémoire.

## **3. LE CONTRAT DIDACTIQUE. INSTITUTIONNALISATION, DEVOLUTION. SITUATION NON-DIDACTIQUE, SITUATION A-DIDACTIQUES.**

## **4. LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE COMME RESULTAT DU FONCTIONNEMENT DES SITUATIONS DIDACTIQUES.**

### **C. ANALYSE DU RAPPORT AU SAVOIR**

#### **1 TOPOGENESE, EMERGENCE DES TYPES DE RAPPORTS: PERSONNELS, OFFICIELS, INSTITUTIONNELS.**

#### **2. CHRONOGENESE ET EVOLUTION DES RAPPORTS INSTITUTIONNELS PERTINENCE, ADEQUATION, IDONEITE.**

**LIENS AVEC DIFFERENTES APPROCHES DE L'ENSEIGNEMENT ET DES SYSTEMES EN PRESENCE PROPOSES DANS DIVERS DOMAINES.**

L'introduction des concepts de la théorie des situations permet une présentation et un questionnement des **autres approches** des questions de didactique. Cette présentation n'a pas pour objet le résumé et le compte rendu fidèle des textes qui dans diverses disciplines s'intéressent à tel ou tel aspect des activités d'enseignement.

Il ne s'agit que de les étudier par le moyen de la théorie des situations didactiques, de les placer par rapport à elle, d'indiquer les disciplines dont elles se réclament et dont elles essaient de permettre l'application aux questions d'enseignement, ainsi que les questions qu'elles sont susceptibles de résoudre.

La question est délicate car ces approches sont elles aussi utilisées pour prendre des décisions dans l'enseignement effectif, elles sont même souvent faites pour cela.

Elles utilisent le plus souvent d'authentiques résultats scientifiques, mais les placent dans le cadre d'hypothèses de didactique qui ne sont pas produites ni garanties par le domaine de référence, et qui ne sont pas non plus prises en charges par les "utilisateurs" soit qu'elles restent implicites, soit qu'elles paraissent évidentes.

Il convient donc

- de dégager ces approches à la fois

\* dans leur structure: quelles parties du système didactique, quelles interactions sont considérées? quelles définitions, quelles interprétations donnent elles des principaux objets et concepts (conditions du milieu, connaissances, savoir, actants, etc)

\* dans leur fonctionnement nominal, tel qu'il est envisagé, quelle conception de l'apprentissage apportent elles? quelles contraintes, quelles variables de contrôle du processus d'enseignement permettent elles de gérer

et dans leur fonctionnement réel dans la pratique d'enseignement

- d'identifier les théories dont elles permettent d'importer utilement les résultats et vers lesquelles elles permettent d'exporter des questions pertinentes,

- d'examiner la méthode de confrontation du modèle avec son objet et sa valeur scientifique, d'indiquer ses limites et les conditions limites de son rejet.

Une telle étude a été tentée ou plutôt esquissée avec l'approche de Diénès.

Il est clair que ce procédé ne peut pas pour l'instant "respecter à priori" son objet d'étude en tant que fait scientifique et culturel et peut conduire à des polémiques. Il convient donc de bien marquer la différence entre les informations les résumés et les références d'une part, et les interprétations ou les modèles qu'en donne la théorie des situations d'autre part.

La présente étude propose à titre d'essai de différencier la plupart des approches (dont celles de Skinner et du behaviorisme, celles des Guilford, Ausubel, Bruner, etc) en référence avec trois modèles principaux, qui tous sont des **restrictions valides**, dans certaines limites, des modèles fondamentaux proposés par la théorie des situations:

- le modèle logistique,
- le modèle de communication,
- et le modèle cognitiviste et constructiviste.

## DIDACTIQUE proprement dite.

La didactique du nombre naturel, de la géométrie, de la mesure, des nombres rationnels, des décimaux, des réels, didactique du raisonnement et de la logique, didactique des statistiques, des probabilités, de l'arithmétique, de l'algèbre, de l'analyse...

Plan de telles études.

La définition des connaissances peut être accompagnée ou même précédée de celle des situations non-didactiques fondamentales et suivie de l'étude expérimentale des processus d'apprentissages et d'enseignement.

(Utilisation des situations fondamentales dans la formation complémentaire des maîtres).

## Discussion à propos du plan d'un cours de Base.

Un tel cours doit-il suivre à peu près le même plan et les avoir les mêmes finalités qu'il soit destiné à de futurs professeurs à des ingénieurs ou à des chercheurs en didactique?

ma réponse: oui.

Il doit viser en premier lieu une présentation de l'objet et des méthodes de la didactique, indépendamment si possible de la logique des approches scientifiques, techniques. La justification interne des concepts retenus (leur cohérence) doit être prouvée et la pertinence montrée sur des exemples. Les questions ouvertes et les difficultés sont formulées à partir de ce savoir de base.

Les apports des "différentes" approches historiques ou méthodologiques sont intégrés et présentés autant que possible dans le cours de base en fonction des besoins et du niveau.

Le but affiché d'un cours de base en didactique est de donner au lecteur des moyens de décrire, observer, créer et gérer des activités d'enseignement.

Une part de la responsabilité de la validité de ces "actes" est prise par le cours, une autre est laissée à l'auteur et à la communauté scientifique, une autre encore est laissée à la responsabilité du lecteur. Le cours ne répond pas à tout, à tous, et à tout moment: il faut l'assumer et le dire à l'élève.

Il n'est donc pas possible de professer à la fois, d'une part que cette lecture peut être faite naïvement et efficacement ici et maintenant par tout un chacun dans son langage naturel et d'autre part qu'elle exige des créations et des débats complexes: les lecteurs sont à priori responsables en partie lorsqu'un usage grossier des concepts présentés les conduit à des erreurs.

La justification "externe", les alternatives théoriques et les débats sur la validité générale du modèle et sur les modèles "concurrents" doivent être présentés en commentaire, en exercices, en parallèle, en complément, en contrepoint du cours de base, comme une ouverture sur un autre cours. Autrement dit il faut séparer les arguments, les textes et les lieux de justification.

Le but premier d'un cours "de base" est

- de mettre en scène dans le langage primitif les formulations et les concepts communs du champ "scientifique"

- en les organisant suivant les relations "scientifiques" explicitables dans le système des élèves qui sont supposées être l'accès le plus rapide pour en maîtriser l'emploi.

Les justifications "pédagogiques" ou scientifiques non immédiatement accessibles aux élèves doivent être rejetées dans le commentaire. Une vertu d'un bon cours de base est justement de permettre A LA FOIS mais indépendamment l'exposé des concepts et leur discussion.

Il faudra donc reprendre en charge une définition interne de termes comme savoir, apprentissage, mathématiques, enseignement, calcul, exercice, mémoire etc si ces termes sont pris comme des objets d'études. On ne peut pas à la fois (dans un cours de base) supposer qu'ils sont transparents, univoques lors de l'introduction... et déclarer ensuite qu'ils sont des objets non primitifs de l'étude.