

THEORIE DES NOEUDS ET CALCUL FORMEL

Jean-Philippe ROLIN
Laboratoire de Topologie UA 755
BP 138
21004 Dijon CEDEX

Résumé

Cet article a pour but de décrire, de façon élémentaire, quelques méthodes pratiques permettant de détecter si deux courbes fermées dans l'espace sont, en un sens à préciser, de même type. Des méthodes de calcul algorithmique sont détaillées, ainsi que les modalités de leur implémentation sur machine.

Introduction

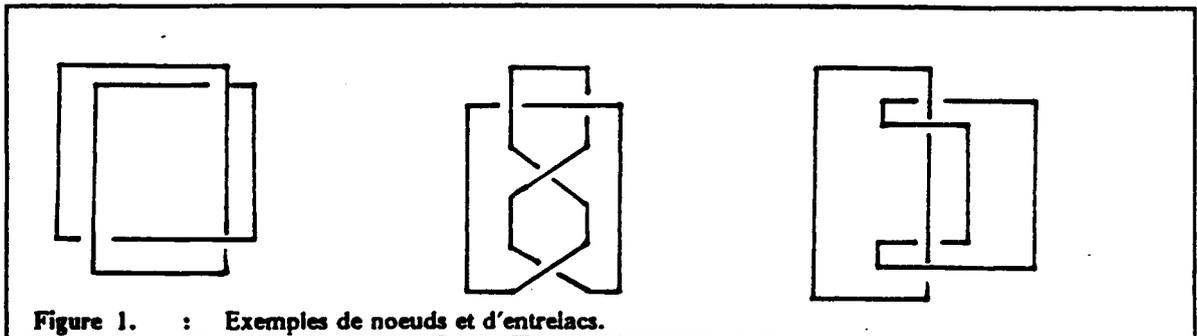


Figure 1. : Exemples de noeuds et d'entrelacs.

Si on note \mathbb{R}^3 l'espace ambiant de dimension 3, un *noeud* de \mathbb{R}^3 est une courbe homéomorphe au cercle S^1 (i.e. en bijection bicontinue avec le cercle) *plongée* (i.e. qui ne présente pas d'autointersection). De la même façon on appellera *entrelacs* un sous-espace de \mathbb{R}^3 homéomorphe à une union disjointe finie de cercles (cf figure 1). En fait, dans ce qui va suivre, on pourra considérer tout noeud ou entrelacs comme une union finie de segments. Le problème général est de déterminer si deux noeuds ou entrelacs L et L' appartiennent à la même classe d'une relation d'équivalence appelée *isotopie* : L et L' sont dits *isotopes* s'il existe un homéomorphisme h de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 tel que $h(L) = h(L')$. L'application h est appelée *isotopie*. [Ro]

Il semble que le premier mathématicien à avoir considéré les noeuds ait été Gauss [Ga] encore qu'il ait peu écrit sur le sujet. Mais le véritable point de départ de la théorie se situe en Ecosse, avec les travaux des physiciens Thomson et Tait, aux alentours de 1860. Leurs préoccupations, liées aux travaux d'Helmoltz sur les fluides sans viscosité, les conduisent à étudier des champs de vecteurs particuliers appelés *champs de vortex*. Les courbes intégrales de tels champs, les *lignes de vortex*, sont concentrées à l'intérieur de tubes, dits *tubes de vortex*.

Il apparaît que si l'on étudie un champ de vortex sur un domaine U , ou bien les tubes de vortex se referment sur eux-mêmes, constituant ainsi des tores pleins, ou bien ils vont d'un bord du domaine à l'autre. Des exemples classiques de tels tubes sont les ronds de fumée, qui se referment, et les cyclônes, qui vont de la terre au

ciel. Tait et Thomson expérimentent à l'aide de "canons à ronds de fumée", consistant en des boîtes aux parois élastiques percées d'un trou, et constatent ainsi que les tubes de vortex peuvent être noués, (et dans ce cas ils ne se dénouent pas), et qu'ils se déplacent, en raison de la dynamique interne à l'intérieur des tubes.

A ce stade, Tait [Ta] poursuit seul ses travaux, cherchant à classer les noeuds, en pensant manifestement qu'il s'agit d'une tâche aisée. Il se fixe en fait deux objectifs:

i) Dresser un table des noeuds, à équivalence près, complète et sans répétition.

ii) Mettre au point une méthode effective pour déterminer à quel noeud de la table est équivalent un noeud donné.

Ce programme s'est vite avéré irréalisable, ce qui se comprend bien après coup: Tait ne disposait d'aucun des moyens théoriques et matériels manifestement indispensables pour aborder une telle classe de problèmes. En particulier, la détermination et l'étude d'*invariants* qui constitue actuellement un branche fondamentale de la théorie ne pouvait lui être accessible:

La définition d'invariants de différentes natures (nombres, polynômes, groupes, etc.) repose sur une approche théorique faisant appel à des concepts mathématiques variés:

L'approche topologique, qui consiste essentiellement à étudier le complémentaire du noeud L dans \mathbb{R}^3 , dont on peut extraire des informations de nature algébrique (et donc calculable) en considérant, par exemple, son *groupe fondamental* (cf la section suivante).

La description en tresses, qui permet, en représentant les entrelacs de façon particulière (les *tresses*), de munir en quelque sorte l'ensemble des entrelacs lui-même d'une structure de groupe, dont les propriétés bien connues sont fort utiles pour la théorie.

L'approche combinatoire, qui repose sur l'étude d'une représentation plane de l'entrelacs, comme il est montré figure 1, et l'étude de certaines de ces caractéristiques: nombre de points doubles et analyse de leur position relative, symétries éventuelles de la figure, complexité du dessin, application de la théorie des graphes à ce type de figure, etc.

Une fois posée la définition des principaux outils théoriques, il convient de pouvoir calculer les quantités ainsi associées à chaque entrelacs de manière explicite. Cela devient très vite fastidieux si l'on ne dispose pas de moyens de calcul adaptés.

Notre propos est précisément centré sur l'aspect calculatoire et algorithmique des méthodes employées, de manière à mettre en valeur les applications du calcul formel dans le cadre de cette théorie. Nous étudierons surtout l'approche topologique et combinatoire, en renvoyant le lecteur à l'article d'Alain Jacquemard [Ja] (dans le même volume), où l'on trouvera de nombreux détails sur les méthodes reposant sur l'étude des groupes de tresses.

Les outils topologiques.

Comme signalé dans l'introduction, les méthodes topologiques employées pour étudier un entrelacs L reposent essentiellement sur l'analyse du complémentaire de l'entrelacs dans \mathbb{R}^3 . Il est aisé de montrer que cette variété est un invariant de l'entrelacs, c'est à dire que deux entrelacs isotopes ont des complémentaires homéomorphes. Il est néanmoins très difficile de décrire le complémentaire d'un entrelacs quelconque. C'est pourquoi nous restreignons notre travail à la description de quantités algébriques (calculables) attachées à cette variété.

Le groupe fondamental de l'entrelacs.

Notons M le complémentaire d'un entrelacs L dans \mathbb{R}^3 . Choisissons un point arbitraire x_0 de M , que nous appellerons *point base*. Considérons les *lacets de M basés en x_0* , c'est à dire les courbes continues de M d'origine et extrémité x_0 . Deux telles courbes sont équivalentes si l'on peut déformer continuellement l'une sur l'autre dans M . L'ensemble quotient ainsi obtenu est muni d'une structure de groupe par composition des lacets (Par exemple l'inverse d'un lacet est le même lacet parcouru en sens inverse). Ce groupe est appelé *le groupe de Poincaré* ou *le groupe fondamental de M* .

Définition *Le groupe fondamental d'un entrelacs L de \mathbb{R}^3 est le groupe fondamental du complémentaire M de L dans \mathbb{R}^3 .*

Tout groupe peut être décrit à l'aide d'une *présentation en générateurs et relations*. Un ensemble x_1, \dots, x_n d'éléments d'un groupe G forme un *système de générateurs de G* si tout élément x de G peut s'exprimer comme un *mot* en x_1, \dots, x_n , c'est à dire comme un produit de puissances de x_1, \dots, x_n :

$$x = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad , \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}.$$

Une *relation* est un mot du groupe exprimé en les générateurs égal à l'élément neutre, c'est à dire simplifiable dans tous les mots à l'intérieur desquels il apparaît.

Le groupe fondamental d'un entrelacs (qui est un invariant d'isotopie de l'entrelacs), admet une présentation en générateurs et relation, dite de **Wirtinger** [Ro] qui peut se lire directement sur une figure représentant l'entrelacs (cf figure 2):

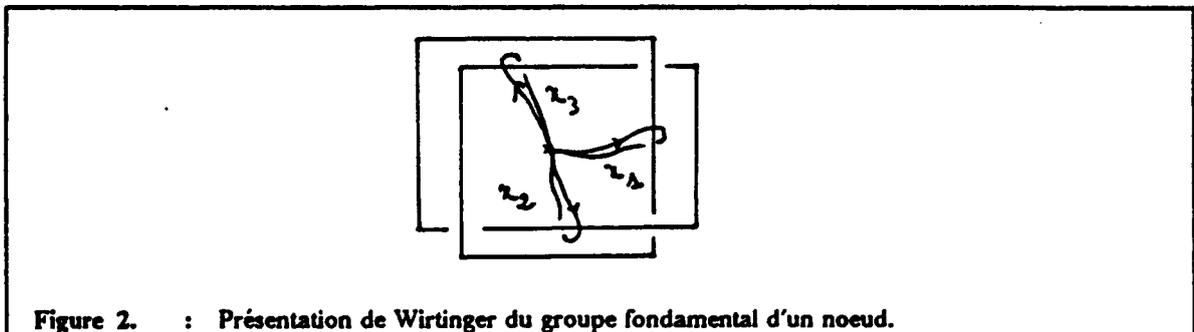


Figure 2. : Présentation de Wirtinger du groupe fondamental d'un noeud.

La figure précédente représente le *noeud trèfle*. A chaque "morceau" de la figure est associé un générateur x_1, x_2, x_3 du groupe fondamental, qui représente un *méridien* du noeud, c'est à dire une courbe qui "tourne une fois" autour du noeud. Les relations liant ces générateurs sont associées au points de croisements, suivant la règle suivante:

$$x_2 = x_3 x_1 x_3^{-1}$$

$$x_3 = x_1 x_2 x_1^{-1}$$

$$x_1 = x_2 x_3 x_2^{-1}$$

Si au lieu d'un noeud il s'était agi d'un entrelacs, nous aurions eu le même type de générateurs et de relations, mais il aurait fallu indiquer les générateurs par le numéro de la composante de l'entrelacs à laquelle ils appartiennent.

On peut remarquer que le groupe précédent est isomorphe au groupe $\{x, y, xyx = yxy\}$, ce qui rappelle qu'il n'est pas évident de déterminer si deux groupes présentés par générateurs et relations sont isomorphes. Néanmoins, nous disposons déjà d'une méthode algorithmique permettant d'associer à un entrelacs un invariant algébrique. Nous décrivons en appendice les grandes lignes d'un programme **PROLOG** qui réalise ce travail, épargnant en particulier d'avoir à numérotter à la main les morceaux de la figure. A partir d'une présentation du groupe fondamental, il est maintenant possible d'extraire des invariants numériques ou polynomiaux dont l'examen donne quantité de renseignements sur l'entrelacs.

Le polynôme d'Alexander.

Dans cette section, nous nous restreindrons aux cas des noeuds (bien qu'on puisse définir un polynôme d'Alexander à plusieurs variables pour un entrelacs quelconque). [Al, Ro, B-Z] Soit donc L un entrelacs de \mathbb{R}^3 , et G son groupe fondamental. Il est aisé de voir (par exemple à partir d'une présentation de Wirtinger) que l'abélianisé de G (c'est à dire le groupe obtenu à partir de G en simplifiant dans tous les mots les expressions de la forme $aba^{-1}b^{-1}$) est isomorphe à \mathbb{Z} (l'opération d'abélianisation consiste simplement à envoyer sur $1 \in \mathbb{Z}$ tous les générateurs x_i de la présentation de Wirtinger de G). Nous allons construire le polynôme d'Alexander du noeud trèfle, à partir de la présentation de la section précédente. Considérons les deux premières relations obtenues (la troisième s'en déduit), et posons: $x_2 = a_2 x_1^{-1}$ et $x_3 = a_3 x_1^{-1}$. Il vient:

$$x_1^{-1} a_2^{-1} a_3 x_1 a_3^{-1} = 1$$

$$x_1^{-1} a_3^{-1} x_1 a_2 = 1$$

Donc, si l'on remplace les expressions de la forme $x_i^k a_i^{\pm 1} x_i^{-k}$ par $\pm t^k a_i$, et si l'on note additivement, nous obtenons:

$$t^{-1}(a_3 - a_2) - a_3 = 0$$

$$-t^{-1}a_3 + a_2 = 0$$

Le déterminant de la matrice obtenue est un polynôme de Laurent en t : c'est le *polynôme d'Alexander* du noeud trèfle (défini à une plus ou moins une puissance de t près).

Ce polynôme peut se calculer de manière analogue pour tous les noeuds. Nous donnons en appendice les grandes lignes d'un programme **PROLOG** qui permet de l'obtenir. Ce polynôme est d'un intérêt capital en théorie des noeuds:

- i) Il permet de distinguer des noeuds. Par exemple, le noeud trèfle n'est pas isotope au noeud trivial (de polynôme d'Alexander 1) puisqu'ils n'ont pas le

même polynôme. Néanmoins, ce n'est pas un invariant complet: il peut exister une infinité de noeuds non isotopes ayant même polynôme d'Alexander. [Mo]

ii) Un noeud est dit alterné s'il admet une projection telle que les croisements rencontrés se fassent alternativement par dessus et par dessous (cf figure 3). Crowell [Cr] a montré que le polynôme d'Alexander des noeuds alternés était alterné (c'est à dire dont les signes des coefficients sont alternativement positifs et négatifs). Ceci permet en particulier de montrer l'existence de noeuds non alternés (cf figure 4).

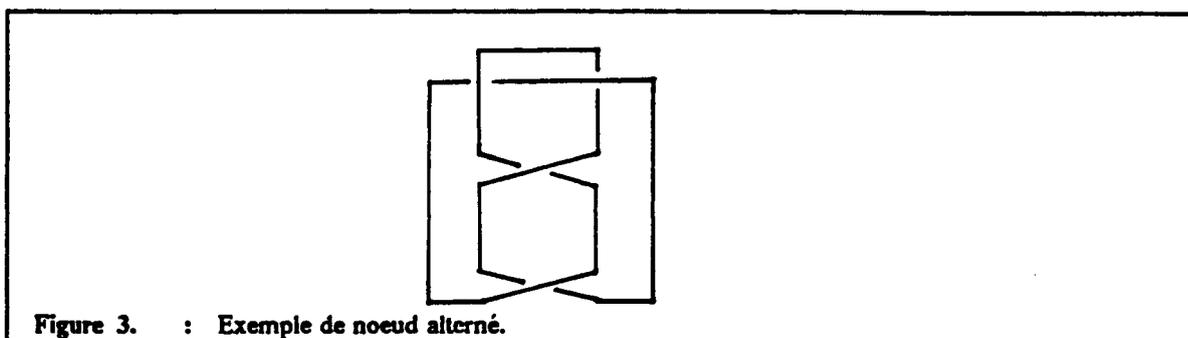


Figure 3. : Exemple de noeud alterné.

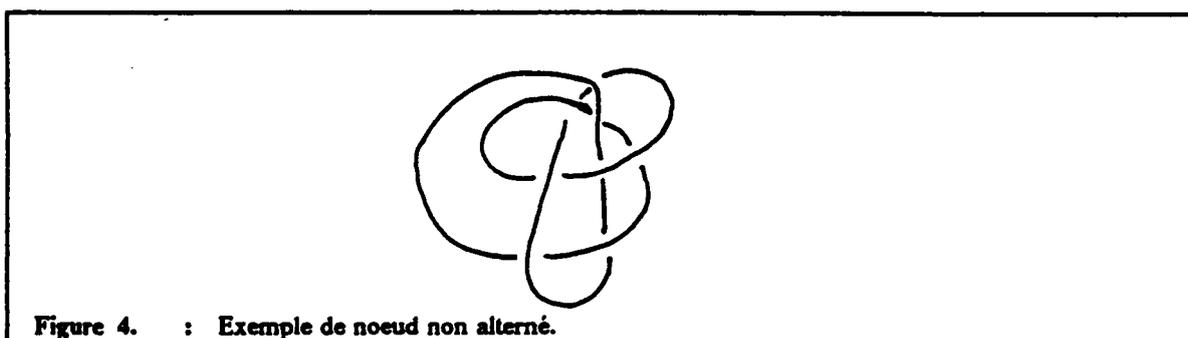


Figure 4. : Exemple de noeud non alterné.

Le nombre d'enlacement.

Soient deux noeuds L et L' de \mathbb{R}^3 . Une intéressante question est de chercher à mesurer de quelle façon ces deux courbes sont entremêlées dans l'espace, c'est à dire de pouvoir compter le "nombre de tours" que l'une fait autour de l'autre. Ce nombre entier, éventuellement négatif, est appelé le *nombre d'enlacement* de L et L' . La première définition de ce nombre a été donnée par Gauss [Ga] et repose sur une formule intégrale utilisant une représentation paramétrique des deux courbes.

L'approche topologique permet de donner une définition plus pratique de ce nombre, même lorsque les courbes ne sont pas différentiables. En effet, L' est une courbe fermée dans le complémentaire M de L , donc représente un élément du groupe fondamental G de L . Or nous avons déjà signalé lors de la précédente section que l'opération d'abélianisation sur G consistait en un homomorphisme surjectif de G sur \mathbb{Z} . Nous pouvons donc poser la définition:

Définition : [Ro] *Le nombre d'enlacement de L et L' , noté $L(L, L')$, est l'image dans \mathbb{Z} de L' par l'application d'abélianisation du groupe fondamental de L .*

On peut alors calculer facilement le nombre d'enlacement de deux noeuds à partir d'une projection plane représentant l'enlacement. En effet, associons à chaque croisement du dessin un signe suivant les conventions de la figure figure 5:

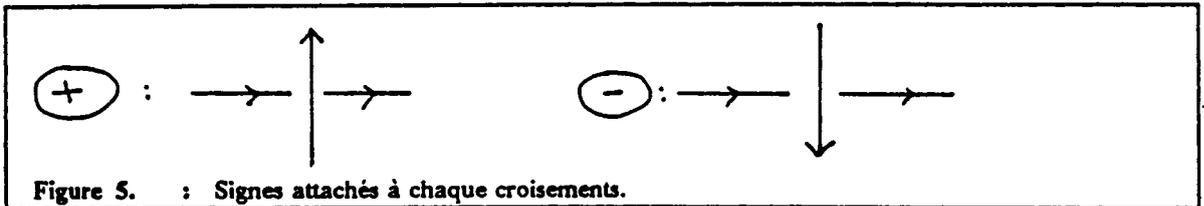


Figure 5. : Signes attachés à chaque croisements.

Le nombre d'enlacement de L et L' est alors obtenu en suivant la courbe L' et en sommant les signes des croisements où elle passe sous la courbe L (cf figure 6).

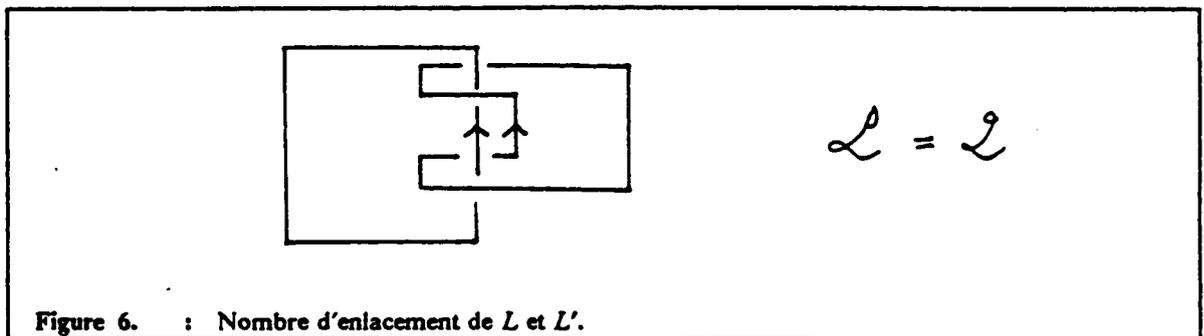


Figure 6. : Nombre d'enlacement de L et L' .

Ce nombre est un invariant d'isotopie de l'entrelacs. Il faut toutefois prendre garde qu'on ne peut définir de la même manière un "nombre d'autoenlacement" d'un noeud L , comme nous l'illustrons figure 7:

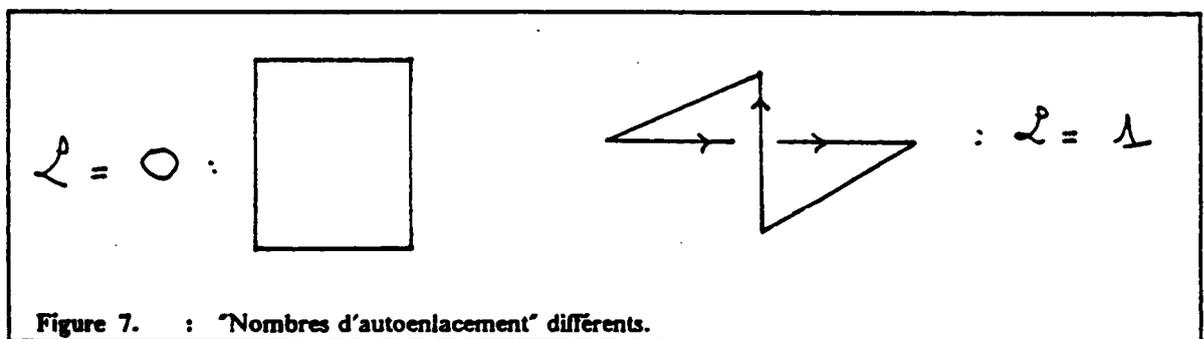


Figure 7. : 'Nombres d'autoenlacement' différents.

Les nombres d'enlacements généralisés.

Considérons la figure suivante:

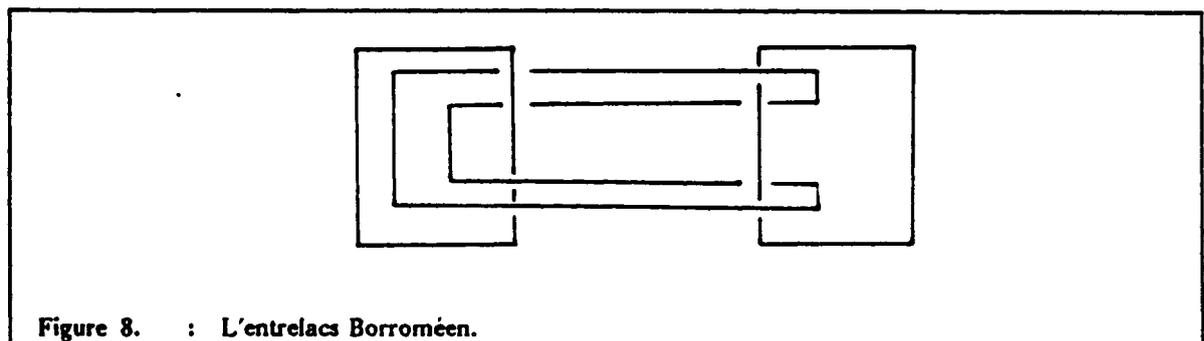


Figure 8. : L'entrelacs Borroméen.

L'examen de cet entrelacs conduit à deux remarques:

i) Les nombres d'enlacement des composantes de l'entrelacs prises deux à deux sont nuls, et l'on constate même que l'entrelacs obtenu en supprimant l'une quelconque des composantes est trivial (on peut totalement "séparer" les deux composantes restantes).

ii) Néanmoins, l'entrelacs "tient". On peut intuitivement se persuader qu'il n'existe aucune déformation continue de la figure qui conduise à l'entrelacs trivial à trois composantes sans que les composantes ne se coupent.

Si nous désirons mesurer numériquement ce phénomène, le nombre d'enlacement précédemment défini pour deux composantes ne suffit plus: il devient nécessaire d'introduire un *nombre d'enlacement généralisé*, qui englobe les trois composantes simultanément. Une définition correcte a été donnée par **Milnor** [Mi] pour un entrelacs quelconque, qui fait intervenir des quotients successifs du groupe fondamental de l'entrelacs et un outil algébrique complexe, le *calcul différentiel de Fox*. [Fo]

Notre propos n'étant pas ici d'étudier le cas le plus général, nous renvoyons le lecteur intéressé à l'appendice, où nous décrivons un programme **PROLOG** qui réalise les passages au quotient nécessaires et met en oeuvre le calcul de Fox. Dans le cadre de cet article, nous nous contenterons d'étudier un cas particulier d'entrelacs à trois composantes, représenté par la figure 9.

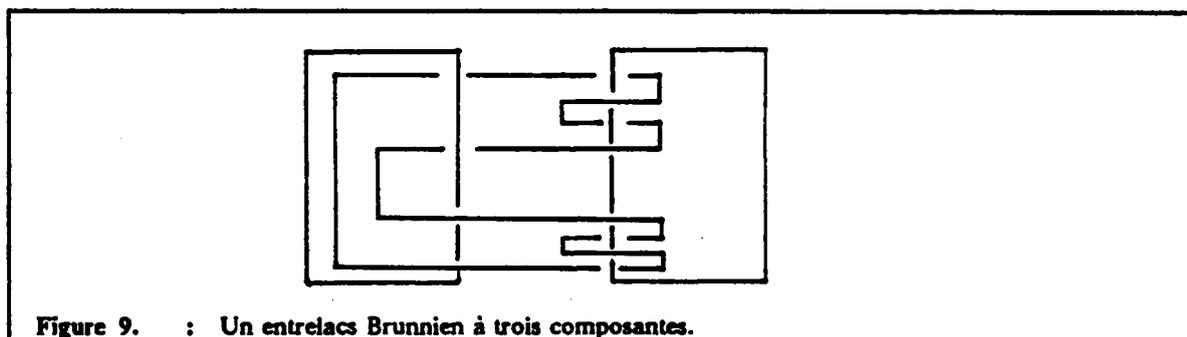
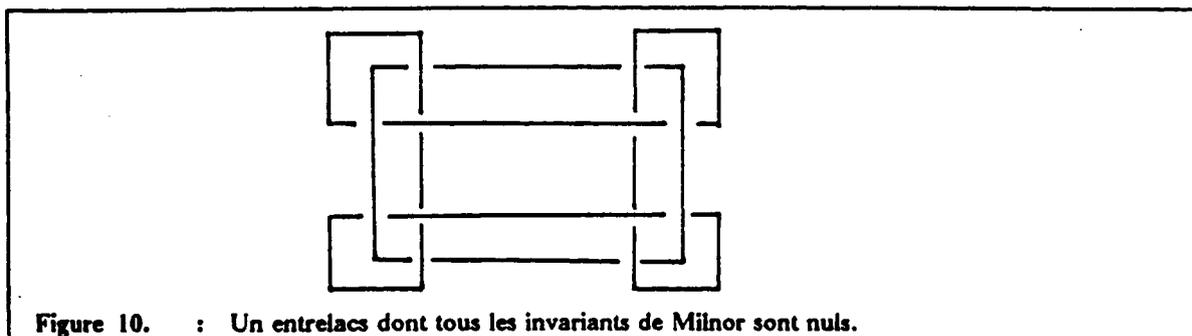


Figure 9. : Un entrelacs Brunnien à trois composantes.

La figure 9 généralise la figure 8 en ce sens que la suppression de l'une quelconque des composantes de l'entrelacs donne un entrelacs trivial à deux composantes. L'*invariant de Milnor* noté $\mu(1,2,3)$ peut alors se définir comme suit: partons d'un point a de la composante ℓ_3 et parcourons cette composante dans le sens donné par son orientation. A chaque fois qu'elle passe sous la composante ℓ_1 en un point i , notons α_i le signe du croisement suivant les conventions de la figure 5. Mais au lieu de faire la somme des α_i - ce qui donnerait le nombre d'enlacement de ℓ_3 et ℓ_1 , c'est à dire 0 - on pondère chaque α_i en le multipliant par le nombre de fois, compté avec signe, où ℓ_3 est déjà passé sous ℓ_2 (sorte de nombre d'enlacement "partiel"). Le nombre entier ainsi obtenu est $\mu(1,2,3)$. [L-M]

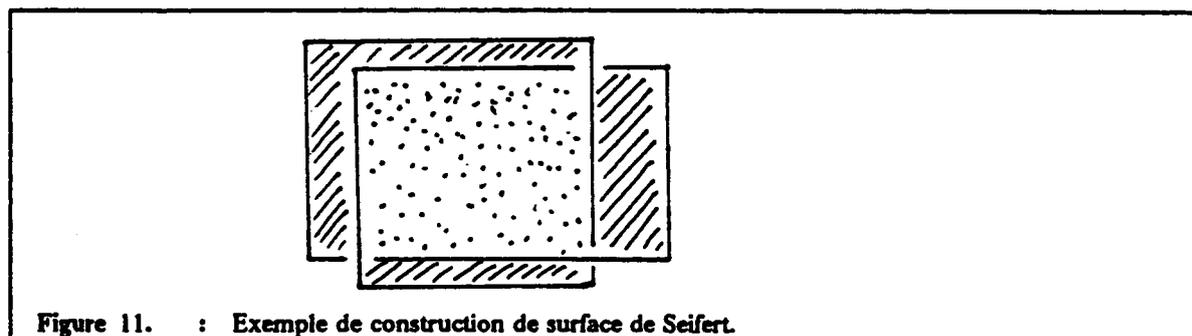
Comme nous l'avons signalé précédemment, Milnor définit en fait pour un enlacement quelconque une famille d'invariants μ généralisant celui que nous venons de décrire. Il ne s'agit pas, néanmoins, d'une famille complète d'invariants: l'exemple de la figure 10 est celui d'un enlacement non trivial dont tous les invariants de Milnor sont nuls.



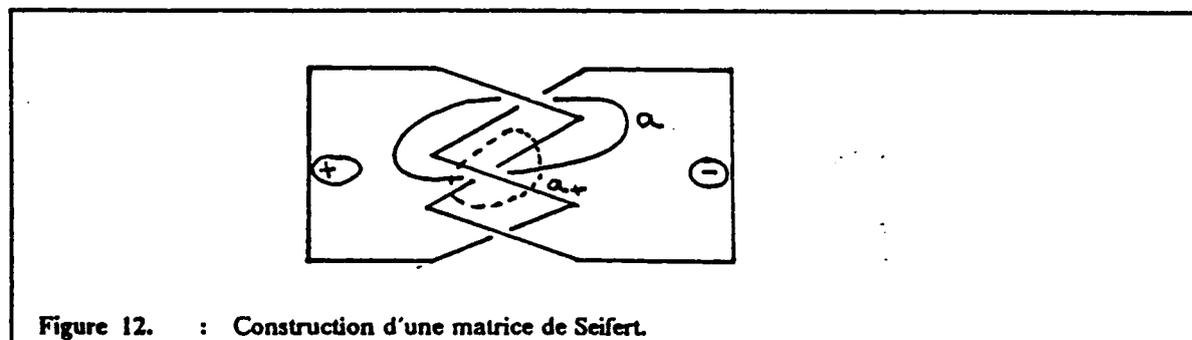
Les invariants de Milnor présentent de nombreuses propriétés de symétrie qui en facilitent souvent le calcul. On pourra trouver dans [R] une formule donnant les invariants de Milnor des entrelacs formés de trois noeuds du tore.

Les invariants de Seifert.

Il est également possible d'obtenir des informations sur un entrelacs L à partir d'une surface connexe orientée bordée par L : une **surface de Seifert de L** . Un exemple de construction de telle surface est donnée figure 11.



L'information numérique qu'on peut retirer d'une matrice de Seifert s'obtient au moyen de la **forme de Seifert**. Une surface de Seifert étant orientée, elle présente deux faces: une face "positive" et une face "négative". Considérons un ensemble x_1, \dots, x_n formant une base de l'ensemble des cycles de la surface S . Poussons légèrement ces cycles hors de S du côté positif pour obtenir les cycles x_1^+, \dots, x_n^+ . (cf figure 12)



Pour tout $i, j \in 1, \dots, n$ notons a_{ij} le nombre d'enlacement de x_i et x_j^+ .

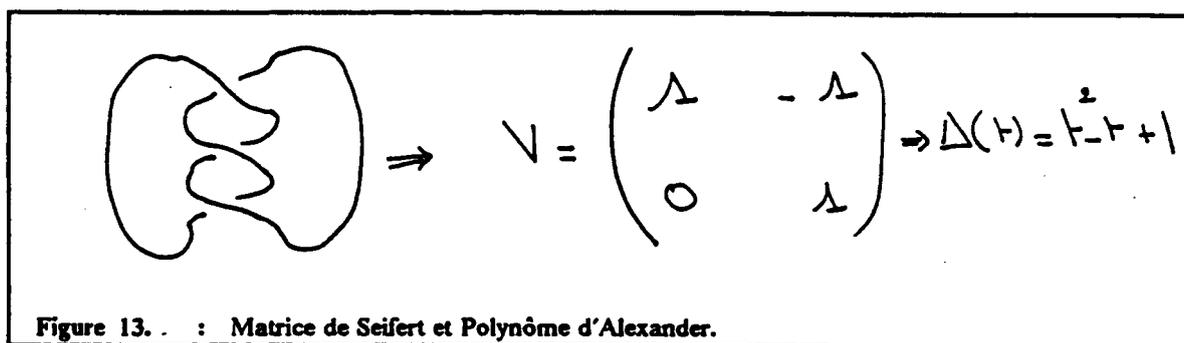
Définition: La matrice des entiers a_{ij} ainsi obtenue est une *matrice de Seifert* de l'entrelacs.

Remarquons que cette matrice est loin d'être unique, puisqu'il y a quantité de choix possibles pour la surface de Seifert bordée par l'entrelacs et pour le système de cycles de la surface désigné comme base. Toutefois, deux invariants de l'entrelacs peuvent aisément s'obtenir à partir de cette matrice:

Théorème: [Ro, B-Z] Si V est une matrice de Seifert d'un entrelacs L , et si on note V^T la transposée de la matrice V , alors le polynôme d'Alexander $\Delta(t)$ de L est donné par:

$$\Delta(t) = \det(V^T - tV) .$$

L'exemple de la figure 13 est une application de ce résultat au calcul du polynôme d'Alexander du noeud trèfle.



On peut remarquer sur cet exemple que le noeud trèfle a été représenté de telle sorte qu'il soit aisé d'exhiber une base de cycles d'une de ses surfaces de Seifert, afin de pouvoir calculer une matrice de Seifert. Cela n'est pas toujours aussi simple. Nous décrivons en appendice une méthode, aisément programmable, permettant de calculer une matrice de Seifert - et donc le polynôme d'Alexander - d'un entrelacs présenté en tresse. Dans ce cas en effet, il est beaucoup plus facile de trouver une base d'une surface de Seifert bordée par l'entrelacs.

Le deuxième invariant de l'entrelacs que l'on peut obtenir à partir d'une matrice de Seifert est la *signature du noeud*.

Théorème: Soit L un entrelacs et V une matrice de Seifert de L . La signature de la forme $V + V^T$ est un invariant d'isotopie de L , appelée la signature de L .

L'un des intérêts de la signature ainsi définie se révèle dans le problème de la classification des noeuds pour une relation d'équivalence plus faible que l'isotopie, la *concordance*.

Définition: Deux entrelacs L et L' sont dits concordants s'il existe un cylindre $S^1 \times [0, 1]$ plongé dans $\mathbb{R}^3 \times [0, 1]$ dont les extrémités soient $L \times \{0\}$ et $L' \times \{1\}$. Un entrelacs est dit slice s'il est concordant à l'entrelacs trivial.

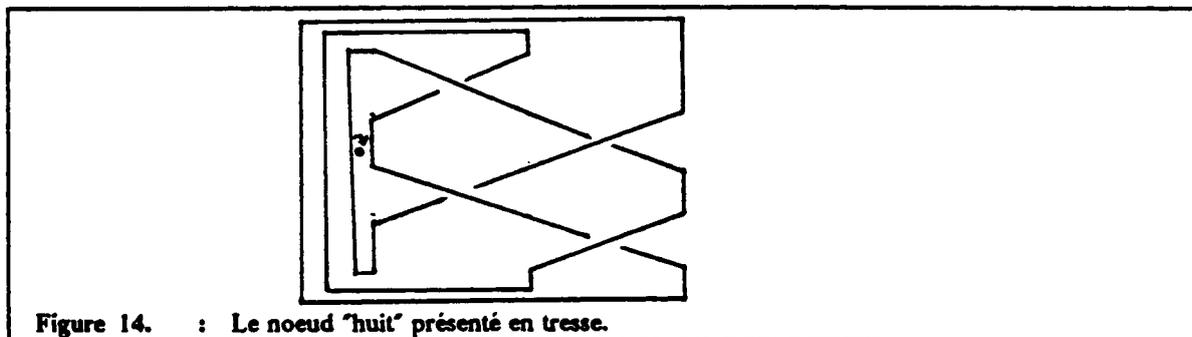
On a alors le:

Théorème: Des entrelacs concordants ont même signature. En particulier, la signature d'un entrelacs slice est nulle.

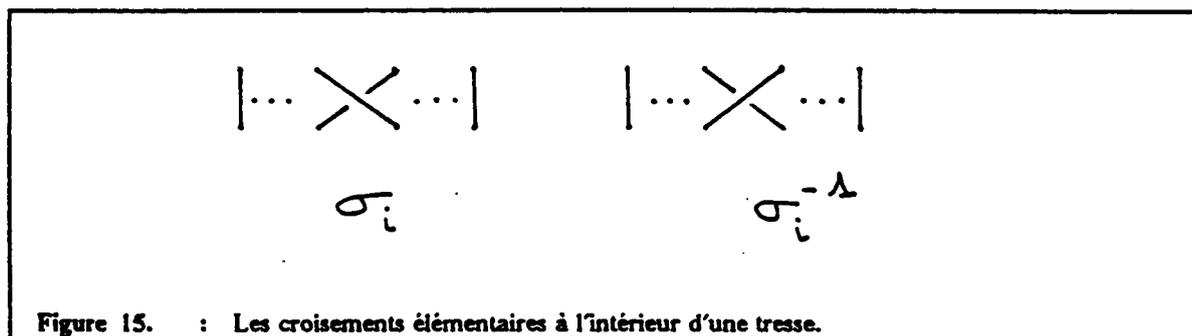
Signalons qu'il existe plusieurs manières de calculer la signature d'un noeud. L'une d'elle, particulièrement pratique, a été décrite par Gordon et Litherland. [G-L]

Les Tresses.

Ce sujet étant traité en détail dans le même volume par Alain Jacquemard [Ja] nous dirons peu à ce sujet. Signalons toutefois, sans donner de précision, que pour une droite D de \mathbb{R}^3 , une *tresse d'axe D* est un enlacement qui conserve toujours la même orientation par rapport à D . [Bi] La figure 14 représente le noeud "huit", ainsi qu'une de ses présentations en tresse, l'axe D étant représenté par un point:



Il apparaît sur la figure précédente qu'une tresse présente un certain nombre de *brins*, qui s'entrecroisent à partir de croisements élémentaires qui sont dessinés figure 15:



On sait alors que les tresses à n brins forment un groupe B_n dont les générateurs sont les croisements élémentaires. Ainsi, il est en quelque sorte possible de munir l'ensemble des entrelacs d'une structure de groupe, ce qui rend possible la formulation - et la résolution - algébrique des problèmes signalés dans la précédente section.

En particulier le calcul de matrices de Seifert, de polynômes d'Alexander, de signatures, etc. se trouve facilité par une présentation en tresses. De plus, le problème de l'isotopie entre les entrelacs, qui revient cette fois à savoir si deux tresses représentent la même classe d'isotopie, se ramène à un problème de la conjugaison dans des groupes présentés par générateurs et relations, et peut donc admettre un traitement par calcul formel type système de réécriture ou autre.

L'approche combinatoire.

L'approche combinatoire se distingue des deux précédentes en ceci qu'au lieu d'essayer d'extraire des informations de nature algébrique du complémentaire de l'entrelacs ou à partir du groupe des tresses, il s'agit cette fois d'examiner le dessin de l'entrelacs en tant que tel. Dans toute la suite, nous appellerons *diagramme de l'entrelacs L* une projection plane de l'entrelacs dans laquelle apparaissent au plus

des points doubles (c'est le cas de tous les exemples que nous avons représentés jusqu'à présent). Nous pouvons dès lors examiner de tels diagrammes avec plusieurs points de vue:

- i) Mettre en valeur les propriétés géométriques du diagramme: nombre de points doubles, symétries éventuelles, régularité du dessin en un sens à préciser, etc.
- ii) Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux diagrammes représentent le même entrelacs.
- iii) Trouver un codage efficace des diagrammes afin d'établir des tables d'entrelacs aussi exhaustives que possible.
- iv) Calculer des invariants de l'entrelacs non plus à partir de données topologiques liées au complémentaire de l'entrelacs, mais déterminables directement à partir du diagramme.
- v) Associer un graphe plan au diagramme représentant l'entrelacs, de façon à pouvoir disposer des outils combinatoires usuels de théorie des graphes dans l'étude et la classification des entrelacs.

Il est bien sûr impossible de décrire dans le détail les possibilités de ces différentes approches, dont la plupart sont encore actuellement en cours de développement. Nous donnons à cette fin une liste de références aussi complète que possible pour donner satisfaction au lecteur intéressé. Nous nous contenterons ici d'insister sur les méthodes de calcul employées et nous mettrons surtout l'accent sur l'apport de l'informatique dans ces diverses directions. Signalons d'ores et déjà que les programmes répondant aux besoins dont nous venons de faire la liste existent déjà, mais qu'il n'existe à notre connaissance aucune "banque de logiciels" ni aucune revue qui les rassemblent et les décrivent de façon explicite.

Les transformations de Reidemeister.

Le théorème de base [B-Z] sur lequel repose une bonne part du travail de classification des entrelacs à partir des diagrammes remonte au début du siècle, et se trouve dans les oeuvres de Reidemeister. La figure 16 représente une série de trois modifications locales d'un diagramme représentant un entrelacs L .

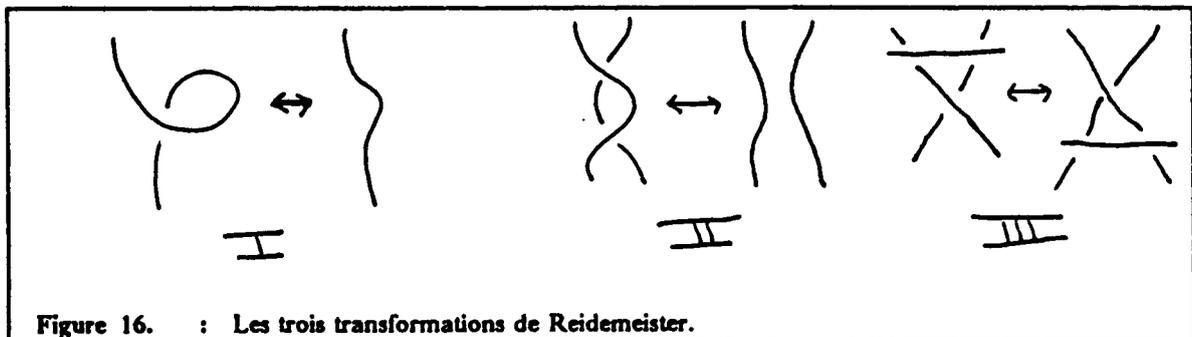


Figure 16. : Les trois transformations de Reidemeister.

Il est clair que ces modifications élémentaires ne modifient pas le type de l'entrelacs que le diagramme représente. Mais nous avons également l'affirmation réciproque:

Théorème: Deux entrelacs L et L' représentés par les diagrammes D et D' appartiennent à la même classe d'isotopie si et seulement si on peut passer de D à D' par une suite finie de transformations de Reidemeister.

Il ne faut certes pas se laisser abuser par l'apparente simplicité de l'énoncé ci-dessus: il peut en effet donner à croire qu'il est alors aisé de déterminer si deux entrelacs représentés par leurs diagrammes respectifs sont ou non équivalents. Il n'en est hélas rien. En particulier, il n'est même pas évident par ce simple procédé (ni même par d'autres!) d'affirmer si un diagramme représente ou non le noeud trivial!

Toutefois, ce théorème présente une utilité certaine: en effet, un invariant du type de l'entrelacs est simplement une quantité constante par transformation de Reidemeister. Ce point de vue a été développé par plusieurs auteurs, dont **Kauffman** [Ka] pour construire plusieurs invariants de nature polynômiale, tous de grande utilité. Nous allons dans la section suivante expliciter deux d'entre eux.

Les polynômes d'Alexander et de Jones.

Nous avons déjà abordé le polynôme d'Alexander sous l'aspect topologique. Une définition combinatoire a été donnée par **Conway** [Co] à partir d'un diagramme représentant l'entrelacs. Précisons quelques notations: soient L_+ , L_- , L_0 trois entrelacs admettant des diagrammes identiques exceptés en un seul point double, où ils se présentent de la façon suivante:

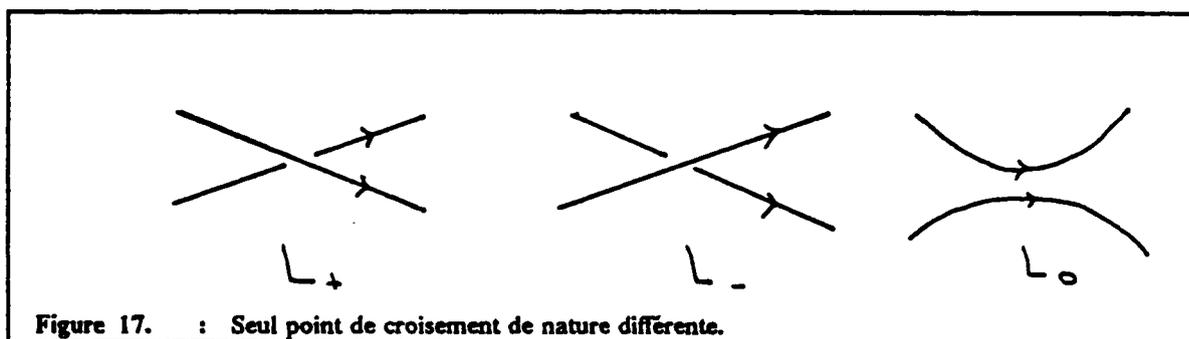


Figure 17. : Seul point de croisement de nature différente.

Théorème: A tout entrelacs L on peut associer un unique polynôme $\Delta_L(t)$, dit polynôme d'Alexander-Conway, caractérisé par les relations suivantes (le noeud trivial est noté T):

$$i) \Delta_T(t) \equiv 1$$

$$ii) \Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta_{L_0}(t).$$

Il est facile de se persuader qu'en modifiant un nombre fini de croisements dans le diagramme d'un entrelacs, on peut toujours se ramener à l'entrelacs trivial. Par conséquent l'énoncé précédent permet, en utilisant un "arbre de dénouage" d'un entrelacs, de calculer son polynôme d'Alexander. Il est à noter que cet algorithme, de complexité exponentielle, n'est pas le plus efficace qui permette ce calcul, puisqu'il existe, comme nous l'avons vu précédemment, une définition du polynôme d'Alexander en termes de déterminant.

Un important polynôme invariant fut découvert récemment en combinant les travaux de **Jones** sur les algèbres de Von Neumann et les travaux de **Birman** sur les tresses: le polynôme de Jones. [Jo] Il admet une définition combinatoire qui permet

de le calculer à partir d'un diagramme représentant l'entrelacs, de manière analogue au polynôme d'Alexander:

Théorème: *A tout entrelacs L on peut associer un unique polynôme $V_L(t)$, dit polynôme de Jones, caractérisé par les relations suivantes (le noeud trivial est noté T):*

i) $V_T(t) \equiv 1$

ii) $t^{-1}V_{L_-}(t) - tV_{L_+}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t)$.

Bien que cette définition formelle paraisse très semblable à celle du polynôme d'Alexander, ces deux invariants sont de nature très différente:

i) On connaît bien l'interprétation topologique du polynôme d'Alexander, à partir du groupe fondamental du complémentaire de l'entrelacs, mais pas encore celle du polynôme de Jones.

ii) Ces deux polynômes ne permettent pas de différencier les mêmes entrelacs. Par exemple, le noeud trèfle et son "image miroir" (cf figure 18) ont même polynôme d'Alexander (puisque leurs complémentaires sont homéomorphes) mais leurs polynômes de Jones sont distincts.

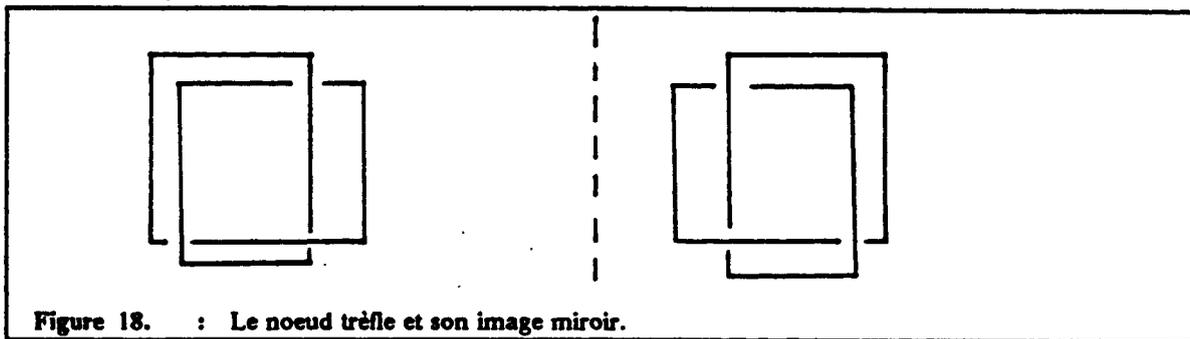


Figure 18. : Le noeud trèfle et son image miroir.

La formule donnant le polynôme de Jones permet son calcul par un algorithme de complexité exponentielle. Un algorithme de complexité moindre, s'il existe, reste à trouver.

L'une des importantes applications du théorème de Jones est la réponse positive à une conjecture de Tait, qui fut récemment démontrée par Thistlethwaite. [Th]

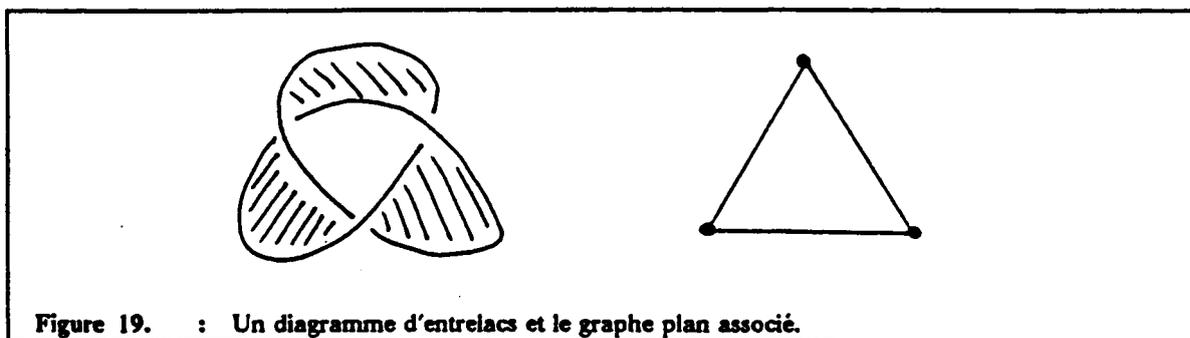
Théorème: *Soit L un entrelacs alterné, admettant un diagramme alterné D (voir définition à la section précédente), avec m points doubles. Alors tout diagramme représentant L admettra au moins m points doubles.*

Signalons qu'à l'aide des transformations de Reidemeister, Kauffman a exhibé dans un très bel article, de manière tout à fait élémentaire, un invariant polynômial très proche du polynôme de Jones, et qu'il indique comment obtenir d'autres invariants par des procédés analogues.

Noeuds et graphes.

La théorie des graphes permet la formalisation et l'étude des propriétés combinatoires d'objets géométriques, représentables en particulier par des matrices. Or il est possible, de multiple manière, d'associer un graphe à un diagramme

d'entrelacs. Cette possibilité, jointe à la manipulation de concepts inhérents à la théorie des graphes (arbres générateurs, cycles, etc.) [Tu] fut utilisée par Auman [Au] et Crowell [Cr] pour mettre à jour des propriétés non triviales des noeuds alternés (en particulier que les polynômes d'Alexander des noeuds alternés sont alternés). Plus récemment, on doit à Thistlethwaite [Th] la mise en parallèle d'un célèbre polynôme de théorie des graphes, le polynôme de Tutte [Tu] avec le polynôme de Jones. La figure 19 montre comment, en coloriant le complémentaire d'un diagramme D comme un échiquier, on peut associer un graphe plan G au diagramme D .



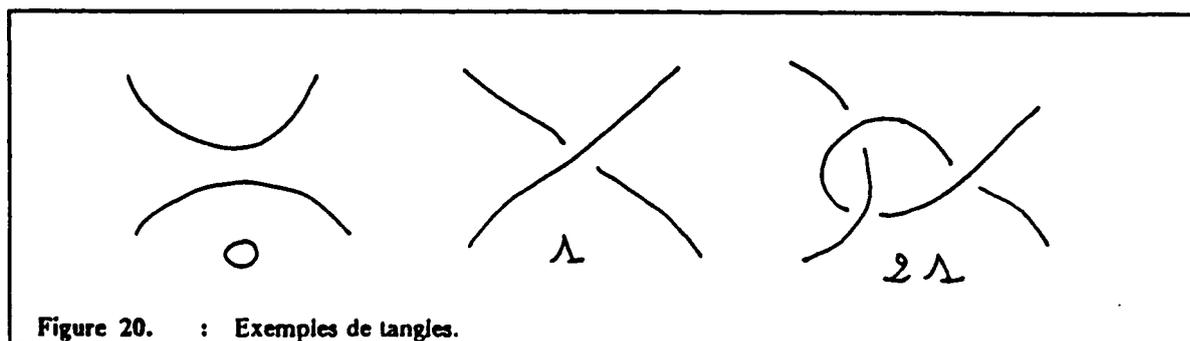
On peut montrer que si le diagramme D est *alterné*, le polynôme de Tutte du graphe G associé est égal, à multiplication par une puissance de t près, au polynôme de Jones de l'entrelacs qu'il représente. Des propriétés combinatoires du polynôme de Tutte s'ensuivent des propriétés du polynôme de Jones, directement exploitables pour la description et la classification des entrelacs.

Cette voie nous paraît propice au traitement sur machine. En effet, le codage des graphes sur ordinateur et la description d'algorithmes peu coûteux permettant de les manipuler sont bien connues (Par ex. le dénombrement des arbres générateurs d'un graphe connexe, la mise à jour d'un arbre générateur vérifiant telle ou telle propriété, la détermination d'une base de circuits du graphe, etc.).

Les tables de Conway.

Nous avons déjà signalé le problème du codage des noeuds et entrelacs. La solution adoptée par Conway [Co] lui a permis de lister tous les noeuds à moins de onze croisements, tous les entrelacs à moins de dix croisements, et d'étudier certaines propriétés de leurs invariants algébriques.

Le concept de base de cette notation est celui de *tangle*. Il s'agit d'une portion d'un diagramme D de laquelle émergent exactement quatre arcs pointant dans les directions NO, NE, SO, SE, tel que représenté sur la figure 20.



A partir d'un tangle t , représenté symboliquement par un cercle contenant la lettre majuscule L, on peut en construire plusieurs autres par rotations et symétries comme indiqué figure 21.

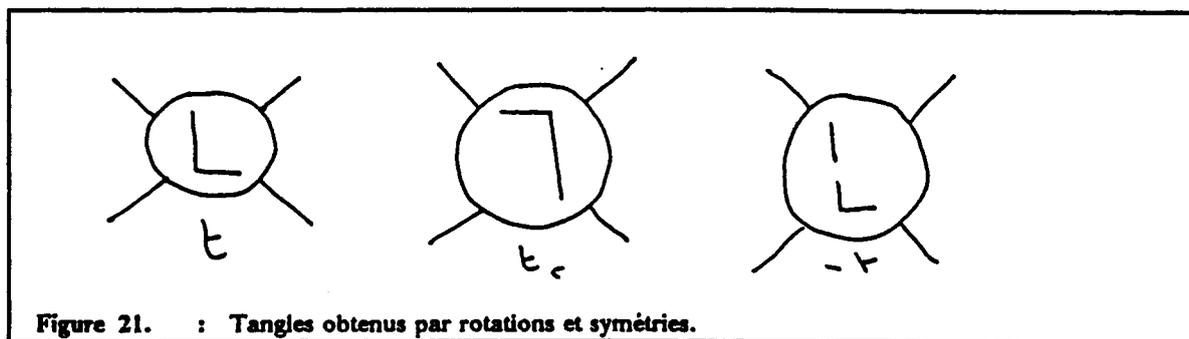


Figure 21. : Tangles obtenus par rotations et symétries.

On peut également combiner et modifier les tangles par les opérations de la figure 22, afin d'obtenir à partir des tangles a et b les nouveaux tangles $a + b$, (ab) , $a +$, $a -$. On appelle *algébriques* les tangles qui peuvent être obtenues de cette façon à partir des tangles 0 et ∞ . Nous avons en particulier les tangles *entiers* $n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n$ et $-n = \overline{n} = \overline{1} + \dots + \overline{1}$. Si m, n, \dots, s, t sont des tangles entiers, le tangle $mn \dots st$ est dit *rationnel*.

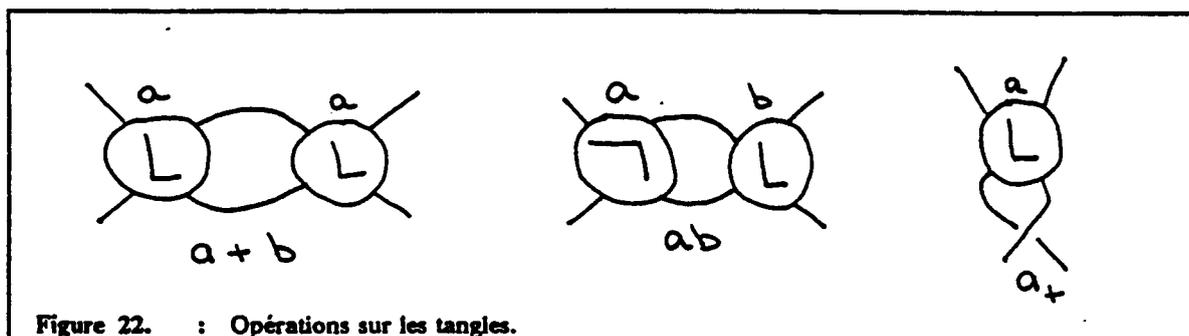


Figure 22. : Opérations sur les tangles.

On remarque qu'il est possible de remplacer chaque croisement d'un diagramme D par le tangle ± 1 ; de fait, Conway montre que tout diagramme D peut, à l'aide des opérations définies ci-dessus, se représenter comme un tangle algébrique, dont le codage est celui que nous venons de décrire. Puis, en caractérisant l'équivalence d'isotopie à l'aide du concept de tangle, la table complète des noeuds à moins de 11 croisements a pu être établie.

Conclusion.

Comme nous l'avons déjà signalé, il serait souhaitable de regrouper en une "banque de logiciels" unique l'ensemble des programmes attenants à la théorie. Nous n'avons (et pour cause) bien évidemment pas établi dans cet article une liste exhaustive des outils théoriques employés ni des implantations sur machine existantes. Par exemple, il serait intéressant de disposer d'un algorithme de complexité polynômiale permettant d'exprimer en tresse un entrelacs quelconque. (Cela permettrait, entre autre, d'obtenir une méthode efficace de calcul du polynôme de Jones). D'autre part, les techniques de systèmes de réécriture, type algorithmes de Knuth et Bendix améliorés, peuvent permettre, en traitant certains problèmes de conjugaison de mots dans les groupes de tresse, d'aborder de manière algébrique la classification des entrelacs.

Bibliographie

- [Al] Alexander J.W.: *Topological invariants of knots and links*. Trans. Amer. Math. Soc., 30 (1968).
- [Au] Aumann R.J.: *Asphericity of alternating knots*. Ann. of Math., (2) 64 (1956).
- [Bi] Birman J.S.: *Braids, links and mapping class groups*. Ann. Math. Studies 82 (1974).
- [B-Z] Burde G. - Zieschang H.: *Knots*. Walter de Gruyter, Berlin. New York (1985).
- [Co] Conway J.H.: *An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties*. Computational problems in Abstract Algebra, Proc. Conf. Oxford (1967).
- [Cr] Crowell R.H.: *Genus of alternating link types*. Ann. of Math., 69 (1959).
- [De] Delahaye J.L.: *Outils logiques pour l'intelligence artificielle*. Editions Eyrolles.
- [Fo] Fox R.H.: *Free differential calculus I*. Ann. of Math., 57 (1953).
- [Ga] Gauss K.F.: *Zur mathematischen Theorie der electrodynamicism Wirkungen*. Werke Königl. Gessell. Wiss. Göttingen, vol 5, (1877).
- [G-L] Gordon C. McA - Litherland R.A.: *On the signature of a link*. Invent. Math., 47 (1978).
- [Ja] Jacquemard A.: *Calcul formel sur les tresses fermées*. (dans ce même volume).
- [Jo] Jones V.: *A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebras*. Bull. Am. math. Soc., vol 12, Number 1, (1985).
- [Ka] Kauffman L.H.: *States models and the Jones polynomials*. Topology, Vol. 26, No 3., (1987).
- [L-M] Langevin R. - Michel F.: *Nombres de Milnor d'un entrelacs brunnien*. Bull. Soc. Math. Fr. Tome 113, Fasc. 1, (1985).
- [Mi] Milnor J.: *Isotopy of links*. Lefschetz symposium, Princeton Math. Ser. 12 (1957).
- [Mo] Morton H.R.: *Infinitely many fibered knots having the same Alexander polynomial*. Topology, 17 (1978).
- [Ro] Rolfsen D.: *Knots and links*. Publish of Perish, (1975).
- [R] Rolin J.Ph.: *Géométrie intégrale et invariants d'isotopie*. Thèse de troisième cycle, Dijon (1985).
- [Ta] Tait P.G.: *On Knots I, II, III*. Scientific Papers, I. Cambridge Univ. Press (1898).
- [Th] Thistlethwaite M.B.: *A spanning tree expansion of the Jones polynomial*. Topology Vol 26, No 3, (1987).
- [Tu] Tutte W.T.: *Graph Theory*. Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol 21, (1984).

APPENDICE

Le langage PROLOG.

Afin d'éclairer quelques unes des méthodes de calcul formel employées pour décrire les invariants que nous avons définis dans l'article ci-joint, il est bon de donner quelques précisions sur un langage de programmation particulièrement adapté aux méthodes d'intelligence artificielle ainsi qu'au calcul formel: le langage PROLOG [De].

Le langage PROLOG est essentiellement basé sur *la logique des prédicats du premier ordre*. C'est ainsi que les faits qui constituent les connaissances initiales d'un programme PROLOG ainsi que les règles permettant de les manipuler sont représentés par des **prédicats**. L'exemple suivant peut éclairer ces notions: les faits de base décrivent certaines relations de parenté directe entre plusieurs personnes, et les règles d'inférence ont pour objet de décrire, à partir de ces relations, des informations sur la parenté au second ordre (grand-parent, etc.). Le programme aura l'allure suivante:

```
pere(Jean, Paul).
pere(Marc, Antoine).
pere(Paul, Sophie).
mere(Sophie, Jacques).

parent(*X, *Y) if pere(*X, *Y).
parent(*X, *Y) if mere(*X, *Y).

grand-parent(*X, *Y) if parent(*X, *Z) and parent(*Z, *Y).
```

Exemple de programme PROLOG

Le prédicat **parent** définit X comme étant parent de Y s'il en est le père ou la mère, et le prédicat **grand-parent** est défini de façon naturelle en utilisant le prédicat **parent**. Les noms ou lettres précédés d'une étoile représentent des variables. On peut alors interroger le programme de deux manières:

- i) Usage déterministe: on pose une question dont la réponse est VRAI ou FAUX. (exemple: grand-parent(Jean, Sophie)? Réponse: VRAI.)
- ii) Usage non déterministe: on demande la liste de tous les éléments satisfaisant tel ou tel prédicat. (exemple: grand-parent(*X, *Y)? Réponse: la liste de tous les couples de prénoms vérifiant la relation grand-parent.)

Nous disposons donc d'un **moteur d'inférence** qui explore successivement toutes les **clauses** constitutives d'un prédicat et testant si leur définition permet de répondre affirmativement à la question posée.

Le langage PROLOG permet, à l'instar de LISP, de manipuler des objets structurés sous forme de **listes**. L'exemple suivant, où l'on définit un prédicat **append** permettant la concaténation de deux listes, permettra de comprendre de

quelle manière les listes peuvent être manipulées (le symbole NIL représente la liste vide):

```
append(NIL, *X, *X).
append(*X . *Y, *Z, *X . *T) if append(*Y, *Z, *T).
```

La notation $*X . *Y$ signifie que $*X$ est le premier élément de la liste $*X . *Y$.

Exemple de manipulations de liste.

De même que l'on peut concaténer deux listes, il est possible de ranger les éléments d'une liste en ordre inverse, d'extraire d'une liste tel ou tel élément, etc.

Illustrons par un exemple l'utilité de ce type de notation en Calcul Formel: Soit G un groupe, engendré par les éléments x_1, \dots, x_n . Un élément quelconque de ce groupe est alors représentable comme un *mot* en les générateurs, et nous aurons:

$$x = x_1^{n_1} \dots x_p^{n_p}$$

Les puissances sont des éléments de Z . Un tel élément sera alors représenté par la liste:

$$[(x_1, n_1), \dots, (x_p, n_p)]$$

le produit de deux éléments correspondra à la concaténation de deux listes, l'inverse d'un élément s'obtiendra en renversant la liste et en remplaçant tous les deuxièmes éléments des couples par leurs opposés, etc. De la même manière, un homomorphisme de groupes pourra se représenter par un précat à deux arguments, le deuxième symbolisant l'image du premier par l'homomorphisme, et la définition du prédicat correspondant aux règles d'application de l'homomorphisme.

Cette construction se généralise à des structures diverses, anneaux, corps, etc., en considérant par exemple des listes de listes. L'objet des sections suivantes est précisément de décrire succinctement des applications des possibilités du langage PROLOG dans le cadre du calcul des invariants de la Théorie des Noeuds.

La présentation de Wirtinger du groupe fondamental.

Par la suite, nous utiliserons les définitions et notations de l'article ci-joint. Un noeud ou entrelacs de \mathbb{R}^3 peut se représenter par un tracé linéaire par morceaux, dont il est aisé de stocker les coordonnées dans un fichier. Le programme construisant à partir de ces données une présentation de Wirtinger du groupe fondamental de l'entrelacs est décrit comme suit:

Stockage dans une liste L des couples d'entiers correspondant aux extrémités des segments composant la figure, ainsi que du numéro de la composante de l'entrelacs à laquelle appartiennent ces segments. Une telle liste est constituée de quintuplets d'entiers: deux pour chaque extrémité du segment, et un pour le numéro de la composante.

Construction d'une liste de relations Lr entre les générateurs du groupe fondamental. Rappelons en effet que les relations sont associées aux points de croisement apparaissant sur la figure. Il s'agit donc chercher les paires de

segments de la liste de données L qui s'intersectent, et à chaque fois, de fabriquer un élément de Lr qui aura la forme d'un triplet d'entiers: numéros des composantes qui s'intersectent, et ± 1 suivant le signe de la relation.

A partir de la liste Lr ainsi construite, écrire les relations qui la composent sous forme usuelle, c'est à dire d'une identité entre des mots en les générateurs du groupe fondamental.

Nous avons écrit un tel programme en PROLOG, utilisant essentiellement les possibilités de traitement de listes du langage, qui permet d'obtenir la présentation de Wirtinger du groupe fondamental d'un entrelacs directement à partir d'un dessin à l'écran, évitant entre autre la tâche fastidieuse de la numérotation à la main des "morceaux" de la figure.⁽¹⁾

Les invariants de Milnor.

Les invariants de Milnor, auxquels nous avons fait référence dans l'article ci-joint comme des "nombres d'enlacements généralisés", s'obtiennent après un calcul particulièrement complexe qui rend leur obtention "à la main" quasiment impossible pour des exemples non triviaux. Deux étapes difficiles sont en effet nécessaires pour les calculer:

A partir d'une présentation de Wirtinger du groupe fondamental G de l'entrelacs, il faut décrire des homomorphismes surjectifs de G vers certains de ses quotients, et, en particulier, donner l'image comme mot en les générateurs des quotients considérés d'un mot de G représentant l'une des composantes de l'entrelacs.

Il faut enfin appliquer à l'image ainsi obtenue un opérateur de théorie des groupes, la dérivée de Fox.

Les différentes étapes du programme PROLOG que nous avons écrit, réalisant ces opérations, peuvent être décrites comme suit:

L'homomorphisme θ du groupe G vers les groupes quotients considérés est défini par les images, exprimées comme des mots en les générateurs des groupes quotients, des générateurs de G . L'image d'un élément x quelconque de G exprimé comme un mot en les générateurs de G , est donc le produit des images des générateurs de G qui le composent. Le prédicat PROLOG *theta* représentant l'homomorphisme θ est donc défini par deux types de clauses:

i) les premières décrivant, en termes de liste, les images des générateurs de G .

ii) les deuxièmes - décrivant en quelque sorte les propriétés de morphisme de θ - disant que l'image de la concaténée de deux listes est la concaténée des images des listes.

Pour chaque générateur x_i d'un des groupes quotients F considérés, il existe un unique opérateur de $Z[F]$ dans lui même, noté dx_i , appelé *opérateur différentiel de Fox*, vérifiant:

(1) Programme écrit en PROLOG sur un IBM PC-AT.

$$dx_i(x_j) = \delta_{ij}$$

et:

$$dx_i(a.b) = dx_i(a).b + dx_i(b) \quad , \quad \text{si } a, b \in F$$

Ces deux propriétés vont correspondre exactement aux clauses d'un prédicat Fox représentant l'opérateur différentiel de Fox. Il est alors nécessaire de représenter par des listes les éléments de F et par des listes de listes les éléments de $Z[F]$. Des prédicats **somme** et **produit** sont également nécessaires pour décrire les opérations élémentaires dans l'anneau $Z[F]$.

Il faut noter toutefois que de telles opérations, (en particulier la définition de l'homomorphisme θ qui est récursive) sont d'une complexité qui dépasse souvent les possibilités dont nous disposons au moment de la mise en place de notre programme (Programme écrit en PROLOG sur un IBM PC-AT).

Le polynôme d'Alexander.

Si l'on sait obtenir de façon automatique une présentation de Wirtinger du groupe fondamental G d'un noeud L , il est alors aisé d'en calculer le *polynôme d'Alexander*. En effet, si x_1, \dots, x_n sont les générateurs de G les relations sont de la forme:

$$x_{i+1} = x_k^\varepsilon x_i x_k^{-\varepsilon}$$

Soit alors $F = [G, G]$ le sous-groupe des commutateurs de G . On construit une matrice dont les colonnes correspondent aux générateurs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ du groupe $F/[F, F]$ et les lignes aux relations successives qui apparaissent lorsqu'on suit le noeud suivant une orientation donnée. Les étapes du programme PROLOG permettant d'obtenir le polynôme d'Alexander d'un noeud sont alors les suivantes:

Partir de la liste ordonnée Lr de relations déjà établie lors du programme d'écriture de la présentation de Wirtinger du groupe fondamental du noeud.

L'élément de rang i de la liste Lr , qui correspond à la i ème relation lorsqu'on parcourt le noeud suivant une orientation donnée, est caractérisée par un certain x_k^ε . On construit alors une matrice comme une liste de listes, chacune de longueur $n - 1$, dont l'élément i est obtenu en plaçant 1 en position $i - 1$, $-t^\varepsilon$ en position i , et $t^{-\varepsilon} - 1$ en position $k - 1$.

Le déterminant de la matrice ci-dessus, dite *Matrice d'Alexander*, est le polynôme d'Alexander cherché. On peut alors calculer ce déterminant, qui est un polynôme en la variable t , comme il est d'usage dans les logiciels de calcul formel.