BERNARD PARZYSZ

Une ingénierie didactique en géométrie de l'espace au lycée

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1990-1991, fascicule 5
« Didactique des mathématiques », , exp. nº 7, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1990-1991___5_A7_0>

UNE INGENIERIE DIDACTIQUE EN GEOMETRIE DE L'ESPACE AU LYCEE

Bernard PARZYSZ

Equipe de Didactique de l'IREM de Paris VII

(Ce texte est une version française, remaniée et complétée, d'un article paru dans l'ouvrage collectif "Modelling, applications and applied problem solving". Voir Bibliographie.)

L'enseignement des mathématiques a toujours intérêt, lorsque c'est possible, à s'ancrer dans une réalité "physique", qu'elles modéliseront dans le but de résoudre un certain nombre de problèmes que pose cette réalité. C'est par une dialectique constante entre le modèle mathématique et sa (ses) réalisation(s) que peuvent s'enrichir à la fois la connaissance du monde qui nous entoure et le savoir mathématique. Encore faut-il que les problèmes du quotidien que l'on se pose soient de <u>véritables</u> problèmes, dont la solution n'est pas évidente et nécessite la mise en oeuvre -voire même la création- d'<u>outils</u> mathématiques, lesquels pourront ensuite devenir eux-mêmes <u>objets</u> d'étude (dialectique outil/objet), avant d'être réinvestis dans la recherche de nouveaux problèmes. La géométrie, dans l'enseignement secondaire, nous paraît un terrain propice à la mise en pratique de cette idée, et plus particulièrement la géométrie de l'espace.

1- <u>ESPACE ET DESSIN AU LYCÉE</u>:

Un problème qui occupe depuis plusieurs années notre équipe de l'IREM de Paris-7 (Colmez 1884, Bautier et al. 1987, Parzysz 1988a et b) est celui de la représentation plane des objets tridimensionnels, en classe de mathématiques. La représentation usuelle en géométrie est basée sur les propriétés de la projection. Mais:

- cette base mathématique est complètement implicite, à tel point que ni les enseignants, ni a fortiori les élèves, n'en sont plus conscients;

- l'étude de la projection est un problème de géométrie de l'espace, pour lequel on a besoin d'utiliser des représentations planes. Exemple parfait de cercle vicieux dont il semble difficile de s'échapper...

- ce type de représentation est-il bien adapté, d'une part aux élèves, d'autre part à l'enseignement de la géométrie dans l'espace?

Dans le but de répondre à cette interrogation, une étude préliminaire nous a montré que, par rapport à la référence classique (Piaget et Inhelder 1947) qui considère chez l'enfant une succession de stades dans la représentation de l'espace, il conviendrait plutôt de faire intervenir deux pôles antagonistes:

- celui du "voir", qui tend à faire représenter l'objet comme il se présente habituellement à la vue;

- celui du "savoir", qui tend à faire apparaître dans la représentation les propriétés de l'objet considérées comme importantes.

La façon dont, à un moment donné, un individu se situe par rapport à ces deux pôles dépend de divers facteurs: non seulement l'âge, mais également les connaissances dans le domaine graphique, le but assigné à la représentation, le public visé, etc. En ce qui concerne les lycéens, notre étude a montré que, tant dans la "lecture" que dans la production de dessins de solides, ils sont sensibles à la conservation des propriétés géométriques (et donc assez proches du pôle du "savoir"). Ceci nous a confortés dans l'idée que la perspective parallèle est un moyen de représenter l'espace qui leur convient.

Nous avions deux raisons supplémentaires de vouloir nous appuyer sur ce système de représentation:

- la première est que nous pensons que les élèves ont besoin, pour résoudre les problèmes spaciaux, de dessins à caractère opératoire, sur lesquels ils puissent faire des constructions et des conjectures. Dans ce cas un simple schéma s'avère insuffisant, par suite d'incohérences toujours possibles:

- la seconde est que la résolution de certains exercices, qui apparaissent comme purement graphiques, est en fait de nature géométrique. L'exemple le plus connu est sans doute celui-ci (fig. 1): "Trois plans parallèles P, P' et P" sont donnés, ainsi qu'une droite D qui les perce respectivement en A, A' et A". Une autre droite Δ perce respectivement ces plans en B, B' et B". Compléter le dessin." La résolution de ce problème graphique revient en fait à la démonstration du théorème de Thalès dans l'espace.

2- <u>UNE APPROCHE PHYSIQUE DE LA PROJECTION</u>:

Ce point de départ étant établi, il restait à trouver une "bonne" situation permet aux élèves de Seconde (ou, à défaut, de Première) d'accéder à ce type de représentation de l'espace, dont le fondement mathématique est, rappelons-le, la projection parallèle sur un plan. Il nous est apparu que s'appuyer sur une étude de l'ombre pouvait constituer une approche intéressante, et ce pour deux principales raisons:

1- l'ombre au soleil permet une bonne réalisation physique de la projection parallèle sur un plan. Cependant, comme le parallélisme des rayons solaires atteignant un objet terrestre n'est pas toujours une évidence pour les élèves de lycée (une recherche préalable nous l'a montré), il paraît plus pertinent de commencer par étudier l'ombre produite par une source lumineuse peu éloignée de l'objet producteur d'ombre (ombre au flambeau), qui elle constitue une réalisation de la projection centrale.

2- ce phénomène, que nous rencontrons quotidiennement, est si commun que nous pensons qu'il ne présente plus aucun secret -donc aucun intérêt-pour nous. Mais est-ce bien le cas? Rien n'est moins sûr. Et si des problèmes subsistent là où l'on croyait tout connaître, on peut peut-être y trouver une motivation pour chercher à les résoudre.

La question se pose alors de la façon dont on peut:

1- montrer aux élèves que ce qu'ils croient bien connaître présente encore -si l'on me passe l'expression- des zones d'ombre.

2- leur permettre de faire toute la lumière sur la question.

Nos précédentes recherches nous ont convaincu qu'il était impossible, même avec des élèves de lycée, de se passer totalement du recours à des objets tridimensionnels dans l'enseignement de la géométrie de l'espace; nous utilisons donc, pour poser le problème -et également pour le résoudre- un matériel (maquette) (fig. 2).

Ce matériel consiste en une planche portant un mât télescopique, au sommet duquel est placée une petite ampoule électrique. Sur la planche est posé un cube constitué de baguettes de bois, dont le carré supérieur est peint en rouge. Le problème est posé à la classe sous la forme suivante: si l'on pouvait faire l'obscurité dans la salle, l'ampoule allumée projetterait une ombre du cube sur la planche. Dans un premier temps, nous allons nous intéresser uniquement à l'ombre du carré rouge. Vous allez donner, par écrit, votre réponse aux questions suivantes:

1- Quelle est la forme de l'ombre du carré rouge lorsque le cube est posé à plat en chacun des 4 endroits suivants? (N.B.: ici, les 4 positions du cube sont représentées, vues de dessus, sur la fig. 3; mais en classe le cube est placé successivement dans chacune de ces positions.)

2- Comment varie la taille de l'ombre du carré rouge lorsque, le cube étant dans la position 2:

a) on élève l'ampoule sans toucher au cube?

b) on éloigne le cube du mât sans toucher à l'ampoule?

Les réponses données par les élèves sont très diverses, et reflètent les conceptions "naïves" qu'ils ont des propriétés de l'ombre (théorèmes en acte), comme par exemple la généralisation abusive de propriétés des ombres des objets verticaux.

Dans le débat qui suit, les différentes conceptions des élèves (la plupart inexactes ou incomplètes) s'affrontent en un conflit socio-cognitif, et cette divergence d'opinions au sujet d'un phénomène aussi apparemment simple est perçue comme une espèce de défi intellectuel (déstabilisation des connaissances), et suscite le désir le connaître la vérité: que se passe-t-il vraiment?

Le recours à la réalisation effective du phénomène étant explicitement exclus (sous le fallacieux prétexte que l'on ne peut faire l'obscurité dans la salle), il faut se rabattre sur une simulation, effectuée grâce à des élastiques tendus, lorsque le cube est dans la position 4 (cas le plus général. Voir fig. 4).

A la surprise générale, il semble bien que la forme de l'ombre du carré rouge est un carré (alors que moins d'un élève sur dix a donné cette réponse). Mais cette preuve pragmatique se révèle insuffisante et, pour être tout à fait sûr, il faudrait pouvoir le démontrer. Les méthodes proposées par les élèves (dessins dans des plans particuliers, déterminés par les élastiques)

- utilisent des propriétés spatiales non formalisées (détermination d'un plan, section de plans parallèles par un autre plan...),
- permettent d'utiliser les connaissances antérieures de géométrie plane (Thalès, homothétie...),
- conduisent finalement à la confirmation du résultat expérimental.

Notons qu'avec les élèves de Seconde nous procédons de façon plus "technique", en leur faisant réaliser des dessins à l'échelle de ces plans particuliers (fig. 5). Ce type d'activité rend en effet les élèves plus directement "actifs", leur permet d'utiliser en situation des constructions de géométrie plane qu'ils connaissent (par exemple: triangle dont on connaît la longueur des trois côtés), et les initie en quelque sorte à une espèce de "dessin technique", dans lequel une bonne coordination des différentes vues d'un objet (remplaçant la possibilité de se déplacer autour de l'objet réel) permet de progresser dans la connaissance de cet objet.

On est alors capable de dessiner l'ombre du cube sur le sol, lorsque la position de la source lumineuse est précisée, ce qui permet une réinterprétation des réponses initiales données au questionnaire, ainsi qu'une étude des propriétés éventuellement possédées par ce type d'ombre (conservation de l'alignement, du parallélisme, du milieu...). Les dessins d'ombre obtenus ressemblant à des dessins de cube "en perspective", le lien peut être fait avec la perspective des peintres (perspective linéaire) grâce à une comparaison de notre matériel avec une "fenêtre de Dürer", montrant les analogies et les différences entre les deux situations (fig. 6).

En même temps, on aborde le problème de la "convention des pointillés", en considérant, soit les arêtes du cube qui sont vues (fenêtre), soit celles qui sont éclairées (maquette).

3- DE LA PROJECTION CENTRALE A LA PROJECTION PARALLÈLE:

Le "glissement" vers l'ombre au soleil se fait en cherchant à quelles conditions l'ombre conserverait le milieu d'une arête verticale (fig. 7).

On s'aperçoit que cela exige que la source lumineuse soit "très loin", "à l'infini": on a ainsi une condition nécessaire, mais dont on ignore encore si elle est suffisante. Néanmoins ceci permet maintenant d'aborder le point crucial, c'est-à-dire la projection parallèle sur un plan (en l'occurrence: l'ombre au soleil).

On constate que, même dans ce cas plus simple, les opinions des élèves restent diverses, comme le montre un nouveau questionnaire, du même type que le premier. On demande, le cube étant posé sur une table:

1- quelle est la forme de l'ombre au soleil du carré rouge:

a) lorsqu'il est horizontal;

b) lorsqu'il est vertical.

2- de faire un dessin de l'ombre du cube lorsque les rayons du soleil ont des directions particulières (verticale, diagonale d'une face verticale, diagonale du cube) (les solutions sont données dans la fig. 8).

Un nouveau matériel permet, ici encore, de vérifier expérimentalement les réponses. Il consiste en deux planches contiguës, l'une horizontale (sur laquelle est posé le cube), l'autre verticale, entre lesquelles on peut tendre des élastiques pour simuler les rayons du soleil (fig. 9).

A ce moment se pose le problème de faire passer, par un point donné, un élastique parallèle à un élastique donné. Les diverses méthodes préconisées par les élèves permettent de préciser les positions relatives de deux droites de l'espace. Ici encore, le modèle expérimental tridimensionnel permet d'élaborer une démonstration géométrique des résultats observés et conjecturés, par le recours à des dessins dans des plans particuliers. L'homothétie plane, relevée dans le cas de l'ombre au flambeau, entre la face inférieure du cube et l'ombre de la face supérieure, devient ici une translation, ce qui permet de revenir sur l'analogie entre les deux types de transformations, liée ici, bien sûr, à la nature projective du problème. De plus, on peut maintenant démontrer les propriétés de ce type de projection:

- conservation du parallélisme (donc la condition nécessaire est bien suffisante),
- du barycentre (et en particulier du milieu),
- image en vraie grandeur dans les plans parallèles au plan de

projection...

Les élèves peuvent également se rendre compte des avantages de ce type de représentation dessinée:

1- il préserve un aspect visuel convenable de l'objet, assez proche de l'image photographique (pôle du "voir"), puisqu'il correspond à une vue "de loin";

2- il préserve également un certain nombre de propriétés de l'objet (pôle du "savoir"), propriétés qu'il est toujours ennuyeux de perdre, et qui en outre rendent le dessin plus facile à réaliser.

L'ombre au soleil fournit également une interprétation de la convention des pointillés: en effet, s'il devient difficile de parler véritablement de "point de vue", on peut toujours sans problème considérer les parties de l'objet qui sont éclairées.

En possession des règles du dessin en perspective parallèle, les élèves sont maintenant en mesure de les appliquer aux dessins "traditionnels" dont fait usage la géométrie de l'espace, et de répondre à des questions telles que:

- Pourquoi un plan est-il représenté par un parallélogramme?

- Pourquoi les repères de l'espace sont-ils représentés avec un premier axe orienté vers le bas et la gauche, un deuxième axe horizontalement vers la droite, et un troisième axe verticalement vers le haut?

On peut également mettre en évidence les insuffisances du dessin (par exemple: le dessin d'un point laisse ce point indéterminé sur toute une droite), et le fait que, pour être totalement clair, il doit nécessairement être accompagné d'une légende.

D'autre part, comme nous l'avons déjà dit, les démonstrations faites ont nécessité l'utilisation d'un certain nombre de "règles" de géométrie de l'espace (règles d'incidence), qu'il est maintenant temps d'institutionnaliser, en les accompagnant bien sûr de dessins; certaines sont admises (axiomes), les autres en sont déduites (théorèmes).

Ainsi donc, partant de l'étude d'un phénomène des plus banals, nous avons tout à la fois pu initier les élèves à la géométrie de l'espace, ainsi qu'à ses représentations. Les règles de dessin ne seront plus, pour les élèves, des espèces de conventions plus ou moins implicites, qu'ils doivent découvrir seuls et utiliser intuitivement (avec tous les risques que cela comporte, tant à l'encodage qu'au décodage), mais auront acquis le statut de propriétés géométriques répertoriées, ne laissant place ni au flou, ni aux stéréotypes. Le problème de la représentation se ramènera alors au choix d'une "bonne" projection, c'est-à-dire qui soit optimale pour la résolution du problème considéré.

BIBLIOGRAPHIE

Bautier T., Boudarel J., Colmez F. et Parzysz B. (1987): Représentation plane des figures de l'espace, in Actes du Colloque CNRS GRECO Didactique et Acquisition des connaissances scientifiques. Sèvres. Ed. CNRS.

Colmez F. (1984): La représentation plane en perspective cavalière des objets de l'espace, un problème de géométrie. Essai d'ingénierie didactique en classe de Première S, in Actes du Colloque inter IREM Géométrie. Ed. IREM de Marseille.

Parzysz B. (1988):
a- 'Knowing' vs 'seeing'. Problems of the plane representation of space geometry figures, in Educational Studies in Mathematics. Vol. XIX n.1.

b- From shadow to light. An introduction to space geometry at senior school level, in Modelling, applications and applied problem solving. Ed. Ellis Horwood, Chichester.

Parzysz B. (1989): Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir. Thèse. Université Paris-7.

Piaget J. et Inhelder B. (1947): La représentation de l'espace chez l'enfant Ed. PUF, Paris.

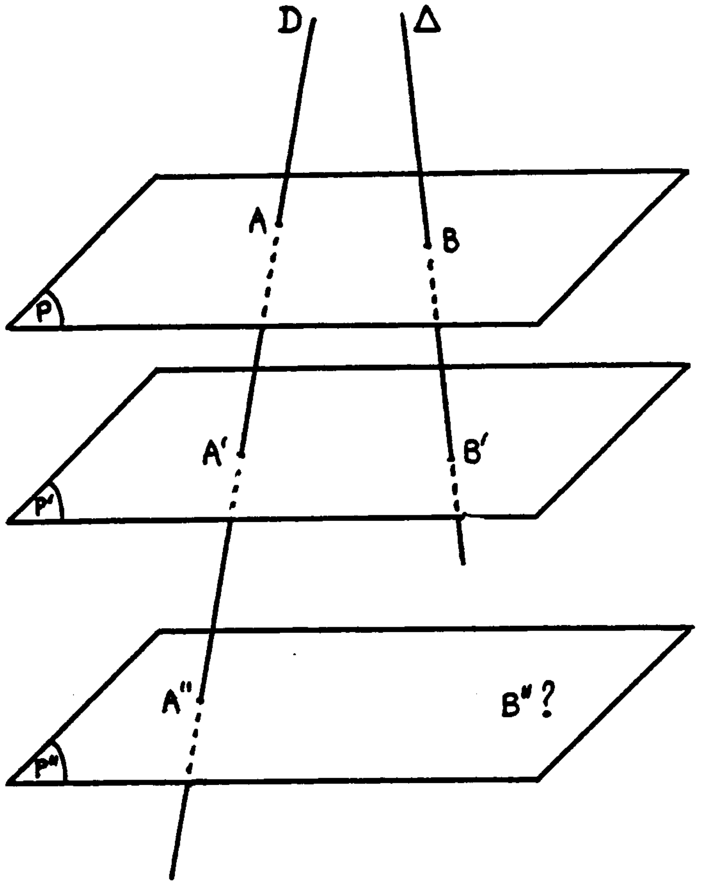

Figure 1

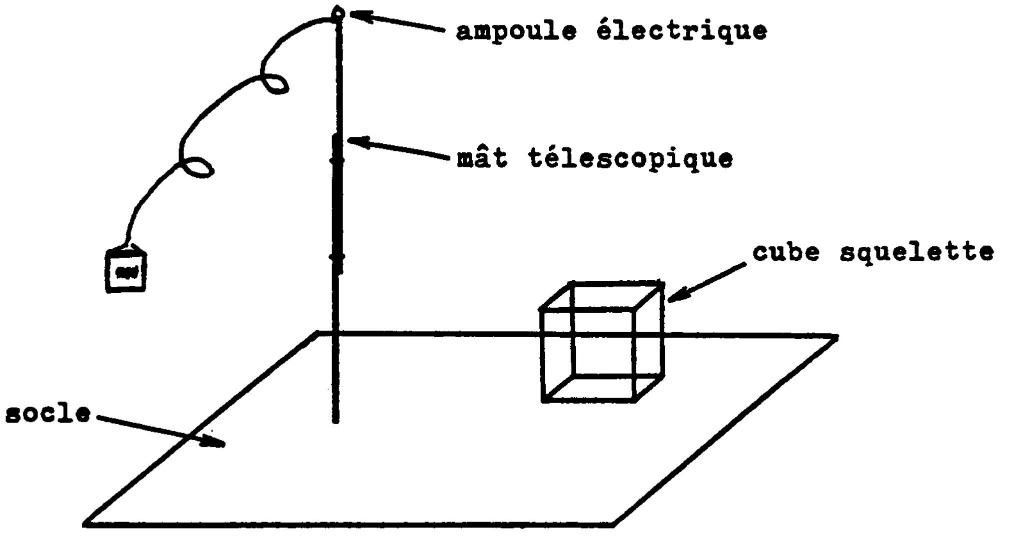

Figure 2

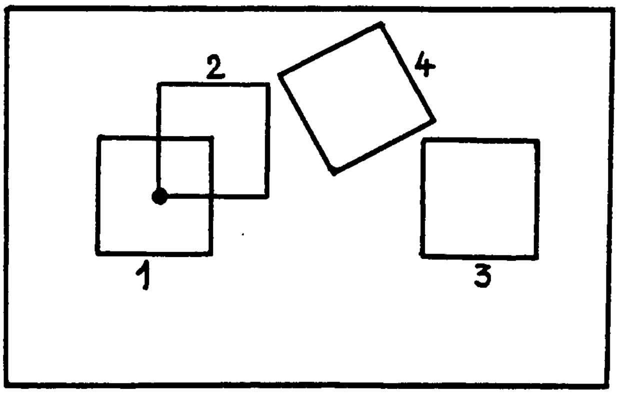

Figure 3

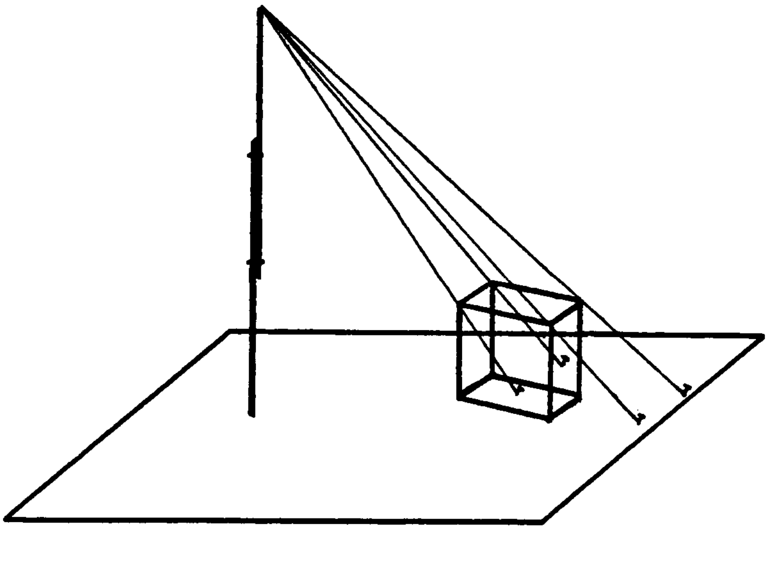

Figure 4

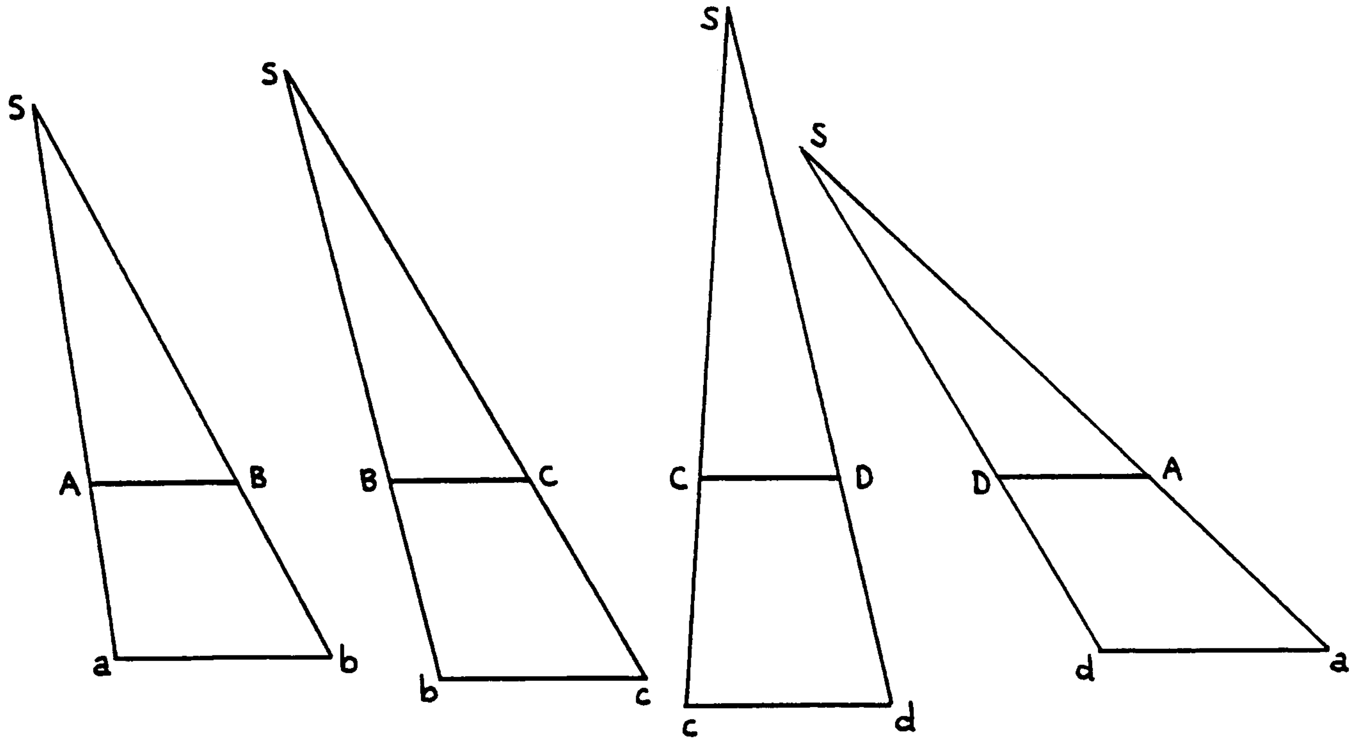

Figure 5

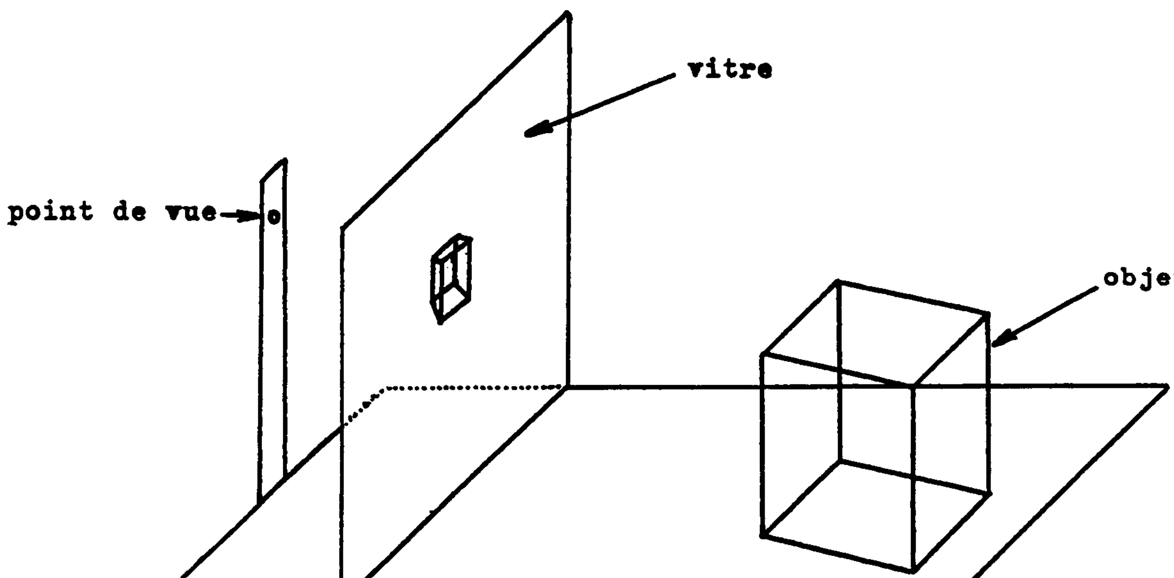

Figure 6

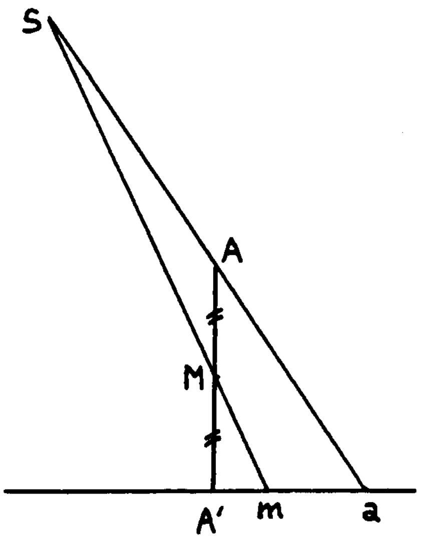

Figure 7

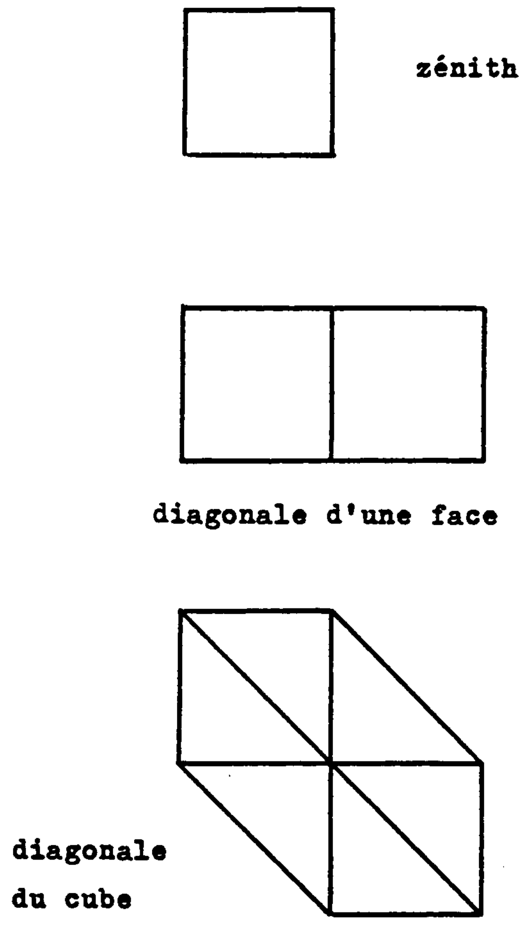

Figure 8

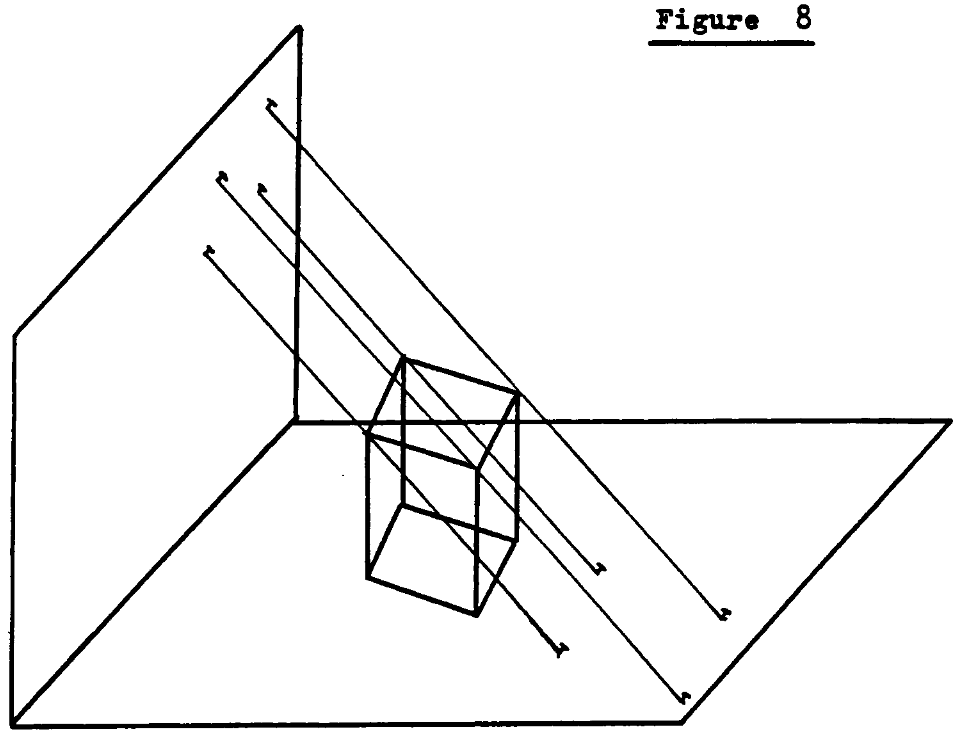

Figure 9