

RAYMOND DUVAL

MARIE-AGNÈS EGRET

**Pour une décomposition cognitive des tâches dans la
production d'une démonstration**

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1989-1990, fascicule 5
« Didactique des mathématiques », , exp. n° 7, p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989-1990__5_A7_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1989-1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

POUR UNE DECOMPOSITION COGNITIVE DES TACHES DANS LA PRODUCTION D'UNE DEMONSTRATION

Raymond DUVAL et Marie-Agnès EGRET

I.R.E.M. de Strasbourg

Les problèmes de géométrie constituent en général le domaine pour les premières rencontres des élèves de Collège avec la "Démonstration". Rencontres souvent fatales pour l'image qu'il se font de l'activité mathématique et du raisonnement! Et, pour la plupart, le terme "démonstration" se trouve associé à une exigence arbitraire, stérile, incompréhensible. Un partage semble alors s'opérer entre le petit nombre de ceux qui découvrent comme naturellement l'activité de démonstration et la grande majorité de ceux qui se trouvent durablement paralysés par cette exigence.

Plusieurs voies ont été explorées pour expliquer et dépasser cet état de fait¹. Certaines s'orientent vers les situations ou vers les contenus de l'enseignement. Il faudrait que les élèves soient placés dans des situations telles qu'ils découvrent la nécessité de produire une preuve et le besoin d'arriver à une conviction. Il faudrait aussi que les problèmes mathématiques proposés ne soient pas triviaux et que leurs solutions n'apparaissent pas prévisibles ou évidentes sur une figure. Les études qui s'orientent dans cette perspective subordonnent ainsi la découverte de la démonstration à sa motivation : motivation sociale liée aux situations de discussion et de contradictions potentielles, motivation mathématique liée au caractère inattendu du résultat qu'elle permet de trouver. Ces approches présupposent un passage naturel de l'argumentation au raisonnement déductif, ainsi que l'existence d'un intérêt presque unanimement partagé par l'ensemble des élèves pour des résultats mathématiques. Nous verrons qu'au moins la première de ces présuppositions est loin d'être vraie. D'autres voies de recherche se sont orientées vers le développement intellectuel général du pré-adolescent. Si on se réfère à la description piagétienne du stade des "opérations formelles", il faudrait d'abord favoriser l'usage des règles élémentaires de la logique des propositions (par exemple celles concernant l'implication matérielle). Et rien n'interdit d'y ajouter celles de la logique des prédicats (par exemple celles concernant la manipulation des quantificateurs). Cette approche présuppose à la fois un fonctionnement psychologique unique pour toutes les formes de raisonnement et l'indépendance du raisonnement par rapport au langage. Cette seconde

¹Une synthèse des études sur la démonstration, aussi bien de son évolution dans l'histoire des mathématiques que de son introduction dans l'enseignement, se trouve dans G. Arsac (1988).

présupposition va à l'encontre d'observations constamment refaites: chez les élèves le raisonnement est fortement influencé par le langage. Il reste une autre voie qui semble avoir moins retenu l'attention : elle consiste à analyser l'activité sollicitée dans la production d'une démonstration et à distinguer les différentes tâches qu'elle impliquent. Si nous revenons aux premières démonstrations qui sont demandées, ou qui peuvent être demandées, à travers des problèmes de géométrie, aux élèves de Collège, la pratique du raisonnement déductif apparaît comme l'une des tâches décisives impliquées dans la production d'une démonstration. La simple utilisation de définitions ou de théorèmes relève déjà de cette pratique. Le raisonnement déductif présente par ailleurs cette particularité d'être intégré à d'autres formes de raisonnement qui sont utilisés en mathématique comme, par exemple, le raisonnement par l'absurde. La compréhension du fonctionnement de ce type de raisonnement apparaît comme la condition préalable à l'activité de démonstration. Or si le raisonnement déductif s'exprime linguistiquement dans des formes et avec des connecteurs assez proches de ceux utilisés dans une argumentation, son fonctionnement en est radicalement différent. La rupture entre les deux démarches qui sous-tendent ces deux types de raisonnement est en général sous-estimée. La raison en est peut-être que l'organisation discursive traduisant une démonstration et celle exprimant une argumentation présentent des ressemblances de surface. Ces ressemblances sont en tous cas suffisamment fortes pour créer chez la très grande majorité des élèves une "illusion d'optique" qu'ils ne corrigent pas spontanément : ils ramènent le fonctionnement du raisonnement déductif à celui d'une simple argumentation. Cela est aisément décelable dans la compréhension qu'ils ont des énoncés de textes (d'élèves ou d'enseignants) présentant une démonstration. Le problème devient alors celui de la définition des tâches qui permettraient aux élèves de découvrir ce qu'est une organisation déductive de propositions et quel est son fonctionnement spécifique par rapport à une argumentation.

Les deux articles qui suivent s'inscrivent dans le cadre d'une décomposition cognitive des tâches.

Le premier présente une expérience qui a été menée dans une classe de quatrième au cours du second trimestre de l'année 1987-1988. D'une part, pour les problèmes de géométrie, il y a eu séparation des tâches relatives à l'activité heuristique et de celles relatives à l'organisation déductive de propositions. D'autre part l'organisation déductive a donné lieu à deux types de tâches très différents: l'élaboration de graphes puis l'écriture de textes, pour donner un double accès, "visuel" et linguistique, au fonctionnement spécifique du raisonnement déductif.

Le deuxième article présente une analyse de ce fonctionnement et puis examine comment les caractéristiques du R.D. sont explicitement marqués, ou au contraire occultés, sur

chacun des deux registres de présentation, graphe et texte. L'analyse du fonctionnement du R.D. est évidemment faite sur fond de comparaison avec l'argumentation. L'examen de la façon dont une organisation déductive de propositions se projette sur les deux registres de présentation permet de définir des critères pour décider si une production traduit ou non une démarche déductive. Cet examen a été concrètement guidé par l'évolution spectaculaire des textes des élèves au cours de l'expérience. Précisons que cette évolution s'est accompagnée par la découverte de l'intérêt et de la productivité des démonstrations et par un changement important des attitudes et des stratégies dans les phases de recherche. Naturellement on ne peut exhiber de traces écrites reflétant immédiatement cette évolution hormis justement les textes produits par les élèves au cours de cette expérience ou après. Ils en sont le résultat,