J. HOUDEBINE

« Changer un terme de membre en changeant de signe » ou l'enseignement d'une règle d'action concernant les équations en 4e

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1988-1989, fascicule 5
« Didactique des mathématiques », , exp. nº 2, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1988-1989___5_A2_0>

"CHANGER UN TERME DE MEMBRE EN CHANGEANT DE SIGNE" OU L'ENSEIGNEMENT D'UNE REGLE D'ACTION CONCERNANT LES EQUATIONS EN $4^{\text{ème}}$.

J. HOUDEBINE
Université de RENNES I
Equipe de Didactique des Mathématiques

Cet exposé est un compte rendu d'une recherche faite à l'I.R.E.M. par M. ALARD, M.F. CARNOT, P. COQUIL, J. HOUDEBINE, J. JULO, J. LAFFORGUE, J. LARIVAIN, P. PERON, A. LE HENO, F. MALLEDANT et A. LE POCHE en 1986-87 et 1987-88. Un polycopié (3) va paraître d'ici quelques mois qui donnera plus de détails sur cette recherche et en particulier sur les fiches expérimentées avec les élèves.

I - Qu'est-ce qu'une règle d'action.

Rappelons ce que nous écrivions sur ce sujet dans (1)

> *Il s'agit pour l'élève, dans des situations particulières, d'avoir des réponses qui ne demandent qu'une mobilisation minimum des connaissances. Ces réponses ne sont pas imposées a priori de l'extérieur, mais elles paraissent pertinentes à celui qui les emploie pour résoudre le problème posé. Elles répondent au "principe d'économie" qui est sous–jacent à toute activité humaine. On peut dire que l'action est pratiquement impossible devant une situation ou un problème si on ne possède pas une panoplie suffisante de règles d'action.*

Parmi les règles d'action acquises par les élèves, certaines conduisent à des fautes (par exemple $(a+b)^2 = a^2 + b^2$). D'autres sont utiles et efficaces. Parmi ces dernières, beaucoup ne font l'objet d'aucun apprentissage explicite (par exemple, le tracé des figures dans certaines positions privilégiées).

Dans cet exposé, nous ne nous intéresserons qu'aux règles d'action faisant l'objet d'un apprentissage explicite. Il y en a beaucoup en algèbre, par exemple : les identités remarquables, les techniques de mise en facteurs, les techniques de résolution d'équations, etc...

Le domaine mathématique choisi pour faire cette étude a été "*les équations*", car il nous a semblé que les règles d'action y jouaient un rôle particulièrement important et simple.

II - L'objet de la recherche.

La question posée au départ était "*comment enseigner efficacement une règle d'action faisant l'objet d'un apprentissage explicite*". Des travaux antérieurs nous avaient convaincus que beaucoup d'erreurs, d'incompréhensions et même de blocages proviennent, dans le cas d'élèves en difficulté, d'une mauvaise maîtrise de règles d'action. En particulier un enseignement qui consiste à énoncer des règles puis à les appliquer systématiquement dans des exercices conduit trop souvent à cette situation. Cela peut s'expliquer aussi bien par l'absence d'un contrôle fondé sur des représentations adaptées qu'à une mauvaise compréhension des techniques d'utilisation de chaque règle d'action.

Nous pensions dans un premier temps examiner le cas de plusieurs règles d'action. Mais l'expérience nous a montré qu'il valait mieux approfondir la réflexion sur une seule règle. Le choix s'est fait sur la transposition à la fois parce que cette règle est incontournable et parce qu'elle est la cause apparente de beaucoup d'erreurs en $3^{ème}$.

III - La démarche suivie.

Pendant un an nous avons essayé d'isoler le plus possible le problème de l'enseignement de la transposition (1). L'analyse a porté en particulier sur

- les prérequis nécessaires à une bonne maîtrise
- le rôle des "*justifications*" données par l'enseignant
- les moyens de contrôle que possèdent les élèves.

Pour chacun de ces points nous préparions des fiches qui étaient proposées à des groupes d'élèves observés par l'un d'entre nous. Nous avons préféré cette méthodologie légère car dans des problèmes aussi ouverts, le premier but est de rejeter ou de renforcer les nombreux a priori et de dégager quelques idées forces qui peuvent faire ultérieurement l'objet d'une étude plus minutieuse. Nous la complèterons quant à nous par l'interview de 40 élèves de $5^{ème}$, $4^{ème}$ et $3^{ème}$ au cours de la $2^{ème}$ année de travail.

Au bout d'un an il est apparu évident que c'est l'enseignement de tout le chapitre sur les équations qui était en jeu. En d'autres termes, il ne s'agissait plus "*d'enseigner la transposition*" mais de réfléchir à l'enseignement des équations pour que la transposition y trouve sa meilleure place.

(1) Transposition = changement de membre d'un terme dans une équation.

Cette constatation est intéressante car elle donne des indications sur une méthodologie qu'il serait raisonnable de suivre dans l'étude de d'autres règles d'action. Nous en reparlerons dans le V.

IV - Les résultats obtenus.

a) *Une analyse du statut de la transposition.*

Cette analyse ne s'est pas faite a priori. Elle s'est développée aussi bien par les discussions que nous avions à propos des activités que nous mettions au point, qu'à la lumière des réactions des élèves.

1) Proposons d'abord une définition :

DEFINITION. *La transposition est la règle d'action qui consiste, <u>pour obtenir des égalités ou des inégalités équivalentes</u> , à déplacer un <u>terme</u> de la somme qui apparaît dans l'un des membres de l'égalité ou de l'inégalité pour le placer dans l'autre membre en le changeant de signe.*

Nous avons souligné les mots qui nous ont paru les plus importants.

2) Les problèmes où on la rencontre :

Un recensement des situations où cette règle est utile montre que tôt ou tard les élèves sont appelés à l'utiliser et qu'on ne peut donc en aucun cas faire l'impasse sur son enseignement. Nous présentons ces situations dans l'ordre où elles se présentent dans l'enseignement :

- résolution d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue à coefficients entiers ou décimaux. Le but est de "*mettre les x d'un côté et le reste de l'autre*".

- résolution d'équations où interviennent des vecteurs.

- résolution d'équations et d'inéquations du $2^{ème}$ degré ou de degré plus élevé. Le but est de mettre "*tout dans le 1er membre*" (ou "*tout dans le $2^{ème}$ membre*").

- démonstration d'une égalité (ou d'une inégalité). Il s'agit ici de remplacer une égalité par une égalité équivalente plus facile à démontrer.

Cette tâche paraît a priori plus simple que les précédentes puisqu'elle ne nécessite pas la notion d'équation mais dans la pratique on ne la rencontre qu'à un niveau assez élevé.

- équations de droites puis équations de courbe. Il s'agit par exemple de passer de la forme $ax + by + c = 0$ à la forme $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, puis, plus tard de l'équation : $x^2 + y^2 = 1$ d'un cercle à la forme : $y^2 = 1 - x^2$.

3) Cette règle d'action du point de vue mathématique a deux fondements.

D'une part, elle est une conséquence de la compatibilité de l'addition avec les égalités et les inégalités dont voici par exemple un énoncé simple :

si $A = B$ alors $A + a = B + a$
si $A \leq B$ alors $A + a \leq B + a$.

Dans le cas des équations cette compatibilité est utilisée dans la notion d'équations équivalentes, c'est-à-dire d'équations ayant les mêmes solutions.

D'autre part, elle s'apppuie sur des propriétés très techniques des expressions algébriques dont l'une pourrait s'énoncer : "*Si on a une somme de termes, on peut faire disparaître l'un des termes de cette somme en lui ajoutant ce terme avec un signe opposé*".

Cette analyse indique bien les points d'ancrage nécessaires. D'une part une solide maîtrise des expressions algébriques : reconnaissance des termes et des facteurs, lien des signes + et - avec les termes qui les suivent, bonne utilisation des parenthèses, bonne connaissance de toutes les règles implicites de présentation, etc... D'autre part, une bonne compréhension de la notion d'équations équivalentes .

b) *Une étude du comportement des élèves.*

1) Les élèves appréhendent mal la structure d'une expression algébrique ; en particulier ils connaissent incomplètement les règles implicites d'écriture : par exemple quand supprime-t-on les signes multipliés ? préfère-t-on $x \times 4$ à $4x$? etc... Le repérage des termes dans une somme algébrique complexe n'est pas immédiat. Par exemple dans

$$2a + 3 - 5 \times b - 1$$

certains élèves pensent que le $4^{\text{ème}}$ terme peut être b.

2) La transposition n'apparaît pas "naturellement en $5^{ème}$ et en $4^{ème}$".

Les élèves de $3^{ème}$ donnent souvent l'impression d'utiliser la transposition comme s'il la connaissait depuis longtemps (même si cette utilisation est erronée) et l'idée vient que cette règle d'action apparaît spontanément dès que l'on travaille sur la résolution des premières équations. Des observations sur des élèves de $5^{ème}$ et de $4^{ème}$ montrent qu'il n'en est rien.

D'abord elle ne sert à rien pour résoudre les "*petites équations*" : pour x+5=7 le résultat est évident : 2 + 5 = 7.

On trouve souvent la même attitude devant $2x + 3 = 5$.

Pour $x + 29 = 42$ beaucoup d'élèves pensent en terme de soustraction "*pour trouver le $2^{ème}$ terme de la somme il faut soustraire du total le premier terme*".

Pour beaucoup d'équations simples quelques essais de valeurs donnent le résultat.

Pour les équations plus compliquées, l'idée de simplifier les 2 membres par 2 termes égaux ne vient pas non plus immédiatement à l'esprit des élèves : par exemple en $4^{ème}$ devant la question

trouver deux nombres entiers compris entre –3 *et* 3 *tels que*

$$4x^2 - x - 3(x+1) = 2 - 3(x+1) + 3x^2$$

trois groupes sur cinq ne pensent pas à simplifier et feront tous les calculs séparément sur chacun des membres.

3) La notion d'équation équivalente se heurte à une conception dissymétrique des équations.

En effet beaucoup d'élèves devant une égalité comme $2x + 7 = 22$ *pense au premier membre comme à une opération et au second membre comme au résultat.* On a alors des arguments du type : ***j'ai déjà* 7 *il me faut* 15 *pour obtenir* 22 *donc il faut que* $2x$ *fasse* 15.**

Si une équation comporte des x dans les deux membres, elle est souvent comprise comme la donnée de deux opérations dont les résultats sont identiques. Cela peut conduire devant l'équation

$$4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 + 2$$

à une argumentation du type : "*Pour que le résultat des deux côtés soit le même il suffit que* $4x + 1$ *donne la même chose que* 2". Cependant cette manière de voir une équation conduit rarement à une simplification dans une équation comme $2x = x + 2$, qui dans l'optique des équations équivalentes est pourtant très simple.

Cet obstacle didactique, c'est-à-dire lié au travail fait par les élèves dans les années antérieures, ne serait-il pas doublé d'un obstacle épistomologique : il s'agit en effet de passer d'une conception de l'égalité comme lien entre deux objets (éventuellement variables), à une conception beaucoup plus formelle dans laquelle les deux membres ne sont plus deux entités bien séparés, mais au contraire peuvent être modifiés l'un par l'autre par la transposition.

4) Quand les élèves rencontrent pour la première fois la transposition, elle a le statut d'une procédure, c'est-à-dire d'une action réfléchie ou encore d'une opération légale parmi d'autres qui permet de transformer les équations sans perdre ni gagner des solutions.

En revanche, dès que la transposition est devenue plus familière, après avoir été appliquée sur un nombre suffisant d'exemples, elle se transforme en une véritable règle d'action ; en fin de $4^{ème}$ et en $3^{ème}$ la transposition devient une réponse immédiate, un réflexe, devant tous les problèmes de résolution d'équations. Le plus souvent la réflexion n'y a pas sa part et les justifications ne sont plus d'aucun secours.

5) Le rôle des justifications.

Dès que la règle est effectivement énoncée par l'enseignant, celui-ci essaie naturellement d'apporter des justifications pour la faire mieux assimilér.

- On peut ajouter à chaque membre d'une égalité la même quantité. Si on veut supprimer un terme d'un côté il suffit d'ajouter l'opposé de ce terme à chaque membre.
- On peut retrancher à chaque membre la même quantité.

Il semble bien que les élèves ne ressentent guère cela comme des justifications mais plutôt comme d'autres procédures qui conduisent au même résultat. Ces procédures deviennent aussi pour certains des règles d'action.

6) Quelques représentations de la transposition.

Comme toujours il est très difficile de se faire une idée des représentations des élèves. Dans la pratique les enseignants en proposent deux.

Soit on propose à l'élève l'image de la balance : il y a équilibre et si on retire ou si on ajoute la même chose de chaque côté l'équilibre n'est pas rompu. L'expérience montre que cette image n'apporte pas d'éclaircisssement à tous les élèves. Cela peut s'expliquer parce que les concepts physiques mis en jeu sont sans doute aussi compliqués voire plus compliqués que la notion d'équation (d'autant plus que les balances à deux plateaux disparaissent peu à peu de notre environnement).

Une autre manière de présenter la transposition, qui est peut-être mieux fondée, est d'associer plusieurs équations à un même problème et de constater qu'on passe d'une équation à une autre par une transposition. Au cours de la résolution de "*petits problèmes*" apparaît, en effet, assez naturellement une opération qu'on pourrait appeler une transposition sémantique. Par exemple le problème :

> *Pierre a dans son atelier plusieurs billes d'acier identiques. Il voudrait bien trouver la masse d'une bille. Il a un morceau de plomb de 3 kg et un autre de laiton de 2,7 kg. Il s'aperçoit qu'une bille et le morceau de plomb ont la même masse que quatre billes et le morceau de laiton. Quelle est la masse d'une bille.*

conduit à l'équation $x + 3 = 4x + 2{,}7$. Beaucoup d'élèves calculent ici naturellement $3 - 2{,}7$. Cette opération est étroitement liée à la représentation du problème et très peu d'élèves reconnaîtraient leur action dans "*j'ai changé un terme de membre en changeant de signe*" ou "*j'ai retranché 2,7 à chaque membre*". Cependant il paraît assez raisonnable de s'appuyer sur ce contrôle sémantique pour conduire l'élève à une représentation de la transposition où intervient l'idée : les équations sont équivalentes puisqu'elles correspondent au même problème.

7) Rappelons que la notion de variable est aussi la source de nombreuses difficultés (cf. (2) par exemple).

V - Les conséquences pour l'enseignement des équations en 4ème. Une proposition de progression.

a) *Un travail de "préparation lointaine" est nécessaire sur deux plans* :

- la maîtrise des expressions algébriques car, repétons-le, toutes les règles qui serviront en 3ème dans la résolution d'équations sont basées sur une reconnaissance de la structure des expressions algébriques. Il ne faut pas confondre cela avec le calcul algébrique. Il ne s'agit en effet que de rendre les élèves capables de repérer dans une expression algébrique les principaux éléments de sa structure : est-ce une somme, est-ce un produit, quels sont les termes, les expressions $-a + b$ et $b - a$ sont-elles égales (difficultés liées à l'image du signe -) ?

- la maîtrise des notions de variable et d'équation. En particulier il faut se donner les moyens de supprimer la représentation : le 1er membre est une opération, le 2ème membre un résultat.

b) *Un travail préparatoire sur la transposition elle-même.*

Par des activités adaptées : résolutions d'équations "*lourdes*" par tâtonnement, rapprochement d'équations et problèmes, il faut arriver à faire "*découvrir*" la transposition et les règles d'action voisines : simplification, ajout de quantités égales etc...

c) Un cours centré sur la notion "*d'équations équivalentes*", d'abord comme équations correspondant au même problème puis comme équations ayant les mêmes solutions.

d) *Enseigner explicitement dans ce cours la transposition.*

Plutôt que de parler de justifications, faire un travail approfondi sur l'ensemble des règles d'action ou des procédures utilisées dans la résolution des équations. Par exemple faire expliciter par les élèves plusieurs formulations de leurs procédures ; les comparer. Ne pas le faire à propos d'équations trop simples qui relèvent de toutes autres procédures.

VI - Comment enseigner les règles d'action qui font l'objet d'un apprentissage explicite.

Du travail fait à propos de la transposition, quelques points méthodologiques nous semblent se dégager pour l'étude d'autres règles d'action.

a) *Une démarche possible.*

Comme nous venons de le voir ce n'est pas une tâche facile que d'étudier l'enseignement d'une règle d'action. Trois volets nous paraissent complémentaires dans ce type de recherche.

1) Une analyse mathématique fine du statut de la règle qui permette, d'une part, de repérer tous les prérequis nécessaires à un bon fonctionnement, d'autre part, les fondements théoriques de cette règle et enfin toutes les règles voisines et toutes les formulations de ces règles.

2) Une analyse du comportement des élèves. C'est au moment ou juste avant l'apprentissage de la règle que cette analyse paraît la plus profitable. Elle peut se faire à partir d'activités où la règle est a priori nécessaire .

3) La mise au point d'activités pour différents objectifs :

- mettre en place les prérequis nécessaires au bon fonctionnement
- faire apparaître "*spontanément*" la règle d'action dans des situations significatives
- introduire le cours sur cette règle d'action et son environnement.

b) *Des obstacles à éviter.*

- Il ne faut pas essayer d'isoler la règle d'action de son contexte mais au contraire réfléchir aux modifications de l'enseignement du contexte qui peut en améliorer la maîtrise.

- Comme nous l'avons remarqué pour la transposition, les règles d'action dont nous parlons ici naissent de procédures réfléchies. L'action de l'enseignant est beaucoup plus profitable sur ces procédures. Il semble qu'il soit bien tard pour agir sur la règle d'action elle-même.

- Les exercices répétitifs peuvent sans doute être un moyen de rendre très performante une règle d'action déjà solidement implantée. Par contre ils ne sont d'aucun secours pour l'apprentissage initial, car il éloigne l'élève de la réflexion indispensable au bon fonctionnement ultérieur de la règle.

- L'institutionalisation de la règle est un point à ne pas négliger. Un énoncé rapide ne suffit pas. Une solution est de prendre en compte tous les énoncés proposés par les élèves, de replacer la règle parmi d'autres règles d'action voisines et de faire un travail de comparaison sur l'efficacité, la clarté des énoncés, le champ d'application etc...

- Les justifications habituelles sont d'un piètre secours pour les élèves en difficulté.

- Le temps pris pour la mise en place des prérequis ou pour la participation des élèves à des activités adaptées capables de faire rencontrer la règle à ceux qui ne la connaissent pas, n'est pas du temps perdu. L'expérience montre qu'il est largement rattrapé par la suite au moment du cours.

Bibliographie

[1] *Les élèves en difficulté dans le 1er cycle de l'enseignement secondaire pour une intervention didactique différenciée* par J. HOUDEBINE et J. JULO. Revue Française de Pédagogie, n° 84 juillet-août-septembre 1988.

[2] *Petit x*, 1984 n° 05 édité par l'I.R.E.M. de Grenoble.

[3] *Vers les équations*. Fascicule édité par l'I.R.E.M. de Rennes, à paraître en septembre 1989.