Danièle Coquin-Viennot

La notion de représentation-conception au service de l'enseignement d'un concept mathématique

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1988-1989, fascicule 5 « Didactique des mathématiques », , exp. n° 4, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1988-1989___5_A4_0>

LA NOTION DE REPRESENTATION-CONCEPTION AU SERVICE DE L'ENSEIGNEMENT D'UN CONCEPT MATHEMATIQUE (1)

Danièle COQUIN-VIENNOT

Maître de Conférences de Mathématiques au Laboratoire de Psychologie
de l'Université de Poitiers

La notion de représentation a toujours été centrale dans les théories de l'apprentissage. De façon plus précise, nous voudrions examiner ici en quoi la connaissance des représentations que les élèves se font de certains savoirs peut guider le maître dans la construction de son enseignement.

Dans un premier temps, nous définirons la notion didactique de conception et nous en examinerons les rapports avec l'enseignement; puis nous analyserons le cas particulier de l'enseignement des nombres relatifs au collège (12-15 ans); enfin, nous discuterons sur différents exemples des problèmes posés par l'existence ou la construction de représentations intermédiaires naïves, ou localement exactes.

1. CONCEPTIONS ET ENSEIGNEMENT

1.1. Concept et conceptions

G. Vergnaud (1985) définit un *concept* comme un "triplet (S, I, $\mathcal{S}$):
S: ensemble des situations qui donnent du sens au concept,
I: ensemble des invariants opératoires qui sont sous-jacents au traitement de ces situations par le sujet,
$\mathcal{S}$: ensemble des signifiants (ou symbolisations) qui permettent de représenter les invariants, les situations, les procédures de traitement...
Ainsi, un concept renvoie nécessairement à plusieurs situations, plusieurs invariants, plusieurs symbolisations possibles".

Dans ces conditions, si la "fonction principale de la représentation est de conceptualiser le réel pour agir efficacement" (Vergnaud, 1985), il faut admettre l'existence d'un grand nombre de représentations différentes pour un concept donné.
Lorsqu'un groupe d'élèves met en oeuvre une même représentation d'un concept dans une situation donnée et que cette représentation présente une certaine stabilité, on parle de *conception*. C'est l'analyse des productions des élèves pour résoudre les tâches associées au concept qui permet de mettre en évidence la conception.
Des conceptions différentes peuvent coexister et être plus ou moins disponibles selon la situation (Artigue M., Robinet J.,1982). Elles peuvent être construites en classe ou dans la vie quotidienne. On parlera plutôt de représentation ou de modèle naïf ou spontané si leur construction s'est élaborée en dehors du système scolaire (cf surtout les travaux en didactique de la physique: Saltiel E., 1978; Viennot L., 1979; Caillot M., 1984; Johsua S., 1987).
Elles peuvent être "justes" ou "fausses" ou "partielles" ou simplement "localement exactes"; c'est ce que nous allons préciser.

1.2. Hiérarchie de conceptions et enseignement

Pour certains concepts, on peut faire correspondre à des stades d'acquisition successifs, des conceptions de plus en plus élaborées; c'est-à-dire des conceptions qui permettent d'agir

(1) Ce texte est publié dans "La Psychologie Scientifique et ses Applications", MONTEIL J.M. et FAYOL M. (Ed.) 1989.

efficacement dans un nombre de plus en plus grand de situations. Nous parlerons alors de *hiérarchie de conceptions*.

Dans ce cas, un progrès dans l'apprentissage d'un concept est réalisé lorsque l'élève passe d'une conception C_n à une conception C_{n+1} qui lui succède dans la hiérarchie. La mise en évidence d'un niveau de conception implique sa relative homogénéité; en revanche, il y a discontinuité entre un niveau et le suivant: le passage de C_n à C_{n+1} ne peut se faire par complexification progressive, puisque "la filiation des connaissances ou des théories ne peut être réduite à une succession d'assimilations et d'apports de petites quantités d'information" (G. Brousseau, 1982). L'installation de C_{n+1} ne peut se faire que *contre* C_n, en renversant les *obstacles* didactiques liés à C_n.

Dans ce cadre, le rôle de l'enseignement est de déstabiliser la conception C_n tout en favorisant l'émergence de C_{n+1}. Pour ce faire, plusieurs conditions sont requises:

- On proposera à l'élève des tâches qui ont une solution dans C_{n+1}, mais pas dans C_n. On proposera également des tâches dont la solution est *beaucoup* plus économique dans C_{n+1} que dans C_n. "Ceci oblige à renoncer à de petites progressions régulières le long des variables didactiques et à opter pour des sauts informationnels suffisants" (G. Brousseau, 1982). Ces tâches seront proposées en grand nombre afin que l'économie réalisée soit rentable face au coût de l'investissement représenté par l'utilisation d'une nouvelle procédure. .

- Il faut sérieusement contrôler la nouveauté de la situation: l'élève doit pouvoir investir les instruments cognitifs qu'il possède déjà et la stratégie de base qu'il met en oeuvre doit garder un minimum de vraisemblance. Si la nouveauté est trop grande, deux dangers apparaissent: 1) le problème risque de perdre son sens pour l'élève; 2) l'élève peut régresser en se réfugiant dans des "procédures moins puissantes, mais plus fiables" (G. Vergnaud, 1981).

La connaissance des conceptions des élèves est indispensable pour construire les situations leur permettant d'évoluer. A titre d'exemple, traitons le cas des nombres relatifs.

2. CONCEPTIONS DE L'ENSEMBLE Z DES NOMBRES RELATIFS

2.1. Principe de l'analyse

14 exercices relevant du *champ conceptuel* (G. Vergnaud, 1982) des nombres relatifs, ont été sélectionnés:

- 4 exercices "porteurs de sens": ce sont des exercices types proposés par les manuels au moment de la présentation de la notion de relatif. Ils ont une solution dans l'ensemble des nombres naturels N, mais les solutions dans Z sont plus économiques.

Ex. de l'élève Dubois :
Un examen est composé de 6 épreuves. Chaque épreuve est notée sur 20. Pour être reçu, il faut une moyenne générale d'au moins 10 sur 2O.
Voici les résultats de l'élève Dubois:
Français: 12; Anglais: 8; Maths: 10; Physique: 11; Histoire: 6; Sciences Naturelles: 12.
Cet élève sera-t-il reçu?

L'économie réalisée en travaillant dans Z plutôt que dans N, est d'autant plus grande qu'on augmente la taille des nombres et qu'on rend l'origine (ici 1O) implicite.

- 8 exercices formels. Ils mettent en jeu la relation d'ordre, les opérations additives et multiplicatives. Ils n'ont, en général, de solution que dans Z.

- 2 exercices qui mettent en relation la notion de nombre relatif avec l'arithmétique et avec la géométrie.

Ces exercices ont été proposés à des élèves de collège (12-15 ans).
Chaque production d'élève pour un exercice donné a été classée selon 2 dimensions:
1. La nature de l'exercice (opération additive, relation d'ordre, combinaison de deux relations...).
2. La "qualité" de la procédure de résolution, comme indicateur du degré d'acquisition de Z; par exemple:
- réponses n'utilisant que les propriétés des nombres naturels: qu'elles aboutissent (calcul de la moyenne dans l'exemple de l'examen) ou qu'elles n'aboutissent pas (calcul de sommes algébriques avec comme résultat intermédiaire: O-3 = O);
- réponses les plus économiques, qui font appel aux propriétés les plus élaborées de Z (système de compensation ou moyenne relative dans l'exemple de l'examen; simplification et système de compensation pour le calcul des sommes algébriques: 2-3+4+1...);
- réponses caractéristiques d'une étape intermédiaire (dans un premier temps, travail séparé sur les positifs et les négatifs dans le calcul d'une somme algébrique).
Ce ne sont là que quelques exemples; pour plus de détails, cf. Coquin-Viennot, 1985.

2.2. Résultats

Nous avons procédé à une analyse des correspondances sur le tableau (élèves) x (procédures) (36O élèves; 9O procédures et quatre variables supplémentaires représentant les niveaux scolaires).

Le premier axe (7, 5% d'inertie) est un axe hiérarchique qui ordonne les procédures des moins élaborées aux plus élaborées. Il est jalonné par les niveaux scolaires de la 6ème à la 3ème. En traçant des lignes de niveau perpendiculairement à l'axe 1, nous avons tenté de délimiter des groupes relativement homogènes de procédures. On peut repérer ainsi quatre niveaux de conceptions des nombres relatifs:

Niveau 1: Les relatifs sont traités comme des naturels. Le nombre est considéré comme une *quantité* ou une *mesure* et donc ne peut être que positif.

Niveau 2: Les quantités sont divisées en deux groupes: les positives d'une part, et les négatives d'autre part (ou plutôt les positives, précédées d'un signe moins, d'autre part). Ces deux groupes sont traités séparément, sauf pour la synthèse finale. A aucun moment, ces deux groupes ne constituent un ensemble unifié: on retrouve ici une difficulté épistémologique et historique pointée par G. Glaeser (1981).

Dans cette conception, les enfants raisonnent dans les Naturels s'ils permettent d'obtenir la bonne réponse; ils utilisent les Relatifs (Positifs / Négatifs) quand la forme de l'exercice les y pousse (grands nombres et surtout absence d'origine).

Niveau 3: L'ensemble des Relatifs (Positifs / Négatifs) est unifié; il est constitué comme *groupe additif*.
Ceci se voit aux procédures de ce niveau qui utilisent largement le système de compensation. Mais ici, les problèmes mutiplicatifs ne sont pas résolus ou pas correctement résolus.

Niveau 4: Les problèmes multiplicatifs sont résolus. *L'anneau des Relatifs* est construit. Ce niveau n'est atteint que par un petit nombre d'élèves, même en 3ème.

2.3. Passages et obstacles

Comment aider les élèves à passer d'une conception à une autre?

De C1 à C2, le passage est aisé, bien que bouleversant la notion de nombre = quantité: que dire de "O-3"? Comment enlever quelque chose à rien? C'est le premier obstacle, aisément surmonté en définissant le négatif par opposition au positif, *relativement* au positif: une dette n'est qu'une *quantité* d'argent qu'il faudra rembourser quand les caisses auront été remplies. Nous voyons poindre les bilans et le modèle commercial (Glaeser, 1981).

De C2 à C3, la difficulté est plus grande, puisque tous les problèmes de bilan ont une solution dans C2.
Pour contraindre l'élève à abandonner ses procédures initiales, qui restent possibles, il faut les rendre très coûteuses ou inefficaces. Deux moyens pour cela: 1) augmenter considérablement le poids des calculs, ce qui incite aux compensations et aux simplifications; 2) ne pas fixer l'origine (la frontière entre les positifs et les négatifs), ce qui empêche de calculer dans l'un des deux sous-ensembles, sauf reconstitution laborieuse. Ce niveau est atteint par une grande partie des élèves de 3ème.

De C3 à C4, l'obstacle devient beaucoup plus résistant. La représentation commerciale patiemment mise en place par les maîtres et rapidement adoptée par les élèves, devient inopérante dans le système multiplicatif. "Comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs, cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5.000.000?" demandait déjà Stendhal. Il est clair que le modèle commercial n'a rien à voir avec la fameuse "règle des signes". Ce modèle concret, efficace dans la structure additive ne peut se généraliser à la structure multiplicative; il fait lui-même obstacle à l'installation du niveau de conception C4, correspondant à un traitement *formel* des Relatifs. Aucune représentation concrète, en accord à la fois avec les structures additive et multiplicative n'existe. Dans un système de double représentation (une pour la structure additive et une pour la structure multiplicative), la première (le modèle commercial) domine tant que l'autre ne peut être mobilisée.

On peut s'inquiéter de ce qu'un obstacle aussi tenace ait été construit en classe. On comprend d'autre part que les enseignants ne souhaitent pas se priver d'une représentation si efficace en début d'apprentissage. Toutefois C. Sackur-Grisvard et Coll (1987) ont construit un enseignement des Relatifs qui évite totalement les thermomètres, les bilans et les ascenseurs . La notion d'opposé y est primordiale, elle y est obtenue par produit par -1 . L'évaluation des résultats est en cours.

3. DISCUSSION

Nous venons de voir comment la connaissance des conceptions est indispensable pour construire des situations permettant aux élèves d'élaborer une conception C_{n+1} à partir de la conception C_n, mais aussi contre cette dernière. De nombreux psychologues et didacticiens travaillent actuellement dans ce sens, en particulier en mathématiques et en physique. Ils le font dans deux cas :

1. Les conceptions initiales sont des *représentations spontanées* considérées comme fausses dans le domaine scolaire (1); ceci est particulièrement vrai en physique, en mécanique, dans les domaines qui ont un rapport avec le concret. Dans ce cas, on se bat contre une construction non volontairement élaborée par l'école.

2. Les conceptions initiales ont déja été *construites en classes*; elles ne sont que localement exactes: d'une façon ou d'une autre, on est toujours dans un contexte de vulgarisation (Giordan et Raichwarg, 1986). Mais F. Léonard (1987) précise les conditions que devraient remplir chaque niveau de connaissance: "avoir une stabilité assez forte pour servir de support à la suite, mais pas trop importante pour que chaque connaissance inexacte, provisoire puisse être dépassée. Les erreurs les plus tenaces tiennent le plus souvent à la trop forte stabilité d'une connaissance inexacte, utile en son temps, mais qui n'a pu être dépassée".

A une époque où le grand souci des mathématiciens et des physiciens est de redonner du *sens* aux notions enseignées au risque de passer par une *concrétisation* abusive des problèmes ou une *modélisation* osée des situations, l'enseignement des modèles localement exacts est jouable, à condition d'être étroitement contrôlé.

(1) Il ne faut pas perdre de vue que les "experts" recourent souvent à ces représentations dans la vie courante...

BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M., ROBINET J. (1982). - Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. Recherches en Didactique des Mathématiques, 3.1., 5-64.

BROUSSEAU G. (1982). - Petit panorama de la didactique des mathématiques. IREM Bordeaux. Mars, Ia.

CAILLOT M. (1984). - La résolution de problèmes en physique: représentations et stratégie. Psychologie Française, 29, 257-262.

COQUIN-VIENNOT D. (1985). - Complexité mathématique et ordre d'acquisition: une hiérarchie de conceptions à propos des relatifs. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 6, n°2-3, 133-192.

GIORDAN A., RAICHWARG D. (1986). - Quelques conditions pour vulgariser la Science à des enfants. Revue Française de Pédagogie, n°76, 57-67.

GLAESER G. (1981). - Epistémologie des nombres relatifs. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 2-3, 3O3-346.

JOSHUA S. (1987). - La gestion des contradictions dans les processus de modélisation en physique, en situation de classe. Colloque du Greco, Didactique et acquisitions des Connaissances Scientifiques, Sèvres, 25-27 Mai, 139-152.

LEONARD F., SACKUR-GRISVARD C., ANCILLOTI (J.P.) (1987). - Enseigner et comprendre la sériation des décimaux. Actes du Colloque "L'enfant et l'école". Poitiers, 17-2O Juin, 17-18.

MONTEIL J.M. , FAYOL M. (Ed.) (1989) - La psychologie scientifique et ses applications. PUG.

SACKUR-GRISVARD C., ROUX J.L., LEONARD F.I. (1987). - Effet des connaissances existantes et difficultés liées aux exemples utilisés dans un apprentissage mathématique. Actes du Colloque "L'enfant et l'école". Poitiers, 17-2O Juin, 25-26.

SALTIEL E. (1978). - Concepts cinématiques et raisonnements naturels: étude de la compréhension des changements de référentiels galiléens par les étudiants en sciences. Thèse d'Etat, Université de Paris 7, Juin.

VERGNAUD G. (1981). - Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en Didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 2, n°2, 215-232.

VERGNAUD G. (1982). - Cognitive and developmental psychlogy and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. For the Learning of Mathematics, 3.2,31-41.

VERGNAUD G. (1985). - Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. Psychologie Française, n°3O, 3/4, 245-252.

VIENNOT L. (1979). - Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire. Hermann.