YVES GUIVARC'H

Sur les solutions d'une équation fonctionnelle non linéaire de B. Mandelbrot

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1987, fascicule 1 « Probabilités », , p. 56-81

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1987___1_56_0>

SUR LES SOLUTIONS D'UNE EQUATION FONCTIONNELLE NON LINEAIRE DE B. MANDELBROT

Yves GUIVARC'H
IRMAR
UNIVERSITE DE RENNES I
CAMPUS DE BEAULIEU
35042 RENNES CEDEX

Résumé

On étudie les solutions d'une équations à coefficients aléatoires généralisant celle des lois semi-stables.

On montre l'existence d'une famille de solutions analogues aux lois stables sur $\mathbb{R}^+$ d'indice inférieur à 1 et d'une loi particulière jouant un rôle analogue à celui de la loi de Gauss.

On précise également la convergence vers ces lois limites d'un procédé itératif naturel.

Code : AMS 60 E

Introduction

Considérons la demi-droite positive $\mathbb{R}^+$, une mesure de probabilité α sur $\mathbb{R}^+$, un entier $c > 1$ et notons $*$, o, respectivement les convolutions additives et multiplicatives sur $\mathbb{R}^+$. L'équation E suivante :

$$(E) \quad v = Tv = (\alpha o v) * \ldots * (\alpha o v)$$

où v est une probabilité et le signe $*$ est répété $c-1$ fois a été introduite en [5] afin de préciser un modèle de turbulence défini par Kolmogorov et Yaglom. L'étude de cette équation se révèle délicate à cause de la présence des deux convolutions et des interprétations probabilistes sont utiles.

Désignons par A, X des variables aléatoires de lois α, v respectivement et par A_k, X_k $(1 \leq k \leq c)$ des copies indépendantes de A, X. L'équation précédente peut alors s'écrire en loi :

$$(E') \qquad X = \sum_1^c A_k X_k$$

Si $c\, E(A) = 1$, T conserve les moyennes des probabilités et si de plus $E(A \log A) < o$ une solution non-triviale de (E) peut être construite [2] à l'aide d'une martingale associée : en ce cas $T^n(\delta_1)$ converge vers v.

Si $E(A \log A) \geq o$ la convergence précédente a lieu vers δ_o.

Plusieurs questions ont été posées à ce propos dans [5] : préciser dans le premier cas l'allure à l'infini de v et dans le deuxiéme cas, normaliser la suite $T^n(\delta_1)$ de façon à obtenir une limite non-triviale. Ces questions contiennent comme cas particulier, si l'on fait abstraction de la condition $c\, E(A) = 1$ non respectée par normalisation, l'étude des lois stables sur $\mathbb{R}^+$ ou plutôt semi-stables au sens de [4], le cas semi-stables correspondant à des A_k constants. Il est possible d'apporter une réponse simple et complète à la première question : il existe un exposant χ tel que la limite de $t^\chi\, v\,[t, \infty]$ soit positive quand t tend vers l'infini. La réponse à la deuxième question consiste essentiellement à discuter l'équation $v = Tv$ et à préciser les bassins d'attraction des points fixes de T.

Il sera commode de travailler sur $\overline{\mathbb{R}}^+$ au lieu de $\mathbb{R}^+$ et d'introduire ainsi les deux solutions triviales δ_o et δ_∞.
On supposera que α a des moments de tous ordres, ne charge pas zéro et on donnera les preuves avec $c = 2$ pour alléger les notations.
On dira que la probabilité v a une queue d'ordre λ si :

$$\lim_{t \to +\infty} t^\lambda\, v\,(t, \infty) = C \quad (o < C < \infty)$$

et cette queue sera dite régulière si :

$$v\,[t, \infty] = \frac{C}{t^\lambda} + 0\left(\frac{1}{t^{\lambda+1}}\right)$$

Afin de décrire brièvement les résultats obtenus, dans le langage de la dynamique associée à l'itération de T, on peut se donner A avec, par exemple $c\,E(A)>1$, un paramètre k et décrire le comportement des solutions de (E'), où l'on remplace A par kA et l'on fait décroître k. Pour k grand, il n'y a que deux solutions δ_0, δ_∞, la seconde étant stable au sens dynamique. Pour k petit, il y a deux solutions stable δ_0 et δ_∞, avec des bassins d'attraction que l'on précise, et une famille nouvelle de solutions instables J_k. Ceci vaut en particulier pour le cas $E(A\log A)>0$, $k\,c\,E(A)=1$ où la solution construite en [2] devient triviale. Lorsque k varie le gain de stabilité de la solution δ_0 s'effectue de manière " douce " et s'accompagne de l'apparition de la famille instable J_k. D'autre part, si $E(A\log A)<0$ et $k\,c\,E(A)=1$, il y a apparition brusque d'une autre famille J'_1 de solutions instables qui disparaît aussitôt pour laisser place à la famille J_k. La famille J'_1 est celle construite en [2] et son instabilité est moins marquée que celle de J_k.

Les solutions de J_k, comme celles de J'_1 possèdent des queues dont l'exposant se calcule aisément. Enfin ces résultats permettent de répondre à diverses questions de [5] et de préciser certains résultats de [2]. Les lois de J'_1 apparaissent comme analogues des lois de Gauss tandis que celles de J_k sont analogues aux lois stables, portées par $\mathbb{R}^+$, et d'indice inférieur à 1.

A) Construction de solutions

I - UNE SOLUTION SPECIALE.

1) Construction [cf 2]

Soient $A(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ une famille de variables aléatoires indépendantes de loi α indexée par les intervalles c - adiques

$$I(j_1, j_2, \ldots, j_n) = \left[\sum_1^n j_k\, c^{-k}\ ,\ \sum_1^n j_k\, c^{-k} + c^{-n}\right]$$

et posons : $Y_n = \sum_{j_1,\ldots,j_n} A(j_1)\,A(j_1,j_2)\,\ldots\,A(j_1,\ldots,j_n)$

Alors on a bien, en loi :

$$Y_{n+1} = \sum_{k=1}^{c} A_k\, Y_n^k$$

où les Y_n^k sont indépendantes de même loi que Y_n, les A_k indépendantes entre

Si $c\,E\,(A) = 1$, la suite Y_n forme une martingale et il est montré en [2] que Y_n converge $p\,p$ vers Y_∞ avec $Y_\infty > 0$ ou $Y_\infty = 0$ suivant que $E\,(A\,Log\,A) < 0$ ou $E\,(A\,Log\,A) \geq 0$.

Dans le cas $E\,(A\,Log\,A) < 0$, ce procédé fournit une solution de (E) qui est la loi v de Y_∞ . Cette solution ainsi que les solutions déduites par homothéties seront dites spéciales.

Il est clair que la condition $c\,E\,(A) = 1$ est nécessaire pour qu'il y ait une solution de (E) avec moment d'ordre 1.

2) Comportement à l'infini des solutions spéciales.

Le théorème suivant répond à une conjecture de [5] prédisant pour $v\,[t\,,\infty]$ un comportement de la forme $\dfrac{C}{t^{\chi}}$ où χ est le nombre supérieur à 1, s'il existe, tel que $c\,E\,(A^{\chi}) = 1$. Par convexité de $E\,(A^t)$, si χ n'existe pas $E\,(A^t)$ est décroissante ; d'ailleurs en ce cas v possède des moments de tous ordres et A est portée par $[0\,,1]$.

Théorème 1

Supposons que α ne soit portée ni par $[0\,,1]$, ni par une progression géométrique de la forme k^n $(n \in Z)$. Alors la limite de $t^{\chi}\;v\,[t\,,\infty[$ existe et est positive.

Preuve

Posons $h\,(x) = x$ $(x \geq 0)$ et notons que pour deux mesures de probabilités ε et η sur $\mathbb{R}^+$ on a : $h\,(\varepsilon * \eta) = h\;\varepsilon * \eta + \varepsilon * h\,\eta$.
L'équation $Tv = v$ où v est une solution canonique devient alors par multiplication par h :

$$h\,v = (2\,h\,\alpha\,o\,h\,v\,) * \beta$$
$$\text{avec}\quad \beta = (\alpha\,o\,v\,) * \alpha\,o\,v$$

Dans l'équation précédente, on peut considérer $h\,v$ comme l'inconnue et β comme donnée. Introduisons alors la probabilité p sur le groupe affine de la droite (identifiée à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$) : $p = 2\,h\,\alpha \times \beta$ et la convolution correspondante avec les mesures sur $\mathbb{R}$.

L'équation précédente s'écrit alors $p * h\,v = h\,v$.

Notons que, v ayant des moments d'ordre inférieur à χ d'après [2] , $h\,v$ est une mesure bornée. Ce type d'équation et l'allure des solutions ont été étudiées par H. KESTEN [3] où est obtenu le résultat suivant. [cf appendices]

Soient $a(g)$, $b(g)$ les composantes de l'application définie par $g(x) = a\,x + b$ $(a \geq 0, b \geq 0)$, p une probabilité sur le semi-groupe précédent telle que son support S ne fixe aucun point de $\mathbb{R}$ ni que les valeurs de $a(g)$ $(g \in S)$ soient concentrées sur une progression géométrique de la forme k^n $(n \in Z)$; on suppose que : $\int Log\, a(g)\, d\,p(g) < 0$ et qu'il existe $\lambda > 0$ avec

$$\int a^{\lambda}(g)\, d\,p(g) = 1\ ,\ \int b^{\lambda}(g)\, Log^{+} b(g)\, d\,p(g) < +\infty\ ;$$

alors la probabilité μ solution de $p * \mu = \mu$ vérifie :

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\lambda}\, \mu\,(t\,, \infty) > 0.$$

Vérifions ces conditions ici :

$$\int Log\ a(g)\, d\,p(g) = 2\,E\,(A\, Log\, A) < 0 \qquad \int a^{\lambda}(g)\, d\,p(g) = 2\,E\,(A^{\lambda+1}) = 1$$

$$\text{pour} \qquad \lambda = \chi - 1$$

De plus β a des moments d'ordre inférieur à χ, comme v et donc :

$\int b^{\lambda}(g)\, Log^{+} b(g)\, d\,p(g) = E\,(\,(A\,X)^{\lambda}\, Log^{+} A\,X\,) < +\infty$ (où X est de loi v) car $\lambda = \chi - 1 < \chi$.

D'après le théorème cité, on a donc $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{\chi-1}\ (h\,v)\,[t\,, \infty[\, > 0$

Le passage à v est permis d'après [1] et donne :

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\chi}\ v\,[t\,, \infty[\, > 0$$

Remarque

Si α est portée par une progression géométrique k^n $(n \in Z)$ un terme périodique multiplicatif s'introduit dans le comportement de $v\,(t\,, \infty)$ comme c'est déjà le cas dans la situation des lois semi-stables au sens de P. LEVY [4].

II - RELATION DE CONJUGUAISON ET SOLUTIONS CANONIQUES.

Pour un nombre $\theta > o$, notons M_{θ} l'extension aux mesures de l'application $x \to x^{\theta}$ de $\mathbb{R}^{+}$ dans $\mathbb{R}^{+}$. Soit σ_{θ} la loi stable d'indice θ portée par $\mathbb{R}^{+}$ $(o < \theta < 1)$ et dont la transformée de Laplace vaut $\hat{\sigma}_{\theta}(\lambda) = e^{-\lambda^{\theta}}$. Pour une probabilité ε, posons $J_{\theta}(\,\varepsilon\,) = \sigma_{\theta}\ o\ \varepsilon$ et notons T_{θ} la transformation analogue à T obtenue en remplaçant α par $M_{\theta}(\alpha)$.

Donc ici $c\,E\,(A) \neq 1$ en général et si $\underset{o \leq \lambda \leq 1}{Inf}\ c\,E\,(A^{\lambda}) < 1$, il existe χ avec $o \leq \chi \leq 1$

$$c\,E\,(A^{\chi}) = 1, \qquad E\,(A^{\chi}\,Log\,A) < o \quad \text{par convexité ;}$$

le cas $\underset{o \leq \lambda \leq 1}{Inf}\ c\,E\,(A^{\lambda}) = 1$ donne χ avec $o < \chi \leq 1$ et $c\,E\,(A^{\chi}) = 1$, $E\,(A^{\chi}\ Log\,A) = o$

Proposition 1 :

On a la relation de conjuguaison : $TJ_{\theta} = J_{\theta}\,M_{\theta}^{-1}\ T_{\theta}\,M_{\theta}$

Preuve

C'est un calcul direct tenant compte du fait que les puissances de convolutions $(\sigma_{\theta})^{t}$ $(t \geq o)$ sont définies et forment un semi-groupe stable.

Pour condenser les notations on notera $\sigma_{\theta} = \sigma$, $TJ_{\theta}\,(\varepsilon) = (\alpha \circ \varepsilon \circ \sigma) * (\alpha \circ \varepsilon \circ \sigma) = \int\int (x \circ \sigma) * (y \circ \sigma)\, d\,(\alpha \circ \varepsilon)\,(x)\, d\,(\alpha \circ \varepsilon)\,(y)$. Posant $x^{\theta} = x'$, $y^{\theta} = y'$ et notant que $x.\,\sigma = \sigma^{x'}$, $y\,.\,\sigma = \sigma^{y'}$ on obtient :

$$TJ_{\theta}\,(\varepsilon) = \int \sigma^{x' + y'}\ d\,M_{\theta}\ (\alpha \circ \varepsilon)\,(x')\,d\,M_{\theta}\,(\alpha \circ \varepsilon)\,(y')$$

$$TJ_{\theta}\,(\varepsilon) = \int \sigma^{z}\ d\,[\,M_{\theta}\ (\alpha \circ \varepsilon) * M_{\theta}\,(\alpha \circ \varepsilon)]\,(z)$$

Notant que $z^{1/\theta} \circ \sigma = \sigma^{z}$ et que M_{θ} est un homomorphisme pour la convolution multiplicative :

$$TJ_{\theta}\,(\varepsilon) = \int \sigma^{1/\theta}\ \circ\ \sigma\,d\,[\,(\alpha_{\theta} \circ \varepsilon_{\theta}) * (\alpha_{\theta} \circ \varepsilon_{\theta})]\,(z)$$

en notant $\qquad M_{\theta}\,(\alpha \circ \varepsilon) = \alpha_{\theta} \circ \varepsilon_{\theta}$

$$TJ_{\theta}\,(\varepsilon) = J_{\theta}\,[\,M_{\theta}^{-1}\ \ T_{\theta}\,(\varepsilon_{\theta}) = J_{\theta}\ \ M_{\theta}^{-1}\ \ T_{\theta}\ \ M_{\theta}\ \ (\varepsilon)$$

Théorème 2 :

Supposons $\underset{o \leq \lambda \leq 1}{Inf}\ c\,E\,(A^{\lambda}) < 1$ soit χ le nombre précédement défini, v_1

la solution spéciale définie pour l'opérateur $T\chi$ associé à $M\chi\,(\alpha)$.

Alors la mesure $v' = J\chi\,M_{\chi}^{-1}\ (v_1)$ vérifie (E) : $T\,v' = v'$

Preuve

Il existe bien une solution spéciale pour $T\chi$ car si $B = A^{\chi}$, $c\,E\,(B) = 1$

$$E\,(B\,Log\,B) = \chi\,E\,(A^{\chi}\,Log\,A) < 0$$

Alors : $Tv' = TJ_{\chi}\ (M_{\chi}^{-1}\,v_1) = J_{\chi}\,M_{\chi}^{-1}\ T_{\chi}\,v_1 = J_{\chi}\ M_{\chi}^{-1}\ (v_1)$ puisque $T_{\chi}\,v_1 = v_1$

Remarque :

La famille de solutions de (E) qui vient d'être définie par homothétie sera dite canonique. Ces mesures admettent une densité comme σ_{χ} et ont un comportement à l'infini "hyperbolique" d'indice χ :

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\chi}\ v'\,[t, \infty] = \lim_{t \to +\infty} t^{\chi}\ [\int x^{1/\chi}\ d\ v_1(x)]\ \sigma_{\chi}\,(t, \infty) > 0$$

B) Le cas spécial $c\,E\,(A) = 1$, $E\,(A\,Log\,A) \leq 0$

I - UNICITE DE LA SOLUTION DE (E)

Proposition 1 :

Toute solution v de (E) vérifiant $\int Log^{+}(x)\,d\,v\,(x) < +\infty$ a un moment d'ordre 1.

Preuve

Reprenons les notations de A) avec $h\,(x) = x$ et q probabilité produit sur le groupe affine de composantes $2\,h\,\alpha$ et $\beta = \alpha \circ$ v. La mesure de Radon $h\,v = \mu$ satisfait alors l'équation d'invariance $q * \mu = \mu$.

Montrons d'abord l'existence d'une mesure de probabilité μ' vérifiant $q * \mu' = \mu'$.

Considérons la suite de variables aléatoires :

$Z_n\ (\omega) = \sum_{k=0}^{n} a_1 \ldots a_k\ b_{k+1}$ où les $(a_k\,, b_k)$ sont indépendantes et distribuées suivant la loi q.

On a : $\overline{\lim_k}\,(a_1 \ldots a_k\ b_{k+1})^{1/k} < 1$ $(p\,p)$ car $\frac{1}{k}\ Log\,(a_1 \ldots a_k\,b_{k+1})$ converge d'après le théorème ergodique et l'hypothèse $\int Log^{+} b\ \ d\,\beta(b) < +\infty$ vers un nombre au plus égal à $\int Log\,a\ \ d\,(h\ \alpha)\,(a) < 0$.

La variable $Z\,(\omega) = \lim_n\ Z_n\,(\omega)$ vérifie $Z\,(\omega) = a_1(\omega)\ Z\,(\theta\,\omega) + b_1\,(\omega)$ où θ est la translation naturelle sur l'espace produit. Sa loi μ' satisfait donc : $q * \mu' = \mu'$.

D'autre part la position à l'instant n de la trajectoire de la chaine de Markov sur $\mathbb{R}^+$ de noyau de transition $Q(x, .) = q * \delta_x$ est donnée par :

$S_n . x = a_n \dots a_1 x + a_n \dots a_2 b_1 + \dots + b_n$ et $S_n . x - a_n \dots a_1 x$ a même loi que $Z_{n-1}(\omega)$.

On a donc la convergence uniforme sur les compacts de :

$q^n * \delta_x(\varphi) = \int \varphi(S_n . x)\, d P(\omega) = \int \varphi(Z_{n-1} + a_n \dots a_1 x)\, d P(\omega)$ vers $\int \varphi(y)\, d\mu'(y)$ dès que φ est continue à support compact. Ceci prouve en particulier l'unicité de la probabilité Q – invariante.

De plus, sur une intervalle compact $I \subset]0,\infty[$, on peut réaliser, pour n assez grand :

$$q^n * \delta_x(\varphi) \geq 1/2\, \mu'(\varphi) \qquad (x \in I)$$

et l'égalité $\mu(\varphi) = \int q^n * \delta_x(\varphi)\, d\mu(x)$ donne alors :

$$\mu(\varphi) \geq 1/2\, \mu'(\varphi)\, \mu(I)$$

dès que φ est une fonction positive à support compact fixée. Ceci borne $\mu(I)$ indépendamment de I et montre que μ est une mesure bornée, avec à un coefficient près $\mu = \mu'$.

En particulier $h\, v$ est bornée, ce qui signifie que v a un moment d'ordre 1.

Définition

Pour un nombre λ ($0 < \lambda \leq 1$) et deux probabilités ε, η sur $\mathbb{R}^+$, on notera $d_\lambda(\varepsilon, \eta)$ la borne inférieure des intégrales $\int |x - y|^\lambda\, d\rho(x, y)$ où ρ est une probabilité sur $\mathbb{R}^2$ de projections ε, η. On notera $d_1 = d$.

Si ε et η ont des moments d'ordre λ, d_λ définit une distance qui a été étudiée par de nombreux auteurs [7]. Clairement $d_\lambda(\varepsilon, \eta)$ est la borne inférieure des nombres $E\,|X - Y|^\lambda$ où X et Y sont des variables aléatoires de lois ε et η.

Enfin la borne inférieure qui définit d_λ est atteinte [7] et de plus, si F et G désignent les fonctions de répartition de ε et η on a :

$$d(\varepsilon, \eta) = \int_0^\infty |F(x) - G(x)|\, dx$$

Proposition 2

Soient ε et η deux probabilités sur $\mathbb{R}^+$. Alors $d_\lambda(T\varepsilon, T\eta) \leq c\, E(A^\lambda)\, d_\lambda(\varepsilon, \eta)$
Si de plus $\int x\, d\varepsilon(x) = \int x\, d\eta(x) = 1$ et $d(T\varepsilon, T\eta) = d(\varepsilon, \eta)$ on a : $\varepsilon = \eta$

Preuve

On va utiliser l'interprétation probabiliste de la transformation T en notant X, X_1 (resp Y , Y_1) des variables aléatoires de lois ε , $T\varepsilon$ (resp η , $T\eta$).

Notant X' , X'' des copies indépendantes de X on a :

$$X_1 = A'X' + A''X'' ,\ Y_1 = A'Y' + A''Y''$$

avec des notations naturelles.

Alors :

$$|X_1 - Y_1|^\lambda \le |A'|^\lambda \ |X' - Y'|^\lambda + |A''|^\lambda \ |X'' - Y''|^\lambda$$

$$E(|X_1 - Y_1|^\lambda) \le 2E(A^\lambda)E(|X - Y|^\lambda)$$

$$\text{et} \quad d_\lambda (T\varepsilon , T\eta) \le 2E(A^\lambda)\, d_\lambda (\varepsilon , \eta)$$

En particulier, puisque $2E(A) = 1$:

$$d(T\varepsilon , T\eta) \le d(\varepsilon , \eta)$$

Inversement soient X et Y des variables aléatoires de lois ε et η vérifiant $d(T\varepsilon , T\eta) \le d(\varepsilon , \eta)$ $E(X) = E(Y) = 1$, avec, ce qui est possible $E|X - Y| = d(\varepsilon , \eta)$.

On choisit (X' , Y') et (X'' , Y'') indépendantes et de même loi que (X , Y).

Si, avec probabilité positive, on a :

$$A'A''(X' - Y')(X'' - Y'') < 0$$

On aura, avec la même probabilité :

$$|X_1 - Y_1| < A' \ |X' - Y'| + A'' \ |X'' - Y''|$$

$$\text{et} \qquad d(T\varepsilon , T\eta) \le E(|X_1 - Y_1|) < E(|X' - Y'|) = d(\varepsilon , \eta)$$

Il est donc ici nécessaire que :

$$pp \qquad\qquad A'A''(X' - Y')(X'' - Y'') \ge 0$$

Comme cette variable est d'espérance o , on a :

$$A'A''(X'-Y')(X''-Y'')=0$$

$$A'A''\,|X'-Y'|\;|X''-Y''|=0$$

$$[E(A)\;E(|X-Y|)]^2 = 0$$

ce qui donne $X = Y \;,\; \varepsilon = \eta$

Théorème 1

Avec les hypothèses de ce paragraphe, l'équation (E) possède à homothétie près, une unique solution parmi les probabilités sur $\mathbb{R}^+$ qui intègrent la fonction $Log^+ x$.

Preuve

Soit v la solution construite en A) et v' une deuxième solution. On peut supposer, d'après la **proposition 1 :**

$$\int x\,d\,v\,(x)=\int x\,d\,v'(x)=1$$

On a ici $d\,(T\,v, T\,v') = d\,(v, v')$ car $T\,v=v$, $T\,v'=v'$ et la **proposition 2** donne $v=v'$.

II - THEOREMES DE CONVERGENCE

1) Cas des probabilités ayant un moment d'ordre 1.

Théorème 2

Soit v' une probabilité ayant un moment d'ordre 1 et v la solution spéciale de (E) ayant même moment que v'. Alors on a :

$$\lim_n \; d\,(T^n v', v)=0$$

En particulier $T^n v'$ converge vaguement vers v.

La preuve va découler de 3 lemmes.

Lemme 1 :

Soient x et y des réels positifs et $\lambda \geq 1$. Alors :

$$(x+y)^\lambda \leq x^\lambda + y^\lambda + \lambda\, x\, y^{\lambda-1}$$

Preuve

On se ramène par homogénéité à $(1+u)^\lambda \leq 1 + u^\lambda + \lambda\, u^{\lambda-1}$ et c'est alors une étude élémentaire.

Lemme 2 :

Soit μ_n une suite de probabilités telle qu'il existe $\lambda > 1$ et $K > o$ avec $\int x^\lambda\, d\,\mu_n(x) \leq K$ et supposons que μ_n converge étroitement vers μ.

Soit μ' une loi de probabilité ayant un moment d'ordre λ. Alors :

$$\lim_n\; d\,(\mu_n\,,\mu') = d\,(\mu\,,\mu')$$

Preuve

On utilisera les fonctions de répartition $F'_n(x) = \mu_n\,[x\,,\infty]$, $F''(x) = \mu'\,[x\,,\infty]$.

La condition $\int x^\lambda\, d\,F'_n(x) \leq K$ implique :

$F'_n(x) \leq Inf\,(1\,,\frac{K}{x^\lambda})$. Ici $F'_n(x)$ converge vers la fonction de répartition F'de μ et $|F'_n - F'|$ est majorée par une fonction intégrable de x. On a donc par convergence dominée :

$\lim\limits_n \int |F'_n(x) - F'(x)|\,dx = \int |F'(x) - F'(x)|\,dx$ ce qui donne

$\lim\limits_n\; d\,(\mu_n\,,\mu') = d\,(\mu\,,\mu')$.

Lemme 3 :

Soit λ un nombre compris entre 1 et $Inf\,(2\,,\chi)$, μ une probabilité ayant un moment d'ordre λ. Alors les moments d'ordre λ de la suite $T^n\mu$ sont bornés par une constante.

Preuve

Notons $X'\,,X''\,,X_1$ des variables aléatoires de lois μ , μ et $T\mu$ respectivement, les deux premières variables étant indépendantes.
On a alors avec les notations de A)

$$X_1 = A'X' + A''X''$$

$$X_1{}^\lambda \leq A'^\lambda X'^\lambda + A''^\lambda X''^\lambda + \lambda\; A'\,X'\,(A''\,X'')^{\lambda-1}$$

$$\text{Ici } \lambda - 1 < 1 \text{ et } E\,(X''^{\lambda-1}) \leq E\,(X'')^{\lambda-1} = 2^{1-\lambda}$$

On a donc, avec une certaine constante k : $E(X_1^\lambda) \leq 2E(A^\lambda)E(X^\lambda) + k$.

Si X_n est une variable aléatoire de loi $T^n\mu$ on a donc :

$$E(X_n^{\ \lambda}) \leq \frac{k}{1-\rho} + \rho^n \ E(X^\lambda) \leq K$$

où $$\rho = 2E(A^\lambda) < 1$$

Preuve du théorème

a) On suppose d'abord que v' a un moment d'ordre $\lambda > 1$.

On a $d(T^n v', v) \leq d(T^{n-1} v', v)$ puisque $T^n v' = T(T^{n-1} v')$. Posons alors

$$\gamma = \lim_n \ d(T^n v', v) = \operatorname{Inf}_n d(T^n v', v)$$

La suite $T^n v$ a des moments d'ordre λ bornés $[1 < \lambda < Inf(2, \chi)]$ d'après le **lemme 3.**

Pour toute sous suite $T^{n_k} v'$ convergeant étroitement vers μ' on aura donc :

$$\gamma = \lim_n \ (T^{n_k} \ v', v) = d(\mu', v)$$

en vertu du **lemme 2.**

On a de même $\gamma = d(T\mu', v)$

Donc $d(T\mu', Tv) = d(\mu', v) = \gamma$

Comme $\int x\, d\mu'(x) = \int x\, d v(x)$ on en conclut d'après la **proposition 2** du paragraphe précèdent : $\mu' = v$.

La suite $T^n v'$ converge donc vers v.

b)

Si v' a un moment d'ordre 1, elle est approchée, au sens de d, par des mesures v'' à support compact avec $\int x\, d v''(x) = 1$.

On a alors :

$$d(T^n v', v) \leq d(T^n v', T^n v') + d(T^n v'', v)$$

$$d(T^n v', v) \leq d(v', v'') + d(T^n v'', v)$$

ce qui permet de conclure.

2) Cas des probabilités sans moment d'ordre 1.

On se placera dans une sous-classe notée P_1. Une probabilité μ appartiendra à P_λ $(\lambda > 0)$ s'il existe $C > 0$, $\theta < \lambda$, $a > 0$ avec $\mu\,[t, \infty] \geq \frac{C}{t^\theta}$ pour $t \geq a$.

Un exemple, qui servira de comparaison est donné par les lois stables σ_θ de transformée de Laplace $e^{-\lambda^\theta}$; alors $\sigma_\theta\,[t, \infty] \sim \frac{C}{t^\theta}$.

On aura besoin de comparer des probabilités :

Définition :

On dira qu'une probabilité ε est stochastiquement inférieure à une autre η si l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varepsilon\,[t, \infty] \leq \eta\,[t, \infty]$$

On écrira alors $\varepsilon \ll \eta$

Cette condition équivaut à l'existence de variables aléatoires X et Y de lois ε et η vérifiant $X \leq Y$

Elle équivaut aussi à :

$$\int f(x)\, d\,\varepsilon(x) \leq \int f(x)\, d\,\eta(x)$$

pour toute fonction croissante f.

Théorème 3 :

Soit υ' une probabilité appartenant à P_1. Alors $T^n \upsilon'$ converge vers δ_∞ étroitement.

La preuve découlera de 3 lemmes.

Lemme 1 :

$T^n(\sigma_\theta)$ tend vers δ_∞.

Preuve

On utilise les notations de A) et en particulier la formule :

$$T^n J_\theta = J_\theta\, M_\theta^{-1}\, T_\theta^{\,n}\, M_\theta$$

Le calcul de $T^n(\sigma_\theta)$ se ramène donc à celui de $T_\theta^{\,n}(\delta_1)$.

Or si l'on pose $k = 2\,E\,(A^{\theta}) > 1$, on a, en considérant l'homothétie de rapport

$k : (T_{\theta})^n = k^n\,(S_{\theta})^n$ où S_{θ} est définie à l'aide de la variable $B = \frac{A^{\theta}}{k}$.

On a bien :

$$2\,E\,(B) = \frac{2\,E\,(A^{\theta})}{k} = 1 \text{ , } E\,[B \operatorname{Log} B] < 0 \text{ car } E\,(A^{\theta} \operatorname{Log} A) < 0 \text{ et } k > 1.$$

On peut donc appliquer le théorème 2 à S_{θ} :

$(S_{\theta})^n\,(\delta_1)$ converge vers une loi spéciale associée à B et puisque $k > 1$
$(T_{\theta})^n\,(\delta_1)$ tend vers δ_{∞} .

Il en est de même de $T^n\,(\sigma_{\theta})$.

Lemme 2 :

La transformation T préserve les inégalités stochastiques.

Preuve

Soient donc ε et η avec $\varepsilon \ll \eta$ et f fonction croissante.

Lorsque a, b, y sont fixés $f\,(a\,x + b\,y)$ est encore fonction croissante de x :

$$\int f\,(a\,x + b\,y)\,d\,\varepsilon\,(x) \leq \int f\,(a\,x + b\,y)\,d\,\eta\,(x)$$

Par un argument analogue et une intégration en a et b :

$$T\varepsilon\,(f) \leq T\eta\,(f) \text{ , } T\varepsilon \ll T\eta$$

Lemme 3 :

Soient X_n , Y_n deux suites de variables aléatoires. On suppose que $E\,|\,X_n - Y_n\,|$ est bornée et que X_n converge vers $+\infty$ en loi. Alors Y_n converge vers $+\infty$ en loi.

Preuve

On note que :

$$t\,P\,\{\,|\,X_n - Y_n\,| > t\,\} \leq E\,|\,X_n - Y_n\,| \leq k$$

et que

$$P\,\{\,Y_n \leq t\,\} \leq P\,\{X_n \leq 2\,t\} + P\,\{\,|\,X_n - Y_n\,| \geq t\,\}$$

Donc pour $a \leq t$:

$$P\{Y_n \leq a\} \leq P\{Y_n \leq t\} \leq \frac{K}{t} + P\{X_n \leq 2t\}$$

D'où le résultat voulu par le choix successifs de t et n .

Preuve du théorème :

On suppose donc $\liminf_{t \to +\infty} t^{\theta} v'(t, \infty) > 0$ pour un certain θ.

Une homothétie sur v' permet de supposer :

$$v'[t, \infty] \geq \sigma_\theta [t, \infty] \quad \text{pour } t \geq b$$

Soient Z et X' des variables aléatoires de lois σ_θ et v' respectivement.

Définissons la variable X comme étant égale à X' si $X' \geq b$ et égale à b si $X' < b$.

Alors la loi de X est stochastiquement supérieure à celle de Z car :

a)

Si $t > b$, $X' \geq t$ implique $X = X'$ donc $X \geq t$ et

$$P\{X \geq t\} \geq P\{X' \geq t\} \geq P\{Z \geq t\}$$

b)

Si $t \leq b$: $P\{X \geq t\} = 1 \geq P\{Z \geq t\}$

D'autre part $X - X'$ vaut o sauf si $X' < b$ auquel cas $X - X'$ est entre o et b : en particulier $E(|X - X'|) < b$.

Si η désigne la loi de X, on a alors :

$$d(T^n \eta, T^n v') \leq d(\eta, v') \leq b$$

$$\sigma_\theta \ll \eta \ , \ T^n \sigma_\theta \ll T^n \eta$$

On en déduit que $T^n \eta$ converge vers δ_∞ comme $T^n \sigma_\theta$ et il en est de même de $T^n v$ d'après le lemme 3.

C) Le cas général

Deux cas se présentent suivant l'existence ou la non-existence de $\chi < 1$ avec $c\ E(A^\chi) = 1$, $E(A^\chi \operatorname{Log} A) < 0$.

Dans le premier cas, on va étudier l'unicité de la solution canonique v de (E) et les problèmes de convergence correspondants.

Dans le second cas, hormis le cas spécial, on va montrer la non-existence de solutions de (E) autre que δ_0 et δ_∞ et étudier les problèmes de convergence correspondants ; on a donc ici :

$$c\,E\,(A^\lambda) \geq 1 \quad (o \leq \lambda \leq 1)$$

I - THEOREMES LIMITES : PREMIER CAS

Proposition 1 :

Soit $v\,'$ une probabilité ayant un moment d'ordre supérieur à χ.

Alors $T^n v\,'$ converge vers δ_0 .

Preuve

Soit λ un nombre compris entre χ et 1 et vérifiant $c\,E\,(A^\lambda) < 1$.

Si l'on écrit l'équation $T^{n+1}\,v\,' = T\,[T^n\,v\,']$ avec les notations probabilistes de A) , on a , car $\lambda < 1$:

$$E\,(X_{n+1}^\lambda) \leq c\,E\,(A^\lambda)\;E\,(X_n^\lambda)$$

et donc $\lim\limits_n E\,(X_n^\lambda) = o$, ce qui

donne bien $\lim\limits_n T^n\,v\,' = \delta_0$

Proposition 2 :

La seule solution de (E) possédant un moment d'ordre χ est δ_0.

Preuve

Notons que si ε et η sont deux probabilités portées par $\mathbb{R}^+$ et si $h\,(x) = x$, on a :

$$\text{si} \quad o < \lambda < 1 : h^\lambda\,(\varepsilon * \eta\,) \leq (h^\lambda\,\varepsilon\,) * \eta + \varepsilon * h^\lambda\,\eta$$

l'égalité ne pouvant alors li«uque si :

$$\varepsilon \text{ ou } \eta \text{ est égale à } \delta_0.$$

L'équation $T\,\upsilon = \upsilon$ donne donc ici :

$$h^{\chi}\,\upsilon \leq [(2\,h^{\chi}\,\alpha\,)\,\mathrm{o}\,h^{\chi}\,\upsilon\,]\,*\,(\alpha\,\mathrm{o}\,\upsilon)$$

considérons alors la probabilité q sur le groupe affine de $\mathbb{R}$ de composantes $2\,h^{\chi}\,\alpha$ et α o υ ; l'inéquation s'écrit :

$$q * 2\,h^{\chi}\,\upsilon \;\geq\; h^{x}\,\upsilon$$

Si υ admet un moment d'ordre χ , $h^{\chi}\,\upsilon$ est de masse finie et la conservation des masses implique l'égalité dans l'inéquation précédente.

Ceci s'écrit encore, avec $\varepsilon\; = \;\alpha\,\mathrm{o}\,\upsilon$:

$$h^{\chi}\,(\varepsilon * \varepsilon) \;=\; h^{\chi}\;\varepsilon * \varepsilon \;+\; \varepsilon * h^{\chi}\,\varepsilon$$

On a donc :

$$\alpha\,\mathrm{o}\,\upsilon \;=\; \delta_0 \quad \text{et} \quad \upsilon \;=\; \delta_0$$

<u>Théorème 1</u> :

Si $\upsilon\,'$ est une probabilité de $P\chi$, alors $T^n\,\upsilon\,'$ converge vers δ_{∞} .

<u>Preuve</u>

Les considérations du paragraphe précédent aboutissant au théorème 3 sont ici valables, la différence étant que θ désigne un nombre inférieur à χ et que l'on utilise d_{θ} au lieu de d dans le preuve du théorème.

<u>Théorème 2</u> :

Soit $\upsilon\,'$une probabilité telle que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{\chi}\;\upsilon\,'\,[t\,,\infty] \;=\; C \;>\; 0$

Alors $T^n\;\upsilon\,'$converge vers une solution canonique de (E) .

<u>Preuve</u>

On reprend les arguments utilisés pour démontrer le théorème 3 et la proposition 2 de la partie B).

Soit υ une solution canonique correspondant à la même constante C que $\upsilon\,'$.

Prenant $t \geq 1$, on a :

$$t\,.\,\upsilon\,[\,x\,,\infty] \;\geq\; \upsilon\;[\,x\,,\infty] \quad \text{pour} \quad x \;\geq\; b$$

On peut donc trouver v'' $\gg$ v avec $d_\lambda(v'', t.v') < +\infty$ avec $\chi < \lambda$ et $2E(A^\lambda) < 1$.

On a donc :

$$\lim_n d_\lambda [T^n v'', T^n(t.v')] = 0$$

et $T^n v''$ $\gg$ $T^n v = v$

Une valeur d'adhérence de $T^n v''$ ou $T^n[t.v']$ sera donc stochastiquement supérieure à v et il en sera de même pour $T^n v'$, en faisant tendre t vers 1.

Prenant $t < 1$, on obtient l'inégalité contraire et toute valeur d'adhérence de $T^n v'$ coïncide donc avec v

Corollaire

Toute solution v' de (E) telle que $\lim_{t \to +\infty} t^\chi v'(t; \infty) = C > 0$ est une solution canonique.

Il n'y a pas de solution de (E) ayant un moment d'ordre χ, ni de solution dans P_χ.

II - THEOREMES LIMITES : CAS $c\,E(A^\lambda) > 1$ $(0 \le \lambda \le 1)$

On a donc ici $c\,E(A) > 1$.

Théorème 3 :

Si v' est une loi de probabilité différente de δ_0, $T^n v'$ converge vers δ_∞.

L'équation (E) n'a donc pas de solutions autres que δ_0, δ_∞.

Preuve

On distingue plusieurs cas :

a)

$E(A \, Log\, A) < 0$ et v' à support compact.

On remplace A par $B = A/k$ avec $k = 2E(A) > 1$ et alors :

$$E(B\, Log\, B) = \frac{1}{k}\,[E(A\, Log\, A) - E(A)\, Log\, k] < 0$$

Si alors S est la nouvelle transformation correspondant à B et v une mesure invariante $[S v = v]$ de même espérance que v', on a d'après le théorème 2 de B) :

$$\lim_n S^n v' = v = \lim_n \frac{1}{k^n} . T^n v'$$

Comme $k > 1$, on en conclut $\lim_n T^n v' = \delta_\infty$

b)

$E(A \operatorname{Log} A) < 0$ et v' est stochastiquement supérieure à une mesure v' à support compact ; par conservation des inégalités stochastiques on a :

$$\lim_n T^n v' = \delta_\infty$$

c)

$E(A \operatorname{Log} A) \geq 0$ mais $c E(A) > 1$.

Il est clair que l'on peut trouver une variable aléatoire $B \leq A$ avec $E(B^\lambda) \leq E(A^\lambda)$, $c\ E(B^\lambda) > 1$ si $0 \leq \lambda \leq 1$ et $E(B \operatorname{Log} B) < 0$.

Si l'on note S' la transformation correspondante, on aura clairement :

$$S'^n v' \ll T^n v'$$

Comme d'après b) :

$$\lim_n S'^n v' = \delta_\infty,$$

On a aussi :

$$\lim_n T^n v' = \delta_\infty$$

III - CAS $E(A^\chi \operatorname{Log} A) = 0$, $c E(A^\chi) = 1$ $(0 < \chi \leq 1)$

1) Cas $\chi < 1$

Théorème 4 :

Il n'existe pas de solution de E (différente de δ_0) ayant un moment d'ordre χ ou une queue d'ordre χ régulière.

Preuve

L'inégalité $(u+v)^{\chi} \leq u^{\chi}+v^{\chi}$ donne ici, si X est une variable aléatoire vérifiant (E')

$$X = A'X' + A''X''$$

$$E(X^{\chi}) \leq 2E(A^{\chi})E(X^{\chi}) = E(X^{\chi})$$

Cette égalité ne peut avoir lieu que si X' ou $X'' = 0$, c'est-à-dire $X = 0$.

Utilisons la relation de conjugaison du paragraphe A, avec $\theta = \chi$:

$$TJ_{\theta} = J_{\theta} M_{\theta}^{-1} T_{\theta} M_{\theta}$$

en l'appliquant à la mesure δ_1.

On a aussi :

$$T^n J_{\theta} = J_{\theta} M_{\theta}^{-1} (T_{\theta})^n M_{\theta}$$

$M_{\chi}\ \delta_1 = \delta_1$, $\lim_n T_{\chi}^n(\delta_1) = \delta_0$ d'après [ ] car $2E(A^{\chi}) = 1$ $E(A^{\chi} Log A^{\chi}) = 0$

On en déduit :

$$\lim_n T^n \sigma_{\chi} = \delta_0$$

Si v est solution de (E) avec une queue régulière vérifiant :

$$v(t,\infty) = \frac{C}{t^{\chi}} + O\left(\frac{1}{t^{\chi+1}}\right)$$

On aura :

$$d(v,\sigma_{\chi}) = \int_0^{\infty} \left| v(t,\infty) - \sigma_{\chi}[t,\infty] \right| dt < +\infty$$

et donc :

$$d_{\chi}(v,\sigma_{\chi}) < +\infty$$

comme :

$$d_{\chi}(T^n v, T^n \sigma_{\chi}) \leq d_{\chi}(v,\sigma_{\chi})$$

et que $T^n \sigma_\chi$ converge vaguement vers δ_0 , on en conclut :

$$d_\chi(v\,,\,\delta_0) \le d_\chi(v\,,\sigma_\chi) < +\infty$$

Ceci signifie que v a un moment d'ordre χ , ce qui est exclu.

On peut observer que si une mesure ρ est stochastiquement inférieure à σ_χ , on a aussi :

$$\lim_n \; T^n \rho = \delta_0$$

2) <u>Cas $\chi = 1$</u>

<u>Théorème 5</u> :

Soit v une mesure de probabilité ayant un moment d'ordre 1.

Alors :

$$\lim_n \; T^n v = \delta_0$$

Il n'y a pas de solution de (E) avec une queue régulière d'ordre 1.

<u>Preuve</u>

a)

Supposons d'abord v à support contenu dans $[o\,,\,b\,]$; alors $v \ll \delta_b$ et $T^n v \ll T^n \delta_b$, $\lim_n T^n v \ll \lim T^n \delta_b = \delta_0$

Si v n'est pas à support compact mais admet un moment d'ordre 1, elle peut être approchée d'aussi près que l'on veut par des mesures à support compact, au sens de d.

Si $v\,'$ est une telle approximation, on a :

$$d\;(T^n v\,, T^n v\,') \le d\;(v\,, v\,')$$

d'où l'on déduit aisément que :

$$\lim_n \; T^n v = \delta_0$$

b)

Soit $\theta < 1$ et écrivons la relation de conjugaison sous la forme :

$$T_{1/\theta}\, J_\theta = J_\theta\, M_\theta^{-1}\; T\, M_\theta$$

où $T_{1/\theta}$ correspond à la variable $B = A^{1/\theta}$ qui vérifie encore $2\,E\,(B^{\theta}) = 1$, $E\,[\,B^{\theta}\ Log\,B\,] = o$.

D'après le théorème précédent, l'équation E correspondant à $T_{1/\theta}$ n'aura donc pas de solution avec queue régulière d'ordre θ.

Or si v a une queue régulière d'ordre 1 :

$$M_{\theta}^{-1} v\,(t\,,\infty) = \frac{C}{t^{\theta}} + O\,(\frac{1}{t^{2\,\theta}})$$

Si de plus $T\,v = v$, on en déduit :

$$T_{1/\theta}\ J_{\theta}\ (M_{\theta}^{-1}\,v) = J_{\theta}\ (M_{\theta}^{-1}\,v)$$

et $J_{\theta}\ (M_{\theta}^{-1}\,v)$ est donc solution de l'équation (E) correspondant à $T_{1/\theta}$.

Comme σ et $M_{\theta}^{-1}\,v$ ont des queues régulières d'ordre θ , il en est de même de leur convolution multiplicative $J_{\theta}\ [M_{\theta}^{-1}\,v]$, pour $\theta > \frac{1}{2}$

Il y a donc contradiction au théorème précédent.

3) <u>théorème de convergence</u>

<u>Théorème 6</u> :

Soit v une probabilité de P_{χ} .

Alors $\lim_{n}\ T^{n}\,v = \delta_{\infty}$

<u>Preuve</u>

On procède comme au **théorème 3** du paragraphe A , par comparaison avec :

$$v = \sigma_{\theta} \quad \text{si} \quad \theta < 1$$

<u>Corollaire</u>

L'équation (E) n'a pas de solution (non-triviale) dans P_{χ} , ni de solution ayant un moment d'ordre χ ni de solution ayant une queue régulière d'ordre χ.

Ceci découle des **3 théorèmes** précédents.

APPENDICE

1)

On donne ici divers éléments de réponse aux questions de [ ] , [ ].

On a vu que la solution spéciale ($c\,E\,|A| = 1$, $E\,(A\,Log\,A) < 0$) avait bien une queue, donc était de type hyperbolique au sens de [ ] .

D'autre part, on a obtenu l'existence d'une solution non-triviale si $c\,E\,(A) = 1$, $E\,(A\,Log\,A) > 0$.

Enfin le problème de normaliser $T^n\,(\delta_1)$ ne peut avoir de solution au sens strict de [ ] car on a vu que la convergence de $T^n\ v'$ vers une solution v de (E) ne pouvait avoir lieu, en dehors du cas spécial , que si v' n'est pas à support compact (par exemple a une queue).

Dans le schéma des Y_n , il est nécessaire d'introduire un $Y_0 = U$ initial dont la loi a une queue convenable, et de préciser la construction de la manière qui suit.

On note par A un alphabet à r lettres et l'on prendra ici pour simplifier $r = 2$, $A = \{a\ , b\}$.

Soit Γ l'arbre, avec racine, homogène à r branches ; Γ est donc l'ensemble des mots construits sur A.

On considère l'espace produit $\Omega = (\mathbb{R}^+)^\Gamma$ et l'on note $W_\gamma\,(w)$ les composantes de $w \in \Omega$ ($\gamma \in \Gamma$) .

Un semi-groupe libre $(\theta^\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de translation est alors défini sur Ω par la formule

$$W_\gamma\,[\,\theta^\eta\,(w)\,] = W_{\eta\,\gamma}\,(w)$$

Chaque sommet γ de Γ définit un chemin unique joignant la racine à γ et l'on note $P_\gamma\,(w)$ le produit des $W_\eta\,(w)$ lorsque η décrit ce chemin ; on a en particulier :

$$P_{\eta\,\gamma}\,(w) = P_\eta\,(w)\ \ P_\gamma\,(\theta^\eta\,w\,)$$

Si $U\,(w)$ est une variable aléatoire positive, on définit alors $Y_0\,(w) = U\,(w)$

$$Y_n\,(w) = \sum_{|\gamma| = n} P_\gamma(w)\,U \circ \theta^\gamma\,(w)$$

où $|\gamma|$ désigne la longueur du mot γ .

On a donc la relation :

$$Y_{n+1} = W_a\ Y_n \circ \theta^a + W_b\ Y_n \circ \theta^b$$

et le cas $U = 1$ correspond à la construction de B. MANDELBROT .

2)

On donne ici une démonstration élémentaire abrégée du résultat de H. KESTEN [5] utilisé en A).

Théorème :

Soit p une probabilité sur le groupe affine de la droite des transformations $g(x) = a x + b$.

On suppose que le support p ne fixe aucun point de $\mathbb{R}$, que $a > o$ ne varie pas dans une progression géométrique k^n $(u \in Z)$ et que $b > o$, $\int Log\, a\, d\, p\,(g) < o$.

On suppose aussi qu'il existe $\lambda > o$ avec $\int a^\lambda\, d\, p\,(g) = 1$, $\int b^\lambda\, Log^+\, b\, d\, p\,(g) < +\infty$, $\int a^\lambda\, Log^+\, a\, d\, p\,(g) < +\infty$.

Alors, il existe une unique probabilité μ sur $\mathbb{R}$ p–invariante $(p * \mu = \mu)$ et on a :

$$\lim_{t \to +\infty} t^\lambda \mu\,(t\,,\infty) = c > o$$

Preuve

μ est ici la loi de $z = \sum_{o}^{\infty} a_1 \ldots a_k\, b_{k+1}$.

La variable $z = \sum_{o}^{\infty} a_1 \ldots a_k\, b_{k+1}$ satisfait l'équation fonctionnelle $z = b_1 + a_1\, z \circ \theta$ où θ est la translation canonique.

Donc $P\{ z - b_1 > t \} = \int P\,(z > \frac{t}{a})\, d\, \bar{p}\,(a)$ où $\bar{p}$ est la première marginale de p.

Si l'on pose $F\,(t) = P\{ z > t \}$, on a donc : $F - \bar{p} \circ F = P\{ t < z \leq t + b_1 \} = G\,(t)$.

Vu la condition $\lim_{t \to +\infty} F\,(t) = o$, on obtient F comme potentiel de G :

$$F\,(t) = \sum_{o}^{\infty} p^n \circ G\,(t)$$

Introduisant la probabilité $p_\lambda\,(d\,a) = a^\lambda\, \bar{p}\,(d\,a)$ et la fonction $G_\lambda\,(t) = t^\lambda\, G\,(t)$ on a :

$$t^\lambda\, F^\lambda(t) = \sum_{o}^{\infty} p_\lambda^n \circ G_\lambda\,(t)$$

Pour obtenir la limite de $t^{\lambda}\, G(t)$, on applique le théorème de renouvellement à la marche multiplicative associée à p_{λ}.

Sa moyenne vaut ici :

$$\int_0^{\infty} Log\, a\, d\, p_{\lambda}(a) = \int_0^{\infty} a^{\lambda} Log\, a\, d\, p\,(a)$$

Par convexité, ce nombre est positif car :

$$\int_0^{\infty} a^{\lambda} d\, p\,(a) = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} Log\, a\, d\, p\,(a) < 0$$

Il suffit donc de voir [ ] que G_{λ} est "Riemann-intégrable".

On ne l'établira ici que sous l'hypothèse b_1 borné.

Alors $\int_0^{\infty} t^{\lambda-1}\, G(t)\, dt$ est finie en même temps que $\int_0^{\infty} t^{\lambda-1}\; d\; \underset{\sim}{F}(t)$.

Cette dernière intégrale est finie car z a des moments d'ordre inférieur à λ :
si $\lambda' < \lambda \leq 1$

$$E\,[z^{\lambda'}] \leq E\left[\sum_0^{\infty} (a_1 \ldots a_k\; b_{k+1})^{\lambda'}\right]$$

et

$$E\,[\,(a_1 \ldots a_k\,)^{\lambda'}] \leq E\,(a^{\lambda'})^k \;\; , \; E\,(b_{k+1}^{\lambda'}) \leq \text{cte}$$

Ceci entraine bien $E\,(z^{\lambda'}) < +\infty$

Si $1 \leq \lambda' < \lambda$, on a aussi :

$$E\,(z^{\lambda'}) \leq \left[\sum_0^{\infty} E\,(a_1 \ldots a_k\, b_{k+1})^{\lambda'}\right]^{1/\lambda'} < +\infty$$

pour la même raison.

REFERENCES

1) W. FELLER : An introduction to probability theory vol 2 Wiley 1971.

2) J.-P KAHANE et J. PEYRIERE : Sur certaines martingales de Benoît Mandelbrot. Advances in Math 22, 1976 p 131 - 145.

3) H. KESTEN : Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. Acta Math 131 (1973) p 208 - 248.

4) P. LEVY : Calcul des probabilités Gauthier-Villars Paris 1925.

5) B. MANDELBROT : Multiplications aléatoires et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire CRAS Paris 278 (1974) p 289 - 292.

6) B. MANDELBROT : Multiplications aléatoires et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire : quelques extensions CRAS Paris 278 (1974) p 355 - 358.

7) G. ROYER : Distance de Fortet Mourier et fonctions Log-concaves Annales Scientifiques de Clermont Ferrand 1984 n° 78.