CLAUDE COMTE

Sur quels principes peut-on édifier une mécanique vraiment rationnelle ?

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1987-1988, fascicule 2
« Science, histoire et société », , p. 67-105
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1987-1988___2_67_0>

SUR QUELS PRINCIPES PEUT-ON EDIFIER UNE MECANIQUE VRAIMENT RATIONNELLE ?

Claude COMTE

REHSEIS (E.R. 318 du CNRS), Université PARIS VII, 2 Place Jussieu
75 257 PARIS Cédex 05

INTRODUCTION

Il est aujourd'hui assez largement reconnu que les relativités galiléenne et einsteinienne relèvent d'un même ensemble d'idées; leur pleine compréhension exige en effet que l'on considère dans toute son ampleur le rôle que jouent les principes de symétrie en physique. La prise de conscience du rôle de premier plan que jouent ces principes a nécéssité une longue maturation dans l'histoire des sciences. Jusqu'au début de ce siècle, on s'est borné à constater l'invariance d'un sous-ensemble de lois de la physique sous l'action d'un groupe de transformations spatio-temporelles: ainsi les lois de la mécanique newtonienne sont invariantes par la transformation de Galilée, tandis que les équations de Maxwell du champ électro--magnétique sont invariantes par la transformation de Lorentz-Poincaré. L'étude réciproque qui consiste à rechercher la forme des lois compatibles avec des principes de symétrie, est plus récente.

Einstein, dans l'article de 1905 intitulé "Sur l'électrodynamique des corps en mouvement" utilise explicitement le principe selon lequel toutes les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen (principe de Relativité), pour établir la forme des lois de transformation des coordonnées d'espace-temps d'un référentiel galiléen à un autre; pour cela, il utilise en plus le principe d'invariance de la vitesse de la lumière.

2

A propos des lois de conservation en mécanique, Emmy Noether (mathématicienne allemande, 1882-1935, fille du mathématicien Max Noether; elle avait donné en 1907 une thèse importante sur les invariants algébriques) établit un théorème qui stipule ceci: à toute transformationqui laisse invariante l'action lagrangienne ou les équations d'Hamilton, correspond une quantité qui est une constante du mouvement; l'invariance sous un groupe de Lie à N dimensions entraîne N lois de conservation indépendantes: ainsi l'invariance par translation spatiale entraîne la conservation de la quantité de mouvement P, et l'invariance par translation dans le temps entraîne la conservation de l'énergie E. Ce théorème est actuellement d'une importance capitale en physique théorique, tant par son application à la mécanique quantique qu'à la théorie quantique des champs et aux théories d'invariance de jauge. Il permet également de formuler la théorie de la mécanique classique avec le plus d'unité et de simplicité, comme le font L.Landau et E.Lifchitz dans leur célèbre cours de physique théorique, dont on ne saurait trop conseiller la lecture.

Cependant, les travaux ci-dessus font appel à d'autres principes que les seuls principes de symétrie: le principe d'invariance de la vitesse de la lumière dans l'article d'Einstein, et le principe de moindre action de Maupertuis-Euler-Lagrange-Hamilton dans l'énoncé du théorème de Noether. La question surgit de savoir si ces principes supplémentaires sont indispensables: **les principes de symétrie n'auraient-ils pas une portée encore plus grande ?** Une telle question n'est pas académique: si nos théories se trouvaient un jour infirmées par des expériences nouvelles, on aurait évidemment tort d'incriminer des principes superflus. Il est crucial de poursuivre l'objectif de ramener les théories existantes au minimum de principes, en ajoutant, d'un point de vue de physicien, que **les principes énoncés doivent être susceptibles d'une vérification expérimentale directe.** De plus, la réduction de la mécanique classique au minimum de principes devrait ouvrir une voie d'accès originale à la mécanique quantique, théorie englobante, par suppression d'un ou plusieurs principes.

Il est aujourd'hui bien établi que le principe d'invariance de la vitesse de la lumière n'est pas indispensable pour fonder la théorie de la relativité: cela a été vu dès 1911 par Ignatowski et Rothe, et est périodiquement redécouvert par différents chercheurs. En ce qui concerne la mécanique, le principe de moindre action fournit à ce jour le maximum de cohérence; son efficacité le fait régner sans partage sur la théorie de la mécanique constituée en un corps de doctrine autour de lui. Cependant, cette efficacité semble bien redoutable d'un point de vue de physicien, car le principe de moindre action ne peut être établi directement comme un fait d'expérience, mais seulement vérifié indirectement à travers la concordance des lois du mouvement qui en découlent avec la réalité des mouvements observés. J'ai délibérément pris le parti de me passer de ce principe. Au cours de mes recherches, lorsqu'il s'est agi d'établir l'expression de la vitesse v en fonction de la "rapidité" x (voir en deuxième partie, au paragraphe composition des vitesses), j'aurais pu aveuglément faire usage de la première équation d'Hamilton, qui aurait immédiatement fourni le résultat v=tangh x (par **v=dE/dP**,à partir des expressions E=cosh x pour l'énergie et P=sinh x pour l'impulsion); il était beaucoup plus gratifiant d'établir ce résultat par l'argument exposé dans cet article, lequel fait seulement appel à un principe de symétrie,**l'isotropie de l'espace.** C'est le succès de cette tentative qui au cours de mes travaux m'a amené à penser que le principe de moindre action n'était pas si indispensable qu'il paraissait; encore fallait -il que je parvienne à comprendre autrement l'existence de lois de conservation en mécanique, que par le théorème de Noether, où le principe de moindre action est primordial, et les principes de symétrie subordonnés.

Le problème de l'existence de lois de conservation est étudié dans la première partie de cet article, d'une manière originale prenant en compte les évolutions qui sortent du cadre du déterminisme classique de Laplace. Atitre d'illustration, on peut se représenter des phénomènes de collisions multiples en mécanique classique, dans lesquels des variations infimes des conditions initiales se traduisent par de larges variations de l'état résultant des interactions, ou bien des collisions entre objets ayant des

4

impulsions bien déterminées en mécanique quantique, lesquels sont par essence aléatoires. Il existe une autre manière de comprendre l'origine de lois de conservation dans un système dont les constituants interagissent d'une façon complexe, par exemple un gaz dont les molécules effectuent de nombreuses collisions élastiques entre elles. Pour cela, faisons une étude **phénoménologique** d'une collision de deux particules, le cas le plus simple: en physique classique, pour des vitesses initiales fixées en grandeur et en direction, l'issue de la collision sera très variable et aléatoire selon la valeur du paramètre d'impact, qu'il est impossible de controler expérimentalement avec toute la précision nécéssaire pour obtenir une issue déterminée, lorsque les particules et les portées des forces d'interaction sont très petites; en physique quantique, l'"indéterminisme" résulte d'une manière plus essentielle du fait que les notions d'impulsion et de coordonnée spatiale n'ont pas de sens simultanément, ce qu'expriment les relations d'"indétermination" de Heisenberg $\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$. Cependant, tant en physique classique que quantique, lorsque seules les impulsions initiales P_1 et P_2 sont bien fixées, l'expérience montre, et c'est là le fait important, que les impulsions de sortie P_1' et P_2', pour variables qu'elles soient d'une répétition de l'expérience à l'autre, ne sont pas pour autant totalement arbitraires; en d'autres termes, **il existe des restrictions sur les états de mouvement possibles des particules à l'issue de la collision.**

Posons donc simplement comme **principe que l'issue de la collision n'est pas...n'importe quoi !** On démontre que les relations exprimant ces restrictions prennent nécéssairement la forme de lois de conservation si l'on suppose que l'étendue des impulsions de sortie possibles comprend le cas particulier où celles-ci sont identiques aux impulsions d'entrée (c'est ce qui se produit par exemple lorsque des boules de billard s'effleurent très légèrement): la **microréversibilité** d'une collision élémentaire apparait ainsi comme une conséquence de l'existence de "restrictions" et de cette dernière hypothèse physique.

Dans la deuxième partie, nous analysons les contraintes imposées à la forme des lois de conservation par le seul fait que celles-ci ne doivent pas subir de variation lorsqu'on passe à une situation équivalente par déplacement à l'intérieur d'un référentiel galiléen, par changement de date, ou bien lors du passage à un autre référentiel galiléen. Il est équivalent de déplacer l'expérience ou d'effectuer le déplacement inverse du point de vue d'observation. Les contraintes d'invariance traduisent donc à la fois la reproductibilité des phénomènes physiques et l'existence de points de vue équivalents sur le monde. Nous démontrons que le principe de "restrictions" et les invariances galiléennes ne laissent place qu'à un cadre de lois de conservation **unique au choix d'une constante c près,** qui s'interprète comme la vitesse maximum de la propagation de l'énergie. La mécanique einsteinienne correspond à une valeur finie de cette constante, tandis que la mécanique newtonienne correspond à la limite où c tend vers l'infini. On peut dire qu'il existe un groupe de transformations défini par l'énoncé des invariances galiléennes, et dont la forme mathématique explicite est révélée d'une manière particulièrement simple par l'étude directe des lois de conservation: c'est le groupe de Lorentz lorsque c est fini, et le groupe de Galilée lorsque $c \to \infty$. Ainsi, l'existence d'une vitesse limite c n'est pas un postulat indépendant,mais se déduit de la théorie comme une constante structurelle, universelle, dont la valeur ne peut être donnée que par l'expérience. Cette constante structurelle est analogue à la courbure des géométries non-euclidiennes; dans l'esprit du Programme d'Erlangen de Felix Klein, la valeur de ce paramètre permet de distinguer différents groupes d'invariance des propriétés des figures géométriques par déplacement dans l'espace. La reformulation de la mécanique proposée dans cet article comprend la **géométrisation de la conservation de l'énergie,**dont l'existence et la forme sont déduites de principes essentiellement géométriques, l'isotropie de l'espace et le principe de relativité.

6

Il est donc possible de retrouver les conclusions du théorème de Noether en substituant au principe de moindre action un autre principe dont l'évidence repose sur des faits expérimentaux bien établis: tout le monde sait bien que l'état final, pour des conditions initiales données **avec autant de précision que possible,** est susceptible de varier plus ou moins lorsqu'on répète une expérience,mais n'est **jamais totalement arbitraire;** autrement on verrait, par exemple, un corps libre et au repos se mettre spontanément en mouvement sans changement de son état interne. Par convention, on pourrait appeler **"principe de multidéterminisme"** le nouveau principe, **par opposition au déterminisme de Laplace qui n'envisageait qu'une détermination unique de l'état final en fonction de l'état initial.** On n'a aucune peine à concevoir qu'en-dehors du "multidéterminisme" le monde serait un chaos total, car l'issue de toute interaction serait totalement arbitraire et absolument imprévisible, même en termes de probabilités. Il est sans doute préférable de fonder la mécanique sur un principe d'existence de restrictions, qui ne préjuge nullement de la forme de ces restrictions, et qui, à l'opposé du principe de moindre action, ne présuppose aucun schéma particulier d'organisation de la nature. En effet, au lieu de prétendre que les mouvements ont toujours lieu de telle sorte qu'une certaine quantité, l'action, soit minimale, on pose un principe au contenu beaucoup plus modeste, car il dit seulement ce que le monde n'est pas: le chaos total. Et il est ensuite tout-à-fait satisfaisant de constater que les lois de conservation de la mécanique découlent logiquement des principes de symétrie, dès lors que le monde n'est pas un chaos total, et que leur forme est indépendante à la fois de la nature des objets et des interactions; l'identité de ces lois en physique classique et en physique quantique apparait ainsi comme une nécéssité logique.

I EXISTENCE DE GRANDEURS CONSERVEES

Considérons un système physique soustrait à toute action extérieure, séparable en N parties décrites par les grandeurs x_i ,où i=1 à N, qui caractérisent aussi bien l'état mécanique (vitesse, position) des différentes parties, que le type différent de matière constituant chaque partie, supposée homogène, ainsi que son état interne. Sous l'effet des interactions, l'état mécanique et la structure matérielle du système évoluent des valeurs x_i ,i=1 à N, dans l'état initial aux valeurs x'_j, j=1 à N' dans l'état final. Dans le présent article, nous nous restreignons à la seule considération des processus classiques présentant le plus d'analogie avec certains processus quantiques: les objets sont en mouvement libre longtemps avant et longtemps après leurs interactions mutuelles, et tout comme dans les processus d'interaction entre particules élémentaires que décrit la théorie quantique des champs, les x_i comprennent, à côté des variables caractérisant la structure matérielle, exclusivement des paramètres de vitesse. Nous reprenons ainsi, sous une forme moderne et plus générale, le problème posé par Descartes, et résolu par Huyghens et Leibniz, de l'existence de grandeurs conservées dans les collisions élastiques, par exemple des boules de billard qui s'entrechoquent. On peut définir les collisions élastiques comme des processus d'interaction où la structure matérielle et l'état interne des corps ne changent pas: on a N = N', et comme on le fera voir dans cet article, les variables x_i comprennent en-dehors de la vitesse un seul paramètre caractérisant la structure matérielle de chaque corps, la **masse, dont l'existence ne sera pas postulée mais déduite.** Cependant la reformulation proposée permet d'envisager aussi bien des processus où le nombre et la nature des objets varient: désintégrations, transmutations, etc...; par exemple lors de l'annihilation d'une paire électron-positron avec émission de trois photons, on a N = 2 et N'= 3 ; lors de la coalescence de deux corps dans le choc mou en mécanique classique, on a N=2 et N'=1, et il faut tenir compte de la modification de l'état interne des corps lorsque leurs vitesses s'égalisent sous l'effet du frottement.

L'objectif est à présent de démontrer que les modes d'évolution d'un système, lorsque seules les vitesses initiales x_i sont fixées et que la mesure des conditions finales porte uniquement sur les vitesses x'_j, sont restreintes, indépendamment du type particulier de leurs interactions, par un ensemble de relations de la forme:

$$(1) \qquad F_k(\ldots x_i \ldots) = G_k(\ldots x'_j \ldots) \qquad k = 1, \ldots, \nu$$

où i=1 à N, j=1 à N', $\nu < N$, $\nu < N'$, et qui constituent ν liaisons indépendantes entre les variables de sortie x'_j pour une entrée x_i donnée, ou bien inversement ν liaisons entre les variables d'entrée pour une sortie x'_j donnée. Ces relations peuvent être considérées comme la conservation de ν grandeurs indépendantes dont l'expression est donnée par les fonctions F(x) dans l'état initial et G(x') dans l'état final.

L'expérience justifie les hypothèses physiques suivantes, que l'on peut convenir de regrouper sous le nom de principe de **multidéterminisme:**

(i) Si l'on répète un grand nombre de fois une expérience particulière pour des conditions initiales x fixées, on trouvera des valeurs finales x' variables sans être totalement arbitraires (ensemble E'(x)).

(ii) **Inversement, un état final x' particulier pourra être obtenu à partir de conditions initiales très variables sans être totalement arbitraires** (ensemble E(x')).

(iii) **Tous les états finaux E'(x) accessibles à partir d'un état initial x donné, le sont également à partir des <u>mêmes</u> états initiaux E ;** autrement dit, l'un quelconque des états de E évolue vers l'un quelconque des états E', ou bien l'antécédent de l'un quelconque des états de E' est l'un quelconque des états E. On a donc une détermination unique de l'ensemble E' pour un ensemble E donné. Le déterminisme laplacien pur correspond au cas particulier où ces deux ensembles se réduisent à un seul élément; ce cas n'a jamais lieu pour les objets quantiques, et se présente exceptionnellement en mécanique classique dans les systèmes qui ne manifestent pas le phénomène de sensibilité aux conditions initiales

(dans le cas de N corps célestes interagissant par la force d'attraction universelle de Newton, la sensibilité aux conditions initiales a lieu pour $N > 2$)

Démonstration:

Les liaisons entre les grandeurs x'_j pour des conditions initiales x_i fixes s'expriment en toute généralité par ν' relations indépendantes contenant ζ' constantes F_k :

$$(2) \qquad 0 = C_\alpha (x'_j , F_k)$$

où $\alpha = 1$ à ν', $j=1$ à N', $k=1$ à ζ'. Les constantes F_k sont fonction de l'état initial x_i. Toute l'information sur l'état initial est mémorisée dans l'état final par ces constantes indépendantes, dont le nombre ne saurait être supérieur au nombre de degrés de liberté du système dans son état initial:

$$(3) \qquad F_k = F_k (x_i)$$

où $k=1$ à ζ', et $\zeta' \leqslant N$. On peut dire que toute la variété des états finaux E' définis par les équations (2) est accessible à partir de l'un quelconque des états initiaux parmi la variété V définie par les équations (3).

Inversement, les liaisons entre les variables x_i pour un état final x'_j donné s'écrivent sous la forme de ν relations indépendantes contenant ζ constantes indépendantes G_ℓ :

$$(4) \qquad 0 = C'_\beta (x_i , G_\ell)$$

où $\beta=1$ à ν , $i=1$ à N, $\ell=1$ à ζ ; les constantes G_ℓ dépendent de l'état final:

$$(5) \qquad G_\ell = G_\ell (x'_j)$$

où $\ell=1$ à ζ , et $\zeta \leqslant N'$. Ces relations sont les équations de la variété V' des états finaux correspondant aux états initiaux E solutions des équations (4).

D'après l'hypothèse (iii) les variétés E et V d'une part, E' et V' d'autre part, coïncident; les systèmes d'équations (2) et (5) d'une part, (3) et (4) d'autre part, sont donc équivalents. Il s'ensuit que ces équations sont en nombre égal ($\nu' = \xi$ et $\nu = \xi'$) et que la correspondance entre les ensembles de constantes F_k, k=1 à ξ', et G_l, l=1 à ξ, est **biunivoque**; ces constantes sont donc nécéssairement en nombre égal ($\xi = \xi'$), et l'on peut toujours les rendre identiques par une transformation appropriée des équations (2) ou (4) en équations equivalentes. Les équations d'un processus obéissant au principe du multidéterminisme prennent donc nécéssairement la forme (1).

<u>Remarques</u>:

a) **Interactions conservant le nombre de particules:**
Dans le cas particulier où N = N', on fait l'hypothèse supplémentaire suivante, pleinement justifiée par l'expérience: l'absence d'interaction devant être considérée comme un processus d'interaction particulier, **l'identité des états initial et final doit être autorisée par les relations restrictives (1)**, et l'on peut écrire

$$(6) \qquad F_\alpha(\dots x_i \dots) = G_\alpha(\dots x_i \dots)$$

quels que soient les x (i=1 à N, α =1 à ν, $\nu \leq$ N); les fonctions F_α et G_α sont alors identiques, et les relations restrictives s'écrivent bien comme la conservation de grandeurs que l'on calcule de la même façon pour l'état initial et l'état final:

$$(7) \qquad F_\alpha(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) = F_\alpha(x'_1, \dots, x'_i, \dots, x'_N)$$

b) **Réversibilité:**
Si les relations de conservation (7) autorisent la transition d'un état initial I à un état final II, elles autorisent également la transition inverse de II comme état initial à I comme état final dans les collisions conservant le nombre de particules. La question importante des probabilités de transition dans les deux sens, qui se pose différemment en physique classique et quantique, fera l'objet d'une publication ultérieure.

c) **Classes de grandeurs conservées équivalentes:**
Il existe de nombreuses manières de traduire les mêmes restrictions au moyen d'ensembles équivalents de relations de conservation indépendantes. Voici deux exemples triviaux mais importants:

i) Les relations de conservation (1) peuvent être remplacées par les relations équivalentes

$$(8) \qquad f_\alpha\left(F_\alpha(\cdots x_i \cdots)\right) = f_\alpha\left(G_\alpha(\cdots x'_j \cdots)\right) \quad , \quad \alpha = 1 \text{ à } \nu ,$$

dans lesquelles f_α sont des fonctions monotones quelconques .

ii) Il est possible de remplacer l'ensemble des grandeurs conservées F par l'ensemble des nouvelles grandeurs $\hat{S}$ F obtenues par la transformation linéaire

$$(9) \qquad \hat{S}F_\alpha(\cdots x_i \cdots) = \sum_{\beta=1}^{\nu} \sigma_{\alpha\beta}\, F_\beta(\cdots x_i \cdots) \quad , \quad \alpha = 1 \text{ à } \nu ,$$

où les $\sigma_{\alpha\beta}$ sont les coefficients d'une matrice quelconque, supposée constante, et inversible. Les grandeurs $\hat{S}$ F constituent un ensemble de grandeurs conservées indépendantes tout-à-fait équivalent à l'ensemble des F. Ainsi, l'on n'a pas un seul ensemble de lois de conservation indépendantes, mais toute une **classe** constituée d'ensembles équivalents de lois de conservation. Dans ce qui suit, on écrit par convention un seul représentant F_α , α=1 à ν , pour désigner toute la classe.

On fera voir plus loin que les transformations linéaires précédentes épuisent toute la généralité des lois différentes que l'on obtient lorsqu'on déplace le laboratoire dans une situation permettant de reproduire les expériences de physique ou que l'on change de point de vue d'observation (théorème général de covariance).

II QUELLE EST LA FORME LA PLUS GENERALE D'UNE MECANIQUE COMPATIBLE AVEC LES INVARIANCES GALILEENNES ?

1) Les invariances galiléennes.

Soit un système physique **isolé**, qui évolue sous l'effet de ses interactions internes. Supposons qu'il existe au moins une loi de conservation du type (1) correspondant à l'hypothèse du multidéterminisme. Les relations de ce genre peuvent être établies expérimentalement en répétant un grand nombre de fois l'expérience qui consiste à noter les différents états finaux x' résultant de l'évolution du système préparé dans un état initial x spécifié. Cependant, on fera voir plus loin qu'une seconde hypothèse physique (à laquelle on adjoint des hypothèses plus faibles) est suffisamment contraignante pour déterminer complètement les lois de conservation de la mécanique: **il existe un ensemble de situations (lieux et dates) dans lesquelles les phénomènes physiques peuvent être reproduits, ou bien, ce qui revient au même, de points de vue d'observateurs équivalents sur les phénomènes physiques.**

On entend par là que tout ce qui est observable peut être reproduit; en particulier, les lois de conservation ne subissent pas de variations, et il en est de même pour les distributions de probabilités des différents états finaux que l'on peut obtenir à partir d'un état initial donné. Les situations privilégiées des systèmes et des obsevateurs sont toutes celles qui correspondent au mouvement libre des systèmes observés et des référentiels d'observation. Les changements de situation du système ou de l'observateur sont des transformations spatio-temporelles (notées S dans la suite), compatibles avec le fait que le système et l'observateur sont en mouvement libre. Elles forment un groupe **G**, que l'on a coutume d'appeler le groupe d'invariance des lois physiques, ou encore le groupe des symétries fondamentales. Une reformulation complète de la mécanique devra comprendre la détermination du groupe **G en même** temps que des lois de conservation et des distributions de probabilités à partir d'hypothèses physiques. Dans cet article, on poursuit un objectif plus limité: en supposant le groupe G connu, défini par l'énoncé des invariances des référentiels galiléens, on démontre que les lois de conservation sont celles de la mécanique einsteinienne, avec la mécanique newtonienne comme limite singulière. L'identification du groupe G avec les invariances galiléennes ouvre ainsi une voie d'accès direct à la relativité restreinte; en n'imposant pas cette forme très particulière du groupe G, on obtiendra une généralisation très naturelle de la théorie, différente de la relativité générale par l'énoncé plus restrictif du principe de relativité: les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels **en mouvement libre** (cette étude est en cours).

Plus précisément, on admet ici l'existence d'une classe de référentiels idéaux, les référentiels galiléens, dans lesquels le principe d'inertie est valable: le mouvement libre est rectiligne et uniforme. Ces référentiels sont associés au mouvement libre, et sont donc en mouvement de translation uniforme les uns par rapport aux autres. Ils sont doués de propriétés d'invariance remarquables:

i) **principe de relativité:** les lois de la physique ne subissent aucune variation par changement de référentiel galiléen; il n'existe aucune expérience effectuée à l'intérieur d'un référentiel galiléen permettant de détecter son mouvement par rapport à un autre référentiel galiléen.

ii) **isotropie de l'espace:** les lois de la physique ne changent pas si l'on fait subir une rotation au laboratoire où on les établit expérimentalement; elles sont également invariantes par inversion spatiale, transformation dans laquelle les vitesses changent de signe.

iii)**homogénéité de l'espace:** les lois de la physique ne changent pas si l'on fait subir une translation au laboratoire.

iv) **géométrie:** la géométrie de l'espace est euclidienne dans un référentiel galiléen (l'homogénéité et l'isotropie de l'espace découlent du caractère euclidien de la géométrie, mais la réciproque est fausse).

v) **uniformité du temps:** les lois de la physique ne dépendent pas de la date à laquelle les expériences sont effectuées.

2) La conservation de l'énergie.

Considérons un système isolé, pour lequel les lois de conservation suivantes sont satisfaites au cours de son évolution d'un état initial x à un état final x' (pour simplifier l'écriture sans restreindre la généralité, on se place dans le cas où N=N'):

$$(10) \qquad F_\alpha(\cdots x_i \cdots) = F_\alpha(\cdots x'_i \cdots) \quad , \quad \alpha = 1, \cdots, \nu \ .$$

Si l'on adopte un point de vue d'observation équivalent, ou bien si l'on reproduit cette évolution dans une situation différente, mais telle que le système reste isolé, les variables dynamiques évoluent de Sx à Sx', où S désigne une transformation quelconque d'invariance galiléenne. Or la transition de Sx à Sx' doit également être autorisée par les lois de conservation (10); en plus de (10), on a donc, quel que soit S :

$$(11) \qquad F_\alpha(\cdots Sx_i \cdots) = F_\alpha(\cdots Sx'_i \cdots) \quad , \quad \alpha = 1, \cdots, \nu \ .$$

Ces relations expriment la conservation des nouvelles grandeurs définies par

$$(12) \qquad \hat{S} F_\alpha(x) = F_\alpha(Sx) \ .$$

On obtient ainsi, apparemment, une infinité de lois de conservation, mais le nombre de lois indépendantes ne peut être supérieur au nombre de degrés de liberté du système (à titre d'exemple, ce nombre est 6 dans le cas de la collision de deux particules ponctuelles). Pour limiter la prolifération des grandeurs conservées, il est nécéssaire que les $\hat{S} F_\alpha(x)$ soient des fonctionnelles des fonctions indépendantes $F_\alpha(x)$: ces fonctionnelles se réduisent-elles à des combinaisons linéaires des $F_\alpha(x)$, sous la forme (9) ?

Il n'est pas possible de répondre par l'affirmative, sans introduire une hypothèse physique supplémentaire, dont le caractère peut être dégagé par les considérations suivantes:

Effectuons la moyenne des relations (11) sur un ensemble de points de vue équivalents d'observateurs, correspondant au groupe complet ou à un sous groupe d'invariance des lois physiques; nous obtenons ainsi la conservation d'une nouvelle grandeur, que l'on peut convenir d'appeler **énergie:**

$$(13) \qquad E_\alpha(x) = \frac{1}{\sum\limits_S 1} \cdot \sum_S F_\alpha(Sx)$$

Cette grandeur, pourvu qu'elle soit bien définie, garde une valeur constante par toutes les transformations du groupe ou du sous-groupe, car la multiplication de tous les éléments d'un groupe par un élément donné revient à permuter ces éléments. Si le groupe est discret, la moyenne est bien définie, mais si le groupe est continu, la somme devient une intégrale dont la convergence n'est assurée que dans le cas des groupes compacts (tel est le groupe des rotations de l'espace euclidien, mais ni le groupe des translations, ni celui des transformations d'un référentiel galiléen à un autre). Même si la moyenne existe, la conservation de $E_\alpha(x)$ ne donne pas dans tous les cas une restriction sur les modes d'évolution possibles d'un système (par exemple, si l'on prend la moyenne d'une composante de la quantité de mouvement en mécanique newtonienne sur toutes les positions du système qui se déduisent les unes des autres par rotation autour d'un point, on trouve triviallement zéro quelles que soient les vitesses des constituants du système). De plus, si l'on compare les moyennes obtenues sur un même groupe à partir de fonctions $F_\alpha(x)$ différentes, rien ne permet d'affirmer que l'on obtienne toujours des énergies proportionnelles. Ajoutons à ceci que si la théorie des groupes permet de classer les grandeurs physiques d'après leur comportement par rapport à un groupe de transformations, rien n'oblige la nature à obéir à tous les types de lois de conservation ainsi classées (ainsi,dans le choc mou en mécanique newtonienne, la quantité de mouvement est conservée, mais l'énergie cinétique ne l'est pas: pour retrouver une notion d'énergie conservée, on dit que l'énergie cinétique du mouvement relatif des deux corps a été dégradée en chaleur par frottement; notons qu'en mécanique einsteinienne, on décrit le même processus en disant que l'énergie se conserve, mais que la masse augmente d'une quantité proportionnelle à la chaleur emmagasinée).

Que les moyennes (13) prennent une valeur bien définie, non triviale, et indépendante de la fonction particulière F_α à partir de laquelle on l'effectue, ne s'impose nullement comme un nécéssité logique. La réponse ne peut être demandée qu'à la nature elle-même, et c'est un oui franc et massif qui s'affirme à travers une immense accumulation de faits expérimentaux, militant tous dans le même sens, et qui con--firment l'hypothèse de la conservation de l'énergie:

Pour tout système physique isolé, il existe une grandeur physique conservée unique, dont la valeur est invariante par rotation et par translation spatiale et temporelle dans un référentiel galiléen.

Le principe du multidéterminisme, exprimé sous la forme particulière de la conservation de l'énergie, permettra de construire dans les sections suivantes la dynamique relativiste sans partir d'une cinématique préétablie, en établissant successivement:

i) l'additivité de l'énergie lorsqu'on réunit des systèmes isolés
ii) le concept de masse
iii) la forme générale de l'énergie comme solution d'une équation fonctionnelle
iv) que l'existence de l'énergie pour tout système physique conduit à ne retenir que les solutions continues et indéfiniment différentiables de cette équation
v) qu'il n'existe que deux classes de solutions, se distinguant par la valeur d'une constante universelle c , la vitesse limite de la propagation de l'énergie: mécanique einsteinienne pour c fini, mécanique newtonienne pour c infini
vi) que la conservation de l'impulsion se déduit de celle de l'énergie par différentiation et que les formules de transformation spatio-temporelles de l'énergie et de l'impulsion se présentent sous la forme linéaire annoncée (9): elles correspndent à la transformation de Lorentz lorsque c est fini et à la transformation de Galilée lorsque c est infini
(vii) la loi de composition des vitesses à partir de l'isotropie de l'espace.

3) **Pourquoi l'énergie est-elle additive et définie positive ?**

L'objectif est de démontrer que l'énergie du système obtenu en réunissant deux systèmes isolés est la somme des énergies de ses parties. Si nous nous souvenons qu'il existe une certaine latitude dans le choix de la forme des relations exprimant le multidéterminisme, dans le cas présent une classe entière de fonctions "énergie" équivalentes, le problème doit être posé d'une manière plus précise: est-il possible de choisir dans chacune des classes associées aux systèmes I , II , $I \cup II$, respectivement un élément $E_1(I)$, $E_2(II)$, $E(I \cup II)$ tels que

$$(14) \qquad E(I \cup II) = E_1(I) + E_2(II) \quad ?$$

i) On établit d'abord que l'énergie $E(I \cup II)$ est une fonction de $E_1(I)$ et $E_2(II)$, et de rien d'autre.

Introduisons les notations H_1 et H_2 pour l'ensemble des variables indépendantes qui, avec les énergies E_1 et E_2 , caractérisent les états des systèmes I et II respectivement. L'énergie de la réunion des parties non interagissantes I et II dépend-elle ou non des variables supplémentaires H_1 et H_2 ?

Comme les parties I et II sont isolées, un changement d'état peut survenir dans I sans que l'état de II ne change. Les énergies E_1 et E_2 sont conservées, H_2 ne change pas, et c'est seulement H_1 qui évolue de H_{1i} dans l'état initial à H_{1f} dans l'état final. La conservation de l'énergie du système global s'écrit:

$$(15) \qquad E(E_1, H_{1i}, E_2, H_2) = E(E_1, H_{1f}, E_2, H_2)$$

Cette énergie ne dépend pas de H_1 parce que les variables indépendantes regroupées sous la notation H_1 peuvent prendre des valeurs arbitraires. Le même argument répété pour H conduit à la conclusion que E est fonction seulement de E_1 et E_2 .

ii) Ainsi, l'énergie du système global est donnée en fonction de celles de ses parties isolées par une certaine loi de composition homomorphe à l'opération de réunion des sous-ensembles disjoints et qui de ce fait a une structure de loi de semi-groupe:

$$E = E_1 \circ E_2 \tag{16}$$

Un théorème important de la théorie des groupes est valable aussi dans le cas des semi-groupes; il stipule que tout groupe continu à un paramètre, différentiable et simplement connexe est susceptible d'une paramétrisation additive. Une démonstration élémentaire, qui ne fait pas appel à des hypothèses de régularité aussi fortes, est proposée plus loin, dans le cas analogue de la définition d'un paramètre additif pour les mouvements unidimensionnels, la rapidité.

Par conséquent, la loi de composition $E_1 \circ E_2$ est homomorphe soit à l'addition des nombres réels positifs, soit à l'addition des nombres réels négatifs.

Il est donc possible de sélectionner des énergies additives, qui de plus sont toutes de même signe.

L'énergie n'est pas une propriété des objets physiques en eux-mêmes , mais une quantité qui n'a un sens physique que dans le cadre de la description de leurs interactions; notre conclusion doit donc être précisée: **les énergies de tous les objets susceptibles d'interagir sont de même signe.**

Si l'on convient d'adopter le signe positif pour les objets capables d'interagir avec nos instruments, l'existence d'objets d'énergie négative n'est pas du tout exclue; par contre, c'est l'interaction des objets d'énergie positive avec ceux d'énergie négative qui se trouve exclue.

4) Les expériences filtrantes

Une manière simple et originale d'établir des conditions nécéssaires pour la fonction énergie est de considérer des "expériences filtrantes": on peut convenir d'appeler ainsi les expériences au cours desquelles les modes d'évolution ne sont restreints, de par la structure du système, que par une seule loi de conservation, ce qui peut se produire de deux façons:
(a) la conservation des autres grandeurs n'a pas lieu: pour un gaz enfermé dans un récipient de masse très grande, et qui évolue sous l'effet des collisions élastiques de ses molécules entre elles et avec les parois du récipient, l'énergie est conservée mais l'impulsion ne l'est pas;
(b) la conservation des autres grandeurs ne constitue pas une restriction supplémentaire: un exemple en est donné par un gaz de molécules identiques dont la distribution des vitesses reste à symétrie sphérique au cours de l'explosion du gaz sous l'effet des collisions élastiques de ses molécules; dans ce cas, la conservation de l'impulsion est trivialement satisfaite à cause de la symétrie sphérique du système, et les vitesses des molécules sont seulement reliées par la conservation de l'énergie.

Point n'est besoin d'avoir déjà acquis le concept d'impulsion pour s'assurer qu'un système gardant une symétrie sphérique dans tous les états qu'il traverse successivement au cours de son évolution, réalise une expérience filtrante. L'argument suivant, qui ne repose que sur l'hypothèse de la conservation de l'énergie, permet de s'en convaincre:

Soit un système de photons dont l'annihilation donne lieu à la création de paires élecron-positon (cet exemple permet de fixer les idées tout en préservant la généralité des raisonnements). On suppose que le système global se décompose en sous-systèmes qui évoluent isolément les uns des autres; chaque sous-système comprend un photon dans l'état Rx_0, dont l'annihilation donne naissance à un électron dans l'état Rx_1 et un positon dans l'état Rx_2, ces sous-

-systèmes étant la reproduction, par toutes les rotations R, de celui où le photon dans l'état x_0 est transmuté en un électron dans l'état x_1 et un positon dans l'état x_2 (la possibilité de cette reproduction est une conséquence de l'isotropie). Si nous avons, en plus de la conservation de l'énergie, la condition restrictive

$$(17) \qquad P(Rx_0) = P(Rx_1, Rx_2)$$

pour chaque sous-système, nous avons aussi, pour le système global, la condition analogue (car tous les systèmes émargent aux mêmes lois)

$$(18) \qquad P(x_0, R_1x_0, R_2x_0, \dots) = P(x_1, R_1x_1, R_2x_1, \dots ; x_2, R_1x_2, R_2x_2, \dots)$$

Que peut-on dire de la fonction $\hat{R}_0 P(..x..) = P(..R_0(x)..)$? Si l'on remarque d'une part que la multiplication à gauche de tous les éléments du groupe des rotations par un élément particulier R_0 revient à permuter ces éléments, et d'autre part que la fonction P doit être invariante par toutes les permutations des particules identiques, on s'aperçoit que la loi de conservation de la grandeur P pour le système global doué d'une symétrie sphérique, est invariante par rotation; et comme l'énergie est la seule grandeur douée de cette propriété, la conservation de P donne une condition restrictive redondante par rapport à celle qui provient de la conservation de l'énergie, ce qui caractérise une expérience filtrante.

Nous allons maintenant établir un théorème d'une très grande utilité pour la suite. Soit une expérience filtrante au cours de laquelle un nombre n_0 de particules du même type et dans le même état de mouvement se désintègrent en fragments qui diffèrent autant par leur type que par leur état de mouvement. Soit Φ_i l'expression de l'unique grandeur non trivialement conservée, dans laquelle l'indice variable i désigne à la fois l'état de mouvement et le type de matière des différentes particules. Si cette grandeur est additive (ce qui est le cas de l'énergie), sa conservation s'écrit:

$$(19) \qquad \sum_{i=1}^{M} n_i \, \phi_i = n_o \, \phi_o$$

où n_i désigne le nombre de particules dans l'état i ; nous ne supposons rien quant à la conservation du nombre de particules. Si le membre de droite et l'ensemble des M nombres ϕ_i sont fixés, les nombres n_i qui figurent dans le membre de gauche peuvent être choisis de M manières linéairement indépendantes, pour lesquelles nous introduisons la notation n_i^j, où j = 1 à M . Comme chaque choix d'un ensemble de valeurs n_i^j correspond à une expérience différente, ces nombres sont invariants lorsque l'observateur adopte un point de vue équivalent sur l'expérience, parce que ce sont des nombres de particules réelles, mais les nombres ϕ_i sont changés en $\hat{S}\phi_i$, et les nouvelles lois de conservation s'écrivent:

$$(20) \qquad \sum_{i=1}^{M} n_i^j \, \hat{S}\phi_i = n_o \, \hat{S}\phi_o$$

Les nombres $\hat{S}\phi_i$ peuvent être considérés comme solution du système de M équations linéaires précédent. Cette solution est unique, parce que les ensembles des n_i^j correspondant à différents j sont linéairement indépendants. Les ϕ_i sont solution du système analogue

$$(21) \qquad \sum_{i=1}^{M} n_i^j \, \phi_i = n_o \, \phi_o$$

la seule différence consistant à remplacer $\hat{S}\phi_o$ par ϕ_o dans le deuxième membre. Il s'ensuit que les solutions des deux systèmes sont proportionnelles:

$$(22) \qquad \frac{\hat{S}\phi_o}{\phi_o} = \frac{\hat{S}\phi_1}{\phi_1} = \cdots = \frac{\hat{S}\phi_i}{\phi_i} = \cdots$$

On en déduit que le rapport $\sigma = \hat{S}\phi_i / \phi_i$ est indépendant à la fois de l'état de mouvement et du type de matière; il ne dépend que de la transformation de passage S à un point de vue équivalent sur les phénomènes physiques:

$$(23) \qquad \boxed{\hat{S}\,\phi_i = \sigma(S)\,\phi_i}$$

5) **Le théorème général de covariance**

La formule (23) démontre la linéarité de la transformation $\hat{S}$ pour une grandeur physique à une seule composante. Pour généraliser au cas de plusieurs composantes, et établir ainsi les formules (9), il convient de généraliser la notion d'expérience filtrante et de grandeur filtrable au cas d'une grandeur à plusieurs composantes (par exemple une expérience dans laquelle les particules sont astreintes à se déplacer le long d'une droite filtre l'énergie et la composante de l'impulsion le long de cette droite). Nous ne savons encore rien, à ce stade de l'exposé, du caractère additif des grandeurs autres que l'énergie. Dans la section suivante, nous établirons l'existence et l'additivité de l'impulsion; anticipant ce résultat, c.a.d. que les lois de conservation s'écrivent sous une forme analogue à (19), où les ϕ_i désignent maintenant des matrices-colonnes à ν composantes, on peut aisément généraliser la relation (23), dans laquelle $\sigma(S)$ devient une matrice carrée inversible d'ordre ν . Ce résultat constitue le théorème général de covariance.

démonstration:
En effet, dans le cas où l'on a ν relations de conservation analogues à (19), celles-ci peuvent être écrites sous forme vectorielle dans un espace linéaire à M+1 dimensions:

$$(24) \qquad \vec{N} \cdot \vec{\phi}^{\alpha} = 0 \qquad , \quad \alpha = 1, \cdots, \nu$$

où $\vec{N}$ est un vecteur de composantes $-n_0, n_1, \ldots, n_i, \ldots$ et $\vec{\phi}^{\alpha}$ un vecteur de composantes $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_i, \ldots$; ces relations expriment que le vecteur $\vec{N}$ appartient au complément orthogonal $\mathcal{N}$, de dimension M+1-ν ,du sous-espace engendré par les vecteurs $\vec{\phi}^{\alpha}$,lesquels sont linéairement indépendants sinon les lois de conservation correspondantes ne pourraient pas être indépendantes. Soit $\vec{N}^{j}$, j=1 à M+1-ν une base de ce sous-espace; chaque vecteur $\vec{N}^{j}$ a pour composantes les nombres de particules qui interviennent dans une expérience particulière; les vecteurs $\vec{N}^{j}$ ne varient donc pas lorsque le point de vue d'observation change, tandis que les vecteurs $\vec{\phi}^{\alpha}$ sont transformés en $\hat{S}\vec{\phi}^{\alpha}$, qui vérifient des relations analogues à (24) exprimant qu'ils appartiennent au complément orthogonal de $\mathcal{N}$:

23

$$(25) \qquad \vec{N}^{i} \cdot \hat{S}\vec{\Phi}^{\alpha} = 0 \quad , \quad \alpha = 1, \dots, \nu$$

Les vecteurs $\hat{S}\vec{\Phi}^{\alpha}$ appartenant au complément orthogonal de $\mathcal{N}$ sont nécéssairement des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{\Phi}^{\alpha}$, et l'on a bien les relations annoncées (9) et (23); et comme les vecteurs $\hat{S}\vec{\Phi}^{\alpha}$ sont linéairement indépendants, ces relations peuvent être inversées.

remarques:
i) les matrices de transformation $\sigma(S)$ forment un groupe homomorphe à celui des transformations d'invariance; elles réalisent une représentation linéaire et réelle de ce groupe, et les fonctions F_{α} ou Φ_i dans les relations (9 et (23) respectivement forment une base de cette représentation .
ii) si l'on suppose donc que toutes les grandeurs physiques conservées sont additives (hypothèse dont on peut faire l'économie, voir plus loin), le problème de la forme mathématique de ces grandeurs est virtuellement résolu; en effet, on considère d'abord le sous-groupe d'invariance qui relie tous les points de vue équivalents d'observateurs au repos à l'intérieur d'un même référentiel galiléen, les rotations et les translations spatiales, l'invariance temporelle: la classification des grandeurs conservées d'après les représentations irréductibles de ce groupe donne pour l'interaction de deux particules une grandeur scalaire, l'énergie, une grandeur vectorielle, puis une grandeur quadrupolaire à cinq composantes, laquelle est éliminée parce que le nombre de degrés de liberté du système est de six, et que la conservation de cette grandeur simultanément avec l'énergie conduirait dans tous les cas à une détermination unique de l'issue de toute interaction, l'identité avec l'entrée ! Considérant ensuite le passage à un autre référentiel galiléen, les représentations du sous-groupe des rotations correspondant à l'énergie (E) et à l'impulsion (P) ne sont pas des représentations du groupe complet mais les matrices de passage de E, P à $\hat{S}E$, $\hat{S}P$ forment nécessairement, comme on le montrera plus loin par des procédés élémentaires, une représentation quadridimensionnelle irréductible du groupe de Lorentz.

iii) rappelons cependant que la théorie des groupes peut seulement conduire à une classification des grandeurs d'après leurs comportements dans les transformations; mais rien n'oblige à ce que de tels comportements soient repérables dans les phénomènes physiques. C'est en fait l'hypothèse de la conservation de l'énergie qui joue un rôle central, car c'est d'elle que découlent l'existence et l'additivité des autres grandeurs; dans la section suivante ,nous illustrons cette proposition générale en démontrant la conservation et l'additivité de l'impulsion dans le cas particulièrement intéressant de l'interaction locale de particules ponctuelles.

iv) dans la démonstration de la formule (23), il est important que les nombres n_i de particules ne soient reliés autrement que par les relations (19) ou (24), pour des états de mouvement fixes à l'entrée et à l'issue des interactions. Comment faut-il modifier l'argument **lorsqu'on considère des processus où le nombre de particules est conservé ?**

Plaçons-nous dans le cas d'une grandeur à une seule composante (la généralisation est évidente):

(a) désignons par la notation ω l'état de repos d'une particule; lorsque $\Phi_\omega = 0$ et $\hat{S}\Phi_\omega = 0$, les grandeurs Φ_i et $\hat{S}\Phi_i$ sont bien proportionnelles:

Supposons en effet que les états i et 0 figurant dans la relation (19) prennent M+1 valeurs fixes. On s'affranchit de la contrainte imposée par la conservation du nombre de particules en introduisant un nombre (variable) n_ω de particules au repos à côté de n_o ,supposé fixe, dans le membre de droite, ce qui ne modifie pas les relations de conservation (19) et (20) puisque Φ_ω =0 et $\hat{S}\Phi_\omega$ =0 .La conservation du nombre de particules s'écrit alors

$$(26) \qquad \sum_{i=1}^{M} n_i^{(j)} = n_o + n_\omega^{(j)}$$

dans une expérience particulière, et profitant de la liberté du choix de $n_\omega^{(j)}$ il est toujours possible de trouver M choix linéairement indépendants de l'ensemble des nombre $n_i^{(j)}$,tels que les Φ_i et $\hat{S}\Phi_i$ soient solution des équations (20) et (21), et la proportionnalité s'ensuit comme précédemment.

(b) désignons par la notation I l'inversion spatiale, transformation dans laquelle les vitesses de toutes les particules changent de signe; lorsque $\phi_\omega \neq 0$ ou bien $\hat{S}\phi_\omega \neq 0$,on se ramène au cas précédent en considérant la nouvelle grandeur

$$(27) \quad \psi_i = \phi_i + \phi_{Ii} - 2\phi_\omega$$

telle que $\psi_\omega = 0$ et $\hat{S}\psi_\omega = 0$ .La conservation de cette grandeur découle de l'invariance des lois par inversion spatiale et de la conservation du nombre de particules. Cette grandeur est filtrable par l'expérience précédemment décrite, d'un gaz en expansion dont les vitesses des molécules restent distribuées de manière isotrope.

6) La dynamique déduite de la conservation de l'énergie

L'application de la notion d'expérience filtrante va permettre d'éviter l'usage de la théorie des représentations des groupes pour déterminer la forme des lois de conservation, en circonscrivant leur forme nécéssaire par un ensemble de conditions qui seront établies dans des cas particuliers. En effet, puisque tous les systèmes physiques émargent aux mêmes lois, il est possible d'établir par l'étude d'une catégorie particulière de systèmes de la mécanique certaines lois qui les régissent tous. Nous portons notre regard ici sur les interactions locales de particules ponctuelles, processus qui présentent le plus d'analogie avec ceux étudiés en théorie quantique des champs, et nous nous plaçons à plusieurs reprises en dimension un, où la loi de composition des vitesses, dont la forme est inconnue à ce stade de l'exposé, est cependant douée d'une propriété qui permettra de simplifier certaines considérations: elle est en effet susceptible d'une paramétrisation additive. Nous allons en premier lieu établir l'existence de ce paramètre additif de vitesse, la rapidité.

a) **La rapidité**

Dans le cas unidimensionnel, on peut remarquer qu'il existe de toute manière un paramètre de vitesse naturellement additif, que nous conviendrons d'appeler la "rapidité" pour le distinguer de la vitesse v. Pour le découvrir, considérons un véhicule en mouvement libre dont la propulsion depuis l'état de repos a été assurée par la répétition n fois du même mécanisme, qui peut être quelconque, pourvu qu'il se répète identiquement du point de vue du véhicule. On peut se représenter, par exemple, une fusée se déplaçant dans un référentiel galiléen, qui brûlerait tout son carburant pour acquérir la vitesse supplémentaire v_1 , et serait ravitaillée en vol n fois. Le principe de relativité permet d'affirmer que la fusée acquiert chaque fois la même vitesse supplémentaire v_1 .

La loi de composition des vitesses est la même dans tous les référentiels galiléens en vertu du principe de relativité.
La vitesse v acquise grâce à n ravitaillements successifs est donc $v_n = v_1 * v_1 * v_1 * ... * v_1$ (n fois), expression dans laquelle on peut omettre les parenthèses, car, à cause du principe de relativité, on obtient la même vitesse finale v_n en composant dans un ordre quelconque tous les v_{n_i} tels que $\sum_i n_i = n$: la composition des vitesses est une loi associative et commutative en dimension un (c'est une loi de groupe par suite des invariances galiléennes).

Par conséquent, le paramètre additif x recherché n'est autre, à un facteur près, que le nombre n lui-même: **la rapidité est donc proportionnelle au nombre d'applications d'un mécanisme identique de propulsion.** Cette grandeur est donc mesurable par simple **comptage**,et cette propriété la distingue nettement de la vitesse, car **la mesure de la rapidité peut ainsi être effectuée indépendamment de toute mesure de longueur et de temps**, et il en sera donc de même de l'énergie et de l'impulsion, dont nous déterminerons plus loin les expressions en fonction de la rapidité.

La définition de la rapidité est étendue des valeurs entières aux valeurs rationnelles en faisant l'hypothèse que toute vitesse v peut être atteinte en partant de l'état de repos, par composition itérée d'une même vitesse u plus petite (cette hypothèse sera confirmée a posteriori, lorsque nous aurons établi que la vitesse est proportionnelle au quotient de l'impulsion par l'énergie, fonctions monotones et indéfiniment différentiables de la rapidité). Ainsi, nous sommes assurés de l'existence d'une fonction h(x) définie pour toutes les valeurs rationnelles de la variable, telle que si $v = h(x)$ et $w= h(y)$, l'on ait $v * w = h(x+y)$. Lorsque la fonction h(x) est continue (ce qui sera confirmé plus tard), notre conclusion s'étend aux valeurs réelles aussi.

Nous retrouvons ainsi par un procédé de physicien un théorème établi à l'aide de mathématiques élaborées dans l'étude générale des groupes de Lie, mais sans faire d'hypothèse sur la continuité et la différentiablité du groupe; ce théorème affirme l'existence d'un paramètre additif pour tout groupe continu à un paramètre, différentiable et simplement connexe.

b) **Le concept de masse**

Pour étudier comment l'énergie dépend de la matière constituant les objets en mouvement, considérons l'expérience mentale dans laquelle une particule au repos se désintègre en N paires de fragments identiques, qui s'éloignent avec des rapidités opposées x_i et $-x_i$, i=1 à N, le long d'une même ligne droite. La conservation de l'énergie, la seule grandeur conservée dans cette désintégration symétrique, s'écrit:

$$\sum_{i=1\ldots N} \left(E_i(x_i) + E_i(-x_i) \right) = E_0(x_0) + E_0(-x_0) \tag{28}$$

où E_i désigne l'énergie d'un fragment de la i-ème paire, la variation de l'énergie quand on passe d'un type de particule à un autre étant prise en compte par l'indice i. Cette expérience "filtre" les grandeurs $\Phi_i(x) = E_i(x) + E_i(-x)$

et si la même expérience est observée du point de vue d'un autre référentiel galiléen, en mouvement avec la rapidité -y , l'additivité de la loi de composition des rapidités permet d'écrire les formules de transformation:

$$(29)\qquad \hat{S}\phi_i(x) = E_i(y+x) + E_i(y-x) \quad .$$

Le théorème de covariance exprimé sous la forme de la relation (19) permet ~~d~~'écrire:

$$(30)\qquad \hat{S}\phi_i(x) = \sigma(y)\ \big(E_i(x) + E_i(-x)\big) \quad ,$$

σ (y) étant une fonction à déterminer. Comme E(x) est une fonction paire (l'énergie est invariante par rotation), on a:

$$(31)\qquad E_i(y+x) + E_i(y-x) = 2\ \sigma(y)\ E_i(x)$$

et si l'on remarque que le membre de gauche est symétrique par rapport à la permutation de x et y, on aboutit à l'identité

$$(32)\qquad \sigma(y)\ E_i(x) = \sigma(x)\ E_i(y) \quad ,$$

quelles que soient les rapidités x et y, d'où l'on déduit que les fonctions $E_i(x)$ et $\sigma(x)$ sont proportionnelles, leur rapport $m_i = E_i(x)/\sigma(x)$, indépendant de la rapidité, est une constante caractéristique de chaque type de particule, à déterminer expérimentalement: c'est la **masse** de la particule, et l'existence de ce paramètre unique est ainsi démontrée alors qu'elle est toujours postulée. La masse et l'énergie sont ainsi fondues en un même concept; elles peuvent être mesurées avec la même unité, et le caractère "défini positif" de l'énergie se répercute donc sur la masse.

La substitution de l'expression universelle $E_i(x) = m_i\ \sigma(x)$ de l'énergie dans (31) permet du même coup de déterminer la fonction sans dimension $\sigma(x)$ comme solution de l'équation fonctionnelle:

$$(33)\qquad \sigma(y+x) + \sigma(y-x) = 2\ \sigma(y)\ \sigma(x) \quad ,$$

dont les solutions non trivallement nulles sont telles que $\sigma(0) = 1$.

remarques:

i) **choix de l'unité de masse:** l'usage hérité de la mécanique newtonienne est de mesurer l'énergie en unité de masse x (vitesse)^2. Nous adoptons la même convention, en posant

$$(34) \qquad E(x) = m\,\varepsilon(x) = m\,\sigma(x)/\lambda$$

où la **constante universelle** λ a pour dimension 1/(vitesse)^2 ; la valeur de cette constante sera fixée ultérieurement, de telle sorte que, dans la limite des petites vitesses, l'expression de l'énergie cinétique redonne celle de la mécanique newtonienne.

ii) **énergie cinétique:** nous appliquons ici la proposition démontrée dans la remarque (iv) de la section 5, à l'étude des collisions élastiques. Le lecteur peut aisément s'assurer que la démonstration faite dans le cas où l'on a un seul type de particules reste valable lorsqu'on a plusieurs types de particules dont les nombres se conservent séparément (il suffit d'introduire autant de nombres de particules n_ω qu'il y a de types différents de particules dans le membre droit de (26)). Cela permet d'établir directement les lois de conservation particulières vérifiées dans le cas des collisions élastiques. Soit un changement de référentiel galiléen, dans lequel les rapidités x des particules subissent la transformation G x = x+y ; l'énergie cinétique $E_c(x)$ (telle que $E_c(0)=0$) relève du cas (b) de (5,iv), et il s'ensuit que le rapport

$$\sigma = \frac{E_c(y+x) + E_c(y-x) - 2E_c(y)}{E_c(x) + E_c(-x)}$$

n'est fonction que de la vitesse relative y (nous anticipons que ce rapport est identique à la fonction $\sigma(y)$ introduite dans (30)). Cela permet d'écrire

$$E_c(y+x) + E_c(y-x) = 2\,\sigma(y)\,E_c(x) + 2\,E_c(y)$$

et comme le premier membre est une fonction symétrique de x et de y

$$(\sigma(x) - 1)\,E_c(y) = (\sigma(y) - 1)\,E_c(x)$$

d'où l'on déduit l'expression de l'énergie cinétique

$$(35) \qquad E_c = m\,e(x) = m\,(\sigma(x) - 1)/\lambda$$

On vérifie aisément que $\sigma(x)$ et $e(x)$ sont solution respectivement de (33) et de l'équation fonctionnelle

$$(36)\quad e(y+x) + e(y-x) = 2e(x) + 2e(y) + 2\lambda e(x)e(y)$$

En outre, la conservation de l'énergie totale $E = \sum m\,\sigma(x)/\lambda$ en même temps que celle de l'énergie cinétique entraîne, par différence, la **conservation de la somme des masses dans les collisions élastiques.**

c) **Les deux mécaniques possibles**

Sans hypothèse de régularité sur l'énergie, l'équation fonctionnelle (33) est délicate et peut même conduire à des solutions très discontinues. Mais en fait, comme **l'énergie est définie pour tout système physique**, les sommes telles que (19) ont un sens pour toutes les distributions n_i des particules réalisables dans les systèmes physiques, ce qui se traduit mathématiquement ainsi: la somme (éventuellement l'intégrale) a un sens pour toute distribution n_i à support compact, et **l'énergie $E(x) \sim \sigma(x)$ est une fonction mesurable (localement intégrable).** C'est l'hypothèse de régularité la plus faible qui puisse être faite sur cette fonction; cependant, elle est très contraignante, car nous allons démontrer que **toute solution mesurable de l'équation (33) est continue et dérivable à tout ordre.**

Soit n(y) une fonction positive, paire, nulle en-dehors d'un domaine borné arbitraire, et indéfiniment dérivable (on peut s'imaginer la distribution des rapidités d'un gaz dans son référentiel propre). On multiplie les deux membres de l'équation fonctionnelle (33) par n(y), puis on intègre par rapport à y, ce qui donne

$$(37)\quad 2\sigma(x)\int_{-\infty}^{+\infty} n(y)\,\sigma(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} n(y)\,\sigma(y+x)\,dy + \int_{-\infty}^{+\infty} n(y)\,\sigma(y-x)\,dy$$

Comme $\sigma(x)$ est une fonction mesurable et n(x) à support compact, les intégrales écrites sont bien définies. En transformant le membre de droite par des changements de variables simples, on aboutit à l'identité

$$(38) \qquad \sigma(x)\int_{-\infty}^{+\infty} m(y)\,\sigma(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} m(y-x)\,\sigma(y)\,dy$$

dont le membre de droite est continu et indéfiniment dérivable par rapport à x. Il en découle que la fonction $\sigma(x)$ dans le membre de gauche a la même propriété (l'identité précédente correspond à deux manières équivalentes de calculer l'énergie du gaz dans le référentiel en mouvement à la rapidité x ,car l'intégrale dans le membre de gauche est la masse du gaz, égale à son contenu d'énergie calculée dans son référentiel propre).

La résolution des équations fonctionnelles (33) et (36) peut maintenant être ramenée à celle d'équations différentielles. Dérivant (33) deux fois par rapport à y, et annulant y, on passe à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\sigma(x)}{dx^2} = \gamma^2\,\sigma(x)$$

avec

$$\gamma^2 = \left(\frac{d^2\sigma(x)}{dx^2}\right)_{x=0}$$

Nous ne pouvons retenir que la solution réelle,paire et positive de cette équation,dérivable à tout ordre et vérifiant également l'équation fonctionnelle (33), ce qui donne:

$$(39) \qquad E(x) = \frac{m}{\lambda}\cosh\gamma x \quad , \quad E_c(x) = \frac{m}{\lambda}\left(\cosh\gamma x - 1\right)$$

C'est la solution générale, correspondant à la mécanique einsteinienne, dont il existe une limite singulière, obtenue en faisant tendre simultanément λ et γ vers zéro de telle sorte que l'énergie cinétique garde une valeur finie; pour cela, il faut prendre $\gamma^2/2\lambda$ =constante. La conservation de l'énergie E ,qui tend vers l'infini comme m/λ , se transforme en la **conservation de la masse totale**, et on obtient l'expression de l'énergie cinétique en mécanique newtonienne, à un facteur près (on verra plus tard que la rapidité et la vitesse sont proportionnelles dans cette limite):

$$(40) \qquad E_c(x) = \frac{\gamma^2}{\lambda}\cdot\frac{1}{2}mx^2$$

La conservation d'une seconde grandeur, l'impulsion, peut maintenant être dérivée de celle de l'énergie, par différentiation:

En effet, comme les lois physiques sont les mêmes dans toutes les situations galiléennes, on a, en même temps que la conservation de l'énergie (19), les relations

$$(41) \quad \sum_{i=1,\dots,M} m_i \, \Phi_{Si} = m_o \, \Phi_{So}$$

quelle que soit la transformation galiléenne S, et en prenant la différence membre à membre avec (19), on obtient la conservation des nouvelles grandeurs

$$(42) \quad \Pi_i = \Phi_{Si} - \Phi_i$$

L'énergie étant invariante par translation spatiale et temporelle et par rotation, il faut prendre pour S un changement quelconque de référentiel galiléen, et comme une telle transformation dans une direction donnée est l'itération d'une transformation plus petite, la rapidité augmentant d'une unité à chaque itération, il suffit de considérer les générateurs infinitésimaux des transformations galiléennes, ce qui revient à prendre **la dérivée de l'énergie par rapport à la rapidité dans la direction du mouvement.**Une telle procédure de dérivation des autres conservations à partir de l'énergie est générale (c'est d'ailleurs ainsi qu'elles sont dérivées en mécanique quantique!); dans le cas d'un corps étendu, elle pourrait s'appliquer aux moments cinétiques; dans le cas traité ici, des particules ponctuelles, nous obtenons la conservation d'une grandeur vectorielle, **l'impulsion**,dont le module est donné par

$$(43) \quad P = \frac{dE}{dx} = m \frac{\gamma}{\lambda} \sinh \gamma x$$

Cette relation est bien indépendante de la conservation de l'énergie, puisque p(x) est une fonction impaire. De plus, la répétition de l'argument ne fournit pas de nouvelle loi de conservation, car on vérifie aisément que la dérivée de l'impulsion redonne la conservation de l'énergie en mécanique einsteinienne, et la conservation de la masse en mécanique newtonienne.

Remarquons encore que la procédure de dérivation des grandeurs physiques à partir de l'énergie étant linéaire, l'additivité de l'énergie se reporte aussitôt sur ces grandeurs.

remarque:

Plaçons-nous maintenant dans les conditions de la cinématique newtonienne, où la loi de composition des vitesses est l'addition des vecteurs tridimensionnels. On vérifie aisément que les raisonnements qui mènent aux équations fonctionnelles (33) et (36), ainsi que la démonstration de la dérivabilité de l'énergie, s'appliquent à ce cas (x et y deviennent des vecteurs); quelles sont les solutions compatibles avec l'addition vectorielle des vitesses ?

i) $\lambda = 0$: la solution "newtonienne" e(x) = constante x^2 vérifie bien l'équation (36); on a en effet

$$\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

ii) $\lambda \neq 0$: il faut résoudre l'équation (33); or l'analyse effectuée en dimension un mène à la solution $\sigma(x) = \cosh x$. On s'aperçoit tout-de-suite que cette solution ne convient pas, car composant deux vitesses x et y perpendiculaires, on a:

$$\cosh\|y+x\| = \cosh\|y-x\| = \cosh\sqrt{x^2+y^2}$$

et

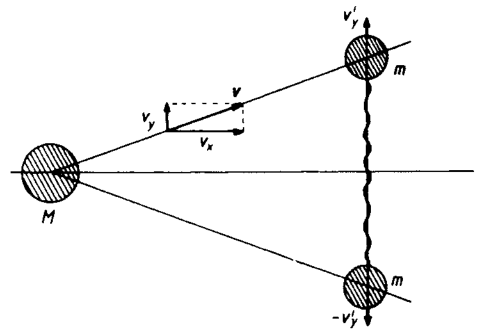
$$\cosh\|y+x\| + \cosh\|y-x\| = 2\cosh\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\neq 2 \cosh x \cosh y \quad .$$

Par conséquent, la solution générale ($\lambda \neq 0$) est en dimension trois incompatible avec l'addition vectorielle des vitesses; la loi de composition des vitesses prend nécéssairement une forme différente, que nous déterminerons dans la section (d). Remarquons cependant que cette incompatibilité d'une dynamique einsteinienne avec l'addition des vitesses n'a pas lieu en dimension un; une mécanique qui serait l'association d'une dynamique einsteinienne et d'une cinématique newtonienne fournirait un contre-exemple de mécanique non hamiltonienne: la première équation d'Hamilton qui s'écrit x = dE/dP n'est pas vérifiée, car on a dE/dP = tangh x.

d) **Loi de composition des vitesses**

En dimension trois, l'impulsion P est un vecteur, dont les trois composantes sont des grandeurs conservées. Nous allons établir la loi de composition des vitesses et déterminer la fonction inconnue v = h(x) à partir de la condition suivante: la vitesse v et l'impulsion P sont des vecteurs colinéaires.



Considérons l'expérience mentale décrite par la figure: une particule de masse M se désintègre en deux fragments identiques de masse m telle que $M-2m > 0$. Dans le référentiel où la particule est initialement au repos (C), les deux fragments se déplacent dans une direction perpendiculaire à la trajectoire de la particule M dans le référentiel du laboratoire (L). Soient $v_x = h(x)$ et $v_y = h(y)$ les composantes de la vitesse d'un fragment et $v = h(z)$ le module de cette vitesse, mesurés dans le référentiel L. La conservation de l'énergie, donnée par l'expression (34), s'écrit dans L

$$M\,\mathcal{E}(x) = 2m\,\mathcal{E}(z).$$

La composante P_x de l'impulsion d'un fragment dans la direction horizontale est donnée par la relation de conservation (on écrit les impulsions sous la forme P = masse·p):

$$M\,p(x) = 2\,P_x$$

Le quotient des deux relations précédentes donne:

(44) $$P_x = m\,\frac{p(x)}{\mathcal{E}(x)}\,\mathcal{E}(z)$$

La composante verticale de l'impulsion d'un fragment doit prendre la même forme à cause de **l'isotropie de l'espace:**

$$P_y = m \frac{p(y)}{\varepsilon(y)} \varepsilon(z).$$

Le module P de l'impulsion d'un fragment peut être écrit sous une forme analogue:

$$P = m\ p(z) = m \frac{p(z)}{\varepsilon(z)} \varepsilon(z).$$

Comme la géométrie est euclidienne dans un référentiel galiléen, on a les relations

$$\frac{p^2}{\varepsilon^2}(z) = \frac{p^2}{\varepsilon^2}(x) + \frac{p^2}{\varepsilon^2}(y)$$

et

$$h^2(z) = h^2(x) + h^2(y)$$

qui doivent être compatibles quelles que soient les rapidités x et y. Posant $a=h^2(x)$, $b=h^2(y)$, et $p^2(x)/\ ^2(x) = g(a)$, on doit avoir

$$g(a+b) = g(a) + g(b)$$

quels que soient a et b. Cette condition ne peut être satisfaite que si les fonctions p^2/ε^2 et h^2 sont proportionnelles, et finalement nous obtenons

(45) $$h(z) = u^2\ p(z)/\varepsilon(z) \quad , \quad v = u^2\ p/\varepsilon$$

où u est une constante ayant la dimension d'une vitesse (nous convenons de mesurer l'énergie et l'impulsion dans les unités habituelles, masse x vitesse² et masse x vitesse respectivement). Jusqu'à présent, nous n'avons pas substitué à p et ε leurs expressions déterminées par le principe de relativité; il est important de remarquer que le résultat précédent découle seulement de l'isotropie de l'espace. Si maintenant nous effectuons la substitution de $p = \frac{\gamma}{\lambda} \sinh \gamma z$ et $\varepsilon = \frac{1}{\lambda} \cosh \gamma z$, nous aboutissons à l'expression de la vitesse en fonction de la rapidité

(46) $$v = h(z) = c \ \mathrm{tangh}\, \gamma z$$

dans laquelle la constante $c = u^2 \gamma$ a la dimension d'une vitesse. Dès lors, la loi de composition des vitesses colinéaires s'écrit:

$$v_1 * v_2 = c \tanh (x_1 + x_2)\gamma \qquad (47)$$

La constante c introduite est donc la vitesse limite de la propagation de l'énergie: $v \to c$ lorsque $z \to \infty$,(ce qui nécéssite $m \to 0$ si l'on veut que l'énergie et l'impulsion gardent des valeurs finies), et quel que soit v, $v * c = c$. Si les raisonnements établissant l'existence d'une vitesse limite de la propagation de l'énergie avaient été faits avant l'expérience de Michelson et Morley (cette expérience, effectuée en 1887, avait pour but de mettre en évidence le mouvement de la terre par rapport à l'éther) le résultat négatif de celle-ci aurait été interprété ainsi: aux erreurs expérimentales près, la vitesse de la lumière est la vitesse maximum de la propagation de l'énergie et la masse des "photons" lumineux est nulle.

Les constantes u , γ et λ sont fixées en fonction de c par la condition que **dans la limite des petites vitesses les mécaniques einsteinienne et newtonienne se confondent:**

la rapidité est mesurée en unité de vitesse, et comme dans la limite considérée la relation (46) donne $v = u^2 \gamma^2 z$, on peut poser $u^2 \gamma^2 = 1$ de telle sorte que la vitesse et la rapidité se confondent; compte tenu de $c = u^2 \gamma$, on obtient $u = c$ et $\gamma = 1/c$. Enfin, pour que l'énergie cinétique tende vers son expression newtonienne (40), on est conduit à poser $\lambda = \gamma^2$, d'où $\lambda = 1/c^2$.

Rassemblons nos résultats: nous avons abouti aux expressions usuelles de la mécanique relativiste:

$$v = c \tanh x/c$$

$$E = M c^2 \cosh x/c = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (48)$$

$$P = M c \sinh x/c = \frac{Mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

On peut écrire aussi la transformation de Lorentz pour l'énergie-impulsion: passant à un référentiel en mouvement avec la rapidité -y , la rapidité d'une particule est augmentée de y , son énergie et son impulsion deviennent, en utilisant les formules d'addition hyperboliques

(49)
$$E' = Mc^2 \cosh(x+y)/c = E \cosh y/c + c P \sinh y/c$$
$$P' = Mc \sinh(x+y)/c = (E/c) \sinh y/c + P \cosh y/c$$

Nous avons ainsi réalisé le projet d'établir directement les lois de la dynamique relativiste (conçue comme théorie des interactions dynamiques: collisions, désintégrations, etc...), laissant provisoirement de côté la cinématique et l'étude des propriétés de l'espace et du temps. Cette étude sera abordée dans un prochain article, avec un regard nouveau à la lumière de ce que nous avons appris par l'étude de la dynamique: on analysera d'une manière tout à fait analogue les "lois de conservation" du temps et de l'espace parcourus par plusieurs voyageurs effectuant "simultanément" le même trajet par des chemins différents. On fera voir ainsi qu'il existe un "isomorphisme" complet, non seulement dans le formalisme, mais aussi dans les principes et les déductions des propriétés de l'espace-temps par rapport à l'impulsion-énergie, reflété par l'analogie des formules (48) avec les expressions

(50)
$$t = \tau \cosh x/c$$
$$r = c\tau \sinh x/c$$

pour le temps et l'espace correpondant à un trajet parcouru à la rapidité constante x, pendant le temps propre τ (le temps indiqué par l'horloge du voyageur). Cette étude, dont l'objectif sera de montrer que des grandeurs complémentaires de la mécanique quantique sont susceptibles de modes de construction analogues, sera une étape vers une approche différente de la mécanique quantique.

REFERENCES

[0] C. Comte : Eur. J. Phys. 7 [1986] , 225-235.

[1] G.W. Leibniz : Dynamica (Leibnitzens mathematische Schriften, vol. VI)

Leibniz établit l'expression de l'énergie cinétique à partir d'une observation de Galilée sur la chute des corps : lorsque la hauteur de chute est quadruple, la vitesse est double ; et comme il faut autant d'énergie cinétique pour élever une masse de quatre livres à la hauteur d'une toise que pour élever une livre à quatre toises, il aboutit à la conservation de la quantité ΣmX^2.

Il faut rendre hommage à Leibniz pour avoir formulé la loi de conservation de l'énergie aussi clairement que c'était possible à son époque. Cependant, le recours à la loi de la chute des corps restreint la généralité de la solution à un cas limite. Avec le recul du temps, nous pouvons formuler la critique suivante : lorsque les invariances sont suffisantes pour déterminer la forme des lois, l'introduction en plus d'une loi quantitative tirée de l'observation et de la mesure comporte un risque, car en dépit de son élégance et de sa simplicité, cette loi est entachée d'une erreur expérimentale, et/ou n'est valable que dans un cas limite (pour les petites vitesses dans le présent exemple), et la théorie qui en découle n'est donc valable que dans la même limite et avec la même approximation.

[2] A. Einstein : Ann. Phys., 17, 891 [1905].

[3] G. Süssmann : Z. Naturforschung 24a, 495-498 [1969].

Cet article contient les références à certains travaux antérieurs exposant des considérations analogues, en particulier ceux de Ignatowsky, Frank et Rothe [1911].

[4] J.M. Lévy-Leblond : Am. J. Phys., 44, n° 3, 271-277 [1976].

[5] W.C. Davidon : Foundations of Physics, 5, n° 3, 525-542 [1975].

La dynamique relativiste est formulée en postulant l'équivalence de la masse et de l'énergie, sous la forme de la relation quantitative $M = E/c^2$, les autres hypothèses étant celles communes à la relativité restreinte et la mécanique newtonienne. On peut répéter ici la critique adressée à Leibniz (avec le recul du temps) à propos de l'introduction d'une loi quantitative dans les principes d'une théorie lorsque les invariances constituent des fondements suffisants ; de notre point de vue, le postulat ci-dessus est superflu, et masque le fait que les invariances galiléennes jouent le rôle principal.

[6] Marie-Antoinette Tonnelat : Histoire du Principe de Relativité, (Flammarion, Paris, 1964).

[7] L. Brillouin : Relativity Reexamined. (Academic Press).

[8] J.M. Lévy-Leblond : " What is so special about relativity " in Group Theoretical Methods in Physics, Lectures Notes in Physics, vol. 50 (Springer Verlag, 1976).

Cet article contient l'ébauche d'une construction de la mécanique relativiste dans un esprit assez proche de la nôtre, bien que nous ayons travaillé indépendamment et que nos sources d'inspiration soient sans doute différentes [7].

Cependant, on remarque que la visée pédagogique prime l'économie des principes chez cet auteur :

a) L'idée-clé, qui consiste à écrire (11) après (10), est commune, mais l'auteur l'applique seulement au changement de référentiel galiléen, laissant échapper la définition de l'énergie et de l'impulsion à partir de l'isotropie de l'espace ; cette invariance permet également, comme nous l'avons montré, de faire l'économie de la première équation hamiltonienne, utilisée par cet auteur pour établir la relation entre la vitesse et la rapidité.

b) L'auteur suppose que les fonctions conservées sont analytiques, alors qu'il suffit d'une hypothèse de régularité beaucoup plus faible et dont la signification physique est plus évidente.

c) La linéarité des formules de transformation de l'énergie et de l'impulsion d'un référentiel à un autre est admise par l'auteur comme la plus simple des relations possibles: le lecteur ne peut donc pas être convaincu du caractère extrêmement restrictif des symétries galiléennes pour les lois de la mécanique.

[9] J.M. Lévy-Leblond, J.P. Provost : Am. J. Phys. 47, (12) [1979].

[10] J.M. Lévy-Leblond : Am. J. Phys. 48, (5) [1980].

Les articles [9] et [10] exposent une définition de la rapidité en termes d'espace et de temps.

[11] J.P. Provost : "A truly relativistic approach of the concept of time" in Group Theoretical Methods in Physics, Proceedings Mexico 1980 (Springer Verlag)

[12] J. Ehlers, W. Rindler, R. Penrose : Am. J. Phys. 33,(55) 1965
Ces auteurs établissent la mécanique relativiste à partir de la conservation de l'énergie, mais en s'appuyant sur la cinématique correspondante (ils citent un travail analogue de P.Langevin, non publié, ayant fait l'objet de séminaires à Zürich et au Collège de France vers 1922). La compatibilité d'une cinématique et d'une dynamique, en dimension un, ayant des constantes λ différentes a également été remarquée par ces auteurs.

[13] L. Landau, E. Lifchitz : Mécanique, Théorie des Champs, Mécanique Quantique (Editions de la Paix, Moscou)