PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

SADDO AG ALMOULOUD

Aide logicielle à la résolution de problème avec preuve

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1990-1991, fascicule 5
« Didactique des mathématiques », , exp. n° 3, p. 1-39
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1990-1991___5_A3_0>

AIDE LOGICIELLE A LA RESOLUTION DE PROBLEME AVEC PREUVE

Saddo AG ALMOULOUD

Chercheur à l'IRMAR

RESUME

Sans entrer dans les débats ouverts sur le statut et la fonction de la démonstration dans l'enseignement des mathématiques, nous présentons ici des séquences didactiques en 4ème (13-14 ans) où le micro-ordinateur joue le rôle de pilote et de tuteur dans la résolution de problèmes de géométrie nécessitant un raisonnement déductif.

Les analyses didactiques et statistiques présentées sont fondées sur les données suivantes:

- les analyses a priori des situations proposées au prétest et au test de validation,
- les bilans et comptes rendus des travaux des élèves réalisés à l'aide ou non d'un logiciel.

* Cet article sera publié dans l'un des prochains volumes de la revue "Recherche en didactique des mathématiques"

INTRODUCTION

La résolution de problèmes constitue l'un des objets de l'enseignement dès le début de l'enseignement secondaire. Mais l'atteinte de cet objectif se heurte à des obstacles liés à la nature même de l'activité de résolution de problème et, en particulier, à celle de l'activité de résolution de problèmes de géométrie nécessitant une démonstration. Les obstacles liés à l'apprentissage de la démonstration se rencontrent sur deux niveaux:

-l'enseignant qui a, en général, des difficultés, d'une part, à repérer et à identifier le type d'erreurs commises par les élèves afin de formuler des hypothèses sur leurs conceptions, et d'autre part, à construire des situations permettant l'émergence de certaines procédures et le déséquilibre des procédures erronées,

-l'élève qui a des difficultés à comprendre le sens et l'intérêt de la démonstration, à trouver des arguments, à les formuler et à les articuler rationnellement.

La recherche que nous présentons a pour objectif d'apporter une aide dans le cadre de l'apprentissage de la démonstration. L'ordinateur se présentera, d'une part, comme un outil efficace de revélation des conceptions des élèves et, d'autre part, comme un outil d'aide à la découverte de la preuve et de son organisation déductive. L'ordinateur est donc un outil d'aide à la résolution de problèmes posés et un milieu au sein duquel ces problèmes doivent être résolus. Cette double fonction l'intègre dans le réseau de relations entre les trois pôles du système didactique: le savoir, l'enseignant et l'élève.

Ces difficultés ont conduit des informaticiens associés, très souvent, à des didacticiens à chercher des solutions au problème posé dans le cadre de l'intelligence artificielle. C'est ainsi que plusieurs logiciels sont réalisés en vue de rendre plus accessible cette activité du dommaine mathématique. Nous faisons un aperçu rapide de quelques logiciels d'aide à l'enseignement de la géométrie, puis, nous ferons part du travail que nous menons dans le cadre d'une aide logicielle à la résolution de problèmes et à l'apprentissage de la démonstration en géométrie.

§1- QUELQUES LOGICIELS D'AIDE À L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

I- Cabri-géomètre

Le projet CABRI-GEOMETRE est en cours de réalisation à l'IMAG de Grenoble. Il regroupe des informaticiens et des didacticiens des mathématiques. Actuellement, le groupe commercialise un logiciel sous le nom de CABRI-GEOMETRE dans sa version Macintosh et le GEOMETRE dans sa version PC. Sa version Macintosh possède les nouveaux standards de communication homme/machine en particulier les menus déroulants et le multi-fenêtrage.

CABRI-GÉOMETRE est un logiciel d'aide à la construction de figures géométriques, mais aussi à l'élaboration de conjectures. La conception du logiciel est basée sur la construction d'outils informatiques permettant d'avoir dans différents domaines les fonctionnalités d'un cahier de brouillon, et autorisant notamment les corrections, les reprises, les modifications de données , tout en conservant la clarté du propre.

Le logiciel permet l'édition, la reprise de multiple figures à l'écran avec la seule aide de la souris ; ce qui permet à l'élève de faire de nombreux essais et corrections. CABRI-GÉOMETRE n'est pas capable de gérer les déductions ou les équivalences entre propriétés. Il ne permet pas d'élaborer toutes les constructions de la géométrie plane ; c'est le cas des figures dans lesquelles interviennent des relations mettant en jeu les notions d'angle ou de distance. Les tracés apparaissent à l'écran comme une juxtaposion de segments horizontaux ou verticaux. ce qui augmente l'imprécision des tracés et peut même dans certains cas nuire à la justesse des figures.

Grâce à l'ordinateur, le logiciel permet l'accès, par simple déplacement d'objets de l'écran, à toute une classe de figures de même configuration. Au cours de ce déplacement, des invariants mettant en évidence des propriétés de figures déductibles de celles mises en place lors de la construction, peuvent apparaître et aussi être à l'origine de conjectures. Cette spécifité de CABRI-GÉOMETRE l'intègre dans la sphère des outils efficaces à l'étude des lieux géomètriques. Mais, on ne peut pas vérifier l'aptitude d'un élève à contruire des objets complexes comme la médiatrice d'un segment puisque le logiciel trace automatiquement l'objet désigné. De plus, il ne comporte pas de module de vérification de l'adéquation de la figure construite par l'élève aux hypothèses fournies pour le problème.

II- Le projet MENTONIEZH

Ce projet est développé à Rennes à l'IRISA avec la collaboration du G.R de didactique. Actuellement deux études sont très avancées. La première concerne l'analyse d'une figure réalisée sur une table traçante. La deuxième comprend la réalisation d'un logiciel pour l'apprentissage de la démonstration.

La partie graphique est réalisée par P. NICOLAS. L'élève construit les objets géométriques en indiquant leurs propriétés et leurs relations mutuelles. Cela nécessite pour l'élève d'avoir un algorithme de construction montrant les liens qui existent entre les différents objets. Le professeur fournit auparavant à l'aide d'une interface proche du langage symbolique de la géométrie, la description du problème à résoudre. Dès que l'élève termine sa construction, le système vérifie si la figure proposée correspond logiquement aux hypothèses fournies par le professeur.

Le logiciel donne la possibilité à l'élève de déformer la figure qu'il a construite, en déplaçant des objets de la figure initiale, tout en respectant les contraintes logiques. En second lieu, l'élève peut demander au système de construire des figures dans lesquelles des propriétés ont été supprimées ; le but étant de décomposer en différents sous-problèmes le problème à résoudre. Le professeur fournit au préalable des propriétés supprimables et l'ordre dans lequel elles le sont, ceci afin de montrer les hypothèses pertinentes dans le cas d'une démonstration en chaînage arrière.

La partie "aide à la démonstration" du logiciel est réalisée par D. PY. Le logiciel dispose de deux interfaces: l'une est destinée au professeur qui fournit l'énoncé du problème et les consignes pédagogiques, l'autre est réservée à l'élève en situation de résolution de problème.

Dans l'état actuel du système, le professeur doit fournir l'énoncé dans le langage logique du démonstrateur, langage différent du francais dans lequel les énoncés des problèmes sont habituellement donnés.

Lors d'un pas de démonstration, l'élève désigne le théorème ou la définition, les objets auxquels l'appliquer, le sens (avant ou arrière) de la démonstration. Les variables hypothèses et conclusions du théorème sont ensuite remplacées automatiquement par ces objets.

L'interface de l'élève propose également certaines aides:

- rappel des hypothèses et des propriétés démontrées,
- rappel du but et des conjectures posées,
- effacement d'une conjecture jugée inintéressante,
- rappel de l'énoncé d'un théorème (soit à partir de son identificateur, soit à partir d'une liste de mots-clés).

En cas d'étape incorrecte, des explications sont fournies par le tuteur pour justifier le rejet du pas de démonstration et pour permettre à l'élève de corriger son erreur. Ces explications sont dispensées (soit immédiatement, soit à la demande de l'élève) par le module d'analyse d'erreurs. Les conseils sont proposés à la demande de l'élève uniquement, lorsque ce dernier se trouve bloqué. Notons que le tuteur emploi une trentaine de théorèmes ou définitions couvrant le champ du domaine géométrique du niveau quatrième (élèves de 13-14 ans) et troisième (élèves de 14-15 ans).

Le système devrait être, pour les enseignants, un outil efficace d'aide à la résolution de problèmes de géométrie, et pour les didacticiens, un outil d'expérimentation et d'analyse. Néammoins, il nous semble que l'absence d'un travail de nature heuristique sur la figure constitue une insuffisance notable dont l'éradication se trouverait dans l'interfaçage des deux tuteurs réalisés dans le cadre du projet MENTONIEZH: construction de la figure et aide à la démonstration.

III- Euclide (J.C ALLARD)

C'est une extension du langage LOGO permettant la construction de figures géométriques. Il tourne sur nanoréseau. Son utilisation nécessite une alphabétisation informatique en LOGO. Le logiciel comporte plusieurs modules: triangle, barycentre, transformations, comparaisons.

Notons que le module triangle contient les objets remarquables suivants: hauteur, médiatrice, cercle inscrit, tangente, orthocentre, etc.. Les transformations géométriques (symétries centrales et orthogonales, translations, rotations, hométhéties, projections) sont disponibles sous forme de procédures.

L'utilisation de EUCLIDE peut, sans doute, apporter une aide dans l'enseignement de la géométrie au collège. Mais il est indispensable de gérer les variables non mathématiques de façon à ne pas déplacer le problème de l'acquisition des connaissances mathématiques.

IV- Le projet de Strasbourg (D. GUIN et ROUSSELOT)

Le projet présente les objectifs suivants:

- réaliser un système expert capable de résoudre les problèmes et de justifier sa démarche,
- intégrer au système un module apprentissage capable de fournir de l'aide et des explications à l'apprenant,
- intégrer un module diagnostic capable d'évaluer le travail de l'élève.

Le **module expert** doit comporter:

. un sous-module de base de connaissances,

.un sous-module de construction de la figure,

. un sous module d'exploration de la figure constituant une aide à la phase heuristique,

- un sous-module représentation des connaissances sous forme de réseau mettant en évidence les statuts des assertions,
- un sous-module d'élaboration de plan,
- un sous-module d'organisation déductive à partir d'un corpus d'énoncés.

Le **module apprentissage** doit comporter:

.un sous-module de construction de la figure,

. un sous- module d'exploration de la figure en liaison avec l'énoncé,

. un sous-module représentation du problème sous forme de réseau,

. un sous-module d'élaboration de plan,

. un sous-module d'organisation déductive à partir d'un corpus d'énoncés,

. un sous-module de démonstration.

Notons que différentes aides sont également envisagées. Les recherches menées n'ont pas permis de faire un projet pour le module diagnostic.

Dans l'état actuel de nos informations, seul le premier objectif semble atteint. Le système expert réalisé manipule les connaissances sous forme d'un réseau de relations liant les objets. A l'issue de l'acquisition d'un énoncé en langage naturel (simulé), le système crée les objets qui composent la figure, ainsi que le réseau de relations entre les objets. La démonstration est réalisée par cycle d'essai de règles de démonstration, sélectionnées par des règles heuristiques.

V- Geometry tutor (J.R ANDERSON)

C'est le premier logiciel en géométrie à prétendre au titre de tuteur intelligent. Il a été réalisé par une équipe dirigée par J.K. ANDERSON comme outil pour vérifier la théorie de l'acquisition des connaissaince qu'ils ont élaborées.

Le logiciel fournit les hypothèses d'un problème, la conclusion à démontrer et la figure. L'élève doit à chaque étape choisir les prémisses et une règle et, si le choix est correct, la machine applique cette règle et ceci jusqu'à ce que la démonstration soit complète. En fait, l'élève n'a pas la tâche d'organisation des connaissances puisque le problème lui est donné sous forme prédigérée. Il doit s'en tenir à une progression pas à pas, ce qui peut avoir comme conséquence une vision très locale de la démonstration. De plus l'élève ne possède aucun moyen d'analyser la validité de la figure liée aux données du problème, et le travail de nature heuristique s'appuyant sur la figure est absent.

VI- DEFI

Dans le cadre d'une recherche sur une aide logicielle à la résolution de problèmes de géométrie en classe de quatrième , nous présentons des travaux menés au moyen du logiciel DEFI (Démonstration et Exploration de la Figure Interactives) élaboré à l'Institut de recherche mathématiques de Rennes par Italo GIORGIUTTI, avec la collaboration du groupe de didactique, dans le cadre du GR. "Didactique et acquisition des connaissances scientifiques".

DEFI est un logiciel d'aide à la résolution de problèmes de nature affine susceptibles d'être plus complexes que ceux classiquement proposés aux élèves de quatrième et de troisième. Il est constitué de deux modules principaux: le module "Exploration de la figure" et le module "Démonstration".

La conception du logiciel est fondée essentiellement sur le souci de séparer l'activité de résolution de problème de géométrie qui s'appuiera sur la figure, de celle de la structuration de la démonstration. Aussi fallait-il:

- mettre les élèves en véritable activité de résolution de problème,
- intégrer, dans cette résolution de problème, un travail de nature heuristique sur la figure,
- réagir en temps réel aux erreurs de type logique,
- neutraliser au maximum les variables de nature linguistique,
- faire réfléchir l'élève sur sa propre activité,
- travailler plus au niveau de la représentation des connaissances en jeu que des stratégies plus ou moins algorithmiques de la solution.

6.a) Exploration de la figure

Le module "Exploration de la figure" a pour objectif de faire prendre conscience aux élèves du rôle et du statut de la figure dans la résolution d'un problème de géométrie. Il est de nature et de fonction essentiellement heuristiques.

Ce module propose successivement les décompositions possibles du problème en sous-problèmes, parmi lesquelles l'élève retient celle qui lui paraît juste. Puis il réitère sur ces sous-problèmes, jusqu'à ce que l'élève se dise capable de démontrer les sous-buts obtenus, mais sans réaliser effectivement cette démonstration. Cette décomposition est faite par une suite de questions plus ou moins ordonnées en une remontée vers des hypothèses à partir de la conclusion à démontrer.

Cette phase heuristique montrera à l'élève, dans bien des cas, la nécessité d'un traçage supplémentaire non indiqué dans l'énoncé d'un problème. Ce traçage peut aider à décontextualiser puis recontextualiser le problème et à extraire de la figure des sous-figures permettant de ramener la résolution du problème à la résolution d'une suite de sous-problèmes.

6.b) Démonstration

La réalisation technique du module "Démonstration" s'appuie sur les hypothèses suivantes (s'appuyant elles-mêmes sur diverses observations):

- la démonstration n'apparaît véritablement comme un processus de validation que lorsqu'elle est complètement maîtrisée,
- la démonstration est un objet profondement culturel,
- les enseignants ont (nous l'avons déjà dit), en général, des difficultés, d'une part, à repérer et à identifier le type d'erreurs commises par les élèves afin de formuler des hypothèses sur leurs conceptions, et d'autre part, à bâtir des situations permettant l'apparition de certaines procédures et le déséquilibre de celles erronées,
- il faut d'abord faire travailler les élèves avec le modèle le plus simple de la démonstration qui soit (déroulement linéaire des hypothèses vers la conclusion en pas de démonstrations, logique minimale avec "entraîne" et "et") ; une fois ce modèle assimilé, l'élève ne devrait plus se heurter qu'à des difficultés techniques, le contrat de la démonstration étant compris. Notons que dans les rédactions demandées aux élèves, ils sont libres de leurs stratégies,
- un message d'erreur (ou de réussite) après chaque pas de démonstration semble nécessaire.

L'élève dispose d'un fichier informatique de théorèmes propres au champ conceptuel considéré, d'un fichier de modules de spécifications du type: "Le point ... est milieu du segment ...". L'élève annonce ce qu'il veut démontrer, désigne le ou les théorèmes adéquats et leurs spécifications parmi les données (ou hypothèses) du problème.

Signalons en outre l'adjonction d'un module 'Bilan' et d'un module 'Etat de la démonstration'. Dans le premier sont enregistrés et mis à jour les conjectures, les engagements à preuve et les propriétés démontrées. Il est donc personnel à un élève ou un groupe d'élèves, et est accessible à tout moment. Au cours d'un pas de démonstration , l'élève peut consulter le fichier "Etat de la démonstration" qui lui donne l'état d'avancement de ce pas.

L'expérimentation que nous avons mise en place comporte trois phases: un prétest, une séquence d'enseignement et un test de validation.

§2. PRETEST

I-Objectifs du prétest

Nous désirons évaluer l'aide que peut apporter le logiciel DEFI aux élèves dans l'apprentissage de la démonstration. Le test que nous proposons a pour objectif d'observer le comportement d'élèves face à un problème de géométrie. Dans ce cadre, nous voulons déterminer leur capacité de formulation et leur capacité à produire des conjectures et des preuves. Aussi, devons-nous avoir des éléments de réponse sur leur capacité à:

- dégager les hypothèses d'un problème;
- dégager la (ou les) conclusion(s);
- explorer une figure liée aux données du problème;
- dégager des sous-problèmes à partir de l'exploration de la figure;
- trier les théorèmes et définitions nécessaires à la résolution du problème;
- rédiger une démonstration.

II-Déroulement du prétest

L'évaluation des connaissances des élèves a lieu au collège de la Harpe (Rennes) dans deux classes de quatrième (élèves de 13-14 ans) tenues par le même professeur, C. BOULARD. Il s'agit de la quatrième A (25 élèves) et de la quatrième D (26 élèves). La passation du questionnaire a eu lieu le 13 février 1990. Soulignons que le professeur a déjà assuré à cette date des séances d'exercices de géométrie avec preuve portant sur les notions de parallélogramme, de milieu d'un segment et de symétrie centrale.

Le contrat assigné aux élèves est la résolution et la rédaction en une heure de deux problèmes de démonstration en géométrie.

1. Situations didactiques proposées

Problème n° 1:

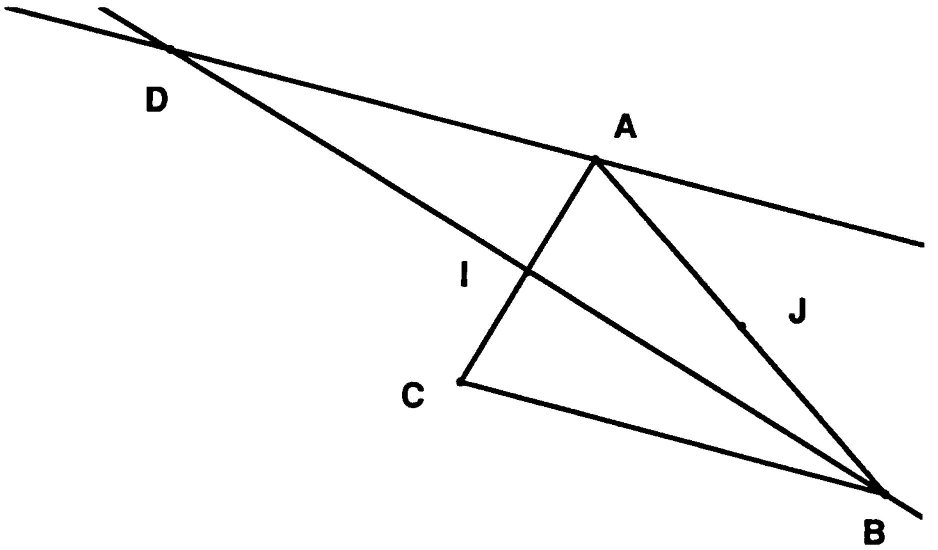
On considère un triangle ABC. On désigne par I le milieu du segment [AC], et par J celui du segment [AB]. La parallèle à la droite (BC) passant par A coupe la droite (BI) en D.
Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Problème n° 2:

ABCD est un parallélogramme. La parallèle à (BD) passant par A coupe la droite (DC) en M. La parallèle à (BD) passant par C coupe la droite (AB) en N.
Démontrer que le quadrilatère BNDM est un parallélogramme.

2. Analyse a priori des situations proposées

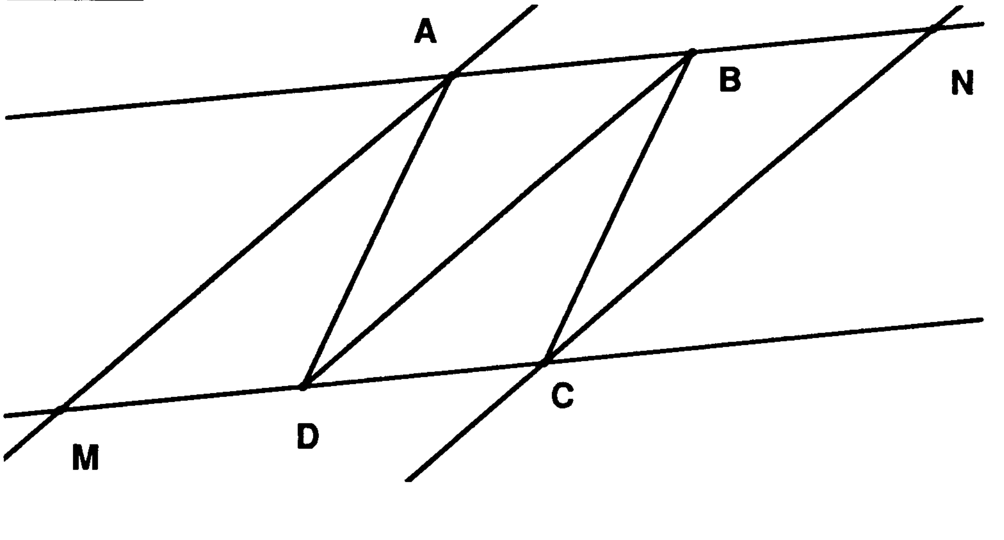
Situation 1:



Les concepts à mobiliser sont supposés connus par les élèves (triangle, milieu d'un segment, la parallèle à une droite, parallélogramme). Dans ses stratégies de conjecture et de preuve, l'élève peut être amené à effectuer un traçage supplémentaire non indiqué dans l'énoncé du problème. Il s'agit du traçage du segment [IJ], mais, peut-être aussi du segment [CD]. Aussi doit-il identifier les sous-figures (les triangles ABC et DAB) et les propriétés permettant d'utiliser le théorème des milieux et sa réciproque, et ainsi déduire les propriétés permettant de démontrer que ABCD est un parallélogramme. Cette stratégie le conduira à effectuer quatre pas de démonstration.

Une deuxième stratégie peut s'appuyer uniquement sur les hypothèses du problème et les propriétés de la symétrie centrale. L'élève pourra ainsi démontrer l'égalité des longueurs des segments [DA] et [CB] à partir de la symétrie de centre I et, comme (DA) et (BC) sont parallèles, en déduire que ABCD est un parallélogramme. On rappelle que si A et C sont symétriques et, (AD) parallèle à (BC) alors B et D sont symétriques. Cette stratégie requiert au moins trois pas de démonstration, mais elle semble plus difficile à mettre en œuvre à cause des propriétés de la symétrie et de l'alignement des points B, I, D qui n'est pas explicitement dit. Le choix de cette stratégie transforme une des informations, à savoir "J milieu de [AB]", en une information inutile. Ce qui peut ne pas manquer de troubler les élèves.

Situation 2:



Dans ses stratégies de conjecture et de preuve, l'élève peut être amené à faire ressortir les sous-figures ABDM et BDCN, et à identifier la nature de leurs propriétés. Lors de la phase de démonstration, la mobilisation des propriétés des parallélogrammes et la transitivité de l'égalité semblent nécessaire dans le cadre de cette stratégie. Celle-ci requiert six pas de démonstration pour ceux qui la choisissent.

Une autre stratégie consiste à déterminer la nature du quadrilatère ANCM et, de là déduire l'égalité des longueurs des segments [BN] et [MD]. Cette stratégie requiert quatre pas de démonstration. Elle semble plus difficile à mobiliser à cause des substitutions à effectuer au niveau des longueurs.

3. Quelques remarques sur le déroulement du prétest

Le déroulement du prétest a été perturbé par un phénomène lié à l'état d'avancement du programme de géométrie. Le professeur chargé de cours garantissait qu'à la date prévue pour la passation du test, tous les concepts nécessaires à la résolution des problèmes choisis seraient vus par les élèves. Mais tel ne fut pas le cas le jour du test. En effet, le théorème des milieux et sa réciproque n'étaient pas enseignés. Une analyse a priori insuffisante de la situation 1 laissait croire que ces deux théorèmes étaient indispensables pour la résolution du problème. Or, comme nous l'avons signalé ci-dessus, une stratégie basée sur les propriétés de la symétrie centrale pouvait conduire à la solution. Malgré tout , fut décidée l'écriture des énoncés des théorèmes au tableau. Cette situation a, certainement, des conséquences néfastes sur le comportement des élèves. Les deux théorèmes sont alors vus par les élèves comme un passage obligé pour la résolution du problème 1. C'est la raison pour laquelle les analyses faites portent uniquement sur les productions des élèves sur le problème 2.

4. Comparaison entre groupe témoin et groupe expérimental

Dans le cadre de l'enseignement de l'informatique, la quatrième A (collège de la Harpe) est divisée au hasard en deux groupes. Le groupe expérimental est celui qui suivra l'enseignement de la démonstration à l'aide du logiciel, l'autre groupe servira de témoin, tout en ayant pendant le même temps des activités de résolution de problèmes sur micro-ordinateur.

Au moment de la passation du test les deux groupes ont suivi le même type d'enseignement en mathématiques puisqu'ils appartiennent à la même classe. Sans accorder une confiance absolue dans la méthode différentielle, nous voulons, à partir d'un test statistique, voir si la différence entre les deux groupes est très significative. A cet effet nous quantifions les performances des élèves, et effectuons un test de rang (test dit de MANN-WHITNEY). L'examen des notes des élèves, et le test statistique le confirme, montre qu'il n'y a pas de différence significative entre les deux groupes.

III- Quelques difficultés relevées à partir des productions des élèves

L'analyse des procédures des élèves montre que ces derniers ont des difficultés au niveau:

- du rôle de la figure dans la résolution d'un problème;
- de l'identification du statut des hypothèses et de la conclusion;
- de l'usage des mots-clés (donc, par, or, et);
- de l'identification des sous-problèmes à résoudre;
- du changement de statut des conclusions intermédiaires;
- du choix des théorèmes et définitions.

Nous avons réalisé un codage tenant compte des objectifs fixés et des différentes procédures des élèves.

IV- Quelques éléments d'analyse (voir le sens des différentes variables en annexe1)

1. **Classification hiérarchique** (voir arbre hiérarchique à l'annexe 2-I)

La méthode de classification hiérarchique est due à I.C. LERMAN. C'est une méthode de classification selon l'algorithme dit de vraisemblance de lien. Il permet d'agréger un ensemble d'attributs (ici les modalités de réponses) selon le principe suivant:

la similarité entre deux attributs a et b est certes mesurable à l'aide du cardinal de l'ensemble $A \cap B$ des individus les possédant simultanément. Mais cette similarité, risquant d'être biaisée par les cardinaux de A et B (individus possédant respectivement a et b), intégrera cette information si l'on compare statistiquement le cardinal de $A \cap B$ à celui que l'on obtiendrait en choisissant au hasard des parties de mêmes cardinaux que A et B dans E, ensemble de tous les individus. Un algorithme ascendant, fonctionnant sur le même principe, agrège attributs en classes et classes en sur-classes jusqu'à la classification complète dont on trouvera une illustration dans les annexes. Les ressemblances ou différences entre les items ou les classes d'items sont traduites graphiquement sous la forme d'un arbre.

Elle fait ressortir deux niveaux d'acquisition de la preuve. La classe 1 regroupe les procédures (ou modalités) conduisant à l'échec total dans la résolution d'un problème de géométrie.

A ce groupe de procédures erronées s'associe l'identification partielle des hypothèses du problème. Il semble donc que la reconnaissance de certaines hypothèses d'un problème ne conduise pas forcément à un succès même partiel.

La classe 2 semble décrire un certain processus de l'acquisition de la preuve et du langage. Elle est constituée de trois sous-classes:

- la sous-classe 2a où se regroupent les modalités qui on trait à la détermination du statut des hypothèses, conclusions, théorèmes et définitions. Des embûches apparaissent lors de l'identification du statut des faits et de celui des théorèmes et définitions,
- la sous-classe 2b où l'apprentissage de la démonstration est partiel mais le langage semble être acquis par les élèves. Des difficultés résident dans l'identification des sous-problèmes et le réinvestissement des faits dans d'autres pas de démonstration .
- la sous-classe 2c : c'est le niveau d'acquisition totale de la preuve.

2. **Analyse implicative et hiérarchie implicative de classes** (voir annexes 2-II et 2-III)
Ces méthodes sont dues à R. GRAS (1979) et A. LARHER (1991).

Au moyen de l'analyse statistique implicative des données, nous cherchons à dégager des structures implicatives au sens suivant:

" telle attitude a s'accompagne, de façon conséquente ou non, de telle attitude b".

Cette expression s'apparente à l'implication $a \Rightarrow b$ ou à l'inclusion de l'ensemble de ceux qui ont a dans l'ensemble de ceux qui ont b. En effet, l'implication stricte n'est que rarement réalisée. Un indice statistique permet de la rendre acceptable à un certain seuil.

La hiérarchie implicative de classes permet une analyse de relations intra-classes et iner-classes de réponses. Groupant des réponses dans la mesure où une relation implicative les lie, nous obtenons des classes fermées par l'implication.

L'analyse implicative et la hiérarchie implicative de classes font ressortir, d'une façon plus marquée quatre niveaux d'acquisition de la preuve (dans des situations didactiques comparables) dont trois sont, à quelques exceptions près, les trois sous-classes définies dans la classification hiérarchique.

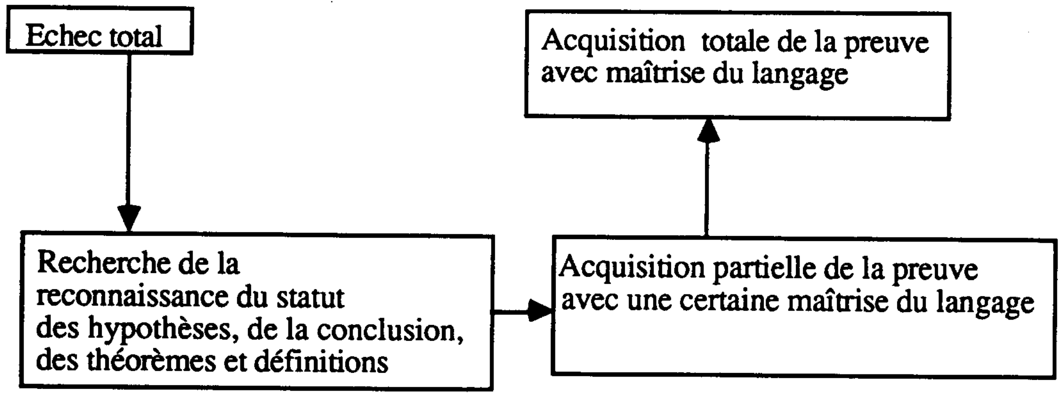
Le niveau d'échec total. C'est l'étape où l'élève n'a aucune maîtrise de la preuve. Le mauvais usage du langage pourrait être une conséquence d'une mauvaise stratégie de conjecture et de preuve: une pensée confuse ou irrationnelle trouve difficilement ses moyens d'expression.

Le niveau de la recherche de l'identification des statuts des faits, conclusion, théorèmes et définitions. A ce niveau les élèves ne reconnaissent pas parfaitement les statuts des éléments qui doivent entrer en interaction, mais sont dans une phase d'apprentissage. Les élèves qui butent sur le statut des faits et théorèmes ont tous les risques de buter également sur l'identification du statut de la conclusion et celle des sous-problèmes.

Le niveau de la maîtrise partielle de la preuve. A ce stade la reconnaissance des statuts se met en place et cette reconnaissance s'accompagne de la maîtrise du langage. L'identification au moins partielle des sous-problèmes est l'une des conditions indispensables pour atteindre ce stade d'acquisition de la preuve (voir l'implication forte entre les variables 9 et 18).

Le dernier niveau est le niveau d'acquisition totale de la preuve. Ici tout le mécanisme de fonctionnement de la preuve est en place.

A la lumière des analyses précédentes, et en toute hypothèse, nous pouvons schématiser le processus d'acquisition de la démonstration en géométrie comme suit:



§3. SEQUENCE D'ENSEIGNEMENT

I- Objectifs

Elle a pour but d'améliorer les compétences des élèves au niveau de l'exploration de la figure aux fins de réalisation d'un processus de preuve et d'une organisation déductive de cette dernière.

Elle s'effectue essentiellement à partir du logiciel DEFI. Les tâches qui sont proposées partent des problèmes intégrés au logiciel.

Au cours des séances d'enseignement nous tentons :

- d'amener les élèves à déterminer leurs procédures correctes et erronées ;
- de déterminer pour chaque problème proposé les variables attachées à la figure ;
- de déterminer les variables plus particulièrement attachées à l'environnement du logiciel et d'indiquer comment leurs différentes valeurs peuvent provoquer une modification des procédures des élèves.

La séquence d'enseignement donne lieu à six séances avec un demi-groupe de la quatrième A (12 élèves). Rappelons que la répartition des groupes était déjà établie dans le cadre de l'enseignement de l'informatique prévu au cours de cette année scolaire.

Les séances se déroulent aux heures prévues pour l'enseignement de l'informatique autour de quatre postes constituées de quatre Macintosh Plus. Les élèves sont répartis en six binômes et chacun des binômes dispose d'une console et de deux brouillons. Notons que, pour la constitution des binômes, chaque élève choisit librement son partenaire.

II-Déroulement de la séquence d'enseignement

1. Première séance

C'est une séance de familiarisation avec la machine et le logiciel. L'objectif principal visé est de familiariser les élèves avec l'outil informatique avec lequel ils auront à travailler. Il s'agit essentiellement de leur apprendre comment utiliser les menus déroulants, notamment:

- la signification des icônes;
- les menus: navigation, information, aide;

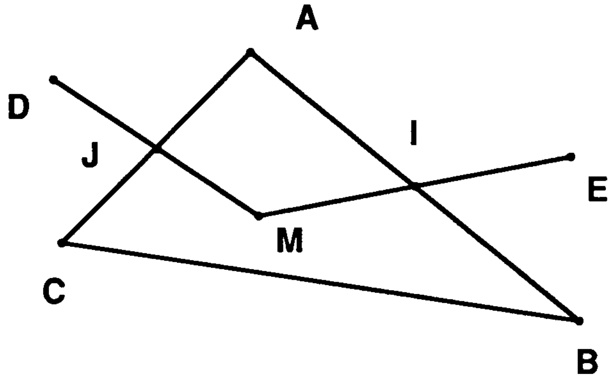
- l'exploration de la figure, la démonstration, la remise à zéro.

La familiarisation se fait à l'aide d'un problème de démonstration. Cette séance a lieu le jeudi 29 mars 1990 de 8 heures 30 à 10 heures 30. Quatre postes sont prévus. Les élèves passent en deux groupes et chaque groupe comporte trois binômes. Une heure de temps est prévue pour chacun des groupes.

a) situation-problème proposée

ABC est un triangle et M un point à l'intérieur de ce triangle. I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC]. Les points D et E sont tels que I est le milieu de [ME] et J le milieu de [MD]. Démontrer que DCBE est un parallélogramme.

b) Analyse a priori



Les concepts mobilisés: triangle, segment, milieu d'un segment, parallélogramme.

Théorèmes et définitions qui peuvent être utilisés:

"le théorème des milieux[1] , la transitivité du parallélisme, la transitivité de l'égalité," ou "le théorème des diagonales[2] , la propriété du parallélogramme, la transitivité du parallélisme et de l'égalité".

L'usage du théorème des milieux suppose que l'élève, par l'exploration de la figure, a découvert le statut du segment [IJ]. L'usage du théorèmes des diagonales suppose que l'élève a fait ressortir les sous-figures EBMA et AMCD (dont il faut déterminer la nature).

Au cours de l'exploration de la figure nous insistons sur la nécessité d'observer attentivement la figure et de tenir compte des hypothèses du problème avant de donner une réponse à la question posée par le logiciel. Nous espérons que cette action permettra aux élèves de comprendre qu'au cours de cette phase d'apprentissage de l'usage de l'appareil, l'objectif est non seulement de trouver une procédure pour réaliser la tâche mais aussi de trouver un résultat et de le comprendre. Ainsi s'effectuera un début d'acquisition des phases heuristique et déductive.

Les stratégies initiales des élèves ne sont pas toujours applicables face à l'ordinateur. D'où la nécessité d'un processus d'adaptation ou d'évolution de leurs stratégies dans le contexte de leur confrontation avec le logiciel utilisé, lui-même basé sur un système de connaissances et de

---

(1) Le segment qui passe par les milieux de deux cotés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa longueur est à la moitié de celle de ce côté.

(2) Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

traitement de l'information ne suivant pas nécessairement la logique de fonctionnement des élèves. A la fin de la séance, le contrat assigné aux élèves est de rédiger la démonstration du problème traité.

2. Les séances 2, 3 et 4

a) Objectifs

Ces trois séances ont pour but la résolution de problème de géométrie dans l'environnement DEFI. Le contrat assigné à chaque binôme est de résoudre et de structurer la solution trouvée, en une heure, du problème proposé. Pour cela, ils doivent utiliser les possibilités offertes par le logiciel. En effet, nous faisons l'hypothèse que DEFI peut améliorer les compétences des élèves au niveau de l'heuristique et de la démonstration.

La phase de raisonnement comporte deux étapes:

- la phase heuristique qui se fait à partir de l'exploration de la figure au cours de laquelle le tuteur dirige le dialogue,
- la phase de démonstration au cours de laquelle l'élève est libre de ses stragégies. Un pas de démonstration consiste pour l'élève à désigner le sous-but visé, ainsi que le théorème et les hypothèses adéquats. Le logiciel renvoie l'élève en cas d'échec à une nouvelle démonstration.

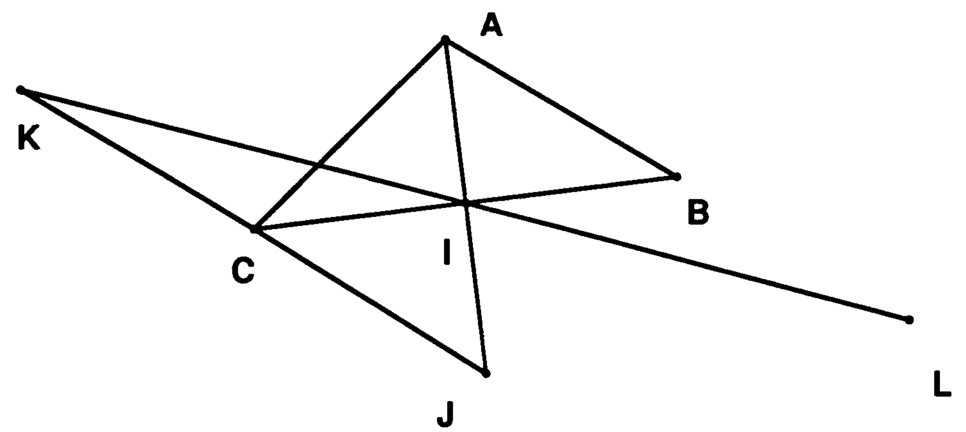
Ces trois séances se déroulent respectivement les 5 et 19 avril 1990, et le 3 mai 1990.

Avant une analyse détaillée des productions des élèves, nous nous efforçons de relever les difficultés liées à la résolution des problèmes posés et à l'utilisation du logiciel.

b) Séance du 19 avril

b.1) Situation-problème proposée

ABC est un triangle et I est le milieu de [BC]. J est le symétrique de A par rapport à I ; le point K est le symétrique de J par rapport à C ; le point L est le symétrique de K par rapport à I. Démontrer que le point B est le milieu de [AL].



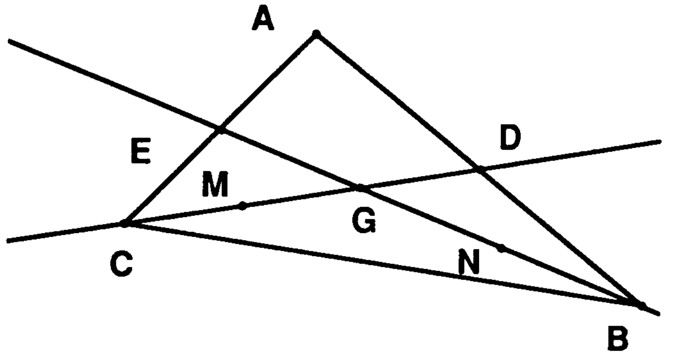
b.2) Difficultés rencontrées par les élèves

Certains élèves ont des difficultés à utiliser le théorème: "Par un point il passe une seule parallèle à une droite donnée", pour démontrer l'alignement de trois points, hypothèse indispensable pour démontrer qu'un point est milieu d'un segment. Nous pensons que cet obstacle est dû au fait que l'alignement des points est implicite et perceptivement fort, et que seul apparaît important MA=MB. L'une des raisons de cet obstacle peut être justement le degré de certitude que fournit la figure au sujet de l'alignement.

c) Séance du 3 mai 1990

c.1) Situation-problème proposée

On considère un triangle ABC et on désigne par D et E les milieux de [AB] et [CA]. Soit G le point d'intersection de (CD) et (BE), N et M les milieux respectifs de [BG] et de [CG].
Démontrer que G est le milieu de [DM].



c.2) Difficultés rencontrées par certains élèves

α) Exploration de la figure

L'exploration de la figure se fait très souvent sans une exploitation approfondie de la figure liée aux données du problème. Certains binômes répondent "Non" à la question: "Sais-tu démontrer que ...." sans mesurer véritablement la portée contractuelle de leur réponse. Il arrive également qu'ils répondent "Oui" sans être vraiment conscients. Nous pensons donc qu'au moment de l'exploration de la figure l'élève devrait disposer d'une liste de théorèmes utilisables et que l'observateur devrait insister sur le fait qu'il ne doit répondre qu'après avoir réfléchi. Cela pourrait l'aider dans ses stratégies de conjecture et de preuve. Or dans l'état actuel de DEFI, le fichier informatique des théorèmes n'est accessible qu'à l'option "Démonstration" du logiciel.

La variable "Consultation du bilan" ne se montre pas didactique ; cela par la faute, peut-être, de l'observateur qui ne met pas suffisamment l'accent sur l'intérêt de ce module. Au cours de l'exploration de la figure, les élèves ne consultent pas régulièrement le bilan de l'exploration, consultation qui leur permettrait d'avoir la liste des propriétés observées et celles des propriétés qu'ils affirment savoir démontrer.

β) Démonstration

Au cours de cette option souple, le module bilan n'est pas utilisé d'une façon adéquate. Cette attitude conservée par quelques binômes les conduit très souvent à vouloir démontrer des hypothèses ou des résultats intermédiaires démontrés à une étape antérieure. L'émission de message d'erreur n'est pas toujours exploitée pour consulter le bilan du pas de la démontration afin de déterminer la nature exacte de l'erreur au niveau de l'interaction hypothèse-théorème-conclusion. Au cours du choix des théorèmes, l'utilisateur doit rappeler la définition de la symétrie centrale, à savoir "A symétrique de B par rapport M'" est équivalent à " M est le milieu de [AB] ", car il n'y a pas de théorème sur la symétrie centrale dans le fichier "Théorème".

Pendant la démonstration d'une propriété à partir d'égalités de longueur, des difficultés subsistent quant au sens dans lequel l'élève doit les écrire. Par exemple:

"AB=CD et KL=AB donc CD=KL par transitivité de l'égalité." Cela se traduira sur l'écran par l'écriture "CD=AB=KL" , qui n'est pas habituelle aux élèves. C'est la raison pour laquelle nous avons suggéré une écriture plus souple et plus proche des habitudes des élèves.

Mais d'une façon générale, nous notons un net progès dans le comportement des élèves. Ce progrès se manifeste au niveau des temps de réflexion sur la figure et au niveau de la compréhension des messages d'erreur. L'analyse des différents bilans laisse penser que l'obstacle lié à la décomposition des règles d'inférence diminue progressivement.

3. **Déroulement des séances 5 et 6**

Ces deux séances se déroulent respectivement le 10 et le 17 mai 1990.

a) Séance 5

a.1) Objectif

L'objectif visé au cours de cette séance est d'agir sur certaines variables didactiques attachées à l'environnement de DEFI. Dans ce cadre, seule la phase heuristique du raisonnement sera mise en œuvre à partir du logiciel, la phase démonstration étant prévue en situation papier-crayon. A cet effet, l'option "Exploration de la figure" est seule utilisée au cours de cette séance. Il s'agit d'identifier l'influence de la phase heuristique sur les stratégies des élèves au niveau de la résolution du problème et de la rédaction de sa démonstration.

Le contrat assigné à chaque élève est de rédiger individuellement un compte rendu de l'exploration en indiquant la (ou les) question(s) qui a (ont) été déterminante(s) dans sa stratégie de conjecture et de preuve. L'autre partie du contrat est également de rédiger en situation papier-crayon la solution du problème.

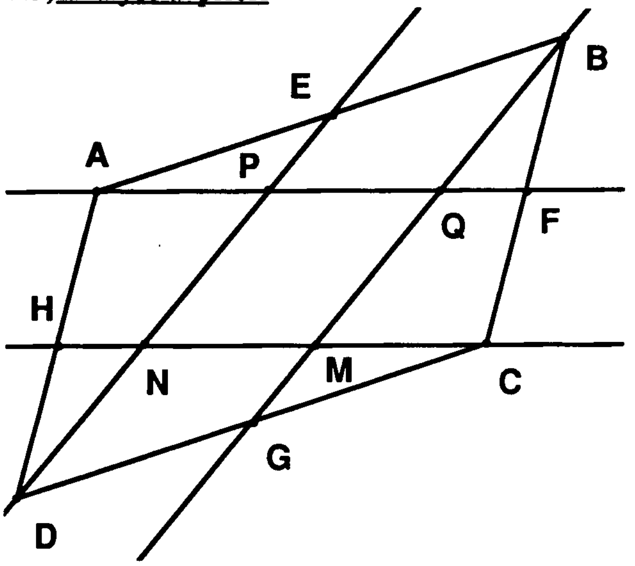
a.2) Situation-problème proposée

Soit ABCD un parallélogramme. Les points E, F, G et H sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. La droite (DE) coupe les droites (HC) et (AF) respectivement en N et P. La droite (BG) coupe les droites (AF) et (HC) respectivement en Q et M.

Démontrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

Les élèves disposent également d'une liste des théorèmes et définitions, candidats à un usage éventuel.

a.3) Analyse a priori



Pour la résolution du problème posé, l'usage adéquat des propriétés du parallélogramme et de celles du milieu d'un segment est indispensable.

Dans leurs stratégies de conjecture et de preuve nous espérons que le logiciel amènera les élèves:

- à extraire les sous-figures EBGD et AFCH,
- à identifier leurs propriétés et avoir une idée de leur preuve.

La découverte de ces deux sous-figures doit être le déclic indispensable à la découverte des sous-problèmes à résoudre. En effet, rappelons que les réponses des élèves aux questions posées par le logiciel comportent deux volets:

- une conjecture dégagée de l'exploration;
- une déclaration de capacité à apporter une preuve.

a.4) Analyse a posteriori de la séance

α) Exploration de la figure

Une partie du contrat didactique assigné aux élèves était , avons-nous dit, de noter la (ou les) question(s) qui a (ont) été déterminante(s) dans leurs stratégies de conjecture et de preuve. Mais la majorité des élèves ne prenant pas de notes, l'intervention des observateurs est nécessaire pour que cette consigne soit prise en compte.

Au cours de cette phase heuristique, les élèves moyens prennent un temps de réflexion sur la figure et la liste des théorèmes avant de donner une réponse à la question posée par le logiciel, tandis que les supposés bons ont tendance à en finir rapidement. Ces derniers peuvent alors se trouver bloqués au cours de la démonstration. Par contre, les élèves qui ont des difficultés en mathématiques sont en difficultés au cours de l'exploration de la figure. Ce blocage est très souvent lié à la réponse "Soit égale" donnée à la question suivante dont la syntaxe peut présenter une certaine complexité: "Existe-t-il un segment dont la longueur soit égale à (soit le double, soit la moitié de) celle de [MN] et de [PQ] ? " Ils répondent "Soit égale" sans s'assurer si les données du problème leur permettent de prouver leur affirmation. Le logiciel continue à poser une série de questions liées à la réponse précédente. Cette série de questions ne peut en aucun cas aboutir à une conjecture adéquate. Ils se découragent du fait de tourner en rond. L'intervention d'un observateur est le plus souvent nécessaire pour provoquer une reprise de l'exploration si elle n'est pas, déjà, provoquée par le logiciel. Ces reprises de l'exploration de la figure permettent, très souvent, de débloquer les élèves en difficulté.

La chronique des étapes suivies par chaque binôme et les comptes rendus de l'exploration nous conduisent à expliciter les questions qui ont joué un rôle prépondérant au cours de la phase heuristique. Nous nous appuyons sur les productions de quelques binômes.

Bour et Bib (l'un est supposé fort, l'autre moyen)

La chronique des étapes suivies au cours de l'exploration montre qu'il faut deux explorations pour mettre en place la dévolution du problème.

Voici les commentaires de chacun d'eux:

Bour

Cest grâce à l'exploration de la figure dans la question:<< Y'a-t-il un parallélogramme dont les sommets appartiennent à (QM) et à (NP) ?>> que l'on a pu voir un parallélogramme qu'on avait pas encore découvert. Et à partir de ce parallélogramme qu'on peut faire la démonstration. Donc l'exploration de la figure nous aide dans nos recherches.

Bib

C'est grâce à la question "Y'a-t-il un parallélogramme dont les sommets appartiennent à (QM) et à (NP) ?» que l'on a pu découvrir les parallélogrammes EBGD et AFCH.

Après, nous avons continuer à répondre "NON" pour vérifier si la suite était bien comme nous le pensions. Cela nous a permis de vérifier si on partait dans la bonne direction .

Boed (très moyenne)

La dévolution du problème a été faite au cours d'une seule exploration. Voici la reconstitution de son dialogue avec le logiciel:

Sais-tu démontrer que (MN)//(PQ) ?

J'ai répondu non. Je ne le savais pas encore.

Existe-t-il un segment dont la longueur soit égale à MN et à PQ ?

J'ai répondu non car je n'en ai pas trouvé.

Existe-t-il un sgment dont la longueur soit égale à PN et à QM ?

J'ai répondu non car je n'en ai pas trouvé.

Est-ce que les droites (EB) et (GD) sont parallèles ? Sais-tu le démontrer ?

J'ai répondu oui car elles appartiennent aux côtés opposés du parallélogramme ABCD, qui sont eux mêmes parallèles.

Est-ce que EB=GD ? Sais-tu le démontrer ?

J'ai répondu oui car E et G sont les milieux respectifs de [AB] et de [DC], donc AE=EB et DG=GC et comme AB=CD alors EB=GD

Est-ce que les droites (AH) et (FC) sont parallèles ? Sais-tu le démontrer ?

J'ai répondu oui car H et F sont les milieux respectifs de [AD] et de [BC], donc AH=HD et BF=FC et comme AD=BC alors AH=FC.

_ Existe-t-il un parallélogramme dont les sommets appartiennent à [QM] et à [NP] ?

J'ai répondu oui, EBGD.

_ Existe-t-il un parallélogramme dont les sommets appartiennent à [MN] et à [PQ] ?

J'ai répondu oui, AFCH.

_ Sais-tu démontrer que AFCH est un parallélogramme ?

J'ai répondu oui puisque je sais que AH=FC et que (AH)//(FC).

_ Sais-tu démontrer que EBGD est un parallélogramme ?

J'ai répondu oui puisque je sais que EB=GD et que (EB)//(GD).

Chom (moyen)

Le compte rendu de l'exploration ne fait pas ressortir la (ou les) question(s) qui est (sont) déterminante(s) dans la dévolution du problème, mais l'organisation déductive de la preuve est réussie.

β) Démonstration

La contrainte de la démonstration à un pas imposée par le logiciel au cours des séances précédentes a des effets bénéfiques. En effet, l'analyse des copies des élèves montre pour la majorité des élèves une construction et une structuration plus rigoureuses de la preuve.

Nous remarquons également la diminution de la charge des implicites.

L'analyse des procédures des élèves montre aussi l'influence de la variable didactique "Usage du module démonstration". A travers la preuve rédigée par les élèves, nous relevons une seule procédure inadéquate, procédure due semble-t-il à un implicite au niveau des égalités de longueurs.

exemple: Sachant que G et E sont les milieux respectifs de [DC] et de [AB], les élèves écrivent: "DG=GC, AE=EB et DC=AB donc DG=EB" au lieu d'ecrire, par exemple "GD=1/2DC, EB=1/2AB et AB=DC donc GD=EB". Une des causes de cet obstacle réside dans l'organisation déductive de la preuve à partir d'égalités de longueurs .

b) Séance 6

b.1) Objectif

Elle a pour but la détermination par les différents binômes de leurs procédures erronées commises au cours de la phase de rédaction de la solution du problème exploré à la séance 5. Il s'agit en outre de montrer aux élèves l'impact de la variable "Usage du module démonstration" sur leurs organisations déductives.

b.2) Quelques remarques

Au cours de cette séance, une analyse didactique des objectifs définis n'est pas bien menée, analyse qui aurait permis de prendre toutes les précautions nécessaires pour tenter d'atteindre les objectifs fixés. Nous n'avons aucun moyen de contrôler que les élèves se rendent effectivement compte des erreurs de raisonnement commises au cours de la phase de rédaction. Il aurait fallu qu'ils puissent faire une comparaison entre le contenu de leurs copies et le bilan de la démonstration sur DEFI. L'analyse des bilans montre que les élèves commettent plus d'erreurs à cette phase de démonstration sur DEFI que sur l'environnement papier-crayon. Cela peut s'expliquer par le temps passé entre la phase heuristique et la phase de démonstration sur DEFI. Nous retrouvons également les procédures erronées relatives à l'usage des égalités de longueurs.

§4. TEST DE VALIDATION

I-Ojectifs

Il est destiné à évaluer le degré d'acquisition des compétences heuristiques et déductives des élèves ayant suivi un enseignement de la démonstration à l'aide de DEFI. Aussi, voudrions-nous:

- étudier l'évolution du niveau de l'acquisition de la preuve du groupe expérimental par rapport au premier test;
- comparer l'évolution des élèves du groupe expérimental par rapport à ceux du groupe témoin.

Nous nous appuyons sur les protocoles des élèves pour évaluer leur capacité de formulation et de produire des conjectures et des preuves.

II-Déroulement du test

L'évaluation des connaissances des élèves a lieu dans les mêmes conditions que le prétest. Le test se déroule le 29 mai 1990 (15 jours après les séquences d'enseignement) pendant une heure pour chacune des deux classes.

1. Situation-problème

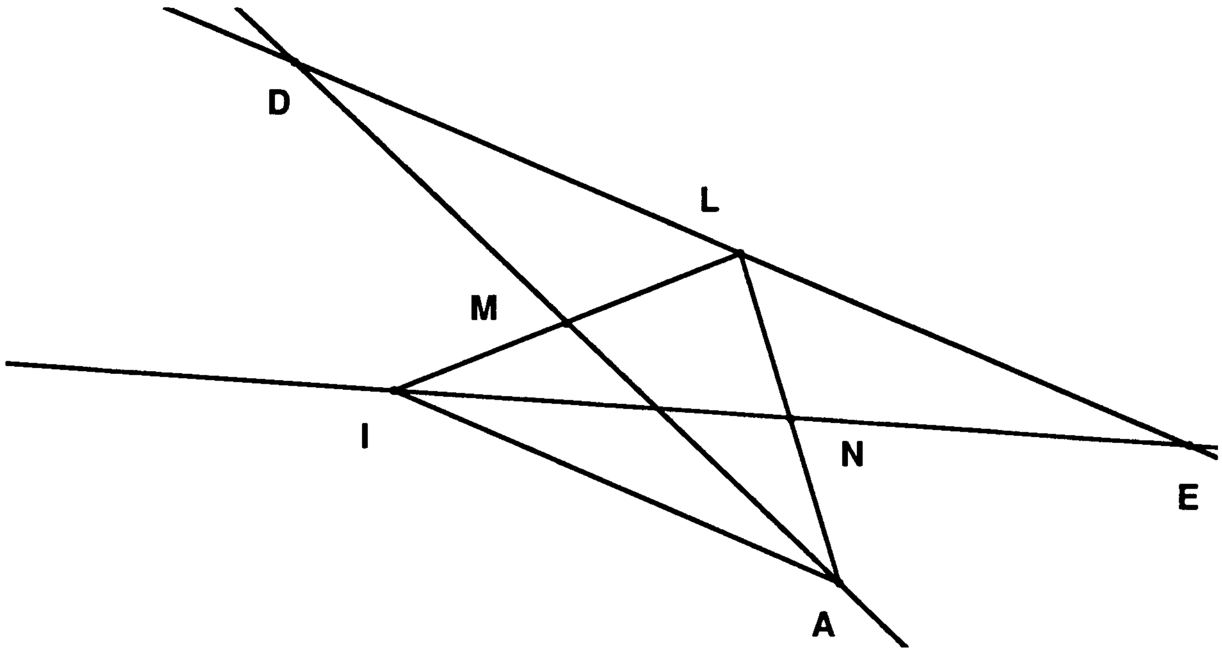
On considère un triangle LAI. On désigne par M le milieu du segment [LI] et par N celui du segment [LA]. La parallèle à la droite (AI) passant par L coupe la droite (AM) en D et la droite (IN) en E.

Démontrer que LD=LE.

2. Analyse a priori de la situation-problème

Les concepts à mobiliser sont: triangle, milieu d'un segment, parallélisme.

Certaines stratégies de conjecture et de preuve peuvent conduire l'élève à effectuer un traçage supplémentaire non indiqué dans l'énoncé du problème. Il s'agit du traçage du segment [MN]. Aussi doit-il identifier les triangles LAI, LDA et LEI ainsi que les propriétés du segment [MN] et des points M et N. Cette exploration de la figure doit s'appuyer sur le théorème des milieux et sa réciproque ainsi que sur la transitivité des égalités.



Une deuxième stratégie peut prendre appui sur le théorème des milieux et sa réciproque ainsi que sur les propriétés du parallélogramme. A cet effet, l'élève doit identifier, en plus des triangles cités ci-dessus, la nature des quadrilatères LEAI et LAID. Ainsi, il pourra, à partir des propriétés du parallélogramme et de la transitivité de l'égalité, déduire l'égalité des longueurs DL et LE. Cette stratégie est gagnante, mais demande de la part de l'élève la mise en œuvre de plus de pas de démonstration que la première stratégie.

Une troisième stratégie pourra s'appuyer uniquement sur les hypothèses du problème et les propriétés de la symétrie centrale. L'élève peut démontrer l'égalité de longueur des segments [DL] et [IA] à partir de la symétrie centrale de centre M, et celle des segments [LE] et [IA] à partir de la symétrie centrale de centre N. Cette stratégie est certes plus courte mais demande une maîtrise des propriétés de la symétrie centrale. Nous pensons qu'elle ne sera pas mobilisée par les élèves du groupe expérimental. Nous faisons cette hypothèse en nous basant sur le fait que la seule propriété de la symétrie centrale implicitement disponible sur DEFI est l'équivalence avec la définition du milieu d'un segment.

3. Comparaison des performances du groupe expérimental et du groupe témoin

Nous voulons à partir d'un test statistique voir si la différence entre les deux groupes est significative. A cet effet nous avons quantifié les performances des élèves. Nous avons effectué un test de rang. L'examen des notes des élèves, et le test statistique le confirme, montre la signification d'une différence et laisse penser que l'apprentissage de la démonstration à l'aide de DEFI peut avoir des effets positifs sur les performances des élèves l'utilisant.

III- Différentes analyses sur les différentes procédures (test final)

Nous avons conservé le même codage qu'au prétest (voir la signification des variables à l'annexe 1)

1. Analyse implicative

a) Le graphe implicatif (voir annexe 3-I)

Il fait ressortir quatre classes de procédures. La première classe est constituée de procédures attestant l'acquisition de la preuve et la maîtrise du langage. Elle est constituée de deux sous-classes: la sous-classe de l'acquisition de la preuve (4, 7, 10, et 19) et la sous-classe maîtrise du langage (23, 25, 27, 29) .

La deuxième classe est constituée des procédures d'élèves dont le niveau d'acquisition de la preuve est partiel. A ce stade, l'étape la plus difficile semble être de réinvestir les faits démontrés dans d'autres pas de démonstration. Notons que ce stade d'acquisition de la preuve s'accompagne, en général, de la maîtrise du langage.

La troisième classe est constituée de procédures d'élèves ayant des difficultés au niveau de la reconnaissance du statut des hypothèses, de la conclusion et des théorèmes ou définitions ; reconnaissance qui pourrait faciliter l'exploration de la figure (procédure 5) en vue d'une stratégie de conjecture et de preuve.

La quatrième classe est constituée de toutes les procédures conduisant à l'échec total.

Si " relevé partiel des hypothèses" (2) alors échec (13, 22,..., 30) [cf sous-arbre de droite] la contraposé étant vraie: si "réussite" alors "relevé des hypothèses" (1) [cf sous-arbre de gauche].

Nous avions dès 1985 déjà signalé cette implication, ce qui souligne l'importance du traitement sérieux des hypothèses c'est-à-dire des informations initiales au sujet d'une situation.

Remarques:

1- Dans le sous-arbre central (réussite partielle), on ne retrouve quasiment que ce type de maîtrise de l'information:

. utilisation partielle des faits (20),

. théorèmes et définitions utilisés partiellement (11),

. identification partielle des sous-problèmes (8),

. une faible liaison avec "relevé des hypothèses" (1),

ces quatre traitements sont des traitements des informations mathématiques formelles.

. exploration partielle de la figure (5),

ce dernier traitement est relatif aux informations intuitives.

2- Notons la hiérarchie de complexité d'emploi des mots de liaison et un commentaire sur leurs fonctions:

par (hypothèse) > donc > or > et, le signe ">" signifiant ici "plus complexe que". L'insertion de l'item (14) (raisonnement cohérent) montre que celui-ci admet le bon usage de "par", "donc", "or" comme condition suffisante.

"par" : fait sortir le discours de sa linéarité et doit entraîner un nouveau processus inférentiel. Il faut aller pour cela puiser une information à l'extérieur qui soit pertinente et sous la contrainte d'une conclusion que l'on veut atteindre. L'acte de la pensée est extensive;

"donc": dérivation logique interne-externe, productive, extensive;

"or": un discours étant en cours, on veut viser une conclusion. Il s'agit par "or" d'aller chercher un fait déjà prouvé ou un théorème (ou une définition). Il y a donc une démarche interne-externe;

"et": coordonne dans le discours linéaire deux faits d'égale importance. Le rôle du "et" est donc interne. L'action de la pensée est intensive.

Par suite, la complexité décroit de l'"externe" à l'"interne".

Bien évidement, dans le discours linéaire, le mauvais emploi de ces mots se retrouve hiérarchisé dans le sens opposé. Si un élève ne sait pas employer "et", a fortiori il ne pourra pas employer les autres mots.

3- Notons le rôle positif joué par l'exploration de la figure (4) dans la production d'un raisonnement cohérent et la réussite finale. Par contre si cette exploration n'est que partielle ou dérisoire, l'échec partiel ou complet l'accompagne.

4- L'arbre hiérarchique nous montre que "bonne conclusion" (item 16) est en amont des items linguistiques, ce qui permet d'affirmer (ce que chacun sait bien) que la maîtrise linguistique n'est pas suffisante pour assurer la maîtrise rationnelle mais qu'elle est nécessaire ; cependant, en particulier, elle apparaît comme suffisante pour qu'un jugement de "raisonnement cohérent" soit formulé.

5- Notons l'absence de symétrie entre les deux types de confusion:"hypothèse comme conclusion"(17) - "conclusion comme hypothèse" (3). Ces deux confusions ne sont pas liées par un arc implicatif et il semble que le premier ne porte pas le même caractère dommageable sur le raisonnement que le deuxième. On voit en particulier que:

(17)⇒ (14) (raisonnement cohérent, sans doute local) alors que (3) est lié préférentiellement aux "items de l'échec" (sous-arbre de droite)

b) La hiérarchie implicative (voir annexe 3-II)

Elle fait ressortir le résultat global suivant:

(bonne exploration et traitement des informations) ⇒ (bonne conclusion) ⇒(bon usage des mots-clés)

On remarque que "raisonnement cohérent" est au cœur de cette dernière classe, il en est le revélateur externe. C'est par le bon usage linguistique que se fait le jugement au sujet du raisonnement (voir aussi l'analyse factorielle des correspondances multiples).

Ces différentes analyses nous permettent de confirmer la hiérarchie des étapes de l'acquisition de la preuve établie à partir des analyses faites au prétest.

2. Analyse factorielle des correspondances multiples

L'analyse factorielle de correspondances, comme toutes les analyses factorielles, permet de discriminer une population (ici l'ensemble des variables sur lequel porte l'analyse) suivant des facteurs ordonnés selon leur importance décroissante.

a) choix des axes et selection des modalités

Nous ne choisissons que deux axes parce qu'ils représentent 86,21 % de l'inertie totale.

axe 1 (=facteur 1) : 51,22 %

axe 2 (= facteur 2) : 34,99 %

Le choix des modalités se fait selon leurs contributions décroissantes et tel que la somme de ces dernières soit supérieure ou égale 70 %.

b) Quelques éléments d'analyse (voir annexe 3-III)

L'axe 1 est caractérisé par l'opposition entre les réussites et les échecs. L'axe2 est celui du traitement des informations. Il oppose les traitements total et partiel des informations.

Les modalités relatives à la maîtrise du langage sont retenues comme variables supplémentaires. Nous représentons dans le plan factoriel (1, 2) (voir annexe 3-III) les variables actives et supplémentaires.

Nous remarquons ici également une très forte proximité entre le raisonnement cohérent (RAIC) et la maîtrise de l'usage du langage (USEA et USDO). La maîtrise du langage est une conséquence mais aussi la cause peut-être (voir implication) de la maîtrise de l'organisation déductive de la preuve. De même, nous notons une très forte proximité entre un raisonnement incohérent (RAII) et le mauvais usage de "or" et de "donc".

Dans le plan (1,2), on remarque la disjonction des nuages suivants (bien séparés surtout sur le deuxième axe):

. bon traitement de l'information,

. bonne conclusion (adéquation hypothèse-théorème-conclusion),

. bon usage des mots-clés (avec au cœur: "raisonnement correct").

Cela tend à prouver que deux démarches de natures différentes sont en jeu dans la conduite de la preuve:

. la démarche mentale du traitement des informations: structuration des informations avec découverte de la preuve,

. la démarche d'explication linguistique de cette preuve dont la manifestation serait (de l'extérieur) le signe d'un raisonnement cohérent.

Or, nous l'avons vu également avec la hiérarchie implicative (et nous le revoyons ici en projection sur le premier axe facteur de la réussite), cette deuxième démarche est conséquence (donc consécutive) de la première et de la découverte de la preuve. Autrement dit, une surface apparente correcte au niveau linguistique est certes condition nécessaire à la "bonne démonstration", mais non pas condition suffisante. Celle-ci réside plutôt du côté du traitement correct des informations et prend sa source dans l'exploration complète de la figure.

Autrement dit, un discours bien coordonné par les mots-clés n'est qu'un indice de rationalité du discours, mais également l'usage correct (resp. non correct) des faits n'accompagne pas nécessairement l'emploi adopté des mots-clés. Ces derniers semblent être les leviers qui permettent de passer d'un stade à un autre. Par contre, ils s'accompagnent du jugement que l'on porte sur une démonstration: raisonnement correct (et non correct).

Notons la hiérarchie de gravité entre l'inversion des statuts hypothèses-conclusion: l'intégration de la conclusion dans les faits donnés annule tout le sens de la déduction en faussant les règles du jeu inférentiel. Par contre, restituer à une hypothèse l'incertitude dont sont parées les conclusions en l'intégrant dans les buts à atteindre, c'est perdre l'information initiale qualifiant d'acquis définitif les données du problème.

Le point "bonne conclusion" situé dans le quart de plan sud-ouest signifie ceci: la décision du " referee" (le lecteur d'une démonstration) au sujet de l'atteinte du but est composée d'une part, d'un bon traitement cognitif des informations, et d'autre part, d'une verbalisation rigoureuse du raisonnement.

Nous avons noté déjà ce rôle d'articulation entre ces deux groupes que jouait cette variable "bonne conclusion", dans la hiérarchie implicative.

Notons le rôle neutre joué par "relevé de toutes les hypothèses".

§5. QUESTIONNAIRE-ENQUETE

Après la séquence d'enseignement de la démonstration à l'aide de DEFI et le test de validation, nous présentons un questionnaire dont le but est de recueillir les impressions des élèves du groupe expérimental sur le logiciel. La passation du questionnaire a lieu le 5 juin 1990.

L'analyse des protocoles montre un changement important des attitudes des élèves vis-à-vis de la démonstration. Ils mettent l'accent sur le progrès apporté par le logiciel dans le domaine heuristique et dans celui de la preuve, notamment, l'accent sur l'importance de l'exploration de la figure, exploration qui leur a permis, disent-ils, de mieux comprendre le rôle de la figure.

Ils notent également, l'apport important du module démonstration, importance mise en évidence par l'intérêt que les élèves accordent aux messages émis en cas d'erreurs.

Quelques élèves notent, tout de même, l'insuffisance des capacités didactiques de DEFI, notamment au niveau de son aptitude à conseiller et de son aptitude à expliquer. En effet, au cours de la démonstration les élèves ne comprennent pas toujours le message émis en cas d'interaction hypothèse-théorème-conclusion fausse. Au niveau de l'exploration de la figure, le logiciel ne donne aucun moyen apparent à l'élève d'avoir une certaine certitude sur la réponse qu'il a fournie.

Des élèves signalent également l'obstacle lié à l'ordre d'écriture des égalités.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Le fonctionnement de la séquence d'enseignement a mis en évidence la nécessité, d'une part, d'une analyse très fine des objectifs visés, et d'autre part, de s'assurer du bon fonctionnement de l'outil informatique. La prise en main efficace du logiciel impose la modification des stratégies initiales des élèves et l'adoption d'un nouveau contrat didactique. L'exploration de la figure se fait, de prime à bord, sans une exploitation profonde de la figure liée aux données du problème. Certains élèves répondent aux questions posées par le logiciel sans mesurer véritablement la portée contractuelle de leur réponse. La contrainte de la démonstration à un pas n'est pas comprise et admise par tous les élèves.

Nous notons , cependant, un changement important de leurs comportements vis-à-vis de la démonstration. L'"exploration de la figure" permet à la majorité des élèves de mieux comprendre le rôle de la figure dans la résolution d'un problème de géométrie avec preuve. Le module "Démonstration" est d'un apport très important dans l'organisation déductive de la démonstration, importance mise en évidence par la sanction immédiate en cas d'erreur dans l'interaction hypothèses-théorème-conclusion.

Pendant la rédaction de la démonstration à l'aide du logiciel, l'élève peut commettre des erreurs telles que: erreurs de frappe, d'inattention, de planification, confusion sémantique. Le logiciel ne donne pas, dans tous les cas, une explication satisfaisante de leur cause.

L'analyse des protocoles des élèves à l'entrée et à la sortie permet de proposer une hiérarchie de ce que peuvent être les étapes de l'acquisition de la preuve.

Le bon usage des mots-clés "or", "donc", "par" semble être une condition nécessaire pour la production d'un raisonnement cohérent, tout comme le traitement des informations. La démonstration est fondée, d'une part, sur l'identification correcte du statut des informations, la découverte de la preuve, à travers leurs explicitations et leurs structurations, d'autre part, sur une bonne explication linguistique de la preuve.

Dans le cadre de la recherche que nous avons entreprise, nous travaillerons sur l'identification des stratégies des élèves aux fins d'une comparaison avec nos analyses a priori des situations-problèmes proposées. En effet, l'analyse des procédures des élèves du groupe expérimental sur DEFI a permis de faire ressortir un certain nombre de procédures qui sont, pour la majorité, standard.

Nous nous intéresserons, dans un avenir très proche, à une analyse didactique de ces variables et, dans la mesure du possible, à leur intégration au logiciel en vue d'une reconnaissance automatique.

Nous nous intéresserons également à l'évaluation de l'aide que peut apporter DEFI aux élèves de troisième au niveau , d'une part, de leurs stratégies de conjecture et de preuve, et d'autre part, de l'organisation déductive. Nous chercherons des éléments de validation des analyses faites en quatrième et sur la nature et la fiabilité des différents pointeurs que nous avons dégagés.

Références bibliographiques

ALLARD J.-C., PASCAL C. (1986), « Un langage pour la géométrie ». Logedif, IREM de Grenoble, cedic-Nathan

BELLEMAIN F., (1988) « Cabri-géomètre: un cahier de brouillon informatisé pour la résolution de problèmes en géométrie plane», 16, Petit x, IREM de Grenoble

BELLEMAIN F., GERENTE M., LETHY G., RIOU B. (1990), «Géométrie et informatique: vers la médiatrice. L'expérimentation: lieu d'interaction entre problématique du chercheur et celle de l'enseignant », 24, Petit x , IREM de Grenoble.

CUPPENS R., (1991) « Intelligence artificielle et enseignement de la géométrie», 4, REPERES-IREM, TOPIQUES EDITIONS

DUVAL R. & EGRET M.-A. (1989) «L'organisation déductive du discours, Annales de didactiques et de sciences cognitives», 2, IREM de Strasbourg.

GIORGIUTTI I. & GRAS R.(1989), «The modeling student Knowledge, the case of geometry. Computer aided proofs in school geometry», Actes du colloque NATO, Grenoble 1989 (à paraître dans Springer Verlag)

GIORGIUTTI I. & BAULAC Y., *Interaction micromonde/tuteur en géométrie: mise en commun des possibilités de Cabri-géométrie et de DEFI*, Actes des 2èmes Journées EIAO de CACHAN des 24 et 25 janvier 1991

GRAS R. (1988), «Aide logicielle aux problèmes de démonstration géométrique dans l'enseignement secondaire», 17, Petit x, IREM de Grenoble.

GRAS R. (1979), Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et certains objectifs didactiques en mathémathiques, Thèse d'Etat de l'Université de Rennes I.

GUIN D., (1989), « Réflexion sur les logiciels d'aide à la démonstration en géométie», 2, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg.

LARHER A. (1991), Implication statistique et applications à l'analyse de démarches de preuve mathématique, Thèse d'Université de Rennes I.

NICOLAS P., Construction et vérification de figures géométriques dans le système MENTONIEZH, Thèse d'Université Rennes I, 1989.

OSTA I. (1988), L'ordinateur comme outil d'aide à l'enseignement. Une séquence didactique pour l'enseignement du répérage dans l'espace à l'aide de logiciels graphiques , Thèse de l'Université Joseph FOURRIER Grenoble 1.

PLUVINAGE F., (1989), « Aspects multidimentionnels du raisonnement en géométrie » 2, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg.

PY D. (1990), Reconnaissance de plan pour l'aide à la démonstration dans un tuteur intelligent de la géométrie, Thèse de l'Université de Rennes I, IFSIC.

ANNEXE 1

Signification des différentes variables

Les numéros des variables correspondent à ceux utilisés sur les arbres hiérarchiques et les graphes implicatifs. Les codes (les quatre lettres en majuscule) correspondent, pour les mêmes variables, à ceux utilisés pour l'analyse factorielle.

1- a relevé toutes les hypothèses (HYPJ)

C'est le cas de l'élève qui a reconnu toutes les hypothèses du problème à résoudre. Cet item s'identifie par le nombre d'hypothèses relevées ou par l'usage qui est fait de ces dernières.

2- *h*ypothèses partielles (HYPP)

Dans la liste des hypothèses, il en manque une ou plusieurs. Cette situation peut être due à un oubli de la part de l'élève ou à une mauvaise identification d'une partie des hypothèses. Mais l'élève qui se trouve dans la première situation peut identifier les hypothèses non relevées au cours de sa démarche déductive.

3- conclusion relevée comme hypothèse (CHYP)

C'est la confusion entre le statut des hypothèses et celui de la conclusion.

Il arrive que dans la liste des hypothèses figurent une ou plusieurs conclusions du problème, mais aussi qu'au cours de la démonstration, une conclusion intermédiaire non démontrée figure parmi les hypothèses d'un théorème ou d'une définition.

exemple: (tiré des procédures d'élèves au test de validation)

Conclusion à démontrer: "LE=AI"

Théorème: "Un parallélogramme à ses côtés opposés égaux et parallèles"

Hypothèse: "LIAE est un parallélogramme."

L'hypothèse est adéquate mais c'est un fait non encore démontré.

4- exploration conduisant à la solution (EXPR)

Elle se caractérise par le nombre de sous-figures exploitables pour produire des conjectures. On dit que l'élève répond à cet item si dans ses stratégies, il identifie toutes les sous-figures lui permettant d'émettre des conjectures adéquates.

L'exploration de la figure est, d'une part, explicitée dans certains cas par les différentes couleurs utilisées sur la figure et par des traçages supplémentaires non indiqués dans l'énoncé du problème, et d'autre part, implicitement reconnue à partir de l'organisation déductive produite par l'élève.

5- exploration partielle (EXPP) C'est le cas où, suivant la stratégie de l'élève, les sous-figures, lui permettant de produire des conjectures ayant un certain degré de certitude, ne sont pas toutes identifiées. Cet item peut être reconnu comme dans le cas de l'item 4.

6- exploration conduisant à l'échec (EXPE)

Cet item se caractérise par les productions d'élèves qui s'appuient sur des sous-figures sans s'assurer si les données du problème permettent de prouver leurs conjectures.
Exemple: (test final) cas d'une élève qui éprouve le besoin de tracer le cercle de centre L et de rayon EL et veut montrer à partir de là que LD=LE.

7- tous les sous-problèmes sont identifiés (SOUR)

L'identification de tous les sous-problèmes à résoudre suivant la stratégie de l'élève est liée à une bonne exploration de la figure. Le chercheur les détermine à partir de l'organisation déductive de l'élève. Deux cas peuvent se présenter:

- le cas de l'élève qui identifie et résout tous les sous-problèmes;
- le cas de celui qui les identifie tous mais en résout une partie seulement.

Ce dernier cas peut se manifesté par une mauvaise interaction entre les hypothèses, le théorème et la conclusion à la suite d'un ou plusieurs pas de démonstration.

8-identification partielle des sous-problèmes (SOIP)

Cet item est fortement lié à l'exploration partielle de la figure et au nombre de sous-problèmes identifiés et résolus.

9- aucune identification des sous-problèmes (SOUE)

C'est le cas d'élèves qui n'ont identifié, a fortiori résolu, aucun sous-problème. Cet item est lié à une exploration négative de la figure.

10-théorèmes et définitions bien utilisés (THDU)

Suivant la stratégie adoptée, l'élève détermine un certain nombre de sous-problèmes à résoudre. Cette résolution requiert l'usage d'un certain nombre de théorèmes et définitions. Nous dirons que tous les théorèmes et définitions sont bien utilisés si l'élève a identifié et utilisé de façon adéquate tous ceux qui sont indispensables à la résolution du problème.

11- théorèmes et définitions utilisés partiellement (THUP)

L'élève a identifié une partie seulement des théorèmes et définitions indispensables à la résolution du problème, et il en fait un usage adéquat.

12- choix inadéquat des théorèmes (CITH)

Aucune identification des théorèmes adaptés, mais choix d'autres théorèmes dont l'usage ne donne aucun résultat adéquat.

Dans cet item , on retrouve également les procédures d'élèves ayant fait un usage inadéquat de tous les théorèmes et définitions convenables.

13- théorèmes et définition non utilisées (THNU)

Aucun usage n'est fait des théorèmes et définitions éventuellement candidats.

14- raisonnement cohérent (RAIC)

L'élève répond à cet item s'il y a une cohérence totale sur tous les pas de démonstration exécutés. Il est lié à l'usage adéquat de ET, OR, Donc, PAR (hypothèse).

15- raisonnement incohérent (RAII)

L'élève répond à cet item s'il y a une incohérence totale sur tous les pas de démonstration exécutés. Il est lié à l'usage inadéquat de ET, OR, Donc, PAR (hypothèse).

16- ressort la conclusion adaptée à sa démarche de raisonnement (CONB)

C'est le cas de l'adéquation totale entre les hypothèses, le théorème et la conclusion.

17- hypothèse comme conclusion (HCON)

Ici, l'élève cherche à démontrer un fait donné ou démontré.

18- pas de conclusion (CONP)

Aucune conclusion n'est tirée.

19- utilisation adéquate de tous les faits (UFAA)

Ici, il s'agit de l'usage adéquat de tous les faits donnés ou démontrés dans l'enchaînement des pas de déduction.

20- utilisation adéquate mais partielle des faits (UFAP)

Cet item se caractérise par une utilisation partielle mais adéquate des faits dans l'enchaînement des pas de déduction, mais aussi par des sauts de pas de démonstration.

21- utilisation inadéquate des faits dans l'enchaînement des pas de déduction (UFAN)

22- pas d'utilisation des faits (PAUF)

23- usage adéquat de "donc" (USDA)

Un bon usage de "donc" requiert une adéquation totale de l'ensemble "hypothèses-**Or**-théorème-**Donc**-conclusion" ou "de théorème-**Or**-hypothèses-**Donc**-conclusion".

On peut observer quelquefois "donc" immédiatement après les hypothèses, sans liaison de théorèmes ou de définitions. Son absence est admise si cet implicite est accepté dans le contrat.

24- usage inadéquat de "donc" (USDN)

C'est le cas d'un choix adéquat des hypothèses (même si celles-ci restent à démontrer) pour le théorème choisi mais la conclusion est inadaptée.

Exemple: (tiré des procédures d'élèves au test de validation)

"PAR hypothèse: M m [LI] et N m [LA] (m signifie milieu) OR si les points M et N sont les milieux des segments [LI] et [LA] alors les points LMI et LNA sont alignés. DONC (LMI et LNA sont alignes et LM=IM ET LN=NA)"

Notons ici également le mauvais usage de ET.

25- usage adéquat de "or" (USOA)

Il y a deux usages possibles de "or": "Hypothèses-**Or**-Théorème-**Donc**-Conclusion" et "Théorème-**Or**-Hypothèses-**Donc**-Conclusion".

Pour juger du bon usage du "or", on regarde la conclusion visée puis les faits ou théorème (définition) utilisés. On doit avoir une adéquation totale de l'un des cas ci-dessus.

26-usage inadéquat de "or" (USON)

Exemple (tiré de productions d'élèves au test final)

Hypothèse: "Dans un triangle LAI, le segment qui passe par les milieux des côtés [AL] et [IL] est parallèle au côté [AI]"

théorème: "OR Dans un triangle LAI la longueur du segment qui passe par les milieux des côtés [AL] et [IL] est égale à la moitié de la longueur du côté [AI]."

conclusion: " DONC [MN]= moitié de [AI] "

Notons la confusion entre notation de longueur et celle de segment. L'hypothèse utilisée est inadaptée à l'application du théorème choisi.

27-usage adéquat "et" (USEA)

"ET" coordonne , en général, dans le discours linéaire deux faits d'égale importance. Ces faits requièrent deux vérifications indépendantes l'une de l'autre. Il suffit donc de vérifier la validité des faits coordonnés en vu d'un usage.

28- usage inadéquat de "et" (USEN)

Exemple (voir l'exemple de la variable 24)

29-usage adéquat de "par" (hypothèses) (UPAA)

Il faut aller puiser une information à l'extérieur qui soit pertinente et sous la contrainte d'une conclusion que l'on veut atteindre. On juge donc la pertinence des informations utilisées comme hypothèses d'un théorème choisi.

30- usage inadéquat de "par" (hypothèse) (UPAN)

Une au moins des hypothèses est inadaptée.

Exemple (tiré des productions d'élèves au test final):" PAR hypothèses, C est un cercle de centre L et de rayon [EL],D∈ C et E ∈ C "

Ces hypothèses n'ont aucun lien avec les données du problème à résoudre.

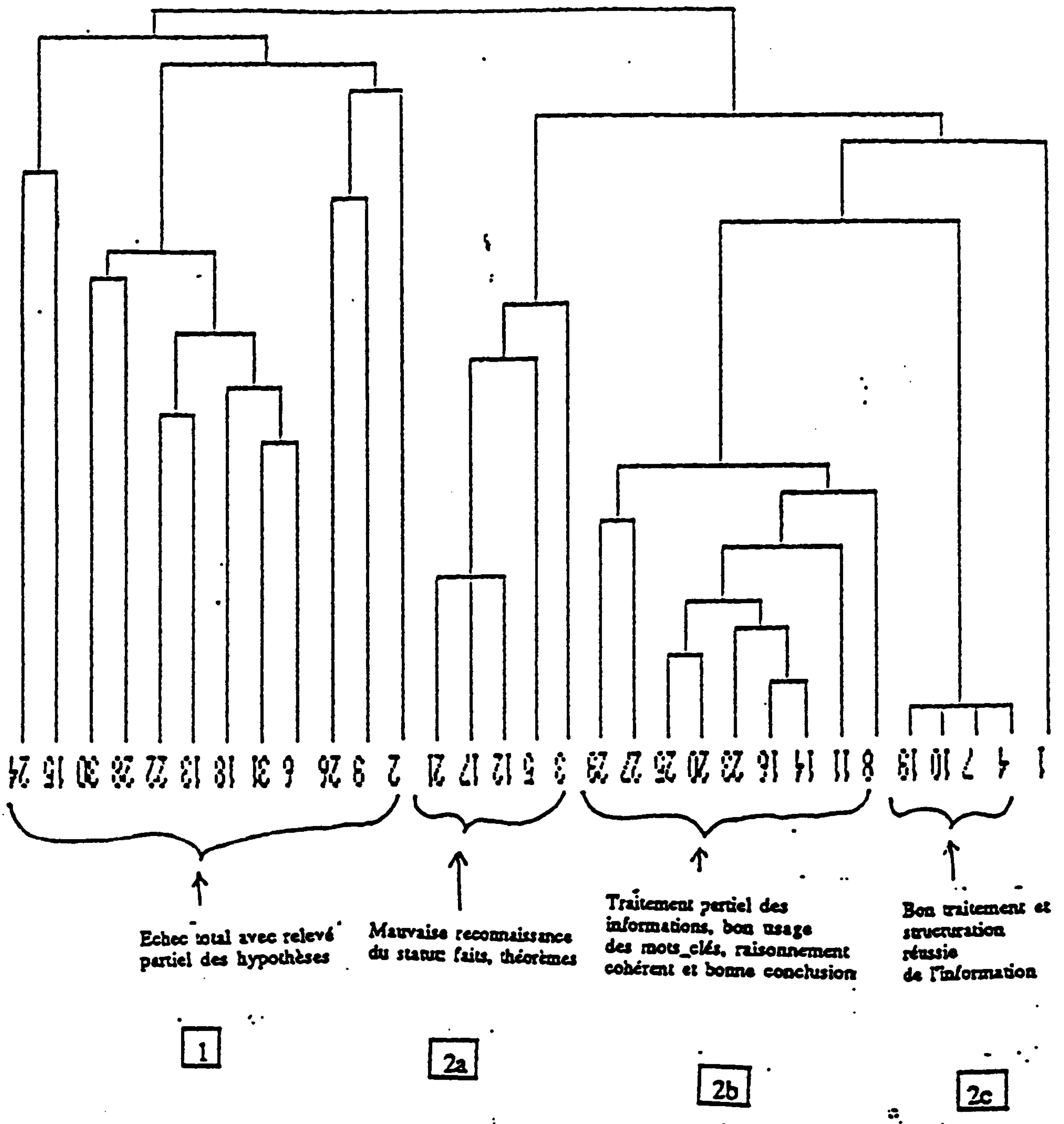
"Or, par un cercle de centre O et de rayon OB, il ne passe que les points qui sont à égale distance de O comme [OB].
Donc EL=LD et EL=LE"

31- Hypohèses non identifiées (HYNI)

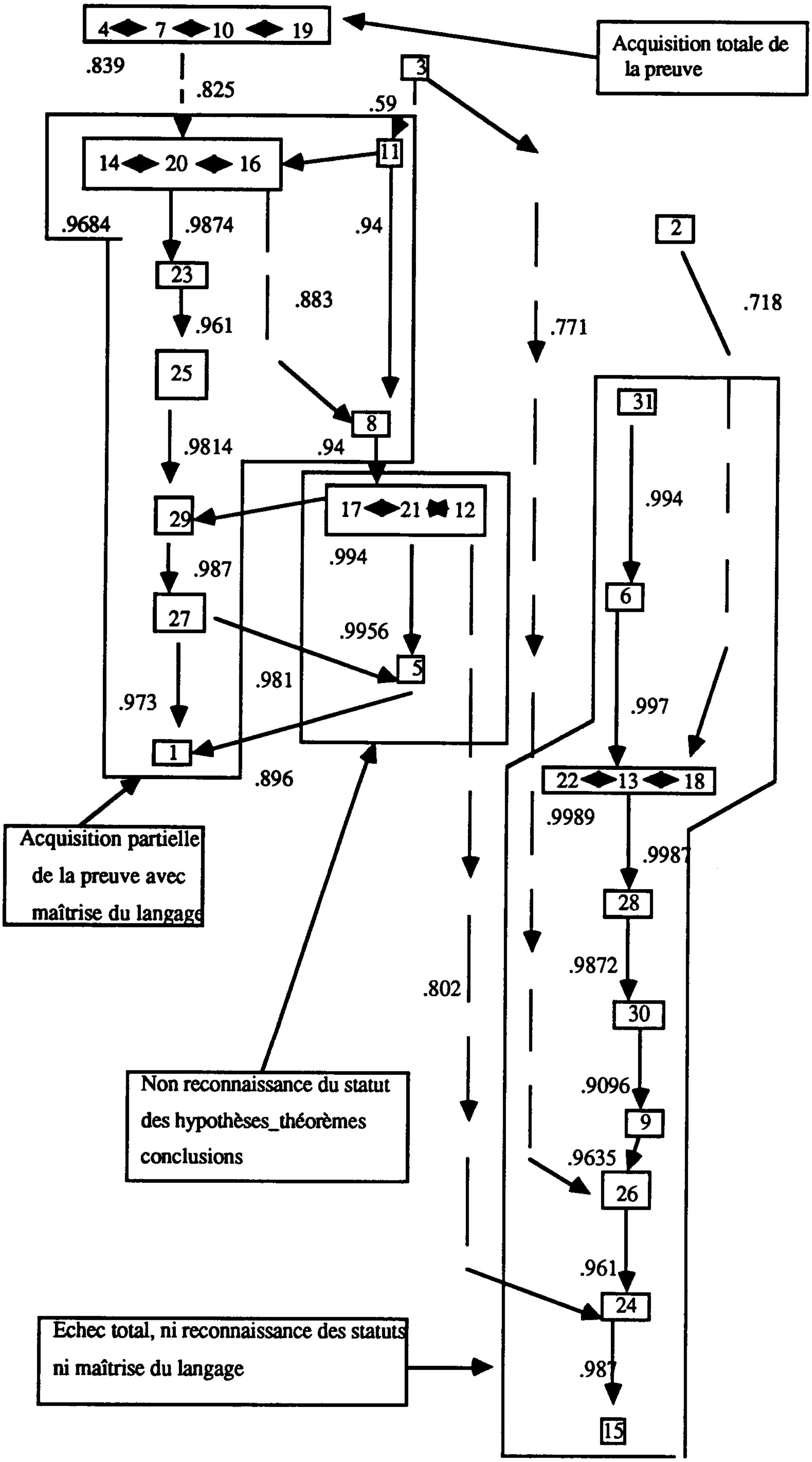
C'est une procédure d'élèves qui n'ont ni relevé ni utilisé dans des pas de démonstration les hypothèses du problème.

ANNEXE 2

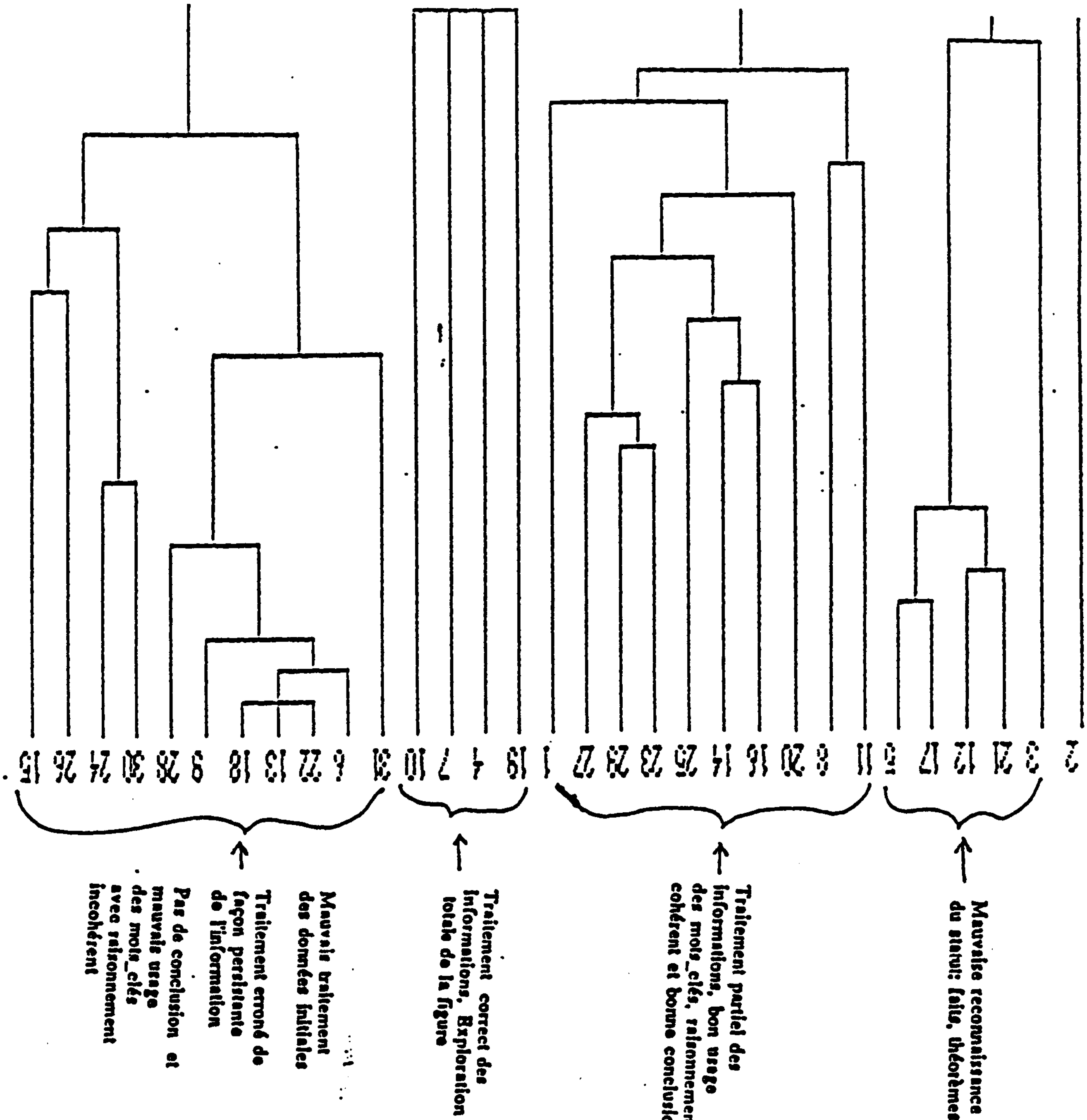
I- Arbre hiérarchique à l'entrée (prétest)



II- Graphe impicatif à l'entrée (prétest)

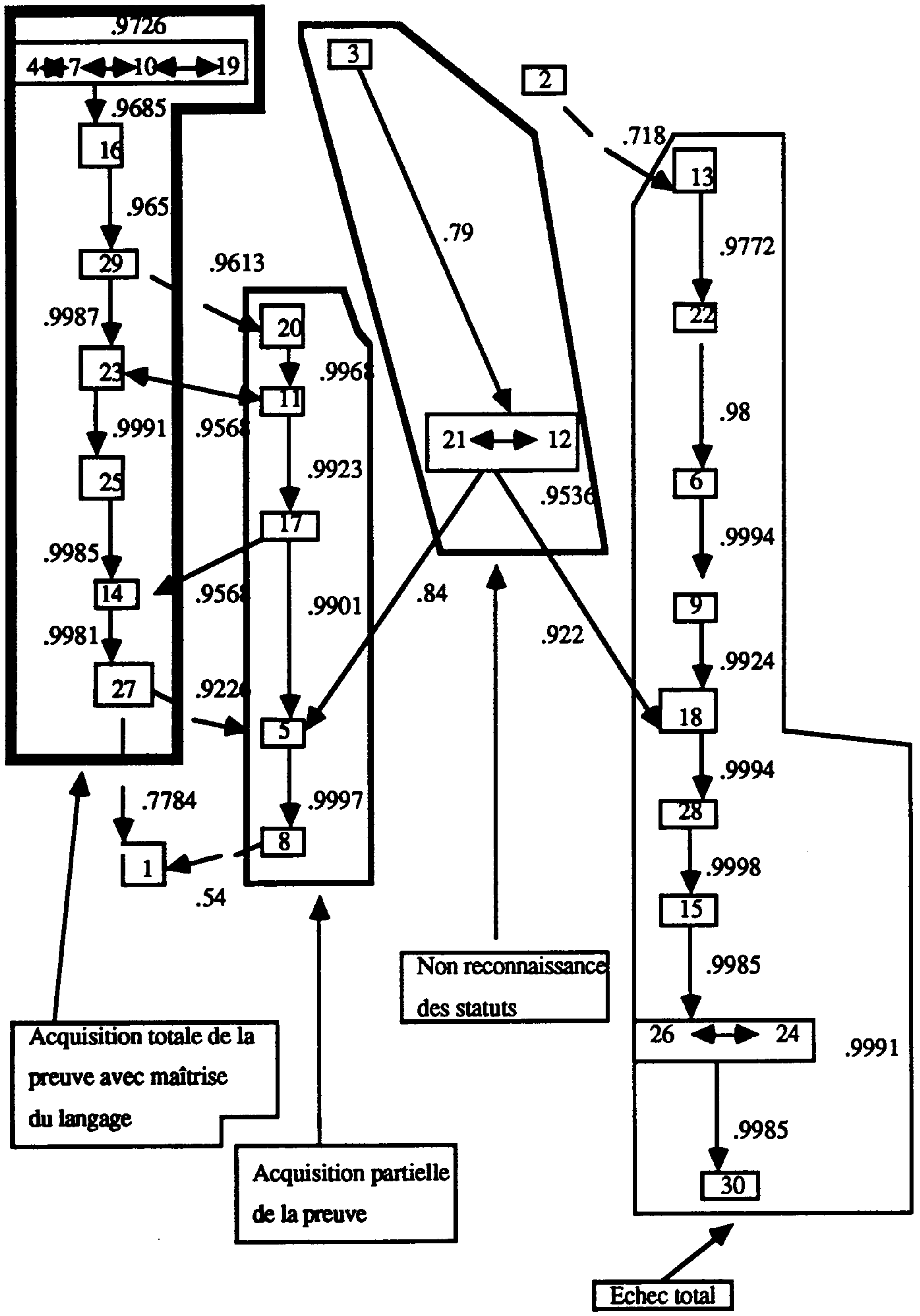


III- Arbre de la hiérarchie implicative à l'entrée (prétest)

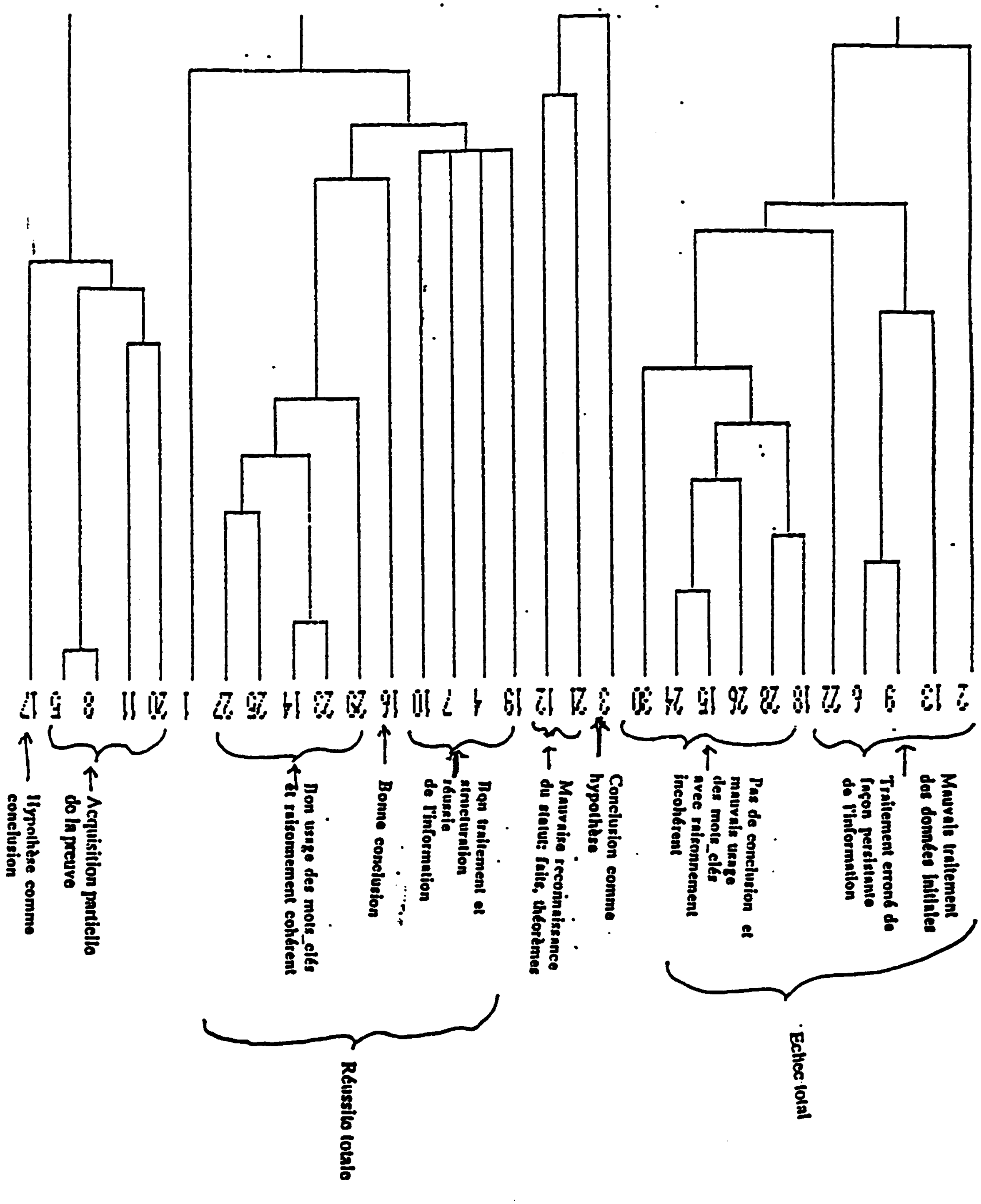


ANNEXE 3

I- Graphe implicatif à la sortie (test de validation)



II- Arbre de la Hiérarchie implicative à la sortie (test de validation)



III- Plan factoriel (1,2) à la sortie (test de validation)