

ANNIE LARHER

Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1987-1988, fascicule 5
« Didactique des mathématiques », , p. 1-29

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1987-1988__5_A2_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1987-1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

"Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques"

Thèse de Madame Michèle ARTIGUE (1984)

Exposé présenté le 21 octobre 1987

par

Annie LARHER

professeur au Lycée Ile-de-France à Rennes

I - INTRODUCTION.

Le problème auquel M. ARTIGUE s'est intéressé dans sa thèse est celui de la reproductibilité des situations didactiques. On verra ce que cela signifie, pourquoi elle a jugé que c'était une question fondamentale, comment les représentations de la reproductibilité, véhiculées par les écrits didactiques, peuvent être modélisées. Je vous en présenterai le modèle "naïf" qu'elle a construit et mettrai en évidence les limites de ce modèle.

Tout ceci correspond à la première partie de sa thèse (et de l'article qu'elle a publié deux ans plus tard, en 1986, dans R.D.M.). Dans la suite de cette thèse, elle étudie la dynamique d'une situation didactique précise expérimentée dans des classes lors d'une recherche sur les conceptions du cercle à l'école élémentaire et elle cherche, en dépassant une modélisation naïve - en essayant plus précisément de prendre en compte les interactions dans la classe - à déterminer ses caractéristiques reproductibles. Je vous présenterai également, mais plus brièvement, cette modélisation et vous dirai pourquoi et comment elle a exploité au maximum ce dernier modèle au moyen de simulations sur ordinateur.

II - LA REPRODUCTIBILITE DES SITUATIONS DIDACTIQUES.

C'est une question fondamentale car l'obtention des résultats dans ce domaine conditionne en partie les possibilités de transmission et surtout d'utilisation des travaux de recherche.

Gérard VERGNAUG écrit : *"Lorsqu'on répète la même séquence didactique avec plusieurs classes d'élèves, on constate des régularités très importantes, régularités qui permettent, dans une fourchette d'approximation raisonnable, de résumer l'histoire de la classe en un petit nombre de trajectoires".*

Globalement, nous observons tous en effet dans nos classes, au cours d'une activité donnée, les mêmes conduites, les mêmes procédures, le même ordre d'apparition de celles-ci et à peu près la même distribution. C'est en ce sens que l'on dit que la situation se reproduit. Nous disons, par exemple, "il s'est passé sensiblement la même chose dans ces deux classes".

Mais ne serait-ce pas abusif de généraliser ? Tel comportement observé dans une classe est-il susceptible de se reproduire dans une autre, dans n'importe quelle autre ? Nous aimerions bien pouvoir répondre oui : ceci correspond à une préoccupation naturelle de l'enseignant par rapport à sa propre économie. Ce questionnement, pas toujours explicité d'ailleurs, se retrouve dans tous les travaux de didactique parus jusqu'à présent et abordant ce sujet. Leurs auteurs sont extrêmement prudents, ils mettent en garde contre les dangers qu'il y aurait à généraliser trop hâtivement la portée de leurs résultats.

Ou bien ils le font explicitement.

Par exemple : *"Il s'agit de faits qui se sont produits dans un contexte scolaire dont nous contrôlons mal les variables. Nous ne pouvons donc pas affirmer que tel modèle implicite fonctionne en général chez les enfants dans telle situation"* R. DOUADY.

Ou encore : *"Les résultats précédents sont évidemment trop limités pour permettre d'énoncer des conclusions définitives : ils suggèrent cependant des hypothèses directrices qui pourront orienter des recherches ultérieures"* A. ROBERT.

Ou bien ils le font de façon implicite en prenant de multiples précautions oratoires comme "il semble", "on pourrait penser que"

On en retire l'impression que la reproductibilité, tout en restant une notion floue, n'est pas enfermée dans la production d'une expérience précise mais

s'exprime plutôt à travers l'interrogation sur le sens des résultats obtenus, leur fiabilité, leur domaine de validité.

Mais est soulignée aussi la nécessité d'une approche scientifique de l'expérimentation en classe et c'est à ce sujet que l'on voit figurer effectivement (mais rarement) le terme de reproductibilité ou des termes synonymes comme "répétabilité".

Guy **BROUSSEAU**, par exemple, écrit :

"A travers cette étude, se posent d'autres questions plus générales comme par exemple celle de la reproductibilité en didactique, ou même de la possibilité de réaliser des expériences scientifiques".

Gérard **VERGNAUD** écrit quant à lui :

"Quelles précautions faut-il prendre pour faire de l'expérimentation didactique en classe une expérimentation proprement scientifique ?

Plusieurs critères peuvent être avancés :

- *la fiabilité des objectifs visés et des effets attendus*
- *la fiabilité des observations faites*
- *la répétabilité des faits didactiques intéressants*.

Finalement, les écrits des didacticiens véhiculent un modèle "naïf", réducteur, d'une certaine reproductibilité que l'on peut résumer ainsi :

On reconnaîtra les situations reproductibles aux caractéristiques suivantes :

Au cours d'expérimentations répétées :

- 1°) Les mêmes procédures doivent apparaître avec des hiérarchies comparables.
- 2°) L'histoire de la classe doit pouvoir être décrite par un petit nombre d'orbites.
- 3°) Les régularités observées au niveau des procédures et des orbites doivent être essentiellement le fait de régularités individuelles.
- 4°) Les légères perturbations qui ne peuvent manquer de se produire d'une classe à l'autre ne doivent pas avoir tendance à s'amplifier.

C'est à ces caractéristiques que l'on reconnaîtra les "bonnes" situations, celles où les seuls changements sont des phénomènes dus au hasard (d'où un modèle probabiliste), c'est-à-dire celles présentant des garanties de stabilité et de reproductibilité suffisantes pour pouvoir être "exportées". C'est ce que recouvre cette notion implicite, ce qu'elle suppose de régularité pour être opératoire que M. ARTIGUE essaie de préciser, par le biais d'une théorie explicite que je vais maintenant développer.

Elle se place dans le cas d'une classe où :

- l'élève est confronté individuellement à la résolution d'un problème précis pendant une durée limitée : il a un fonctionnement isolé, pas d'interactions
- l'élève peut contrôler lui-même le résultat de son activité
- plusieurs modèles de résolution du problème (cela peut être aussi des modèles d'état du sujet) ont été répertoriés.

Ces conditions, assez particulières, sont aisément satisfaites par micro-ordinateur.

Michèle ARTIGUE étudie donc des régularités individuelles mais elle essaie de les interpréter au niveau de classes. C'est pourquoi son modèle, dit-elle, est un modèle naïf de transformation de régularités individuelles en régularités collectives.

Avant d'examiner ce modèle naïf, ouvrons une parenthèse et voyons sur un exemple quels peuvent être les différents modes de résolution d'un problème ou les différents modèles d'états du sujet. Prenons comme situation celle qu'étudie M. ARTIGUE dans la deuxième partie de sa thèse, à savoir une situation-problème faisant intervenir des disques.

Elle est extraite d'une recherche sur les conceptions du cercle chez des élèves de l'école élémentaire (de 7 à 10 ans). Sont apparues, au cours d'une expérimentation et d'entretiens individuels, les conceptions suivantes (il serait plus exact de dire que les chercheurs, M. ARTIGUE et J. ROBINET, "ont cru voir apparaître", car on dispose uniquement d'indicateurs de conceptions et on

suppose qu'il y a correspondance bijective entre ces indicateurs et les conceptions réelles) :

- Cercle :
- figure ayant même "mesure" dans toutes les directions du plan (situation de reconnaissance de formes)
 - trajectoire d'un point rigidement lié à un point fixe (trajectoire de l'extrémité de la porte)
 - ensemble de points à distance donnée d'un point donné
 - figure de courbure constante
 - figure invariante par rotation autour de son centre
 - figure invariante par glissement sur elle-même.

Si ces conceptions sont théoriquement mobilisables à l'âge considéré, leur mise en oeuvre effective et réussie dans les situations ne va pas toujours de soi. Alors certaines activités vont privilégier tel ou tel point de vue sur le cercle, pas nécessairement l'aspect ponctuel et statique qui correspond à la définition des manuels : ensemble de points situés à la même distance d'un point fixe. M. ARTIGUE dit qu'au cours d'une pré-expérimentation le cercle, par exemple, n'est jamais apparu comme une figure de courbure constante. Elle fait part de l'expérimentation d'une situation favorisant justement la prise en compte de la constance de la courbure du cercle et devant obliger les élèves à mettre en oeuvre cette conception du cercle. C'est la situation des disques expérimentée dans deux classes de CE₂.

Les élèves sont confrontés au problème suivant :

Ils disposent de plusieurs disques de tailles différentes, découpés suivant des secteurs eux aussi de tailles différentes. Un des disques est incomplet et les élèves doivent reconstruire le morceau manquant. Le compas n'est pas autorisé et, pour éviter un traitement perceptif du type puzzle, le secteur à construire est plus grand que tous les secteurs existants et n'est pas non plus réunion de plusieurs secteurs. Le carton fourni pour tracer le secteur manquant est trop petit pour pouvoir y poser le disque entier.

Diverses procédures de construction sont apparues et on peut penser que chacune d'elles est interprétée en terme de conception du cercle chez l'élève.

Excluons la procédure, I, consistant à reconstituer le disque incomplet, le poser sur le carton fourni, tracer les deux rayons délimitant le secteur manquant, placer dans l'ouverture le plus grand des morceaux puis terminer le tracé à main levée. I peut être interprétée comme conception primitive du cercle, figure fermée convexe.

Voici les trois procédures gagnantes observées et les conceptions les interprétant :

Procédures utilisées	Conceptions du cercle
<p>R : Procédure de rotation . Pour construire le morceau manquant, il suffit de faire tourner un morceau existant et de suivre la trajectoire du bord courbe.</p>	<p>Figure invariante par rotation autour de son centre</p>
<p>C : Procédure consistant à construire par juxtaposition de deux secteurs un morceau trop grand et à le réduire ensuite aux bonnes dimensions.</p>	<p>Figure de courbure constante (le bord courbe du secteur à construire a même courbure que les autres morceaux)</p>
<p>P : Procédure de tracé point par point du bord courbe du morceau manquant en reportant la longueur du bord droit d'un des secteurs donnés.</p>	<p>Ensemble de points à distance donnée d'un point fixe.</p>

La procédure *P* est longue et donne un tracé imprécis, ce qui la défavorise par rapport à *R* et *C*. La petite taille du carton fourni défavorise aussi théoriquement *R* par rapport à *C* (on ne peut en effet poser le disque entier sur le carton). En réalité, ont été observés des passages d'une procédure à une autre jusqu'à l'obtention d'une construction satisfaisant complètement l'élève.

Cet exemple montre qu'on peut essayer de repérer certaines régularités, certaines hiérarchies dans les procédures et dans les conceptions des élèves et

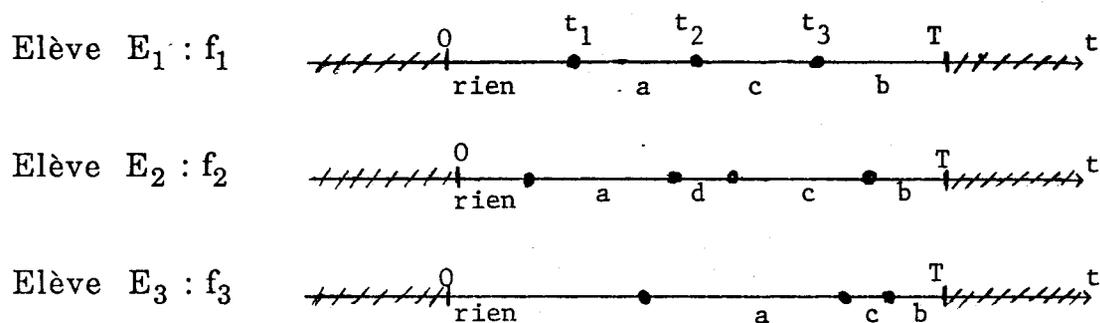
donc finalement tenter de traduire en états et changements d'états, dans un champ conceptuel donné, relativement à un processus didactique déterminé, les étapes de la construction des connaissances importantes par leur généralité et leur stabilité relatives.

III - ETUDE DU MODELE NAIF.

1°) Notion d'orbite et de champ pondéré.

Dans une classe, à chaque élève confronté individuellement à la résolution d'un problème au cours d'une séquence d'expérimentation de durée T , on associe une trajectoire f qui est une application de $[0, T]$ dans l'ensemble fini des modèles de résolution (ou des modèles d'états du sujet) répertoriés :

Exemple :

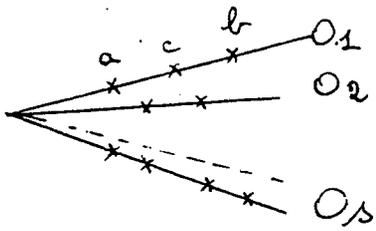


Les élèves E_1 et E_3 passent successivement par les mêmes états et dans le même ordre. Même si les changements d'états se font à des instants différents, on dira que les deux trajectoires f_1 et f_3 de ces élèves sont équivalentes et on appellera orbite toute classe d'équivalence pour cette relation d'équivalence.

Remarque. L'orbite à laquelle appartiennent f_1 et f_3 ou sur laquelle sont situés les élèves E_1 et E_3 peut être assimilée au mot acb écrit avec les lettres de l'alphabet de P . C'est une suite finie d'états du sujet.

On obtient donc une partition de la classe en un certain nombre s d'orbites. Soit \mathcal{O} l'ensemble des orbites, N le nombre d'élèves de la classe.

$$\mathcal{O} = \{O_1, O_2, \dots, O_s\}$$



n_1 : nombre d'élèves ayant suivi l'orbite O_1

n_2 : " " " " " O_2
 \vdots
 n_s : " " " " " O_s

$$\sum_{i=1}^{i=s} n_i = N$$

A cet ensemble \mathcal{O} d'orbites, on associe une pondération Q qui rendra compte de la fréquence respective des différentes orbites au sein de l'échantillon - classe et permettra l'étude des régularités au niveau des orbites.

q_i : fréquence de l'orbite O_i $Q = \{q_1, \dots, q_s\}$

$$\sum_{i=1}^s q_i = 1 \quad \text{et} \quad \forall i, q_i \neq 0.$$

On appellera champ pondéré \mathcal{E} associé à l'expérimentation l'ensemble \mathcal{O} ains pondéré.

$$\mathcal{E} = (\mathcal{O}, Q).$$

2°) Passage au collectif. Notion d'histoire de classe.

Le s -uplet (n_1, \dots, n_s) sera appelé : histoire de classe H à N élèves.

Exemple 1.

. $N = 20$ et $s = 4$.

Le quadruplet $(3, 4, 8, 5)$ est une histoire de classe à 20 élèves si 3 élèves ont suivi l'orbite O_1

4 " " " " O_2

8 " " " " O_3

5 " " " " O_4 .

Le nombre d'histoires possibles de classe est fonction
 et du nombre N d'élèves
 et du nombre s d'orbites.

Notons-le $\varphi(s, N)$. C'est une fonction croissante séparément par rapport à chacune de ses variables, mais beaucoup plus sensible aux variations du nombre d'orbites qu'à celles du nombre d'élèves.

Exemple 2.

$$\varphi(2, 20) = 20 + 1 = 21 \quad ; \quad \varphi(2, 30) = 30 + 1 = 31$$

$$\varphi(3, 20) = \frac{(20 + 1)(20 + 2)}{2} = 231$$

$$\varphi(1, N) = 1$$

$$\varphi(2, N) = N + 1$$

$$\varphi(3, N) = \frac{(N + 1)(N + 2)}{2}$$

Supposons N et s fixés et examinons les probabilités a priori d'apparition des différentes histoires possibles d'un échantillon aléatoire de N élèves.

On étudie un fonctionnement isolé (sans interactions) donc on peut considérer les N élèves comme indépendants. Il est par conséquent possible d'associer à la pondération Q du champ une loi de probabilité sur l'espace des histoires de classe à N élèves de \mathcal{E} qui est une loi multinomiale.

Exemple 3.

$$N = 20 \text{ et } s = 4$$

$$\text{orbite } \mathcal{O}_1 : n_1 = 3 \text{ et } q_1 = 0,2$$

$$" \quad \mathcal{O}_2 : n_2 = 4 \text{ et } q_2 = 0,3$$

$$" \quad \mathcal{O}_3 : n_3 = 8 \text{ et } q_3 = 0,4$$

$$" \quad \mathcal{O}_4 : n_4 = 5 \text{ et } q_4 = 0,1.$$

La probabilité de l'histoire de classe est :

$$\hat{Q}(((3, 4, 8, 5))) = \frac{20!}{3!4!8!5!} 0,2^3 \times 0,3^4 \times 0,4^8 \times 0,1^5$$

$$= 0,0014829$$

La probabilité de l'histoire de classe H est :

$$\hat{Q}_N((n_1, \dots, n_s)) = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_s!} \prod_{i=1}^s q_i^{n_i}$$

On démontre que :

- étant donnée une histoire de classe $H = (n_1, \dots, n_s)$, il existe une pondération unique pour laquelle *la probabilité de H est maximale*. C'est celle définie par :

$\forall i, q_i = \frac{n_i}{N}$, c'est-à-dire on peut associer à toute histoire de classe un champ et un seul qui maximise sa probabilité.

Exemples 3 (voir ci-dessus) et 4.

. $N = 20$ et $s = 4$

orbite $\mathcal{O}_1 : n_1 = 3$ et $q_1 = \frac{3}{20} = 0,15$	Pondérations qui
" $\mathcal{O}_2 : n_2 = 4$ et $q_2 = \frac{4}{20} = 0,2$	donnent à H la
" $\mathcal{O}_3 : n_3 = 8$ et $q_3 = \frac{8}{20} = 0,4$	probabilité
" $\mathcal{O}_4 : n_4 = 5$ et $q_4 = \frac{5}{20} = 0,25$	maximale

$$\hat{Q}(((3, 4, 8, 5))) = \frac{20!}{3!4!8!5!} (0,15)^3 \times (0,2)^4 \times (0,4)^8 \times (0,25)^5$$

$$= 0,012068$$

- Réciproquement, si un champ pondéré satisfait la condition : $\forall i, q_i N \in \mathbb{N}^*$, l'histoire qui lui est naturellement associée, $H_{\mathcal{Q}} = (N q_1, \dots, N q_s)$ est aussi celle de probabilité maximale.

Exemple 5.

. $N = 20$ et $s = 2$.

Soit $q_1 = 0,4$ et $q_2 = 0,6$. Supposons $n_1 = 7$ et $n_2 = 13$: $\hat{Q} = 0,165$.

L'histoire naturellement associée à cette pondération, c'est-à-dire celle de probabilité maximale, est : $(0,4 \times 20 ; 0,6 \times 20)$ soit $(8, 12)$ dont la probabilité est :

$$\hat{Q} = \frac{20!}{8!12!} 0,4^8 \times 0,6^{12} = 0,1797058.$$

De plus, cette probabilité est d'autant plus faible que l'histoire est plus équilibrée, c'est-à-dire que les écarts entre les q_i sont plus petits. On pourra comparer cette propriété à celle de l'entropie d'un système : l'histoire équilibrée est plus improbable, donc plus difficilement reproductible qu'une histoire où un état est dominant.

Exemples 5 (voir ci-dessus) et **6**.

. $N = 20$ et $s = 2$.

Soit $q_1 = 0,5$ et $q_2 = 0,5$.

Histoire $(10,10)$ dont la probabilité est : $\hat{Q} = \frac{20!}{10!10!} (0,5)^{10} \times (0,5)^{10} = 0,1761971$

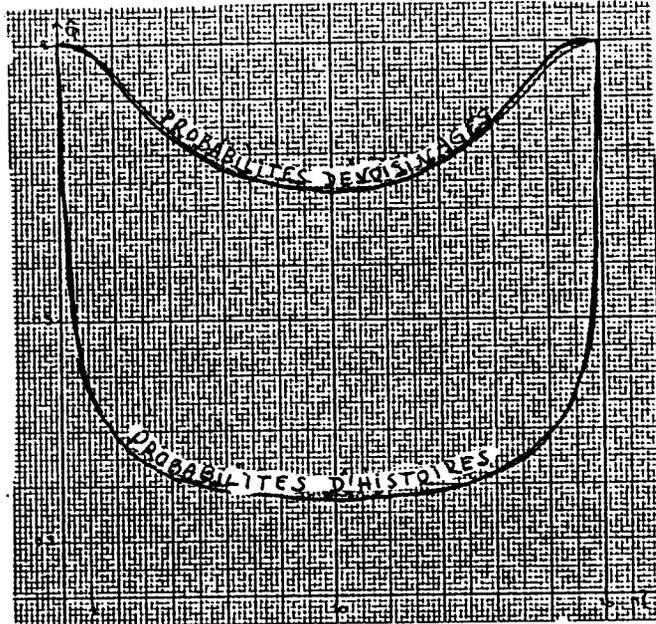
Les valeurs de ces mini-max décroissent quand N ou s croît et, de toutes façons, elles sont toujours faibles. De plus elles sont beaucoup plus sensibles aux variations du nombre d'orbites qu'à celles du nombre d'élèves, comme $\varphi(s, N)$.

(voir page suivante les graphiques des probabilités d'histoires).

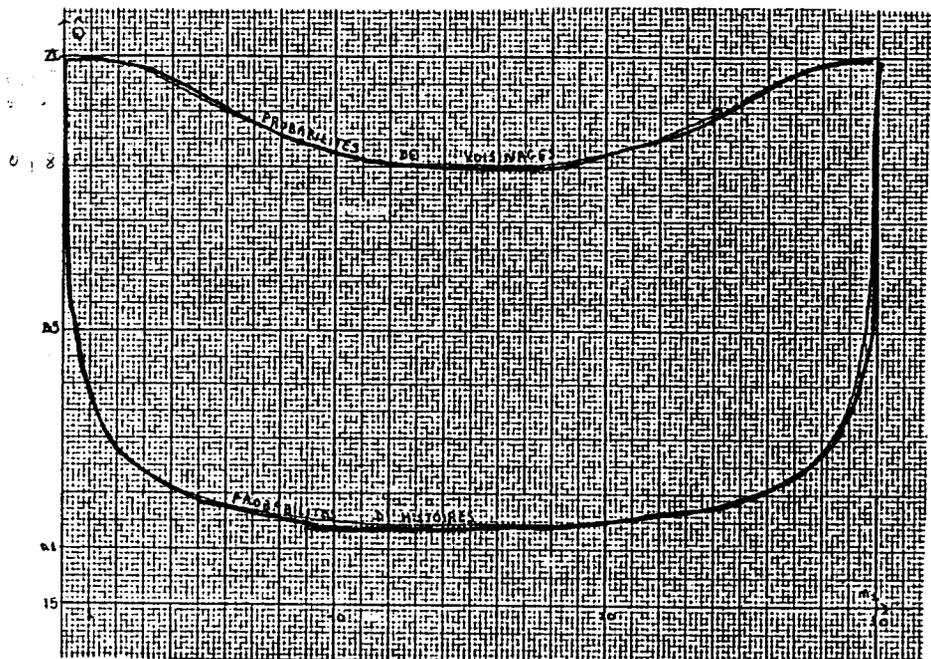
Pour si faibles que soient ces valeurs, ces probabilités ne mettent pas en défaut le modèle de façon pragmatique car on ne cherche pas à reproduire nécessairement une histoire précise mais on veut s'assurer que la probabilité de l'ensemble des histoires "proches" de l'histoire considérée est très grande.

Exemple 7.

Supposons que dans deux classes de 20 élèves nous ayons obtenu les histoires $(10,10)$ et $(9,11)$ ou $(11,9)$, et même $(8,12)$ ou $(12,8)$. Nous nous accorderons le droit, bien sûr, de dire qu'il s'est passé la même chose dans ces classes. Il n'en sera pas de même si l'on obtient $(16,4)$ par exemple.



GRAPHIQUE 1 : PROBABILITES POUR $N = 20, s = 2$



GRAPHIQUE 2 :
 PROBABILITES D'HISTOIRES ET DE VOISINAGES POUR
 $N = 30, s = 2$

Le problème se pose donc de définir une notion de "voisinage" dans l'ensemble des histoires de classe à N élèves.

3°) Une notion de voisinage sur l'ensemble des histoires de classe.

Nous allons munir l'espace des histoires de classe à N élèves situées dans un champ pondéré donné \mathcal{E} à s orbites d'une structure d'espace métrique. La notion de voisinage sera alors associée au choix d'un seuil pour la distance.

Pour être en accord avec le modèle, cette notion se doit de satisfaire les exigences suivantes (sans être trop stricte) :

1°) Il faut qu'elle respecte toute hiérarchie marquée d'orbites.

2°) Il faut que, si une orbite n'est pas complètement marginale dans une histoire, elle apparaisse aussi dans les voisinages de ses histoires voisines.

Distance de 2 histoires.

Choix fait (et justifié) par M. ARTIGUE : sup. des écarts des effectifs des différentes orbites.

$$H = (n_1, \dots, n_s) \quad H' = (n'_1, \dots, n'_s)$$

$$d(H, H') = \sup_{i \in [1, s]} |n_i - n'_i|$$

Exemple.

$N = 20$ et $s = 3$

$$H = (5, 7, 8)$$

$$H' = (9, 6, 5)$$

$$d(H, H') = \sup(|5 - 9|, |7 - 6|, |8 - 5|)$$

$$= \sup(4, 1, 3)$$

$$= 4 .$$

Seuil de distance pour définir la notion de voisinage.

$$d = \frac{\sqrt{N}}{2} \quad : \quad 2 \text{ pour } N \text{ proche de } 20$$

$$3 \text{ pour } N \text{ proche de } 30 .$$

Nombre de voisins d'une histoire donnée.

Ce nombre dépend encore du nombre s d'orbites et du nombre N d'élèves de la classe. Lorsque s (ou N) croît, il augmente lui aussi très rapidement.

Exemple.

$$. N = 20 \text{ et } s = 2$$

$$H = (10, 10)$$

$$\mathcal{V}(H) = \{(10, 10); (11, 9); (9, 11); (12, 8); (8, 12)\}.$$

4°) **Probabilités de voisinages d'histoires de classe.**

(cf. tableaux p. 14 extraits de l'article de R.D.M. de M. ARTIGUE).

Pour une pondération donnée, nous considérons l'histoire H_e canoniquement associée (celle qui a la probabilité maximale). Nous notons : $\mathcal{V}(H)$ son voisinage, $Q(H_e)$ la probabilité de H_e et $Q[\mathcal{V}(H_e)]$ celle de son voisinage.

$Q[\mathcal{V}(H_e)]$ est la somme des probabilités des histoires appartenant au voisinage de H_e .

Exemple.

$$. N = 20 \text{ et } s = 2$$

$$H = (10, 10)$$

$$Q(H) = 0,176$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}[\mathcal{V}(H)] &= \hat{Q}(\{(10,10)\}) + \hat{Q}(\{(11,9)\}) + \hat{Q}(\{(9,11)\}) + \hat{Q}(\{(12,8)\}) + \hat{Q}(\{(8,12)\}) \\ &= 0,176 + \frac{20!}{11!9!} 0,5^{11} \times 0,5^9 + \dots \\ &= \underline{0,737} \end{aligned}$$

Le fait de considérer des voisinages fait faire un bond spectaculaire aux probabilités, les probabilités de voisinages suivant néanmoins, en décalé, celles des histoires de classe c'est-à-dire étant d'autant plus faibles que le champ est plus équilibré ou le nombre d'orbites plus grand.

La reproductibilité n'étant pas associée à la capacité de reproduction d'une histoire précise mais à la possibilité d'assurer que presque toutes les histoires produites seront proches de celle-là, nous sommes conduits maintenant à poser la définition suivante de la reproductibilité.

5°) Reproductibilité.

Etant donné un champ pondéré $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, Q)$ à s orbites satisfaisant la condition : $\forall i \in [1, s], N Q_i \in \mathbb{N}^*$ pour des histoires de classe à N élèves, ce champ est dit reproductible au seuil α , α étant un réel fixé compris entre 0 et 1, si et seulement si $\hat{Q}[\mathcal{V}(H_{\mathcal{C}})] \geq 1 - \alpha$,

$H_{\mathcal{C}}$ étant l'histoire $(N q_1, \dots, N q_s)$ si $Q = (q_1, \dots, q_s)$.

n_1	10	11	12	13	14	15
$\hat{Q}(H_{\mathcal{C}})$	<u>.176</u>	.177	.180	.184	.192	.202
$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_{\mathcal{C}}))$	<u>.737</u>	.739	.747	.760	.780	.807

n_1	16	17	18	19	20
$\hat{Q}(H_{\mathcal{C}})$.218	.243	.285	.377	1
$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_{\mathcal{C}}))$.844	.894	.957	.984	1

TABLEAU 4 : PROBABILITES POUR $N = 20, s = 2$

n_1 désigne le nombre d'élèves dans l'orbite O_1 . Pour des raisons de symétrie évidentes, le tableau 4 ne mentionne que les valeurs de n_1 appartenant à $[10, 20]$.

n_1	15	16	17	18	19	20	21	22
$\hat{Q}(H_{\mathcal{C}})$.144	.145	.146	.147	.150	.153	.157	.163
$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_{\mathcal{C}}))$.800	.801	.804	.809	.816	.826	.839	.854

n_1	23	24	25	26	27	28	29	30
$\hat{Q}(H_{\mathcal{C}})$.170	.179	.192	.210	.236	.280	.374	1
$\hat{Q}(\mathcal{V}(H_{\mathcal{C}}))$.873	.895	.920	.948	.974	.987	.997	1

TABLEAU 5 : PROBABILITES D'HISTOIRE ET DE VOISINAGES POUR

$N = 30, s = 2$

Exemple. $\alpha = 0,1$.

Un champ est reproductible au seuil 0,1 si et seulement si $Q [\mathcal{V}(H_g)] \geq 0,9$, c'est-à-dire si et seulement si la fréquence d'apparition de l'histoire H_g et de ses histoires voisines est au moins égale à 90 %.

Autrement dit, dans 90 % des cas de classes, leurs histoires seront dans ce voisinage $\mathcal{V}(H_g)$.

Le seuil de reproductibilité α étant fixé, nous pouvons nous demander alors quelle valeur il faut donner au seuil de distance d , quelle tolérance sur la largeur du voisinage on peut s'accorder, ou encore quelles sont les histoires que nous devons considérer comme voisines d'une histoire donnée pour que le champ soit reproduit au seuil α .

Comment déterminer le seuil d de distance pour la définition des voisinages associé au seuil α de reproductibilité choisi ?

En examinant les graphiques (cf. page suivante) donnant les seuils de distance pour des champs pondérés à 2 orbites (ou le tableau dans le cas de 3 orbites) dans des classes de 20 ou 30 élèves, on s'aperçoit que pour des champs à 2 ou 3 orbites, la reproductibilité au seuil 0,1 n'est assurée que pour des champs admettant une orbite très fortement dominante, la situation s'améliorant légèrement si l'on descend au seuil 0,2, et plus on distingue d'orbites, plus la reproductibilité est difficile à assurer. Les résultats deviennent encore plus mauvais si on fait subir au champ pondéré de légères perturbations, de légères fluctuations.

Interprétation des graphiques 3 et 4 et du tableau 9 des pages suivantes.

$s = 2$

. $N = 30$. Pour que tous les champs soient reproductibles au seuil 0,1, il faut descendre jusqu'à $d = 4$, donc par exemple considérer (11,19) comme histoire voisine de (15,15), ce qui n'est pas très raisonnable.

Si on prend $d = 3$, ne sont reproductibles au seuil 0,1 que les histoires pour lesquelles une orbite draine au moins 25 élèves, donc pour lesquelles une orbite est fortement dominante.

Au seuil 0,2, tous les champs sont reproductibles pour $d = 3$.

. $N = 20$. Il faut $d = 4$ (par exemple (14,6) proche de (10,10)) pour que tous les champs soient reproductibles au seuil 0,1.

Si on prend $d = 2$, il faut au moins 18 élèves sur la même orbite !

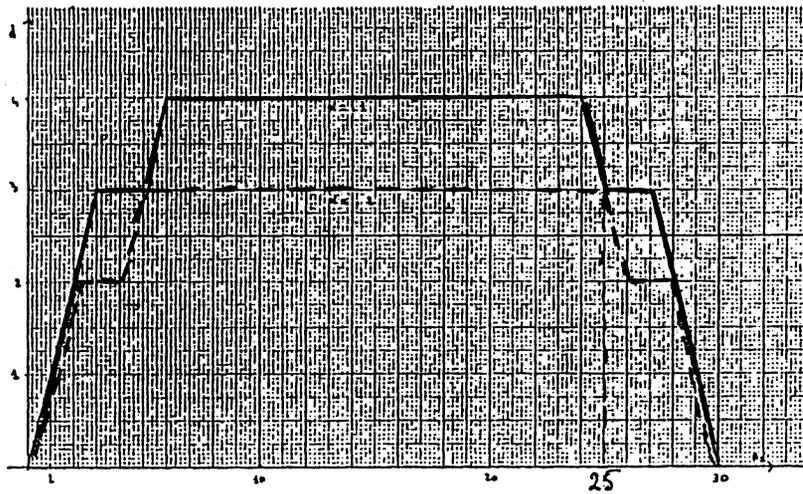
Pour $\alpha = 0,2$, il faut $d = 3$ pour que tous les champs soient reproductibles.

Si on prend $d = 2$, il faut au moins 15 élèves sur la même orbite.

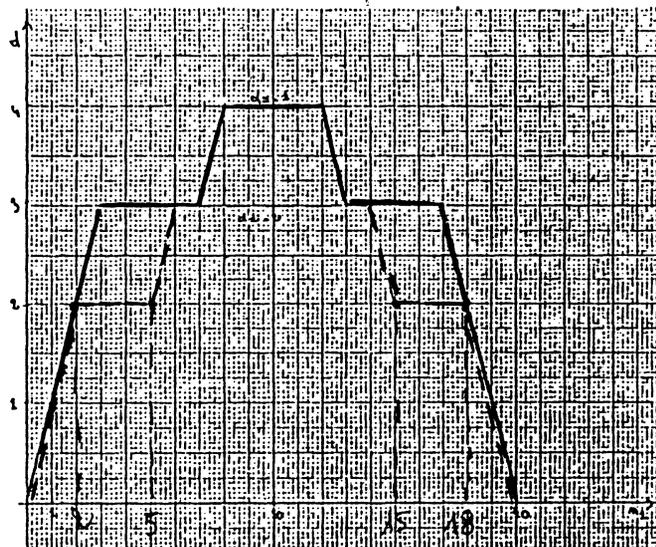
$s = 3$

. Pour $N = 20$ et $\alpha = 0,1$, il faut $d = 4$ pour que tous les champs soient reproductibles.

. Pour $N = 30$ et $\alpha = 0,1$, il faut $d = 5$ et donc considérer par exemple (7,17,6) et (11,8,11) comme proches de (12,12,6) ! On ne peut pas l'accepter.



Graphique 3 : Seuils de distance pour des champs pondérés à 2 orbites ($N = 30$) $\alpha = .1$, et $\alpha = .2$



Graphique 4 : Seuils de distance pour des champs pondérés à 2 orbites ($N = 20$) $\alpha = .1$, et $\alpha = .2$.

(q_1, q_2)	(.8,.1)	(.7,.2)	(.6,.3)	(.6,.2)	(.5,.4)	(.5,.3)	(.4,.4)	(.4,.3)
d $\alpha = .1$ $N = 20$	3	4	4	4	4	4	4	4
d $\alpha = .2$ $N = 20$	2	3	3	3	3	3	3	4
d $\alpha = .1$ $N = 30$	4	4	5	5	5	5	5	5
d $\alpha = .2$ $N = 30$	3	4	4	4	4	4	4	4

TABLEAU 9 : SEUILS DE DISTANCE POUR DES CHAMPS PONDERES
A 3 ORBITES (N = 20, N = 30, $\alpha = .1$ et $\alpha = .2$)

6°) Conclusion.

Finalement le modèle décrit et remplissant les conditions posées au départ pour qu'une situation soit "reproductible" n'est réellement adapté qu'au cas de situations où une seule orbite draine la quasi-totalité des élèves (classe idéale, parfaitement homogène). De manière générale, la taille de l'échantillon-classe semble trop faible pour que le passage de l'individuel au collectif par simple juxtaposition soit susceptible d'engendrer des régularités significatives et stables. On peut donc penser que les régularités que nous ne manquons pas d'observer dans nos classes et en particulier les régularités d'orbites sont indissociables d'interactions diverses (maître-élèves, élèves-élèves) et qu'on ne peut assurer la transmission des situations didactiques correspondantes en faisant l'économie de l'analyse du fonctionnement de ces interactions et de leur gestion. Mais comment faire au mieux cette analyse ?

M. ARTIGUE a repris une situation (celle des disques, déjà évoquée) qu'elle avait expérimentée dans une recherche antérieure et elle a fait l'étude de la dynamique de cette situation en utilisant, pour des raisons d'économie de la recherche, la méthodologie suivante :

1°) Elle a construit un modèle de la situation qui dépasse le modèle naïf, dans ce sens que :

- il met en lumière les régularités observées
- il indique comment, au sein de la classe, ces régularités ont été modulées par les divers phénomènes d'interaction.

2°) Elle a exploité au maximum le modèle construit en lui associant une famille de modèles quantitatifs et en explorant certains d'entre eux, en fonction de choix didactiques précis, par le biais de simulations sur ordinateur. Elle a donc fait des expérimentations fictives en grand nombre, qui ne sont pas là pour se substituer aux expérimentations réelles mais pour les économiser et les guider.

C'est cette modélisation que je vais vous présenter maintenant, mais plus brièvement.

IV - ETUDE DYNAMIQUE DE LA SITUATION DES DISQUES.

UNE TENTATIVE DE PRISE EN COMPTE DANS LA MODELISATION DES INTERACTIONS DANS LA CLASSE.

1°) Analyse de la situation.

Rappelons (cf. p. 6) qu'au cours de l'expérimentation de la situation des disques (faite dans deux classes où les élèves ont travaillé par équipes de 4, sans intervention du maître), diverses procédures de construction (caractères opératoires des conceptions du cercle) sont apparues : *I*, *R*, *C*, *P*. Appelons *E* l'état d'abandon et *A* l'état final de réussite.

Pour des raisons de commodité, on distinguera trois états suivant la procédure de construction terminale concernée et on les notera *AR*, *AC*, *AP* ; *I*, bien sûr, n'est pas une procédure gagnante.

A partir des observations faites, M. ARTIGUE essaie de construire une modélisation qualitative et une modélisation quantitative fondées sur la constatation banale que

la dynamique du système classe est déterminée par l'interaction de facteurs individuels et collectifs.

2°) Modélisation qualitative.

Selon le modèle naïf présenté précédemment, les régularités individuelles observées sont traduites en orbites, c'est-à-dire en successions d'états. Ceci a conduit au réseau qualitatif suivant :

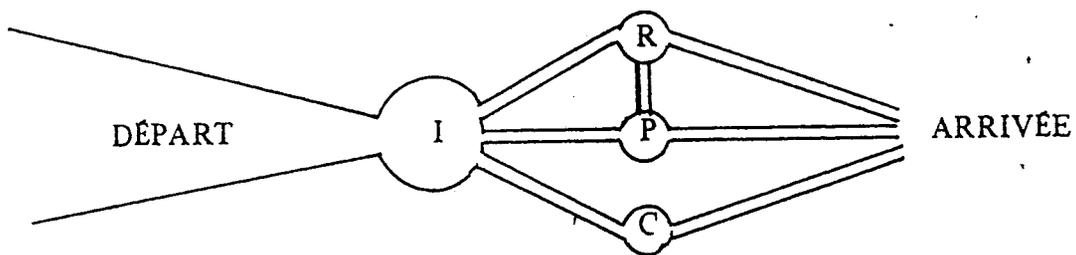
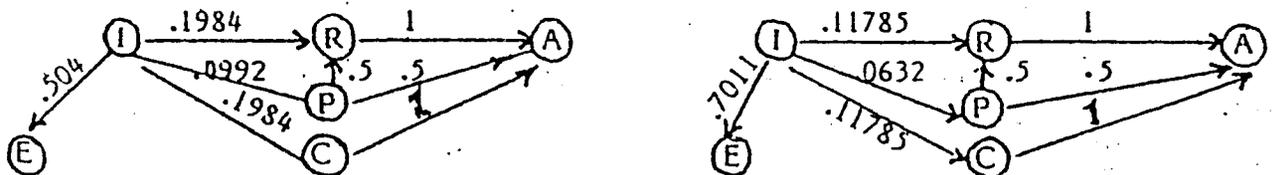


Schéma 1 : Réseau qualitatif associé à la situation des disques

engorgement en I, dû aux particularités de la situation (discontinue et fermée). Nous pouvons donc considérer I aussi comme l'état initial des classes.

et , quantitativement, au graphe pondéré suivant, quasi-réellement observé dans une classe. Les probabilités sont conditionnelles.

Au niveau du graphe G, ceci correspond aux pondérations suivantes :



GRAPHIQUE 9 : PONDERATIONS DU GRAPHE G

Les facteurs collectifs (interactions élèves-élèves) prennent essentiellement la forme de diffusion de procédures, diffusion qui peut être locale au niveau des équipes ou globale au niveau de la classe entière.

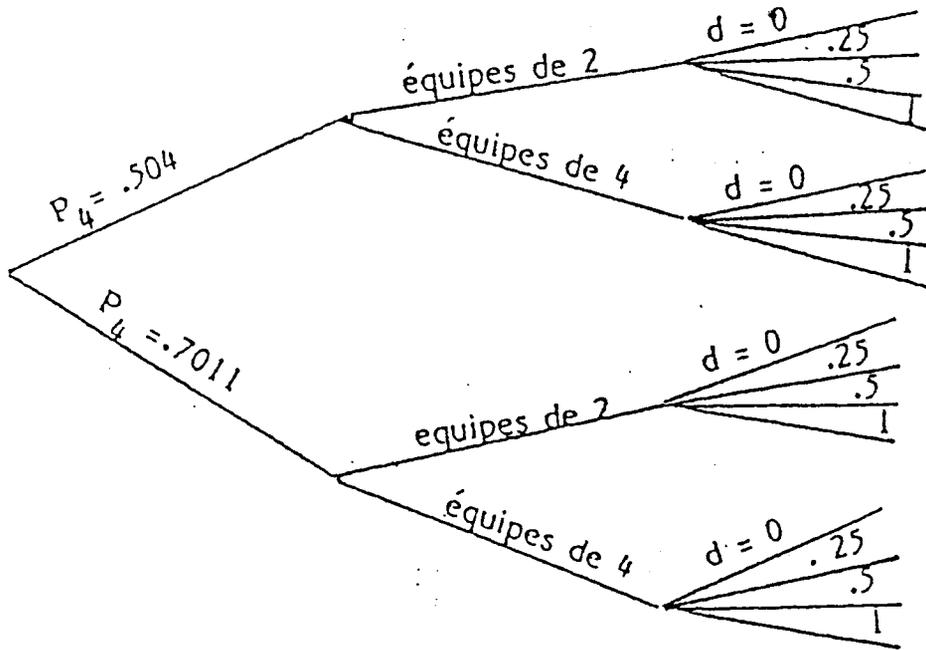
Les processus de diffusion sont schématisés par des règles précises (cf. annexe 1).

3°) Modélisation quantitative.

La modélisation qualitative précédente, même très schématique, dépend pourtant d'un nombre important de variables : probabilités intervenant dans la pondération du graphe, taille des équipes, temps d'exécution des procédures, nombre de répétitions possibles, valeurs des coefficients de diffusion. Un choix s'est avéré nécessaire. Au vu de l'analyse des observations, trois variables ont semblé déterminantes quant à la dynamique de la situation et ont donc été retenues :

- la probabilité d'abandon : 2 valeurs distinctes
 - 0,7 : véritablement observée dans une classe avant l'intervention du maître
 - 0,5 : volontairement plus optimiste
- la taille des équipes : 2 ou 4 élèves
- la valeur du coefficient de diffusion globale : 4 valeurs
 - $d = 0$ (c'est-à-dire diffusion locale seule)
 - $d = 0,25$; $d = 0,5$; $d = 1$ (c'est-à-dire diffusion globale automatique).

Au total, ceci correspond donc à 16 cas distincts que l'on peut résumer dans un arbre.



Graphique 10 : arbre des cas simulés.

4°) Les simulations du modèle et son étude théorique.

a) *Présentation.*

Dans chaque cas, 2 séries de 100 histoires (au total 3 200 histoires) pour des classes de 20 élèves ont été simulées sur micro-ordinateur en utilisant une méthode de Monte-Carlo pour simuler les probabilités de transition d'état.

Les traces des histoires sans diffusion, dites "histoires simples", correspondantes ont été conservées pour exercer un contrôle théorique sur les simulations.

Le programme de simulation fournit :

- pour chaque histoire :

- la succession des états de classe, élève par élève
- les états finaux correspondant à l'histoire simple et à l'histoire avec diffusion : (n_E, n_R, n_C, n_P)
- la durée de ces deux histoires
- la distance de l'histoire simple à l'histoire naturellement associée au graphe pondéré
- les blocages éventuels et leur durée.

- pour chaque série d'histoires :

- les moyennes et les répartitions des états finals de classe, des durées d'histoires, des distances des histoires simples à l'histoire naturellement associée au champ, des durées de blocage.

b) *Etude théorique des modèles.*

Nous nous restreignons à l'étude des états finals. Les calculs peuvent être faits à la main en utilisant les probabilités conditionnelles données.

- Histoires simples.

	NE	NR	NC	NP
Pondération 1	5,04×20	2,48×20	1,98×20	0,496×20
Pondération 2	7,01×20	1,49×20	1,18×20	0,316×20

Tableau 6 : Pondération des 2 champs associés aux modèles étudiés

L'état final de la classe naturellement associé au champ est :

dans le 1er cas : (10, 5, 4, 1)

dans le 2ème cas : (14, 3, 2, 1).

- Histoires avec diffusion locale par équipes de 2.

10 équipes dont les états finals possibles sont :

$2E, 2AR, 2AC, 2AP, \{AR, AC\}, \{AR, AP\}, \{AC, AP\}$.

Il s'ensuit pour le vecteur aléatoire (NE, NR, NC, NP) les espérances suivantes où, par exemple, NE est le nombre d'élèves dans l'état E .

	NE	NR	NC	NP
Pondération 1	5,08	7,71	5,97	1,24
Pondération 2	9,83	5,31	4,01	0,854

Tableau 7 : Probabilités des états finals d'équipe en diffusion locale par équipes de 2 élèves.

Les états finals de classe les plus proches de ces valeurs sont :

(5, 8, 6, 1) pour la pondération 1

et (10, 5, 4, 1) pour la pondération 2.

c) *Données des simulations.*

. Moyennes pour les états finaux sur 200 simulations pour chacun des 1 cas. (cf. Annexe 2).

Des régularités importantes apparaissent :

- il y a coïncidence entre les histoires simples théoriques (respectivement histoires où $d = 0$) associées aux deux pondérations et les histoires simples simulées ;

Similarité théorique - simulé

- la diffusion, même simplement locale, diminue fortement les probabilités d'abandon ; leur moyenne tombe approximativement de 10 à 5 (équipes de 2) et à 1,5 (équipes de 4) pour la pondération 1 et de 14 à 10 (équipes de 2) et 5 (équipes de 4) pour la pondération 2 ;

- les différences suivant la pondération et la taille des équipes, importantes au niveau de la diffusion locale, s'estompent lorsque le coefficient de diffusion globale augmente ;

- la diffusion se fait davantage au profit de *AR* que de *AC*, et ce d'autant plus que le coefficient de diffusion augmente.

. Répartitions des états finals.

S'il apparaît difficile de garantir que les états finals de classe que l'on peut observer dans la réalité se situeront au voisinage de l'état final moyen, par contre on voit poindre des régularités à un autre niveau : celui des structures d'histoires.

Définissons une histoire à état dominant comme une histoire dans laquelle une des composantes de l'état final draine plus de 70 % des élèves. Dès que la diffusion n'est plus simplement locale, de telles histoires deviennent majoritaires.

Il faut noter de plus que, vis-à-vis de ce type de régularités, les situations ne sont pas équivalentes. On a une hiérarchie marquée à diffusion égale, non nulle :

Equipes de 2 > Equipes de 4 > Equipes de 2 > Equipes de 4
Pondération 2 > Pondération 2 > Pondération 1 > Pondération 1

Examinons maintenant la dynamique vers les états finals.

La question est de savoir si, au cours de l'évolution vers l'histoire finale, il n'y a pas eu des états intermédiaires inacceptables en réalité. Deux variables sont à contrôler pour cela : les "blocages" et les "longueurs d'histoires".

. Etats intermédiaires : blocages – durées.

Blocages. La classe est dite bloquée à un instant donné si plus du tiers des élèves est dans l'état E à cet instant.

Le calcul des blocages selon chaque simulation montre qu'il existe toujours des blocages dans une fraction des diffusions. Par exemple, si l'on veut que 90 % des classes aient des durées de blocage inférieures ou égales à 10 minutes, il faut que la diffusion globale devienne importante ($d = 0,25$ ou plus pour des équipes de 4 et $d = 0,5$ pour des équipes de 2 avec la pondération 1). Le système, hors intervention du maître, n'est viable que si la diffusion globale peut exister.

Durées des histoires (calculables à partir des pondérations en probabilités).

Une histoire simple dure moins de 45 minutes.

Il y a similarité encore entre théorique et simulé pour les histoires simples.

Si l'on s'intéresse aux histoires avec diffusion, les durées d'histoire varient de 45 minutes à 70 minutes. Quand le coefficient de diffusion croît, la longueur moyenne des histoires diminue même si elle reste toujours supérieure à la longueur moyenne des histoires sans diffusion mais ceci n'est pas dramatique car, au bout de 60 minutes, tous les élèves sont engagés dans leur procédure de résolution définitive.

"Dans ces conditions, que le maître choisisse, s'il le juge nécessaire, de poursuivre l'activité quelques minutes ou qu'il l'interrompe est un choix qui, didactiquement, semble de peu d'importance par rapport à celui qui présidera à la gestion des blocages. En effet, un blocage prolongé oblige le maître à prendre une décision qui, nécessairement, modifiera essentiellement les caractéristiques didactiques de la situation et fera bifurquer brutalement sa dynamique" (M. ARTIGUE).

Des deux variables, blocage et durée, c'est la première qui, dans cette situation, est déterminante.

En résumé, à quel niveau se situent les régularités de la dynamique de la situation ? Deux phénomènes sont essentiels ici :

- la forte probabilité de structures à état dominant ; lorsque la diffusion globale a un coefficient élevé, la reproductibilité est à chercher dans les structures d'histoires et non dans les histoires elles-mêmes.
- la forte probabilité d'existence de blocages que la simple diffusion locale ou une diffusion globale à faible coefficient ne permettent pas de surmonter en un temps compatible avec les exigences scolaires.

Ainsi, dans cette dynamique, le maître joue un rôle essentiel. Il est un acteur décisif de la reproductibilité.

V - CONCLUSION.

Il est bien évident que de nombreuses questions restent en suspens, tout en demeurant dans le champ de la problématique de la reproductibilité.

Tout d'abord, volontairement, M. **ARTIGUE** a fait silence sur le contenu des interventions du maître.

Son rôle actif, comme on vient de le voir, se réduit, dans la présentation qu'en fait la thèse, à l'interruption des blocages de la classe. Mais, d'une part, on se doute bien que le changement de dynamique qui s'ensuit dépend de la nature et du contenu de cette intervention ; d'autre part, on peut se demander ce que nature et contenu deviennent ou ce qu'ils sont dans une situation d'apprentissage (et non plus dans une situation-problème).

Comment le maître exerce-t-il son contrôle dans une telle situation, comment prend-il ses décisions ? Comment évolue le processus en fonction de celles-ci . La question de reproductibilité garde-t-elle son sens, dans quelles limites et à quel prix ? Quelle modélisation peut-on en donner ?

De plus, la caractérisation des "états de connaissance" et éventuellement la prise de décision afférente dépendent de la fidélité de l'isomorphisme entre les indicateurs que nous fournissent les "observables" et les états inférés à partir de ceux-ci (exemple : conceptions et procédures inférées à partir des produits).

N'y aurait-il pas lieu alors d'examiner cette relation entre deux ensembles, à travers la théorie de l'information et considérer à la fois l'entropie liée à l'observation et l'entropie liée à la caractérisation de l'état supposé réel du sujet, ou tout au moins l'état inféré à partir de ses indicateurs.

La recherche obstinée du maître vers l'homogénéité de la classe ne consiste-t-elle pas à réduire l'entropie de l'ensemble des orbites sur lesquelles s'engagent les élèves ?

ANNEXE 1 : REGLES DE DIFFUSION

On distingue au sein de la classe deux sortes de diffusion :

- une diffusion locale au niveau des équipes
- une diffusion globale au niveau de la classe.

Elles obéissent aux règles suivantes :

- * Le changement de procédure par diffusion ne se produit qu'en fin d'exécution de procédure et uniquement en cas d'échec.
- * Seules peuvent diffuser des procédures gagnantes achevées.
- * La diffusion locale est automatique. Elle se fait au profit de la procédure Q ayant, à l'instant considéré, le plus fort coefficient N_Q (N_Q désigne le nombre d'élèves de l'équipe dans l'état AQ). En cas d'égalité de coefficients on respectera l'ordre : $R > C > P$.
- * La diffusion locale a priorité sur la diffusion globale.
- * Il existe un coefficient de diffusion globale " d ", $0 < d < 1$. La diffusion globale d'une procédure Q , à un instant donné, n'est possible que si $M_Q \cdot d > 1$ (M_Q désignant le nombre d'élèves de la classe dans l'état AQ). Ainsi plus d est petit, plus le nombre d'élèves nécessaire pour assurer la possibilité de diffusion de Q est élevé.
- * La diffusion globale obéit aux mêmes règles de priorité que la diffusion locale modulo le remplacement du coefficient N_Q par le coefficient $M_Q \cdot d$.

ANNEXE 2 : MOYENNES POUR LES ETATS FINALS.

Elles sont fournies par le tableau 8.

d		Pondération 1 Équipes de 2		Pondération 1 Équipes de 4		Pondération 2 Équipes de 2		Pondération 2 Équipes de 4	
		HS	HD	HS	HD	HS	HD	HS	HD
0	NE	10.165	5.190	10.115	1.360	13.845	9.420	13.915	4.680
	NR	4.865	7.575	4.845	10.085	3.000	5.420	3.010	8.195
	NC	3.920	5.920	4.030	7.135	2.445	4.225	2.460	6.115
	NP	1.050	1.315	1.010	1.420	0.710	0.935	0.625	1.010
.25	NE	9.890	0.000	9.945	0.000	13.860	1.330	14.095	0.000
	NR	5.08	11.665	5.210	12.140	2.985	11.065	2.975	11.970
	NC	4.040	7.120	3.905	6.635	2.520	6.740	2.370	7.090
	NP	0.990	1.215	0.940	1.225	0.635	0.865	0.560	0.940
.5	NE	10.015	0.000	10.025	0.000	13.890	0.000	14.140	0.010
	NR	4.840	12.970	4.860	12.625	2.825	11.565	2.970	12.920
	NC	4.055	5.88	4.105	6.140	2.670	7.530	2.235	5.975
	NP	1.090	1.150	1.010	1.235	0.615	0.905	0.655	1.005
1	NE	10.245	0.000	10.010	0.000	13.815	0.000	14.090	0.000
	NR	4.875	13.755	4.905	13.445	3.070	13.970	3.095	14.395
	NC	3.915	5.255	4.115	5.500	2.525	5.160	2.305	4.775
	NP	0.965	0.990	0.970	1.055	0.590	0.870	0.510	0.830

Tableau 8 : Moyennes d'états finals