LA REGLE DE NEWTON ET LES THEOREMES DE SYLVESTER

Jean-Claude YAKOUBSOHN
Laboratoire d'Analyse Numérique
118 route de Narbonne
Université Paul Sabatier
31062 Toulouse CEDEX

This is to Newton's
what Fourier is to Descartes
Sylvester

0- INTRODUCTION. Le théorème de Budan-Fourier dont la règle de Descartes est un cas particulier, permet de déterminer simplement une borne supérieure du nombre de racines que présente un polynôme dans un intervalle donné. Moins connue et inusitée actuellement est la règle énoncée par Newton, puis généralisée et démontrée par Sylvester en 1865 : elle est pourtant plus performante que la précédente, et dans certains cas elle donne le nombre exact des racines. Le but de ce travail est de présenter une synthèse des travaux de Sylvester afin de populariser une série de règles qui le méritent. Cette démarche fut celle d'Emile Marchand dans sa thèse dirigée par A. Hurwitz en 1913. Une approche différente sera suivie ici puisque l'on propose une démonstration par récurence des théorèmes de Sylvester, basée sur deux lemmes originaux (lemmes 2 et 4). Le lemme 2 donne une relation entre les zéros d'un polynôme comptés avec leur multiplicité et ceux de sa dérivée. Ce lemme utilise un résultat du à Cauchy (Lemme 1). Le lemme 4 est l'écriture du lemme 2 sous l'angle de la théorie de la diminution de variation développée par KARLIN [4]. A posteriori on explique la provenance du nombre pair dans le théorème de Budan-

Fourier. Ceci fait l'objet des paragraphes 1 à 4.
Au paragraphe 5 on montre comment la règle de Newton permet de trouver des inégalités vérifiées par les coefficients d'un polynôme lorsque celui-ci à toutes ses racines réelles. On calcule aussi le nombre moyen de racines d'un polynôme dont les coefficients sont égaux à -1 on à 1. Enfin en conclusion on étudie la complexité du calcul de recherche de la borne supérieure du nombre de racines d'un polynôme par la règle de Newton.

1.- PRELIMINAIRES ET NOTATIONS.

Soit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \; x^{n-k}$$

un polynôme de degré n. On désigne par f_k la dérivée d'ordre k de f. D'autre par afin d'alléger le texte, on écrira g pour g(x) où g est un polynôme. On introduit les fonctions F_k définies par :

$$F_0 = f^2$$
$$F_k = r_k \; f_k^2 - r_{k-1} \; f_{k-1} \; f_{k+1} \qquad k = 1,\ldots, n-1.$$
$$F_n = f_n^2$$

Les constantes r_k intervenant dans les fonctions F_k satisfont aux deux conditions :

1. $r_k > 0 \qquad k = 0,\ldots, n-1$
2. $r_{k+1} = 2 \; r_k - r_{k-1} \qquad k = 1,\ldots, n.$

La deuxième condition est introduite afin de simplifier le calcul des dérivées successives des fonctions F_k. Ces deux conditions se transforment en :

1'. $n \; r_1 - (n-1) \; r_0 \geqslant 0$
2'. $r_k = k \; r_1 - (k-1) \; r_0 \qquad k = 2,\ldots, n.$
On pose $r = (r_0, r_1)$.
On note par :

$$S_k \equiv \begin{pmatrix} f_{k-1} & f_k \\ F_{k-1} & F_k \end{pmatrix}$$

le terme d'ordre k de la double suite :

$$\begin{matrix} f_0 \; f_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \; f_n \\ F_0 \; F_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \; F_n \end{matrix} \qquad (S)$$

On s'intéresse aux signes des polynômes constituant le terme S_k. De ce point de vue et <u>si aucun des f et F dans S_k n'est nul en x,</u> seuls les cas suivants ont lieu :

<u>Cas 1.</u> permanence - permanence notée : pP

$$\begin{matrix} ++ & -- & ++ & -- \\ ++ & ++ & -- & -- \end{matrix}$$

<u>Cas 2.</u> permanence - variation notée : pV

$$\begin{matrix} ++ & -- & ++ & -- \\ +- & +- & -+ & -+ \end{matrix}$$

<u>Cas 3.</u> variation - permanence notée : vP

$$\begin{matrix} +- & +- & -+ & -+ \\ ++ & -- & ++ & -- \end{matrix}$$

<u>Cas 4.</u> variation - variation notée : vV

$$\begin{matrix} +- & -+ & +- & -+ \\ +- & +- & -+ & -+ \end{matrix}$$

On notera par $pP_r(x,f)$ le nombre de permanences - permanences que présentent les termes S_k de la double suite S pour une valeur de r.

Les notations :

$p(x,f)$, $v(x,f)$, $V_r(x,f)$, $P_r(x,f)$, $pV_r(x,f)$, $vP_r(x,f)$ et $vV_r(x,f)$,

parlent d'elles mêmes. a et b désignent deux nombres réels $a < b$. On note par $ZR(a,b,f)$ le nombre de racines réelles du polynôme f dans l'intervalle $[a,b]$, par $ZR_+(f)$ (resp. $ZR_-(f)$) le nombre de racines positives (resp. négatives) de f. Chaque racine est comptée avec son ordre de multiplicité.
Lorsqu'aucune ambiguité n'est possible sur f, on transforme les notations précédente en
$p(x)$, $v(x)$,...., $pV_r(x)$,...., $vV_r(x)$, $ZR(a,b)$, ZR_+, ZR_-.
On note par $vP(x)$, (resp $pP(x)$) le minimum des $vP_r(x)$ (resp $pP_r(x)$).

2.- ENONCE DES THEOREMES DE SYLVESTER ET DE LA REGLE DE NEWTON.

On suppose que les nombres a et b ne sont racines d'aucune fonctions f_k et F_k.

Théorème 1

Le nombre de racines réelles d'un polynôme f à coefficients réels diffère de $vP(a) - vP(b)$ d'un nombre pair. Ou encore :

$$ZR(a,b) = vP(a) - vP(b) - 2\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{N}.$$

Théorème 2

Le nombre de racines réelles d'un polynôme f à coefficients réels diffère de $pP(b) - pP(a)$ d'un nombre pair. Ou encore :

$$ZR(a,b) = pP(b) - pP(a) - 2\beta \qquad \beta \in \mathbb{N}.$$

Règles de Newton

1. Le nombre de racines réelles positives d'un polynôme f à coefficients réels diffère de $vP(0)$ d'un nombre pair.

$$ZR_+ = vP(0) - 2\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{N}$$

2. Le nombre de racines réelles négatives d'un polynôme f à coefficients réels diffère de pP(0) d'un nombre pair.

$$ZR_- = pP(0) - 2\beta \qquad \beta \in \mathbb{N}$$

3.- COMMENTAIRES

3.1 - Si a ou b annule une fonction f_k ou F_k ($k \geq 1$) les quantités vP(a) ou vP(b) ne sont plus définies.
Dans le cas où aucun des F_k n'est identiquement nul, on pose que:

$$vP(a) - vP(b) = vP(a+b) - vP(b-h)$$

où h est un "infiniment petit" positif.
On procède de façon identique avec la différence pP(b) -pP(a).

3.2 - Marchand donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'un des F_k soit nul.

Proposition 1 :

Une fonction F_k est identiquement nulle si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. $n\, r_1 - (n-1)\, r_0 = 0$
2. f_{k-1} est de la forme $c(x-d)^{n-k+1}$ où c et d sont des réels.

On ne reproduira pas la démonstration de cette proposition ici : elle n'offre aucune difficulté et se trouve dans [5] :
Une conséquence est que si $F_k \equiv 0$ alors $F_{k+1} \equiv \ldots\ldots \equiv F_{n-1} \equiv 0$.
On définit à partir de la suite (S), une suite (S') en adoptant des conventions de signe pour les F_k qui sont identiquement nulles.

Convention 1 - Si en x on a :

$$F_{k-1} \neq 0 \quad F_k \equiv \ldots \equiv F_{n-1} \equiv 0 \quad \text{et } k \geq 2$$

on remplace dans la double suite (S) F_{n-i} par $(-1)^i$ pour i variant de 1 à n-1-k.

<u>Convention 2</u> - Si en x on a :

$$\begin{array}{llll} f_{k-1} \neq 0 & f_k = \ldots\ldots = f_{n-1} = 0 & f_k \neq 0 \\ F_{k-1} \neq 0 & F_k \equiv \ldots\ldots \equiv F_{n-1} \equiv 0 & F_n \neq 0 \end{array}$$

deux cas se présentent :

1. <u>$f_n\ f_{k-1} > 0$</u> on procède comme dans la convention 1 pour F_{n-i} et on remplace dans la double suite (S) f_{n-i} par Sgn (f_n), $(1 \leqslant i \leqslant n-k+1)$.

2. <u>$f_n\ f_{k-1} < 0$</u> on remplace dans la double suite (S) :

F_{n-i} et f_{n-i} respectivement par $(-1)^i$ et $\mathrm{Sgn}(f_n)$, $(1 \leqslant i \leqslant n-k+1)$, et : f_k et f_k respectivement par $\mathrm{Sgn}(F_{k-1})$ et $\mathrm{Sgn}(f_{k-1})$.

<u>Convention 3</u> - Si en x on a :

$$\begin{array}{llll} f_0 \neq 0 & f_1 \neq 0 \ldots\ldots f_{n-1} \neq 0 & f_n \neq 0 \\ F_0 \neq 0 & F_1 \equiv \ldots\ldots \equiv F_{n-1} \equiv 0 & F_n \neq 0 \end{array}$$

on remplace dans la double suite (S) F_{n-i} par $\mathrm{Sgn}(F_n)$ pour i variant de 1 à n-1.

3.3 - Le principe de la démonstration directe des théorèmes 1 et 2 adopté par Sylvester (et Marchand) est le même que celui adopté par Fourier à ceci prés : il faut examiner les changements d'états d'une double suite et ceux-ci n'ont lieu que si un des f_k ou un des F_k s'annule en un point de l'intervalle [a,b].

L'outil technique utilisé est la formule de Taylor. On donne les deux résultats qui permettent de connaître les signes des f_k et des F_k au voisinage d'un point x qui annule un ou plusieurs f_k ou F_k.

Proposition 2 - Si en x on a :

$$f_k = f_{k+1} = \ldots. = f_{k+m-1} = 0 \qquad f_{k+m} \neq 0 \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant m \leqslant n-k-1 \end{array}$$

Alors :

$$1.\ F_k(x+k) = - \frac{h^{m-1}}{(m-1)!} r_{k-1} \, f_{k-1} \, f_{k+m} + o(h^{m-1})$$

$$2.\ F_{k+i}(x+h) = \frac{h^{2m-2i}}{[(m-i)!]^2} \frac{1}{(m-i+1)} r_{k+m} \, f^2_{k+m}$$
$$+ \frac{h^{2m-2i+1}}{(m-i)!(m-i+1)!} \frac{2}{(m-i)(m-i+1)(m-i+2)} r_{k+m+1} f_{k+m-1} f_{k+m+1}$$
$$+ o(h^{2m-2i+1}).$$

pour $i = 1, \ldots\ldots, m-1$.

Proposition 3 - Si on x on a :

$$F_k = F_{k+1} = \ldots\ldots = F_{k+m-1} = 0, \; F_{k+m} \neq 0 \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant m \leqslant n-k-1 \end{array}$$

$f_{k+i} \neq 0$ pour $i = 0, \ldots., m$

Alors :

$$F_k(x+h) = \frac{h^m}{m! \, f_{k+m}} f_k \, F_{k+m} + o(h^m).$$

Les démonstrations de ces deux propositions sont données en annexe.

3.4 - Du rôle des constantes r_0 et r_1. L'introduction des constantes r_k est dû à Sylvester : mais ni lui ni Marchand n'ont expliqué comment elles pouvaient être utilisées pour minimiser les quantités $vP_r(a) - vP_r(b)$ ou $pP_r(b) - pP_r(a)$ qui dépendent de r_0 et r_1. Voici comment on peut procéder à cet effet.

Le calcul de F_k donne :

$$F_k = \left[k\ f_k^2 - (k-1)\ f_{k-1}\ f_{k+1}\right]\ r_1 - \left[(k-1)f_k^2 - (k-2)\ f_{k-1}f_{k+1}\right]r_0$$

Posons $p_k = \dfrac{(k-1)\ f_k^2 - (k-2)\ f_{k-1}\ f_{k+1}}{k\ f_k^2 - (k-1)\ f_{k-1}\ f_{k+1}}$

$$m_k = \mathrm{Inf}\ (p_k,\ p_{k+1})$$
$$M_k = \mathrm{Sup}\ (p_k,\ p_{k-1})$$

On introduit les notations suivantes :

$D = \{(r_0,r_1)/r_0 > 0,\ r_1 = \dfrac{n-1}{n}\ r_0\}$,$S = \{(r_0,r_1)/r_0 > 0,\ r_1 > \dfrac{n-1}{n}\ r_0\}$

$D_k(x)=\{(r_0,r_1)/r_0 > 0,\ r_1 = M_k\ r_0\}, d_k(x)=\{(r_0,r_1)/r_0 > 0,\ r_1 = m_k\ r_0\}$

$S_k(x) = \{(r_0,r_1)/r_1 > m_k\ r_0,\ r_1 < M_k\ r_0\}$

<u>3.4.1 - Minimisation de</u> $vP_r(x)$ - Trois cas se présentent.

a) $\bar{S}_k \cap \bar{S} = \emptyset$ pour tous les k tels que $f_k f_{k+1} < 0$. Alors le nombre de variations permanences est le même pour n'importe quelle valeur du couple (r_0,r_1) dans $\bar{S}$.

b) Il existe des valeurs de k notées $k_1, \ldots, k_\ell$ telles que :

$$f_{k_i} f_{k_i+1} < 0,\ \bar{S}_{k_i} \cap \bar{S} \neq \emptyset \text{ pour tout } i = 1,\ldots,\ell \text{ et } \bigcap_{i=1}^{\ell} \bar{S}_{k_i} = \emptyset.$$

Alors le nombre de variations-permanences est minimum pour un couple (r_0,r_1) appartenant à l'un des $S_{k_i} \cap S$ ou l'un des D_{k_i} ou d_{k_i}.

c) Il existe des valeurs de k notées $k_1, \ldots k_\ell$ telles que :

$$I = \bar{S} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\ell} \bar{S}_{k_i} \right) \neq \emptyset$$

Alors le nombre de variations permanences est minimum pour un couple (r_0, r_1) dans I.

3.4.2 - Maximisation de vP(x)

En reprenant le 3.4.1, le nombre de variations-permanences en x est maximum pour un couple (r_0, r_1) appartenant à l'un des $S-(\bar{S} \cap \bar{S}_{k_i})$ si l'on se trouve dans les cas b ou c. Dans le cas a n'importe quel couple (r_0, r_1) de $\bar{S}$ convient.

3.4.3. Minimisation de vP(a) - vP(b).

Les deux descriptions précédentes sont utilisées pour trouver un couple (r_0, r_1) qui minimise vP(a) - vP(b). On détermine respectivement :

a) pour $f_{k_i}(a)\, f_{k_i+1}(a) < 0$ les $S_{k_i}(a) \cap S$, $D_{k_i}(a)$ et $d_{k_i}(a)$ $i = 1, \ldots, \ell$

b) pour $f_{k_j}(b)\, f_{k_j+1}(b) < 0$, les $S - \left(\bar{S}_{k_j}(b) \cap \bar{S}\right)$ $j = 1, \ldots, m$

On obtient ainsi q sous ensembles Q_k contenus dans S. On les ordonne à l'aide de la relation suivante :

$$\text{si } Q_k = \left\{ (r_0, r_1) \;/\; r_0 > 0,\ r_1 \geq a_k\, r_0,\ r_1 \leq b_k\, r_0,\ \frac{n-1}{n} \leq a_k \leq b_k \right\}$$

$Q_k < Q_i$ ssi $b_k < a_i$

$Q_k > Q_i$ ssi $a_k > b_i$

$Q_k \subset Q_i$ ssi $a_i \leq a_k \leq b_k \leq b_i$

Puis on examine dans chaque ensemble de la partition de S induite par les Q_k ainsi ordonnés, la différence vP(a) - vP(b). Il y a un sous-ensemble de S où celle-ci est minimale.

3.5. Exemples.

Exemple 1

Cet exemple montre l'importance du choix des constantes r_0 et r_1

On veut déterminer le nombre de racines positives de

$$f(x) = \sum_{k=0}^{7} (-1)^k x^{7-k}$$

Par la règle de Descartes on obtient $ZR_+ = 7-2\alpha$.
Le calcul des F_k donne : $F_k = k!(k-1)!(r_1-2r_0)$ en $x = 0$.
Pour $r_0 = 1$ et $r_1 > 2$ F_k est positif et donc vP(0) = 7, il n'y a pas de gain par rapport à la règle de Descartes.

Pour $r_0 = 1$ et $\frac{5}{6} < r_1 < 2$ F_k est négatif et donc vP(0) = 5.
Donc $ZR_+ = 5-2\alpha$.

Pour $r_0 = 1$ et $r_1 = 2$ tous les F_k $(1 \leqslant k \leqslant 6)$ sont nuls. On utilise la Proposition 3 pour connaître le signe F_k en un point h infiniment proche de zéro.

$$F_k(h) = \frac{h^6}{6!\ f_7(0)}\ f_k(0)\ F_7(0)$$

le signe de $F_k(h)$ est celui de $f_k(0)$. Et donc vP(0) = 1.
Finalement $ZR_+ = 1$.

Sylvester compare les théorèmes 1 et 2 à "un fusil à deux coups, si l'un des canons rate l'autre peut atteindre le but". Voici un exemple illustrant cette image.

<u>Exemple 2</u> : On détermine le nombre de racines réelles sur l'intervalle [0,1] de : $f(x) = x^3-x^2-\frac{x}{2}+2$.

Pour x = 0

$$S \equiv \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -2 & 6 \\ 4 & \frac{r_1}{4}+4r_0 & 11r_1-4r_0 & 36 \end{pmatrix}$$

Pour x = 1

$$S \equiv \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 4 & 6 \\ \frac{9}{4} & \frac{r_1}{4}-6r_0 & 29r_1-16r_0 & 36 \end{pmatrix}$$

On a : $v(o)-v(1) = vP(o) - vP(1) = 2$

Alors que : $pP(1)-pP(o) = 1-1 = o$

Voici un exemple qui montre les limites des théorèmes de Sylvester.

<u>Exemple 3</u> : Le polynôme $f(x) = 5x^3-8x^2+4x-\frac{7}{12}$ a une racine dans [0,1].

Pour x = 0

$$S \equiv \begin{pmatrix} -\frac{7}{12} & 4 & -16 & 30 \\ \frac{4}{144} & 16r_1-\frac{28}{3}r_0 & 392r_1-256r_0 & 900 \end{pmatrix}$$

Pour x = 1

$$S \equiv \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & 3 & 14 & 30 \\ \frac{25}{144} & 9r_1-\frac{35}{6} & 302r_1-196r_0 & 900 \end{pmatrix}$$

On trouve $v(0)-v(1) = vP(0)-vP(1) = pP(1)-pP(0) = 3$

4.- DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

On se propose de démontrer le théorème 1 par récurrence. Le théorème 2 se démontre de manière identique.

<u>Définition 1</u>

On appelle :

1 - <u>Extrêmum de première espèce</u> un point de coordonnées $(x,f(x))$ vérifiant :

il existe p tel que pour tout h infiniment petit et $k = 1,...,2p-1$

$$f_k(x) = 0 \quad \text{et} \quad f_{2p}(x)\ f(x+h) < 0$$

2 - <u>extrêmum de seconde espèce</u> un point de coordonnées $(x,f(x))$ vérifiant :

il existe p tel que pour tout h infiniment petit et $k = 1,...,2p-1$

$$f_k(x) = 0 \text{ et } f_{2p}(x)\ f(x+h) > 0.$$

On notera par $E_1(a,b,f)$ et $E_2(a,b,f)$ respectivement le nombre d'extrêmums du polynôme f de première et seconde espèce.

<u>définition 2</u> - Soient a et b tels que : $f(a)\ f_1(a)\ f_2(a) \neq 0$ et $f(b)\ f_1(b)\ f_2(b) \neq 0$. On définit $\sigma(a,b,f)$ par :

1. <u>$\sigma(a,b,f) = 0$</u> si $f(a)\ f_1(a)\ f(b)\ f_1(b) > 0$.
2. <u>$\sigma(a,b,f) = 1$</u> si $f(a)\ f_1(a)\ f(b)\ f_1(b) < 0$ et si $f(a)\ f(a)\ f_1(a) < 0$ et $f(b)\ f_1(b) > 0$.
3. <u>$\sigma(a,b,f) = -1$</u> si $f(a)\ f_1(a)\ f(b)\ f_1(b) < 0$ et si $f(a)\ f_1(a) > 0$ et $f(b)\ f_1(b) < 0$

<u>Remarque 1</u> :

Si $f(a)\ f_1(a)\ f_2(a) = 0$, on définit $\sigma(a,b,f)$ par $\sigma(a+h,b,f)$ où h est un infiniment petit positif ; de sorte que :

$$f(a+h)\ f_1(a+h)\ f_2(a+h) \neq 0$$

De même si $f(b)\ f_1(b)\ f_2(b) = 0$, on pose $\sigma(a,b,f) = \sigma(a,b-h,f)$.

<u>Remarque 2</u> :

$\sigma(a,b,f)$ indique le comportement de la courbe représentant le polynôme f.

Si $\sigma(a,b,f) = 0$, la courbe s'éloigne de l'axe des x quand on est proche d'une borne de l'intervalle [a,b], tout en restant dans [a,b], tandis qu'elle se rapproche de l'axe des x quand on est proche de l'autre.

Si $\sigma(a,b,f) = 1$, la courbe s'éloigne de l'axe x quand on se trouve à proximité des bornes de l'intervalle [a,b], tout en restant à l'intérieur de [a,b].

Si $\sigma(a,b,f) = -1$, la courbe s'éloigne de l'axe des x quand on se trouve à proximité des bornes de l'intervalle [a,b] tout en restant à l'intérieur de [a,b].

On est en mesure de donner une relation entre les zéros de f dans [a,b], les sommets de première et seconde espèces dans [a,b] et $\sigma(a,b,f)$.

<u>Lemme 1</u> (CAUCHY)

Soit NR(a,b,f) le nombre de racines du polynôme f non comptées avec leur ordre de multiplicité. Alors :
$NR\ (a,b,f) = E_1(a,b,f) - E_2(a,b,f) + \sigma(a,b,f)$.

Pour la démonstration on peut se référer à la démonstration de Cauchy. Voici la trame d'une démonstration plus condensée.

1) On observe tout d'abord que sur un intervalle [a,b] tel que $f(a) = f(b)$ et $(\forall x \in]a,b[\ f(x) < f(a)$ au $f(x) > f(a))$ alors on a :

$E_1(a,b,f) - E_2(a,b,f)=1.$

Un usage élémentaire et combiné du théorème des valeurs intermédiaires, du théorème de Rolle et de la formule de Taylor en fournit la preuve.

2) On en déduit que sur un intervalle où il n'y a pas de racine du polynôme f on a :

$$E_1(a,b,f) - E_2(a,b,f) = 1 \text{ si } f(a)\ f_1(a)\ f(b)\ f_1(b) < 0$$
$$E_1(a,b,f) - E_2(a,b,f) = 0 \text{ si } f(a)\ f_1(a)\ f(b)\ f_1(b) > 0$$

3) Sur un intervalle où le polynôme possède une racine unique on écrit que :

$$E_1(a,b,f) - E_2(a,b,f) = E_1(a,a_1,f) - E_2(a,a_1,f) + E_1(b_1,b,f) - E_2(b,b_1,f)$$

où $[a_1,b_1]$ est un intervalle contenant la racine et où f est strictement monotone. On utilise alors 2) pour les différentes valeurs de $\sigma(a,b,f)$ et aboutir à la formule du lemme 1.

<u>Lemme 2</u>

$$ZR(a,b,f) = ZR(a,b,f_1) + \sigma(a,b,f) - 2\alpha \text{ où } \alpha \in \mathbb{N}.$$

<u>Démonstration</u>

On introduit les deux notations suivantes:

$I_1(a,b,f)$ = le nombre de racines du polynôme f sur l'axe des x telles que $f'_{(x)} = 0$
$I_2(a,b,f)$ = le nombre de points à tangente horizontable de la courbe qui représente le polynôme f qui ne soient pas sur l'axe des x et qui ne soient pas des sommets de première ou seconde espèce.

On a, d'une part :

$NR(a,b,f_1) = E_1(a,b,f) + E_2(a,b,f) + I_1(a,b,f) + I_2(a,b,f)$

Ce qui implique d'après le lemme 1 :

$NR(a,b,f) - NR(a,b,f_1) = \sigma(a,b,f) - 2E_2(a,b,f) - I_1(a_1,b,f) - I_2(a,b,f).$
D'autre part, on observe que :

$ZR(a,b,f) - ZR(a,b,f_1) = NR(a,b,f) + \Sigma(\alpha_k-1) - NR(a,b,f_1) - \Sigma(\beta_k-1)$

Expliquons $\sum(\alpha_k-1)$ et $\sum(\beta_k-1)$. Afin d'abréger les notations on écrira E_1, E_2, I_1, I_2 pour $E_1(a,b,f)$,....etc.

$$\sum(\alpha_k-1) = \sum_{k=1}^{I_1}(\alpha_k-1)$$

où les α_k sont les ordres de multiplicité des racines de f dans [a,b].

$$\sum(\beta_k-1) = \sum_{k=1}^{I_1}(\beta_k-1) + \sum_{k=I_1+1}^{I_1+I_2}(\beta_k-1) + \sum_{k=I_1+I_2+1}^{I_1+I_2+E_1}(\beta_k-1) + \sum_{k=I_1+I_2+E_1+1}^{I_1+I_2+E_1+E_2}(\beta_k-1)$$

avec :

1. pour $k = 1,\ldots,I_1$, β_k est l'ordre de multiplcité d'une racine de f et f_1 qui vérifie :

$$f = f_1 = \ldots f_{2p} = 0.$$

donc $\beta_k = \alpha_k - 1$. Ce qui entraîne :

$$\sum_{k=1}^{I_1}(\alpha_k-1) - \sum_{k=1}^{I_1}(\beta_k-1) = I_1$$

2. pour $k = I_1 + 1, \ldots, I_1 + I_2$, β_k est l'ordre de multiplicité d'une racine de f_1 qui vérifie :

$f_1 = \ldots = f_{2p} = 0$ et $f \neq 0$.

β_k est donc un nombre pair ainsi que $\displaystyle\sum_{k=I_1+1}^{I_1+I_2} \beta_k$

3. pour $k = I_1 + I_2 + 1, \ldots, I_1 + I_2 + E_1 + E_2$, β_k est l'ordre de multiplicité d'une racine de f_1 qui vérifie :

$$f_1 = \ldots = f_{2p-1} = 0 \quad \text{et } f \neq 0$$

β_k est donc un nombre impair. Ce qui entraîne que la somme

$$\sum_{k=I_1+I_2+1}^{I_1+I_2+E_2+E_1} (\beta_k - 1)$$

est un nombre pair.

Finalement :

$$ZR(a,b,f) - ZR(a,b,f_1) = \sigma(a,b,f) - 2E_2 - I_1 - I_2 + I_1 - \sum_{k=I_1+1}^{I_1+I_2} \beta_k + I_2$$

$$- \sum_{k=I_1+I_2+1}^{I_1+I_2+E_1+E_2} (\beta_k - 1)$$

$$= \sigma(a,b,f) - 2E_2 - \sum_{k=I_1+1}^{I_1+I_2} \beta_k$$

$$- \sum_{k=I_1+I_2+1}^{I_1+I_2+E_1+E_2} (\beta_k - 1)$$

$$= \sigma(a,b,f) - \text{nombre pair.}$$

On posera dans la suite :

$$2\alpha = 2E_2 - \sum_{k=I_1+1}^{I_1+I_2} \beta_k - \sum_{k=I_1+I_2+1}^{I_1+I_2+E_1+E_2} (\beta_k - 1).$$

<u>Lemme 3</u>

Soient s,t,u,v quatre nombres réels non nuls.

Alors :

$$vP\begin{pmatrix} u & v \\ -s & t \end{pmatrix} = vP\begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix} \qquad \text{si } uv > 0.$$

$$vP\begin{pmatrix} u & v \\ -s & t \end{pmatrix} = 1 - vP\begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix} \qquad \text{si } uv < 0.$$

La démonstration de ce lemme est immédiate.

<u>Lemme 4</u>

$$vP(a,f_1) - vP(b,f_1) + {}_{\sigma}(a,b,f) = vP(a,f) - vP(b,f) - 2_{\gamma} \quad \text{où } \gamma \in \{0,1\}$$

<u>Démonstration</u>

Pour les besoins de la démonstration de ce lemme on note:

$$vP_x\begin{pmatrix} g_1,\dots,g_n \\ \\ h_1,\dots,h_n \end{pmatrix}$$

le nombre de variations-permanences au point x de la double suite formée des polynômes g_i et h_i.
On examine cas par cas les différentes valeurs de $\sigma(a,b,f)$.

1 $\underline{\sigma(a,b,f) = 0}$, donc $f(a)\ f_1(a)\ f(b)\ f_1(b) > 0$

1.1 $\underline{f(a)\ f_1(a) > 0 \text{ et } f(b)\ f_1(b) > 0.}$

$$vP(a,f) - vP(b,f) = vP_a\begin{pmatrix} f_1 \dots\dots f_n \\ \\ F_1 \dots\dots F_n \end{pmatrix} - vP_b\begin{pmatrix} f_1 \dots f_n \\ \\ F_1 \dots F_n \end{pmatrix}$$

1.1.1 $\underline{F_1(a) > 0 \text{ et } F_1(b) > 0.}$ On écrit que le signe de F_1 est celui de f_1^2 aux points a et b. En conséquence :

$$vP(a,f) - vP(b,f) = vP(a,f_1) - vP(b,f_1)$$

1.1.2 $\underline{F_1(a) > 0 \text{ et } F_1(b) < 0.}$ $F_1(b)$ est du signe de $-f_1^2(b)$.

De plus $F_1(b) < 0$ et $f(b)\ f_1(b) > 0$ impliquent que $f_1(b)\ f_2(b) > 0$.

En conséquence :

$$vP(a,f) - vP(b,f) = vP(a,f_1) - vP_b\begin{pmatrix} f_1 \dots f_n \\ \\ -f_1^2 \dots F_n \end{pmatrix}$$

Or :

$$vP_b\begin{pmatrix} f_1 \dots f_n \\ \\ -f_1^2 \dots F_n \end{pmatrix} = vP_b\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ \\ -f_1^2 & F_2 \end{pmatrix} + vP_b\begin{pmatrix} f_2 \dots f_n \\ \\ F_2 \dots F_n \end{pmatrix}$$

Et d'après le lemme 3 puisque $f_1(b)\ f_2(b) > 0$:

$$vP_b \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ -f_1^2 & F_2 \end{pmatrix} = vP_b \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1^2 & F_2 \end{pmatrix}$$

donc :

$$vP(a,f) - vP(b,f) = vP(a,f_1) - vP(b,f_1).$$

On montre le même résultat et de façon identique quand :

$(F_1(a) < 0$ et $F_1(b) > 0)$ et $(F_1(a) < 0$ et $F_1(b) < 0)$

1.2 <u>$f(a)\ f_1(a) < 0$ et $f(b)\ f_1(b) < 0$</u>

1.2.1 <u>$F_1(a) > 0$ et $F_1(b) > 0$</u>

$$\begin{aligned} vP(a,f) - vP(b,f) &= 1+vP_a \begin{pmatrix} f_1 \ldots f_n \\ F_1 \ldots F_n \end{pmatrix} - 1 - vP_b \begin{pmatrix} f_1 \ldots f_n \\ F_1 \ldots F_n \end{pmatrix} \\ &= vP(a,f_1) - vP(b,f_1). \end{aligned}$$

1.2.2 <u>$F_1(a) > 0$ et $F_1(b) < 0$</u> . Ici $f_1(b)\ f_2(b) < 0$.

$$\begin{aligned} vP(a,f) - vP(b,f) &= 1 + vP(a,f_1) - vP_b \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \ldots f_n \\ -f_1^2 & F_2 \ldots F_n \end{pmatrix} \\ &= 1 + vP(a,f_1) - vP_b \begin{pmatrix} f_1, & f_2 \\ -f_1^2 & F_2 \end{pmatrix} - vP_b \begin{pmatrix} f_2 \ldots f_n \\ F_2 \ldots F_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par le lemme 3 et le fait que $f_1(b)\ f_2(b) < 0$, on déduit :

$$vP_b\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ -f_1^2 & F_2 \end{pmatrix} = 1 - vP_b\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1^2 & F_2 \end{pmatrix}.$$

En définitive :

$$vP(a,f) - vP(b,f) = vP(a,f_1) - vP(b,f_1) + 2vP_b\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1^2 & F_2 \end{pmatrix}$$

1.2.3 $(F_1(a) < 0$ et $F_1(b) > 0)$ ou $(F_1(a) < 0$ et $F_1(b) < 0)$.

Il est possible de choisir un couple (r_0,r_1) de telle façon que $F_1(a) > 0$ et de se ramener aux cas 1.2.1 ou 1.2.2.
En effet si $F_1(a) < 0$ on a

$$r_1 < \frac{f(a)\ f_2(a)}{f_1^2(a)}\ r_0 \quad \text{et} \quad \frac{f(a)\ f_2(a)}{f_1^2(a)} \geqslant \frac{n-1}{n}$$

On considère alors un couple (r_1,r_0) tel que :

$$r_1 > \frac{f(a)\ f_2(a)}{f_1^2(a)}\ r_0$$

et donc $F_1(a) > 0$.
On peut mesurer ici le rôle technique que jouent les constantes r_0 et r_1 :cela n'apparaît pas dans la preuve que donne Sylvester.

2 $\sigma(a,b,f) = 1$ donc $f(a)\ f_1(a) < 0$ et $f(b)\ f_1(b) > 0$.

Comme précédemment on sélectionne un couple (r_0,r_1) de façon que $F_1(a) > 0$. On indique les résultats obtenus dans chaque cas :

2.3 $F_1(a) > 0$ et $F_1(b) > 0$.

$$vP(a,f) - vP(b,f) = 1+vP(a,f_1) - vP(b,f_1)$$

2.2 $\underline{F_1(a) > 0 \text{ et } F_1(b) < 0}$. Ici $f_1(b)\, f_2(b) < 0$

$$vP(a,f) - vP(b,f) = 1 + vP(a,f_1) - vP(b,f_1) + 2vP_b \begin{pmatrix} f_1 f_2 \\ f_1^2 \; F_2 \end{pmatrix}$$

3 $\underline{\sigma(a,b,f) = -1}$ donc $f(a)\, f_1(a) > 0$ et $f(b)\, f_1(b) > 0$

On obtient les mêmes résultats qu'en 2 pour la différence $vP(a,f) - vP(b,f)$ en substituant 1 par -1 dans les cas 2.1 et 2.2.

Démonstration du théorème 1

Il est facile de vérifier le théorème 1 pour un polynôme de degré 1. Supposons le théorème 1 pour tout polynôme de degré n-1. Soit un polynôme f de degré n. Le théorème 1 s'écrit pour f_1 :

$$zR(a,b,f_1) = vP(a,f_1) - vP(b,f_1) - 2\beta \quad \text{où} \quad \beta \in N$$

En utilisant successivement le lemme 2 et le lemme 4 on obtient :

$$zR(a,b,f) = vP(a,f) - vP(b,f) - 2\gamma - 2\alpha - 2\beta$$

d'où le théorème 1.

Le théorème 2 se démontre de façon identique en substituant au lemme 4, le lemme :

Lemme 4 bis
$$pP(b,f_1) - pP(a,f_1) + \sigma(a,b,f) = pP(b,f) - pP(a,f) - 2\delta$$

où $\delta \in \{0,1\}$.

En conclusion on peut ajouter que les lemmes 1 et 2 sont vrais pour des fonctions de classe $c^m[a,b]$. De plus le lemme 2 et sa démonstration éclairent sur la nature des nombres pairs intervenant aussi bien dans la règle de Descartes que dans les théorèmes de Budan-Fourier, Sylvester et Newton.

En effet l'homologue du Lemme 4 pour $v(a,f) - v(b,f)$ est

<u>Lemme 5</u> $$v(a,f) - v(b,f) = v(a,f_1) - v(b,f_1) + \sigma(a,b,f_k)$$

On peut ainsi montrer par récurence le théorème de Buban-Fourier en combinant les lemmes 2 et 5. Le nombre pair du théorème de Budan est alors, comme corollaire de la démonstration du lemme 2, fonction du nombre E_2 d'extrêmums de seconde espèce, des points d'inflexions I_2 de chaque fonction f_k $(0 \leqslant k \leqslant n)$.
On notera une différence essentielle avec SCHUMAKER [7] qui établit par récurence:

$$ZR(a,b,f) \leqslant v(a,f) - v(b,f)$$

Le fait que la différence entre les deux membres de l'inégalité est paire n'est pas considérée par cet auteur.

5.- APPLICATIONS.

<u>Application 1</u> :

La règle de Newton peut être utilisée pour montrer le

<u>Théorème 3</u> :

Soient r_0 et r_1 tels que $r_0 \geqslant \frac{n-1}{n} r_0$.

On suppose que le polynôme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \quad (a_0 \neq 0 \text{ et } a_n \neq 0)$$

a toutes ses racines réelles. Alors on a :

$$\frac{r_k}{r_{k-1}} \frac{n-k}{n-k+1} a_k^2 - a_{k-1} a_{k+1} \geqslant 0 \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

Démonstration

Le calcul des F_{n-k} en $x = 0$ donne :

$$F_{n-k} = r_k((n-k-1)!)^2(n-k)!(n-k+1)!\left(\frac{r_k}{r_{k-1}} \quad \frac{n-k}{n-k+1} a_k^2 - a_{k-1}a_{k+1}\right)$$

Il est clair que si le polynôme f a toutes ses racines positives, alors la suite des a_k présente n variations et la suite des F_k présente n permanences. Comme F_0 et F_n sont positifs, l'inégalité ci-dessus est bien vérifiée.
On donne le shéma de la démonstration dans le cas où f à n_1 racines positives et $-f$ n_2 racines positives avec :

$$n_1+n_2 = n$$

On a donc $vP(0,f) = n_1$ et $vP(0,-f) = n_2$.

Les coefficients a_k (resp.$(-1)^k a_k$) peuvent se grouper en n_1 (resp n_2) blocs tels que :
1) dans chaque blocs les a_k (resp $(-1)^k a_k$) ont même signe et sont non tous nuls.

2) Les a_k de deux blocs consécutifs ont des signes contraires.

Chaque fois que a_k $a_{k+1} < 0$ on doit avoir $F_kF_{k+1} > 0$.
De même si $(-1)^k$ $a_k(-1)^{k+1}a_{k+1} < 0$ (c'est-à-dire $a_ka_{k+1} > 0$) on a $F_kF_{k+1}> 0$.

Un examen attentif mais élémentaire de la façon dont sont constitués les blocs de coefficients a_k et la prise en compte du fait que F_0 et F_n sont positifs permet de conclure.

Application 2

Soit P_n l'ensemble des polynômes tels que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{avec } a_0 = 1 \text{ et } a_k \in \{-1,1\} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

On se propose de calculer le nombre moyen de variations-permanences en zéro d'un polynôme de P_n. Si on note vP_n ce nombre et vP_{nk} le nombre de polynôme de P_n qui ont k variations-permanences, alors on a par définition :

$$vP_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} kvP_{nk}$$

puisque $\neq P_n = 2^n$.

A titre indicatif le nombre moyen de variations en zéro pour un polynôme de P_n est égal à $\frac{n}{2}$.
Il faut ajouter que le nombre moyen de racines pour un polynôme de P_n est $\frac{2}{\Pi}\log n$. Voir [3]

<u>Théorème</u> 4

Le nombre moyen vP_n de variations permanences en zéro pour un polynôme de P_n est égal à $\frac{n+1}{16} - \frac{1}{32}$.

<u>Préliminaire à la démonstration</u> du Théorème.

Soit x = 0 on note g pour g(0). Puisque $f_k = k!\, a_k$ on obtient

$$p_k = \begin{cases} 2 & \text{si } a_{k-1}a_{k+1} = 1 \\ \dfrac{2k^2-2k-2}{2k^2-1} & \text{si } a_{k-1}a_{k+1} = -1 \end{cases}$$

Il est facile de montrer que $p_k < \frac{n-1}{n}$ si $a_{k-1}a_{k+1} = -1$
On considère $r_0 = 1$ et $r_1 = 2$. Dans ce cas

$$F_k = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{k-1}a_{k+1} = 1 \\ (k-1)!^2(2k^2+2k) & \text{si } a_{k-1}a_{k+1} = -1 \end{cases}$$

Du fait de la proposition 3 le signe de F_k est le signe de $a_k a_{k+m}$ où m est le plus petit entier tel que $F_{k+m} \neq 0$. On montre alors qu'un polynôme de P_n présente une variation permanence si et seulement si :

pour $k = 1$: $a_0 = a_1 = 1$ et $a_2 = -1$
pour $3 \leqslant k \leqslant n-2$: $a_{k-2} = a_{k-1} = -a_k = -a_{k+1}$
pour $k = n$: $a_{n-2} = a_{n-1} = -a_n$

Démonstration

On ne calcule pas les nombres vP_{nk}. Compte tenu des préliminaires on écrit que $\sum_{k=0}^{n} kvP_{nk}$ est la somme des trois quantités suivantes :

1) Le nombre de polynômes de P_n tels que $a_{n-2} = a_{n-1} = -a_n$. Il est égal à 2^{n-3}.

2) Le nombre de polynômes de P_n tels que :

il existe k, $3 \leqslant k \leqslant n-2$ tels que $a_{k-2} = a_{k-1} = -a_k = -a_{k+1}$ et $a_{n-1} = a_n$. On trouve :

$$\sum_{k=3}^{n-3} 2^2.2^{n-6} + 2.2^{n-6} = 2^{n-5}(2n-9)$$

3) Le nombre de polynôme de P_n tels que : $a_1 = a_2 = -1$,

et il n'existe pas k, $3 \leqslant k \leqslant n-2$ tel que $a_{k-2} = a_{k-1} = -a_k = -a_{k+1}$ et que la propriété ($a_{n-2} = a_{n-1} = -a_n$) n'ait pas lieu.

Ce nombre est égal à : 6.2^{n-5}.

En définitive :

$$vP_n = \frac{1}{2^n}\left(2^{n-3} + 2^{n-5}(2n-9) + 6(2^{n-5})\right) = \frac{n+1}{16} - \frac{1}{32}.$$

5.- CONCLUSION.

L'étude de la complexité est faite dans l'optique de l'article de M.F.Coste-Roy et Szpirglas [2].

On pose $N(f) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}$. Classiquement la complexité du calcul de la méthode de Sturm est en $O(n^4 \mathrm{Log}^2 N(f))$.

Le calcul de $vP(0,f) + vP(0,-f)$ pour donner une borne supérieure au nombre de racine de f nécessite le calcul des F_k et le tri des coefficients p_k définis en 3.3. Les opérations arithmétiques sont en $O(n)$ et le tri des p_k en $O(n \log n)$. En tenant compte de la taille des entiers on obtient pour $vP(0,f) + vP(0,-f)$ une complexité de calcul en $O(n \,\mathrm{Log}\, N(f)\, (\mathrm{Log}\, N(f) + \mathrm{Log}\, n))$.

A N N E X E

Démonstration de la proposition 2

La dérivée d'ordre j de F_{k+i} en x, $(0 \leqslant i \leqslant m-1)$, est égale à :

$$F_{k+i}^{(j)} = \sum_{l=0}^{j} r_{k+i}\binom{j}{l} f_{k+i+l}\; f_{k+i+j-l} - \sum_{l=0}^{j} r_{k-1+i} \binom{j}{l} f_{k+i-1+l}\; f_{k+i+1+j-l}$$

Pour $i = 0$, l'hypothèse du lemme implique que :

$$F_k^{(j)} = 0 \quad j = 0,\ldots,m-2$$

et $F_k^{(m-1)} = -r_{k-1}\; f_{k-1}\; f_{k+m}$.

D'où la formule 1 de la proposition 2 par application de la formule de Taylor à F_k.

D'autre part, pour $i \neq 0$ et $j = 0,\ldots,2m-2i-1$:

$$F_{k+i}^{(j)} = 0$$

Pour $j = 2m - 2i$, on obtient :

$$F_{k+i}^{(2m-2i)} = \frac{(2m-2i)!}{(m-i)!^2}\left(r_{k+i} - \frac{m-i}{m-i+1}\, r_{k+i-1}\right) f_{k+m}^2$$

Comme,

$$r_{k+i} - \frac{m-i}{m-i+1}\, r_{k+i-1} = \frac{1}{m-i+1}\, r_{k+m}.$$

On a :

$$F_{k+i}^{(2m-2i)} = \frac{(2m-2i)!}{(m-i)!^2(m-i+1)} r_{k+m} f_{k+m}^2$$

Le même calcul donne pour $j = 2m - 2i + 1$:

$$F_{k+i}^{(2m-2i+1)} = \frac{(2m-2i)!}{(m-i)!^2(m-i)(m-i+1)^2(m-i+2)} r_{k+m+1} f_{k+m-1} f_{k+m+1}$$

D'où la formule 2 de la proposition 2 par application de la formule de Taylor à F_{k+i}.

Démonstration de la proposition 3

Le calcul de F'_k donne :

$$\begin{aligned} F'_k &= (2r_k - r_{k-1}) f_k f_{k+1} - r_{k-1} f_{k+1} f_{k-1} \\ &= r_{k+1} f_k f_{k+1} - r_{k-1} f_{k+1} f_{k-1} \end{aligned}$$

En utilisant la définition de F_k, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} f_{k+1} F'_k &= r_{k+1} f_k f_{k+1}^2 - r_k f_k^2 f_{k+2} + F_k f_{k+2} \\ &= f_k F_{k+1} + f_{k+2} F_k \end{aligned}$$

Un simple raisonnement par récurrence sur j montre que :

$$f_{j+k} F_k^{(j)} = \sum_{l=0}^{j-1} g_{kl} F_{k+l} + f_k F_{k+j}$$

L'hypothèse de la proposition 3 implique que :

$$F_k^{(j)} = 0 \qquad j = 0, \ldots, m-1$$
$$f_{k+m} F_k^{(m)} = f_k F_{k+m}$$

D'où la proposition 3.

BIBLIOGRAPHIE

1 - A. CAUCHY : Mémoire sur la détermination du nombre de racines réelles dans les équations algébriques (1813). Oeuvres $II^{\text{ème}}$ série, Tome 1. Gauthiers-Villars, Paris.

2 - M.F.COSTE-ROY, A. SZPIRGLAS : Complexity of ther computation on real algebraic numbers.

3 - M. KAC : Probability and related topics in Physical Sciences. Interscience Publishers London 1959 p. 5-10.

4 - S. KARLIN : Total positivity. Stanford university Press, 1968.

5 - E. MARCHAND : Sur les Théorèmes de Sylvester et la Règle de Newton. Thèse. Neuchâtel. 1913.

6 - A. OSTROWSKI : Bemerhungen zum Beweise des Budan-Fourierchen und Newton-Sylvesterschen Satzes. Collected Mathematical Papers, Vol 1. Birkhäuser Verlag. 1983.

7 - L. SCHUMAKER : Spline Functions. Basic theory. Pure and applied Mathematics. John Willey & Sons, 1981

8 - J.J. SYLVESTER : On an elementary proof and generalization of sir Isaac Newton's hitherto undemonstrated rule for the disco very of imaginary roots (1865). Collected Mathematical Papers, Vol.2. Chelsea publishing company. New-York.