PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MICHÈLE ARTIGUE

La notion de différentielle en mathématiques et en physique dans l'enseignement supérieur

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1987-1988, fascicule 5
« Didactique des mathématiques », , p. 1-30
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1987-1988___5_A4_0>

"La notion de différentielle en mathématiques et en physique dans l'enseignement supérieur"

Exposé présenté le 20 janvier 1988
par
Michèle ARTIGUE
I.R.E.M., Université Paris 7 *

Dans le cadre du GRECO "Didactique et acquisition de connaissances scientifiques" du C.N.R.S., trois équipes : le L.D.P.E.S. (Labortoire de didactique de la physique dans l'enseignement supérieur) et D.I.D.I.RE.M. (Equipe de recherche en didactique de l'I.R.E.M.) de l'Université Paris 7, le groupe Enseignement supérieur de l'Equipe de recherche en didactique des mathématiques et de l'informatique de l'Université de Grenoble I, se sont réunies pour mener des travaux sur l'enseignement du calcul différentiel et intégral en mathématiques et en physique au niveau du premier cycle universitaire.

L'objet de ces travaux était à la fois de comprendre le fonctionnement de l'enseignement dans ce domaine dans les deux disciplines et d'élaborer des stratégies d'enseignement visant à s'attaquer aux carences constatées de l'enseignement usuel.

C'est à une réflexion sur ces deux points qu'est consacré le présent texte, après une brève présentation de l'ensemble des recherches entreprises sur le sujet par les trois équipes. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [1] ou [2].

* Ce texte reprend pour l'essentiel celui présenté par le groupe au Colloque du GRECO Didactique (Sèvres, mai 1987) et publié dans les actes de ce Colloque.

I - LE CADRE DE LA RECHERCHE. LES PRINCIPAUX TRAVAUX MENES.

La recherche s'est centrée sur les notions de différentielle et de procédures différentielle et intégrale, qui étaient apparues, au cours d'expériences antérieures de coordination maths/physique en DEUG comme le point de cristallisation des conflits entre les deux disciplines (cf. [3]).

Compte-tenu des acquis de ces expériences préliminaires et des questions qu'elles avaient suscités, les travaux se sont développés dans trois directions :

1°) l'analyse épistémologique des contenus de savoir et des objets d'enseignement, l'étude historique de l'évolution de ces derniers, l'analyse de l'évolution des relations maths/physique dans ce domaine ;

2°) l'analyse des conceptions développées par les étudiants dans les deux disciplines, du degré de cohérence de ces conceptions, du rôle de l'enseignement dans leur développement,

3°) l'élaboration et l'expérimentation de séquences d'enseignement.

Et, plus précisément, dans chacune de ces rubriques :

1°) - Etude de l'évolution du statut de la notion de différentielle dans le savoir scientifique et en particulier étude du passage de la différentielle, en mathématiques, au statut d'application linéaire tangente qui est le sien actuellement.

- Analyse des programmes et instructions de mathématiques de l'enseignement secondaire et des classes préparatoires aux grandes écoles depuis le début du siècle ; comparaison avec les programmes universitaires.

- Analyse de l'introduction de la notion de différentielle dans une vingtaine de manuels de mathématiques choisis pour leur représentativité, de la fin du dix-huitième siècle à nos jours.

- Analyse des articles concernant la notion de différentielle dans la revue l'Enseignement Mathématique, de sa création en 1898 à nos jours (18 articles répartoriés).

- Analyse de l'introduction et de l'utilisation de l'outil différentiel dans des manuels et polycopiés de physique.

2°) - Elaboration d'une dizaine de questionnaires d'orientation mathématique ou physique et passation de ces questionnaires auprès de 600 étudiants environ (pour l'ensemble des questionnaires) de DEUG, première ou deuxième année, de Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles ou de licence de mathématiques.

- Elaboration d'un questionnaire enseignant soumis à une trentaine d'enseignants ou pré-enseignants (normaliens préparant l'agrégation de physique).

- Réalisation d'interviews individuels sur des problèmes proches de ceux abordés dans les questionnaires.

3°) - Elaboration et expérimentation en première année de DEUG SSM à Paris 7 d'une séance de sensibilisation aux problèmes de modélisation différentielle ou intégrale.

- Elaboration et expérimentation d'une ingéniérie didactique concernant l'enseignement de l'intégration en première année de DEUG SSM, à Grenoble I.

II - LES APPORTS DES DIFFERENTS TRAVAUX MENES.

2.1. L'apport de l'approche historique.

Sur cet aspect de la recherche, nous nous bornerons ici à souligner quelques faits particulièrement saillants :

1 L'accession tardive de la notion de différentielle au statut d'application linéaire tangente qui est celui adopté dans l'enseignement des mathématiques actuellement.

C'est en effet pour les besoins du développement de l'analyse fonctionnelle (donc pour la résolution de problèmes hors de portée des étudiants du DEUG) et non pour ceux liés au développement du calcul différentiel classique à une ou plusieurs variables que la différentielle a pris au début du vingtième siècle son statut actuel (cf. M. **FRECHET** [4] et [5]).

La notion de différentiabilité elle-même pour les fonctions de plusieurs variables n'est apparue qu'à la fin du XIXème siècle chez O. **STOLZ** [6], en liaison avec le souci d'obtenir des hypothèses minimales pour les théorèmes fondamentaux du calcul différentiel à plusieurs variables. **YOUNG** en 1909 [7] est un des premiers, semble-t-il, à souligner l'uniformisation des calculs différentiels à une et plusieurs variables que permet l'introduction de cette définition qui remet au premier rang le rôle d'approximation de la différentielle, un temps écarté au profit des seules propriétés d'invariance formelle.

(2) Dans l'enseignement mathématique, pendant toute la première moitié du XXème siècle, la différentielle est restée cantonnée au rôle d'outil de calcul formel comme en témoignent les commentaires des Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles de 1925, repris explicitement lors de la réforme de 1956 :

> *"Les élèves doivent être exercés à calculer directement avec les différentielle: comme avec les dérivées ; ils doivent s'en servir couramment lorsque le choix des variables indépendantes reste arbitraire, et savoir les utiliser pour des changements de variables simples et dans les calculs de fonctions implicites*

C'est, à l'époque, comme en témoignent de nombreux débats, à la fois un outil apprécié pour l'accès algorithmique au calcul différentiel et intégral qu'il autorise, et un objet de méfiance, du fait de son association historique à une pratique mathématique moins soucieuse de rigueur que d'efficacité, de sa charge métaphysique, de l'ambiguité des notations et des risques de dérapage formels chez les débutants.

Les conditions se modifient radicalement dans les années soixante. Le développement de l'enseignement de l'algèbre linéaire, l'esprit des réformes, favorisent l'introduction de la différentielle sous sa forme moderne : application linéaire tangente, et c'est théoriquement autour de la différentiabilité que s'unifie l'enseignement du calcul différentiel. Mais, dans la pratique, le registre algorithmique formel associé au calcul de dérivées partielles et matrices jacobiennes domine toujours celui de l'approximation.

(3) Dans l'enseignement de la physique, la différentielle ne constitue pas un objet d'enseignement officiel. En revanche c'est un outil omni-présent.

La présentation qui en est faite, à partir des années soixante, sous forme de rappels ou d'annexes, est marquée par la référence quasi-exclusive au registre du calcul d'incertitudes, l'utilité y apparaissant liée, de façon floue, à l'idée de simplification des calculs. Les procédures de mise en équation différentielle de problèmes sont, quant à elles, présentées comme des recettes. Au mieux note-t-on l'explicitation d'une convention de calcul au premier ordre par rapport aux accroissements des variables.

(4) La coupure constatée entre les enseignements de deux disciplines est déjà manifeste au début du siècle, et posée en termes de conflit entre rigueur et opérationalité.

Mais elle est souvent encore vécue comme un état provisoire, lié à l'occasion récente des mathématiques et plus encore de leur enseignement à la rigueur dans ce domaine.

2.2. L'apport des questionnaires.

Il nous a paru important d'analyser les réponses obtenues à l'ensemble des questionnaires élaborés suivant trois rubriques :

1 - le pourquoi des différentielles et des procédures différentielles
2 - rigueur et approximation
3 - le statut des éléments différentiels.

1a. <u>En mathématiques</u>, la différentielle est actuellement introduite comme une notion liée à l'approximation locale mais les exercices se situent essentiellement dans deux registres :

- le registre de définition,
- le registre algorithmique de type algébrique.

Les réponses des étudiants aux questionnaires témoignent directement ou indirectement ce cet état de fait :
à la question Q1 (cf. encadré I), les réponses concernant les points fondamentaux se répartissent comme suit :

- 33 citent les liens entre différentiabilité, dérivabilité, continuité, existence de dérivées partielles...,
- 11 citent le registre algorithmique décrit ci-dessus,
- 10 citent le rôle de la différentielle pour l'approximation locale,
- 5 la propriété de la différentielle d'être une application linéaire,
- 2 enfin les problèmes de notation.

Le registre de la définition domine donc ici et devance nettement les registres algorithmiques et d'approximation qui apparaissent, eux, avec des pourcentages très proches. Au-delà de ce niveau "déclaratif", les réponses aux autres questions montrent en revanche le poids dominant du registre algorithmique.

Ainsi, pour répondre à la question Q2, alors que la fonction f est explicitement donnée sous forme de développement limité à l'ordre 1, 62 % des étudiants se précipitent dans le calcul des dérivées partielles de f, pour montrer sa différentiabilité. 11 seulement reconnaisent le développement limité et il faut souligner qu'ils font tous partie des 35 étudiants ayant passé le test à l'issue d'un enseignement de calcul différentiel où l'approche "développement limité" a été explicitement favorisée.

Le calcul de la dérivée partielle seconde de fonction composée, question Q3, bien que situé en fin de questionnaire est abordé par 86 % des étudiants.

Ces indications sur l'importance du registre algorithmique sont encore renforcées par la réticence des étudiants à aborder des questions d'autres types. Ainsi celles qui portent sur le calcul d'incertitude (Q4) ou bien sur la validité de la procédure de découpage en tranches (Q5) sont-elles très peu abordées. De même celle qui concerne l'interprétation géométrique de la différentielle en termes de plan tangent (Q6). Toutes ces questions non algorithmiques apparaissent semble-t-il comme "hors contrat".

ENCADRE I : EXTRAITS DES QUESTIONNAIRES MATHEMATIQUES

Q1 : Si un étudiant de premier cycle venait vous demander ce qu'est une différentielle,

- quelle définition donneriez-vous ?
- quelles notations utiliseriez-vous ?
- sur quels exemples vous appuieriez-vous ?
- sur quels points fondamentaux insisteriez-vous tout particulièrement ?

Q2 : La fonction f de R^2 dans R définie par :

$$f(x, y) = 2x + 4y + y^3 [\sqrt{1 - \cos x} + x]$$

est-elle différentiable au point (0, 0) ? Justifiez votre réponse.

Q3 : Soient g et h des fonctions de R^2 dans R deux fois continuement différentiables et f la fonction définie par :

$$f(x, y) = g(y, h(x, y)).$$

Calculer la dérivée partielle seconde : $\partial^2 f/\partial x\, \partial y$.

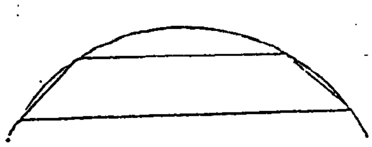
Q4 : Pouvez-vous, en utilisant les différentielles, justifier les formules bien connues du calcul d'incertitudes :

$$\frac{\Delta UV}{UV} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta V}{V} \qquad\qquad \frac{\Delta U/V}{U/V} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta V}{V}$$

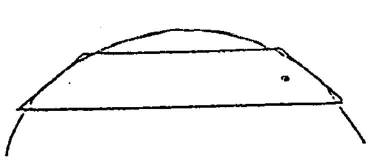
Q5 : Pour calculer des volumes en physique, on coupe en tranches élémentaire et on approche les tranches par des cylindres. Pourquoi des cylindres ? Si on prend une autre approximation, est-on, sûr de trouver le même résultat final ?

Par exemple, pour la sphère, si on approche

- par les troncs de cône engendrés par les cordes :



- par les troncs de cône engendrés par les tangentes :



Q6 : Soit f la fonction de R^2 dans f définie par :

$$f(x, y) = \exp(y^2 + x) . \sin(x . y) .$$

- Déterminer la différentielle de f au point (1, 0) et en donner une interprétation géométrique.
- En déduire une valeur approchée de $f(1.0001, 0.01)$.

1b. En physique, les étudiants de première année de DEUG voient les différentielles s'introduire, bien souvent, de façon urgente sinon précipitée, parce qu'"on en a besoin" en mécanique, en thermodynamique. Nous avons voulu savoir si, et comment, ils pouvaient caractériser ce besoin, qui ne s'était pas du tout manifesté lors de leurs études secondaires.

Citons par exemple les résultats d'un questionnaire où cette question se présente à propos d'un calcul particulier : celui de la pression atmosphérique : on donne l'amorce du calcul, découpage en tranches et bilan de forces à l'appui, jusqu'à l'expression différentielle :

$$dp = -\rho g\, dz \quad (\rho : \text{masse volumique, cf. encadré II})$$

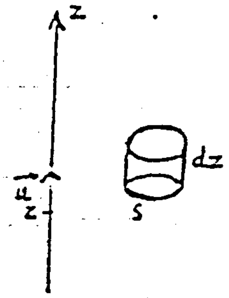
qui est censée concerner un "élément de volume".

Interrogés sur la nécessité de considérer la hauteur dz comme "petite", des étudiants de première année universitaire (N = 18 , 26 , 49 , pour ce test) répondent massivement oui (83 %, 96 %, 90 %).

Cette unanimité s'assortit d'abondantes références aux termes "tranche", "élementaire",... . Dans des arguments mieux spécifiés, on relève la dépendance de la pression vis à vis de l'altitude (66 %, 15 %, 35 %). La dépendance de ρ par rapport à ρ, qui différencie ce problème des problèmes linéaires du secondaire, n'est, elle, évoquée que très minoritairement (0 %, 11 %, 12 %).

ENCADRE II

LIRE .....



Soit un élement de volume cylindrique de surface de base (horizontale) S et de hauteur dz.

Force due à la pression .... face inférieure	$S.p\,(z)\,.\,u_z$
Force due à la pression .... face supérieure	$S.p\,(z+dz)\,.\,(-u_z)$
Poids	$g\,.\,S\,.\,dz\,(-u_z)$
L'équilibre des forces....	$S\,.\,p\,(z) - S\,.\,p\,(z+dz) - \rho\, g\,.\,S\,.\,dz = 0$
	$dp = -\rho\,.\,g\,.\,dz$

QUESTION

dz est supposée PETITE

1ère année universitaire

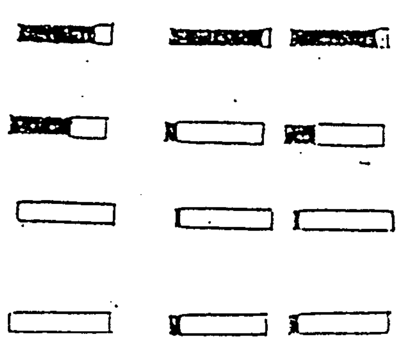
$n = 18$ $n = 26$ $n = 49$

Est-ce nécessaire ? OUI

Si oui pourquoi ? ... car $p\,(z)$

... car p ou $g\,(z)$

Est-ce nécessaire s'il s'agit d'EAU NON



Ce dernier point est confirmé par les questions suivantes du même questionnaire, où l'on demande si ce calcul est d'une part légitime, d'autre part nécessaire, pour le calcul d'une pression hydrostatique, la masse volumique étant cette fois constante. La nécessité de la procédure différentielle, dans ce cas hydrostatique, est encore affirmée (58 %, 30 %). Et (15 %, 13 %) seulement des étudiants signalent que, ρ étant uniforme dans le cas de l'eau, la relation linéaire entre p et z est légitimée d'emblée.

Ces premiers résultats sont confirmés par un sondage auprès d'étudiants de l'E.N.S.E.T. (4 abstentions sur 8, 3 réponses correctes sur 8 pour ce questionnaire), ainsi que par les réponses d'étudiants de première année universitaire (N = 55) ou de mathématiques spéciales (N = 44) à un questionnaire demandant, directement cette fois, ce qui rend nécessaire l'emploi des différentielles. L'ensemble de toutes ces réponses suggère fortement que les étudiants n'ont guère eu l'occasion d'expliciter, ni d'entendre expliciter à quel besoin répond l'introduction des procédures différentielles, ni quelle difficulté (la non-linéarité) est ainsi contournée.

2a. <u>En mathématiques</u>, nous avons déjà signalé, malgré la présence de références à l'approximation, le peu de faveur dont jouissaient les questions portant sur le traitement des approximations ou la rigueur des démonstrations. Lorsqu'elles sont abordées, ces questions sont souvent mal traitées. Ainsi su les 31 étudiants qui abordent l'interprétation géométrique dans Q6, 8 seulement parlent de plan tangent et sur les 11 qui répondent à Q5, 4 seulement proposent des justifications acceptables basées sur l'ordre de grandeur de la quantité négligée (2) ou le parallèle avec l'intégrale de Riemann (2).

Il faut souligner de plus que :
- plus de la moitié des développements limités produits dans les différents exercices sont incorrects et que, massivement, les erreurs se situent au niveau des restes
- sur les étudiants qui dans la question Q2 cherchent à montrer que la partie non linéaire est un reste, 2 seulement aboutissent.

Il semble bien que pour la plupart, la rigueur dans la manipulation des approximations se réduise à l'écriture d'un "ε" , "o" ou "O" , au choix, à la fin des expressions.

2b. <u>En physique</u>, nous avons voulu savoir si, pour nos étudiants, ce registre de l'approximation, qui est celui des exemples introductifs classiques, se conciliait avec la caractère rigoureux des calculs fondés sur les relations différentielles (intégrations ou résolutions d'équations différentielles).

Un premier questionnaire proche de celui sur la pression atmosphérique nous apprenait qu'une petite moitié d'étudiants universitaires de première année admettait que le résultat d'une intégration

$$F = \int_0^H \text{pression}\,(z)\,.\,d\,(\text{surface}\,(z))$$

était exact, alors qu'un tiers environ répartissait ses réponses entre l'affirmation nette : "*l'intégration aura une valeur approchée*" et cette autre, parfaitement ambigüe : "*l'intégrale sera exacte si on a sa valeur limite*" en passant par tous les "*pourvu que dz soit petit*" possibles.

Une autre manière d'aborder la question est d'examiner la rigueur des démonstrations. Invités à le faire à propos du calcul du volume d'une sphère (encadré III), des étudiants de première année ($N = 19$), deuxième année ($N=26$) universitaires ou de mathématiques spéciales ($N = 44$) se sont révélés mal à l'aise, noyant leurs justifications dans un déferlement de " *dz aussi petit que possible*", et préférant exhiber des coordonnées cylindriques ou sphériques (30 % dans certains groupes) qu'évoquer une procédure d'encadrement, avec passage à la limite (20 % au plus) ou le fait que le terme négligé est du deuxième ordre (toujours moins de 10 %). Et c'est un élève de l'E.N.S.E.T. qui déclare : "*C'est peut-être par coïncidence qu'on obtient le volume de la sphère avec ce calcul puisque rigoureusement on ne peut pas prendre* $dv = \pi \rho^2 dz$" .

ENCADRE III

LIRE LE TEXTE SUIVANT

On se propose de calculer le volume d'une sphère de rayon R.

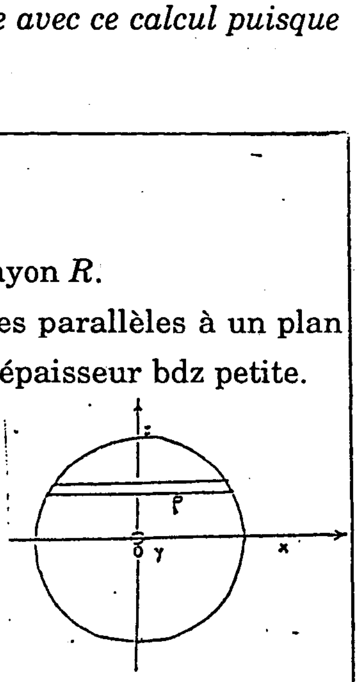
A cet effet, on découpe celle-ci en tranches élémentaires parallèles à un plan de symétrie de la sphère (plan xOy , cf. schéma ci-joint et d'épaisseur bdz petite.

Le volume d'une tranche d'altitude z est :

$$dV = \pi \rho^2 dz = \pi (R^2 - z^2) dz .$$

Donc le volume total est :

$$V = \int_{-R}^{+R} \pi (R^2 - z^2) dz$$



QUESTION SUR CE TEXTE

Pouvez-vous justifier plus rigoureusement ce calcul ?

Si oui, comment ?

3a. <u>En mathématiques</u>, les résultats des questionnaires semblent confirmer la disponibilité du registre fonctionnel. A la question Q1, 51 % des définitions exprimées le sont en termes d'application linéaire (contre 14 % de définitions de type expression : $f'(x)\,dx + f'(y)\,dy$ .... et 14 % de définitions matricielles), la domination étant cependant moins marquée chez les 50 étudiants ayant rempli le questionnaire à l'entrée en licence. Mais ce statut fonctionnel n'est plus dominant dès qu'il s'agit de résoudre des exercices : 26 % seulement des différentielles fournies en réponse aux questions Q2 et Q6 le sont sous forme d'applications (contre 26 % d'expressions et 33 % de matrices). Il apparaît un peu comme un statut de façade.

3b. <u>En physique</u>, un point de vue très répandu est celui de cet étudiant de math-spé :
"*pour intégrer, il ne faut surtout pas penser à ce que représente* $d\ell$, *mais procéder mécaniquement, sinon on est cuit*"
ou celui
"(*cette méthode*) ... *on l'applique mécaniquement, en oubliant la notion de différentielle, c'est une sécurité... on est sûr de ne pas se tromper*".

En fait, on relève dans les commentaires fournis par les étudiants en réponse aux diverses questions posées, deux tendances extrêmes :

- celle qui vide l'élément différentiel de toute signification autre que celle de marqueur de la variable d'intégration (notons que ceci rejoint dans une certaine mesure le point de vue mathématique : dans l'intégrale $\int f(t)\,dt$, t est une variable muette) :
"*je ne vois aucune nécessité de représentation dans l'intégration*" – "*dx est irréel*" – "*immatériel, abstrait, purement conceptuel*" – "*la longueur est fictive*" – "*en fait ça n'a aucune importance, quand on intègre,* d1 *devient une variable d'intégration*".

- celle qui donne à l'élément différentiel un contenu "*matériel*" qui peut être exclusif, parfois, d'autres significations : "$d\ell$ *est une petite longueur*" – "*... un petit bout de fil*" – "*ou couvre tous les dz possibles donc toutes les parties subdivisées de la sphère*".

Bien entendu, entre ces deux attitudes extrêmes se situe le marais des définitions du type :

"dz est la limite de Δz quand $\Delta z \to 0$" – "dl : élément infiniment petit" – "non mesurable" – "variation élémentaire" – "... on ne peut pas trouver plus petit" – "... cele veut dire ultra simple, on comprend".

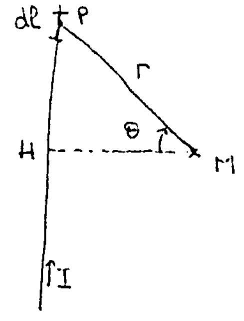
Définitions participant au rituel déjà évoqué, et probablement liées davantage à la première attitude qu'à la seconde.

Mais l'opérationalité de ces conceptions n'est pas aussi évidente que les citations faites au début du paragraphe pourraient le laisser croire. En particulier, les conceptions purement formelles ou purement matérielles rendent difficile, dans la mise en équation de problèmes, le passage du point de vue "*somme de contributions élémentaires*" ou "*empilement*" qui est souvent le point de vue "*naturel*" de description d'une situation physique, au point de vue variationnel ou fonctionnel qui est souvent le plus adapté à la résolution.

Ceci est flagrant dans les réponses au questionnaire suivant basé sur le calcul tout à fait classique de l'induction créée par un fil rectiligne parcouru par un courant électrique.

Le calcul est donné jusqu'à l'obtention de la contribution dB d'un élément $d\ell$ du fil, pour employer le langage usuel :

$$dB = \frac{\mu_o I \,.\, d\ell \,.\, \cos\theta}{r^2}$$



Et l'on demande ensuite, avant d'achever le calcul, si :

- $d\ell$ doit représenter le même nombre tout le long du fil,
- dB et $d\ell$ peuvent être considérés comme des différentielles de fonction.

Ce questionnaire a été soumis à 44 élèves de mathématiques spéciales.

Nous avons regroupé les commentaires sur *"dB"* et *"dℓ"* :

- d'une part des étudiants qui font l'erreur classique consistant à écrire : $d\ell = r\, d\theta$ (30 % du total)

- d'autre part de ceux qui parviennent à la relation différentielle correcte : $d\ell = a\, d\theta / \cos^2 \theta$ (7 % du total).

Les premiers se caractérisent globalement par le refus du statut de *"différentielle"* pour l'un au moins des objets dBou $d\ell$ (à une exception près), le refus de considérer les fonctions $B(\theta)$, $\ell(\theta)$, d'autant plus que la variable θ disparaît dans le résultat final, et pour *"dℓ"* l'abondance d'interprétations soit *"vides"* : "*dℓ* est fictive" soit *"matérielles"*: *"un élément ... du fil"*.

Les seconds (rares !) ont tous qualifié dB et $d\ell$ de différentielles, avec une abondance de spécifications fonctionnelles :

"$B(\theta)$ ou $B(r)$ ou $B(HP)$; $d\ell = d(HP)$, $HP(\theta)$, $HP(r)$".

Il faut cependant souligner qu'il n'est pas exclu que cette opérationalité s'acquière avec l'expérience, au moins pour les meilleurs étudiants, et ceci sans évolution notable des conceptions. A l'appui de cette hypothèse, les résultats d'étudiants de l'E.N.S.E.T., agrégatifs de physique qui, bien que percevant dB et $d\ell$ aussi peu fonctionnellement que ceux des classes préparatoires, n'en fournissent pas moins tous une expression différentielle correcte.

En résumé :

Les éléments d'information rassemblés ici convergent sur les points suivants :

- Les registres d'utilisation des différentielles dans les deux disciplines ne sont pas articulés entre eux et sont de plus, surtout pour la physique, insuffisamment explicités. Les étudiants réalisent trop rarement que la notion d'approximation linéaire tangente est utilisée en physique pour pallier une non-linéarité. Une telle aptitude suppose au passage que l'on ait bien situé, l'une par rapport à l'autre, les notions suivantes :

"formules" de notre enfance : $V = S \cdot H$, $U = R \cdot I$ ...
et *"intégrale d'une constante"* : $V = \int S \cdot dh$.

Ce lien suppose lui-même que l'on puisse penser une relation $V = S \,.\, H$ comme une dépendance linéaire : $V(z = H) = S \,.\, H$.

- Le traitement de l'approximation, la critique sur la rigueur des démonstrations semblent majoritairement très déficients, aussi bien en mathématiques qu'en physique : il y a la même réticence pour évaluer le comportement d'un reste que pour chercher la faille dans un raisonnement ou sa justification. On exorcise le tout par un *"pourvu que dz soit petit"*. IL faut relativiser sans doute cette remarque par une autre beaucoup plus générale : l'inaptitude à la critique est un trait d'ensemble chez nos étudiants. Sur ce point, c'est donc une éducation globale qu'il faudrait entreprendre.

- Enfin le statut fonctionnel des différentielles reste peu marqué dans les deux disciplines. Deux éventualités en particulier lui font obstacle : la vision *"nulle"* (il ne faut surtout pas penser à ce que représente $d\ell$ ...) et la vision *"empilement de contributions élémentaires"*. La prédominance des exercices de type algorithmique contribue évidemment à évacuer la question du statut des objets en cause.

2.3. Les aspects de la séance de sensibilisation aux problèmes de mise en équation différentielle.

Cette séance a été expérimentée en travaux dirigés avec trois groupes d'étudiants de DEUG SSM 1ère année. Il s'agissait de mettre en équation les quatre problèmes dont le texte est joint en annexe.

Ces problèmes avaient été choisis pour permettre l'explicitation des différents types de situation dans lesquelles intervient au début des études universitaires l'outil différentiel :

- calcul approché (problème de la sphère)
- recherche d'extréma (problème du nageur)
- procédure intégrale (problème de la coupe)
- procédure différentielle (problème de l'absorption).

L'objectif de cette séance était donc :

- du point de vue de la recherche, d'étudier les modes de résolution proposés par les étudiants, les difficultés rencontrées, la façon dont elles étaient éventuellement surmontées, d'analyser en quoi elles dépendaient de facteurs propres à l'aspect différentiel ou de facteurs plus généraux comme le repérage des variables pertinentes et la prise en compte de l'aspect fonctionnel des grandeurs utilisées ;

- du point de vue de l'enseignement, de mettre en évidence la diversité des situations dans lesquelles interviennent les notions de différentielle et de dérivée et de fournir aux étudiants des moyens pour, ayant pris conscience de cette diversité, mieux la gérer.

Cette expérimentation, bien que très limitée, a mis en évidence un certain nombre de faits :

1 - Les difficultés rencontrées par les étudiants y apparaissent situées dans les registres propres au calcul différentiel et intégral plutôt que dans un registre fonctionnel général. Dans le problème du nageur, l'identification du cadre fonctionnel ne pose de problème à aucune des équipes. Ceci n'implique pas que ce cadre fonctionnel soit bien maîtrisé lorsqu'il doit être utilisé dans des contextes plus complexes comme celui de l'absorption lumineuse. On voit apparaître dans la résolution de ce problème des notations indiciaires : I_α , I_{dx} , que l'on pourrait qualifier de pré-fonctionnelles, qui permettent de prendre en compte une certaine idée de dépendance sans être soumises aux contraintes du registre fonctionnel, et bloquent de ce fait en partie la progression.

2 - Les renseignements obtenus ici sur les difficultés propres au registre différentiel confirment et complètent les résultats obtenus par l'analyse des différents questionnaires.

On retrouve en effet :
- les difficultés liées à une vision exclusive de dx comme petite quantité constante : ici elles conduisent les étudiants d'une équipe à se perdre dans une itération discrète (problème de l'absorption),
- les difficultés liées à l'absence de distinction entre linéarité locale et linéarité globale (problème de l'absorption),
- les difficultés liées à une vision de dx comme simple marqueur de variable d'intégration, ici conjuguées avec une vision géométrique des volumes comme empilement de surfaces (problème de la coupe).

D'autres, non apparentes dans les questionnaires, du fait du registre des questions posées, apparaissent : la présentation du problème de l'absorption, par exemple, en termes d'empilement de contributions élémentaires, tend à faire assimiler ce problème à un simple problème d'intégration, alors que les contributions élémentaires étant interdépendantes, ce n'est le cas que si on s'intéresse aux contributions relatives. De ce fait, l'objet *"équation différentielle"*, qui est au coeur du problème, reste masqué et soit les étudiants, par analogie avec des situations déjà rencontrées, embrayent mécaniquement sur : $dI = I = - \mu \, dx$ et les logarithmes, soit ils restent bloqués.

3 - L'observation des phases de recherche met aussi en évidence les stratégies des étudiants. Elle montre que, dès que la résolution ne leur paraît pas évidente, les étudiants se jettent prioritairement dans la recherche d'indices formels au niveau du texte du problème proposé. Ces mêmes indices sont également utilisés à titre de contrôle ou comme moyen d'emporter l'adhésion des autres dans les discussions, sans qu'un contrôle interne au problème soit nécessairement évoqué : on a découvert ce que le professeur attendait, donc on a raison.

Ainsi, la recherche d'un minimum appelle celle du zéro d'une dérivée, le calcul d'une valeur approchée ou la mention *"e très petit devant R"* appellent un développement limité, les termes *"proportionnel"* , *"homogène"*, *"linéaire"* (coefficient d'absorption linéaire) appellent le registre linéaire, la présence d'élements différentiels, de tranches élémentaires appellent un calcul d'intégrale... .

Si on se place non pas au niveau cognitif mais sur le plan du fonctionnement du système d'enseignement, on ne peut manquer de voir là l'effet d'une adaptation efficace des étudiants à ce système, basée sur une connaissance, implicite au moins, de certaines des lois qui le régissent. Ainsi la résolution de nombreux problèmes peut être efficacement basée sur la stratégie suivante, en deux phases :

1) détermination, dans le registre des algorithmes disponibles, de l'algorithme approprié,

2) exécution de cet algorithme,

les problèmes didactiques réels posés par la première phase étant contournés par la mise en place, au niveau des énoncés, d'un système d'indices destinés à surdéterminer le choix de l'étudiant et assurer donc un niveau de réussite satisfaisant à qui sait intégrer la coutume didactique.

Les problèmes de cet atelier avaient été volontairement choisis parmi les problèmes *"classiques"* et rédigés tout aussi traditionnellement. On peut donc faire l'hypothèse que les stratégies observées ici ne sont en rien des artefacts de la recherche.

A ce propos il faut signaler que le problème de l'absorption avait déjà été proposé en test, lors des enseignements expérimentaux initiaux en 1979-80. Le texte proposé ici était légèrement modifié par rapport au texte initial, où toutes les notations différentielles et fonctionnelles étaient données. Les résultats de la passation du test avaient été les suivants : les étudiants, utilisant les indications du texte, n'avaient eu aucun mal à écrire l'équation : $dI = -\mu I\, dx$, mais ensuite ils étaient revenus en très grande majorité au modèle linéaire écrivant soit :

$$\Delta I = -\mu I \Delta x$$

ou $$dI = -\mu I_0\, dx .$$

Il faut signaler que le test avait été passé plus tôt dans l'année et que l'automatisme du branchement sur le logarithme n'était certainement pas encore bien installé. Mais on peut penser qu'avec le texte initial, on aurait obtenu, en fin de première année de DEUG des résultats tout à fait acceptables.

Le fonctionnement de l'atelier montre que la suppression d'une partie des indices du texte suffit à brouiller les cartes et que, lorsqu'elle n'est pas surdéterminée, l'écriture même de l'équation peut poser problème.

III - INTERPRETATION GLOBALE EN TERMES DE FONCTIONNEMENT DU SYSTEME.

La différentielle apparaît dans cette recherche, en mathématiques comme en physique, dans le savoir scientifique, comme une notion étroitement liée à l'approximation mais, pour interpréter les différents résultats obtenus, il nous semble nécessaire de distinguer explicitement deux cadres : celui de l'approximation proprement dite et celui de l'algorithmisation algébrique de l'approximation.

En mathématiques, dans le savoir savant, côté objet, comme dans la pratique des mathématiciens, côté outil, à l'heure actuelle ces deux cadres sont en étroite interaction. Cela n'a pas toujours été le cas, comme l'a montré l'étude historique. A une époque, la différentielle, suspecte de servir de support à des pratiques peu rigoureuses, relevant davantage de *"l'approximatif"* que de *"l'approximation"*, a été cantonnée, au moins en analyse, dans la fonction d'outil commode de calcul formel, cette commodité étant liée essentiellement à la propriété d'invariance formelle de la différentielle dans les changements de variables. Mais depuis la fin du siècle dernier, avec l'introduction de la notion de différentiabilité, puis celle d'application linéaire tangente liée au développement de l'analyse fonctionnelle, le versant *"approximation"* de la différentielle a repris ses droits et, dans le même temps, s'est retrouvé en quelque sorte anobli.

Dans l'enseignement, on l'a vu, au moins au niveau auquel se situe cette étude, celui du début de l'enseignement supérieur, la réduction au point de vue purement formel a résité plus longtemps. Ce n'est qu'à partir des années soixante que l'introduction du calcul différentiel s'est struturée autour des notions de différentiabilité et d'application linéaire tangente, ce changement s'accompagnant pendant un temps d'une certaine hypertrophie du pôle objet de la notion par rapport à son pôle outil.

Mais, comme l'ont mis en évidence les questionnaires, si le cadre de l'approximation proprement dit est présent au moment de l'introduction de la notion et mobilisable au niveau des définitions (registre déclaratif), il s'efface au niveau des pratiques. En effet on constate qu'à l'enseignement fortement algorithmisé de l'époque précédente, marqué par l'exploitation de l'invariance formelle de l'expression différentielle, s'est simplement substitué un enseignement tout aussi algorithmique, plus marqué par l'algèbre linéaire, et basé sur la manipulation des dérivées partielles et matrices jacobiennes. Certes le concept d'approximation est au coeur des théorèmes clefs sur lesquels s'appuie l'algorithmisation, par exemple le théorème d'inversion locale, le théorème des fonctions implicites ou plus simplement le théorème assurant la différentiabilité des fonctions admettant des dérivées partielles continues, mais même dans les cas où les hypothèses sont données en terme de différentiabilité, en fait on a recours, et c'est naturel, à des critères suffisants comme justement l'existence de dérivées partielles continues qui renvoient au niveau du contrôle à un simple traitement algébrique.

Et finalement les questions qui nécessitent une utilisation effective du cadre de l'approximation sont tellement inhabituelles qu'elles sont perçues par les étudiants, lorsqu'elles leur sont posées dans les questionnaires, comme des questions hors-contrat.

Si en mathématiques, l'enseignement peut se situer de façon cohérente à ce niveau élémentaire presque exclusivement dans le cadre de l'algorithmisation algébrique, en revanche en physique, la prise en compte du cadre de l'approximation est incontournable, puisque l'on part de situations non mathématisées. Mais la recherche montre bien que, de façon traditionnelle, le passage du cadre de l'approximation au cadre de son traitement algorithmique est escamoté par une argumentation de type recette ou convention. Les étudiants s'y adaptent en apprenant à reconnaître les mots clefs d'appel des procédures différentielles : *"petit"* , *"élémentaire"*, *"infinitésimal"* (cf. annexe VI) et comme les enseignants ont la prudence, consciemment ou non, d'inclure ces marques de reconnaissance dans les énoncés de problèmes et d'exercices, les étudiants finissent par atteindre une efficacité raisonnable et l'enseignement peut fonctionner.

En fait, il ne faut pas se leurrer, cette organisation de l'enseignement est stable parce que cohérente, opérationnelle et optimisant en un certain sens un ensemble de contraintes. La viabilité d'une prise en compte épistémologiquement plus satisfaisante des relations entre les deux cadres n'a rien d'évident et on peut prédire que toute tentative qui ferait l'économie d'une analyse fine du champ des contraintes et des raisons d'existence de cette stabilité serait vouée à l'échec. C'est d'ailleurs le cas des innovations régulièrement menées avec l'objectif d'harmoniser les enseignements de mathématiques et de physique.

Considérons par exemple le *"paradoxe"* suivant :
L'accroissement Δf d'une fonction en un point x , correspondant à l'accroissement Δx de la variable n'est généralement pas égal à l'accroissement

linéaire qui correspond à la différentielle df. Leur différence est un reste $r\ (\Delta x)$ que l'on ne peut pas en général calculer exactement, que l'on ne cherche d'ailleurs pas à calculer exactement - sinon à quoi bon les différentielles et les simplifications qu'elles apportent ! Cependant le modèle linéaire choisi n'a de sens que si l'on sait contrôler le reste et se convaincre qu'il est négligeable devant Δx , lorsque Δx est assez petit. Ainsi donc, si dans l'enseignement on insiste trop sur l'obligation de contrôler le reste, on remet en question l'aspect simplificateur de la différentielle et son caractère opérationnel, mais si à l'inverse, pour simplifier, on évacue plus ou moins le problème du reste, le choix de ce que l'on peut négliger échappe totalement à l'étudiant qui se trouve réduit à des pratiques mimétiques, perd toute autonomie scientifique et peut en arriver à estimer que tout ce qu'il fait est au même niveau d'approximation.

Il faut savoir de plus que les nombreuses recherches didactiques menées ces dernières années sur les débuts de l'enseignement de l'analyse (notions de fonction, de continuité, de limite) ont largement mis en évidence les difficultés des élèves actuels de l'enseignement secondaire et même des étudiants débutants avec les techniques de base de l'approximation : manipulation de valeurs absolues, d'inégalités et d'encadrements, majorations, minorations, raisonnements par conditions suffisantes.

Les pratiques usuelles de l'enseignement en mathématiques comme en physique, permettent de contourner l'obstacle, sans que le prix payé soit trop perceptible aux acteurs du système. Le cadre du traitement algorithmique algébrique est un refuge sûr pour l'enseignement et les mêmes stratégies se retrouvent qu'il s'agisse de calcul différentiel ou intégral, d'enseignement des limites ou de la continuité : après la donnée des définitions, mise en place immédiate de théorèmes puissants ramenant le contrôle à un niveau purement algébrique et évacuation de fait du cadre de l'approximation. La notion de continuité s'efface devant les théorèmes qui assurent la préservation de la continuité par les opérations algébriques élémentaires, celle de limite s'efface devant les théorèmes similaires et ceux correspondant aux limites monotones, la différentiabilité s'efface devant les théorèmes de préservation et l'équivalence entre continue différentiabilité et existence de dérivées partielles continues.

En physique, les contraintes du système didactique pourraient s'exprimer ainsi : les différentielles sont victimes de leur succès. La multiplicité des occasions de s'en servir, la confirmation notoire des résultats par l'expérience n'incitent guèere dans l'enseignement aux contrôles de rigueur, ni même d'aileurs au contrôle pragmatique par l'expérience. C'est finalement l'argument d'autorité qui prévaut ou de manière plus implicite la conviction de l'enseignant que *"ça marche"*.

On peut donc résumer de la façon suivante notre analyse du fonctionnement actuel de l'enseignement des différentielles à ce niveau dans les deux disicplines : Les clichés usuels opposent l'opérationalité physique à la rigueur mathématique, ou cherchent à réduire le registre physique au cadre de l'approximation et le registre mathématique au cadre du traitement algorithmique de l'approximation. Les différences entre les deux disciplines se situent davantage à nos yeux, en particulier en ce qui concerne l'enseignement, dans la façon dont chacune traite, avec ses exigences et ses modes de contrôle propres, les rapports entre ces deux cadres. Chacune vise en fait une optimisation entre rigueur et opérationalité. Pour l'enseignement des mathématiques, assujetti à un contrôle de type démonstratif, cette recherche va passer, d'une part par l'établissement de théorèmes puissants valables pour de larges classes de situations et permettant une transition aisée entre les deux cadres, d'autre part par la marginalisation des problèmes qui en rentrent pas dans ce mode de fonctionnement. L'enseignement de la physique, qui n'est pas assujetti aux mêmes contraintes mais peut se satisfaire d'un contrôle pragmatique, jouera à fond de l'économie de ce contrôle, allant jusqu'à fonctionner essentiellement avec un contrôle pragmatique invoqué.

Une telle analyse de la situation actuelle dans les deux disciplines laisse augurer une forte stabilité du système. Est-ce à dire qu'il n'y ait aucune intervention possible ? A notre avis non, mais nous voulons souligner que toute tentative d'infléchir sérieusement la situation actuelle doit prendre en compte l'ensemble des contraintes qui pèsent sur le système et être associée à une réflexion globale sur les objectifs de l'enseignement. L'analyse qui précède montre en effet que l'on ne peut chercher de rééquilibration *"réaliste"* entre les deux cadres ou de gestion plus convenable de leurs rapports, hors situation expérimentale, indépendamment de la question suivante : Quel type de formation attendons-nous de l'enseignement dispensé ? Quelles priorités nous donnons-nous ?

IV - QUELQUES PROPOSITIONS POUR L'ENSEIGNEMENT.

Dans le cadre de l'enseignement actuel, il nous semble que l'on peut déjà faire quelques propositions susceptibles de retombées certainement limitées mais positives. Ce sont les suivantes :

- accorder une place importante aux préoccupations exprimées ici visant à rééquilibrer les poids respectifs des deux cadres et gérer plus convenablement leurs rapports au moment de l'introduction des notions concernées, dans le but d'établir des points d'ancrage et des références paradigmatiques ;
- éviter d'introduire trop précocement des outils algorithmiques très puissants pour laisser au cadre de l'approximation un espace de développement suffisant ;
- utiliser systématiquement par la suite les paradigmes mis en place pour parvenir à un coût raisonnable de la rigueur notamment dans les mises en équation de problèmes ;
- intégrer à l'enseignement de façon régulière des situations percutantes analogues à celles élaborées pour les questionnaires dans le cadre de la recherche et susceptibles de relancer l'intérêt pour les questions de légitimité, de contrôle et de statut.

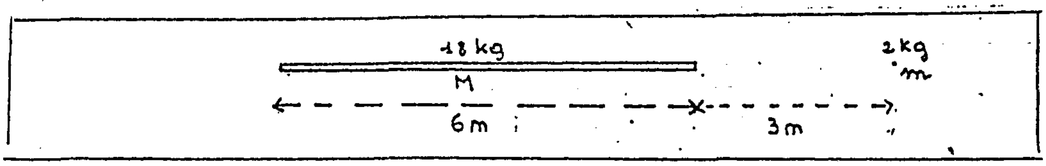
Enfin, il est apparu à de multiples propos que ces préoccupations, ainsi que les aptitudes qu'elles mettent en jeu, dépassent largement le cadre des différentielles : aptitude à rentrer dans le cadre fonctionnel pour la modélisation ou aptitude à la critique de textes scientifiques, pour ne citer qu'elles. Ce sont là autant d'aspects dont le développement est coûteux, difficile à évaluer, mais qui méritent que l'on s'y attache, de façon permanente cette foisn, sans référence à un domaine précis, car ce qui peut être considéré comme trop coûteux dans une économie locale peut s'avérer rentable dans une économie plus globale.

C'est dans cette perspective globale d'initiation à la démarche scientifique que se situent les travaux de l'équipe de Grenoble. Sans rentrer dans les détails du cadre théorique développé par cette équipe, nous voudrions pour terminer présenter brièvement ici l'ingéniérie didactique élaborée pour l'enseignement de l'intégration, qui illustre parfaitement l'esprit des propositions faites ci-dessus, notamment les trois premières.

L'ingéniérie didactique s'adresse à des étudiants de première année d'université ayant développé pendant leurs études secondaires, conformément aux programmes en vigueur une petite pratique de calculs des primitives et une conception de l'intégrale comme opération inverse de la dérivation, associée au calcul d'aires sous des courbes définies par une équation cartésienne.

Il s'agit d'enrichir les conceptions des étudiants en donnant une signification à la notion de procédure intégrale. Pour ce faire, on s'appuie sur diverses situations physiques.

La situation de départ, en particulier, correspond au problème suivant : *"Quelle est l'intensité de la force F qui s'exerce entre une masse ponctuelle m de* 2 *kg e une fine barre de* 18 *kg et de* 6 *m de long, si la masse et la barre sont disposées de la façon suivante"* :



Les chercheurs font l'hypothèse que, convenablement gérée, cette situation qui est bien porteuse du sens de la procédure intégrale (évaluation d'une grandeur associée à un phénomène non constant par découpage, encadrement par des phénomènes fictifs localement constants, raffinement et passage à la limite) va permettre effectivement de mettre en place cette procédure par actualisation et dépassement du conflit cognitif lié à l'inadéquation de la stratégie de résolution spontanée (basée sur le principe du centre de gravité qui ramène à un problème connu d'attraction ponctuelle).

Et en effet, les expérimentations conduites depuis 1984 confirment cette analyse a priori de la situation. Aucun indicateur formel n'appelant l'intégrale, dans un premier temps, les étudiants très majoritairement utilisent le principe familier du centre de gravité : tout se passe comme si la masse était concentrée au centre de gravité. Initialement, des situations analogues mais proposant des répartitions de masse différentes avaient été prévues pour mettre en défaut cette procédure au cas où le conflit n'apparaîtrait pas spontanément. En fait, au cours des expérimentations menées, leur exploitation n'a pas été nécessaire car il s'est toujours trouvé quelques étudiants pour proposer de tester la validité du calcul en coupant la barre en deux et en appliquant le principe du centre de gravité à chaque moitié de barre. Dans cette procédure de validation, le principe rentre en conflit avec lui-même, mais l'idée force qui consiste à concentrer de la masse en un point va être conservée pour obtenir cette fois non la valeur exacte mais des encadrements de la valeur cherchée : on concentre la masse aux extrémités. Le souci de raffiner l'encadrement très grossier obtenu conduit au découpage déjà présent dans la tentative de validation et à la conviction appuyée par des calculs explicites que l'on va pouvoir obtenir une valeur approchée avec une précision quelconque donnée, puis au passage à la limite.

Cette première situation est suivie de quatre autres visant à extraire la procédure intégrale du contexte précis de son introduction (problèmes de moyennes, utilisation d'autres variables : temps, variables d'espace), avant de démarrer l'étude des propriétés mathématiques de l'opération intégrale, cette étude elle-même faisant largement appel au travail sur des énoncés conjecturaux émis par les étudiants.

Les résultats des deux premières expérimentations menées en DEUG A première année, à Grenoble, avec 105 et 101 étudiants respectivement, sur 12 et 14 séances de deux heures respectivement sont rapportés dans b[8]. L'évaluation menée porte à la fois sur les effets de l'introduction du débat scientifique et les contenus précis de l'enseignement. En ce qui concerne plus particulièrement l'intégrale, l'efficacité de la démarche est prouvée en particulier par les résultat obtenus par les étudiants à des épreuves passées à l'issue de l'enseignement. Par exemple, en 1986, ils ont à résoudre le problème et les deux conjectures figurant dans le tableau II.

ANNEXE - TABLEAU I

PROBLEME (12 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\Omega = [0, 4]$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\forall \in x\, [0, 2] \qquad f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

$$\forall \in x\,]2, 3[\qquad f(x) = 2$$

$$\forall \in x\,]3, 4] \qquad f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{91 - x^3}$$

$$\text{et} \qquad f(3) = 1 .$$

1) Construire l'allure approximative du graphe de f sur Ω.

2) Déterminer le sous-ensemble U des solutions dans Ω de l'équation $f(x) = \frac{3}{2}$.

3) Soit $F(x) = \int_2^x f(u)\, du$.

a) Tracer l'allure approximative du graphe de F sur son domaine de définition.

b) Montrer que l'équation $F(x) = 2{,}5$ admet une unique solution α sur Ω.

c) Ecrire un programme Pascal qui fournit une valeur x de Ω pour laquelle on est sûr que $|F(x) - 2{,}5| \leq 10^{-2}$.

CONJECTURES (4 points). Résoudre les conjectures suivantes :

Conjecture 1 : Soit f une fonction intégrable sur un domaine simple que ?? et vérifiant $\int_\Omega f = 1$, alors pour toute constante k positive on a $\int_\Omega (f + k) = 1 + k$.

Conjecture 2 : Soit U le rectangle $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ et $g(x, y) = e^{(2x - y^3)}$, alors $\int_U g > 2$.

89 étudiants ont pasé cette épreuve et plus de la moitié obtiennent la moyenne. De plus, 20 % seulement des étudiants tentent de résoudre le problème en cherchant des primitives. Ceci amène les auteurs à conclure en ces termes :

"Les résultats montrent qu'une majorité d'étudiants ont acquis un niveau satisfaisant de compréhension du concept d'intégrale introduit par la méthode du débat scientifiq et qu'ils le possèdent suffisamment en profondeur pour savoir explorer leurs connaissances, alors même que les algorithmes usuels ne sont pas utilisables".

C'est aussi en fonction de ces préoccupations que les équipes parisiennes ont produit une brochure destinée aux enseignants de mathématiques et de physique. Cette brochure contient un ensemble de questionnaires, élaborés au cours de la recherche ou depuis, précise pour chacun d'eux le ou les objectifs visés, les réponses attendues et les réponses effectivement fournies par les étudiants (si le questionnaire a été utilisé au cours de la recherche). Ces questionnaires sont complétés par un texte qui présente, dans un langage simple, les principaux champs d'intervention de l'outil différentiel au début des études universitaires, en précisant les types de contrôle possibles dans chaque cas [8].

REFERENCES

[1] **ALIBERT** D., **ARTIGUE** M., **COURDILLE** J.M., **LEGRAND** M., **HALLEZ** H., **MENIGAUX** J., **RICHARD** F. et **VIENNOT** L. - *"Différentielle, procédures différentielles et intégrales"*. Rapport de Recheche. Ed. I.R.E.M. Paris 7 (à paraître).

[2] **ALIBERT** D., **ARTIGUE** M., **COURDILLE** J.M., **LEGRAND** M., **HALLEZ** H., **MENIGAUX** J., **RICHARD** F. et **VIENNOT** L., - *"Le thème "différentielles" : un exemple de coordination Maths/Physique dans la recherche"*. Actes du Colloque du GRECO Didactique, Sèvres, mai 1987, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble, pp 7-45.

[3] **ARTIGUE** M. - *"Une expérience de coordination des enseignements de mathématiques et de physique en DEUG SSM"*. Cahier du Séminaire de Didactique et Pédagogie n° 22, Ed. I.M.A.G. ; Grenoble, 1981.

[4] **FRECHET** M. - *"Sur la notion de différentielle"*. Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Tome 152, n° 13, 1911, pp 845-847 et 1050-1051.

[5] **FRECHET** M. : *"Sur diverses définitions de la différentiabilité"* - L'Enseignement Mathématique, 1964, série II, volume 10, pp 177-228.

[6] **STOLZ** O. : *"Grundzüge der Differential und Integral Rechnung"* - Tome 1, Leipzig, 1883.

[7] **YOUNG** W.H. : *"The fundamental theorems of differential calculus"*, Cambridge Tracts, 1909.

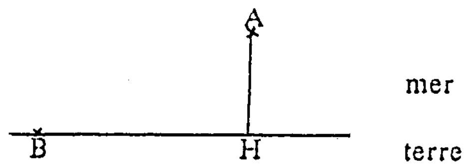
[8] **LEGRAND** M. et al. : *"Introduction du débat scientifique dans un cours de première année de DEUG A"* à l'Université de Grenoble I - Rapport de Recherche, Edition I.M.A.G., Grenoble, 1986.

ANNEXE

Textes proposés pour la séance de sensibilisation aux problèmes de mise en équation.

Le nageur.

Un baigneur situé en un point A de la mer désire atteindre un point B de la côte. La côte est rectiligne et la mer sans courant. Le trajet du baigneur peut être mixte (nage et marche). Sa vitesse de nage est de 2 km/h, sa vitesse de marche de 4 km/h. Déterminer le trajet le plus rapide dans les deux cas suivants :



1) $AH = 500\ m$ et $HB = 400\ m$

2) $AH = 500\ m$ et $HB = 200\ m$.

La sphère dorée :

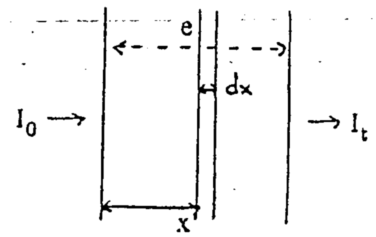
On veut dorer à l'or fin une sphère de rayon R. Sachant que l'épaisseur e de dorure est uniforme et très inférieure à la valeur de R, donner une valeur approchée de la quantité d'or nécessaire en fonction de R et de e (la masse volumique de l'or est de 19,3 g/cm^3).

L'absorption lumineuse :

Soit I_0 l'intensité d'un faisceau de rayons X de section constante arrivant normalement sur un échantillon métallique d'épaisseur e. L'intensité transmise est inférieure à l'intensité incidente I_0. En effet, par suite d'interactions diverses, une partie de l'énergie est absorbée par l'échantillon. L'intensité absorbée par une tranche élémentaire dx, située à la profondeur x est proportionnelle à son épaisseur dx et à la valeur de l'intensité I en x, le coefficient de proportionnalité étant le coefficient d'absorption linéaire μ caractéristique du métal.

Donner la loi de variation de I en fonction de l'épaisseur de métal traversé et en déduire les épaisseurs e_{AI} et e_{Pb} d'aluminium et de plomb que doit traverser un faisceau de rayons bX pour que l'intensité incidente du faisceau soit réduite d'un facteur 100.

On donne $\mu_{AI} = 14 \text{ cm}^{-1}$ et $\mu_{Pb} = 1600 \text{ cm}^{-1}$.



La coupe :

On se propose de déterminer la quantité de vin contenue dans le verre ci-dessous en fonction de la hauteur h de liquide. On sait que la section du verre est parabolique et a pour équation $y = 2x^2$ dans le repère ci-dessous :