PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. MAROT

Anneaux excellents en caractéristique zéro

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1986, fascicule 4
« Algèbre », , p. 52-83
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1986___4_52_0>

ANNEAUX EXCELLENTS EN CARACTERISTIQUE ZERO

J. MAROT

1. INTRODUCTION

Tous les anneaux considérés sont noethériens ; et, pour un anneau A, Spec A désigne le spectre de l'anneau A muni de la topologie de Zariski.

1.1. La notion d'anneau excellent est importante en Géométrie Algébrique :

- Tous les anneaux de la Géométrie Algébrique classique sont excellents ;
- L'anneau des entiers $\mathbb{Z}$ est excellent ;
- Un anneau noethérien semi local complet est excellent (4.1) ;
- Une algèbre de type fini sur un anneau excellent est un anneau excellent (5.1) ;
- Tout anneau de séries entières convergentes à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un anneau excellent ;
- Tout anneau de séries formelles $k[X_i]\,[[Y_j]]$ sur un anneau de polynômes à coefficients dans un corps k est un anneau excellent ;
- Soit A un anneau local universellement caténaire ; alors A est excellent $\Longleftrightarrow$ son henselisé est excellent $\Leftrightarrow$ son henselisé strict est excellent ;
- Soit A un anneau excellent contenant un corps de caractéristique nulle, I un idéal de A ; alors le séparé complété de A pour la topologie I-adique est excellent ;
- Soit A un anneau excellent intègre ; alors la fermeture intégrale de A dans toute extension finie de son corps des fractions est une A-algèbre finie (5.4) ;
- Soit A un anneau excellent semi local intègre ; alors il y a bijection canonique entre le spectre maximal de sa clôture intégrale et le spectre minimal de son complété (4.5).

1.2. La notion d'anneau excellent est liée aux problèmes suivants :

Problème 1 (Local). Soit A un anneau local noethérien, de complété $\hat{A}$. A quelles conditions les propriétés de A se transmettent-elles à $\hat{A}$? On sait que, si A est régulier, de Cohen Macaulay, il en est de même de $\hat{A}$; mais, si A est réduit, normal, $\hat{A}$ ne l'est pas en général. On sait que les lieux réguliers Reg $\hat{A}$, de Cohen Macaulay CM$\hat{A}$, normal Nor $\hat{A}$, réduit Red $\hat{A}$... sont des ouverts de Spec $\hat{A}$. A quelles conditions Reg A, CMA, Nor A, Red A sont-ils ouverts dans Spec A ? Toutes ces questions sont liées aux propriétés des fibres du morphisme $A \to \hat{A}$; nous verrons que les "bons morphismes", c.à.d ceux qui permettent de résoudre ces problèmes, sont les morphismes réguliers (2.2).

Problème 2 (Global). Soit A un anneau noethérien ; Reg A, CMA, NOR A, Red A... sont ils ouverts dans Spec A ? La réponse est positive si A est semi local complet. La réponse peut être positive pour tous les localisés de A, et négative pour A(4.4) Lorsque A est intègre, l'ouverture de Nor A dans Spec A est liée à la finitude de la clôture intégrale de A.

Il s'agit de dégager une classe d'anneaux

i) ayant le meilleur comportement possible pour ces problèmes,

ii) stable par extension essentiellement de type fini, c.à.d par localisation et par changement de base de type fini (qui sont les deux opérations les plus importantes de l'Algèbre Commutative),

iii) vérifiant une condition de chaînes (universelle caténarité).

Dans cet exposé donné dans le cadre du Séminaire de Géométrie Algébrique Réelle de Rennes (1985-86), nous nous plaçons, pour des raisons de commodité, systématiquement en caractéristique zéro : plus précisément, nous supposons que tous les anneaux considérés contiennent un corps de caractéristique nulle. Ceci dit, la quasi totalité des résultats énoncés est valable sans cette hypothèse.

1.3. Définition

Soit A un anneau noethérien contenant un corps de caractéristique nulle. On dit que A est excellent s'il vérifie les trois conditions suivantes :

i) (Locale). A est universellement caténaire.

ii) (Locale). Pour tout idéal premier p de A, le morphisme canonique $A_p \longrightarrow \widehat{A}_p$ est régulier (2.2)

iii) (Globale). Pour tout quotient intègre B de A, Reg B est un ouvert de Spec B.

Enfin, on dit que A est quasi excellent s'il vérifie seulement les conditions **ii)** et **iii)**.

Commentaires

1.3.1. Universelle caténarité

Un anneau noethérien A est caténaire si, pour tout couple d'idéaux premiers p, q de A avec $p \subset q$, les chaînes maximales d'idéaux premiers $p \subset q_1 \subset \ldots\ldots \subset \ldots\ldots \subset q$ ont même longueur. La caténarité est une propriété locale : A est caténaire, si et seulement si, pour tout idéal maximal M de A,

A_M est caténaire. D'autre part, si A est caténaire, il en est de même de tout anneau de fractions de A et de tout anneau quotient de A.

Un anneau noethérien A est universellement caténaire si toute A-algèbre de type fini est caténaire : il revient au même de dire que tout anneau de polynômes $A[X_1, \ldots, X_n]$ est caténaire. Si A est universellement caténaire, il en est de même de toute A-algèbre de type fini. Enfin la propriété d'universelle caténarité est une propriété locale : A est universellement caténaire, si et seulement si, pour tout idéal maximal M de A, A_M est universellement caténaire.

Un anneau régulier, et plus généralement un anneau de Cohen Macaulay, est un anneau universellement caténaire. Il en découle, d'après le théorème de structure de Cohen, qu'un anneau noethérien semi local complet est universellement caténaire.

1.3.2. Morphismes réguliers (voir 2.2)

La notion de régularité et de morphisme régulier, est à la base de la théorie des anneaux excellents. Un morphisme $\varphi : A \longrightarrow B$ est régulier s'il est plat et si pour tout idéal premier q de B, avec $p = \varphi^{-1}(q)$, l'anneau $B \otimes_A k(p)$ est régulier (cf. 2.2) : cet anneau est la fibre de φ en p. La propriété pour un morphisme d'être régulier est une propriété locale : $\varphi : A \longrightarrow B$ est régulier, si et seulement si, pour tout idéal maximal N de B, le morphisme induit $\varphi : A_{\varphi^{-1}(N)} \longrightarrow B_N$ est régulier. Nous verrons en 4.2 que, pour la condition **ii)**, on peut se restreindre aux idéaux maximaux de A.

1.3.3. Ouverture universelle du lieu régulier

En utilisant le critère de Nagata, la condition **iii)** revient exactement à affirmer que, pour toute A-algèbre de type fini B, Reg B est un ouvert de Spec B (3.1.3). Pour que cette condition soit satisfaite, il suffit d'ailleurs, que, pour tout quotient intègre B de A, Reg B contienne un ouvert non vide de Spec B. L'ouverture du lieu régulier assure l'ouverture des autres lieux : lieu de Cohen Macaulay, lieu normal, lieu réduit.... Lorsque l'anneau A est semi local, la condition **iii)** découle de la condition **ii)** (4.3). Mais cela est faux dans le cas global (4.4).

2. MORPHISMES REGULIERS

La régularité joue un rôle fondamental dans la théorie des anneaux excellents. Nous commençons par donner quelques rappels : à ce sujet, on pourra consulter Commutative Algebra, par H. Matsumura. Nous nous plaçons systématiquement en caractéristique zéro.

2.1. Rappels divers

Soit A un anneau local noethérien, d'idéal maximal $\mathbf{M}$. On dit qu'une suite $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de A est une suite A-régulière si, pour tout i, x_i appartient à $\mathbf{M}$ et ne divise pas zéro dans $A/(x_1A + \dots\dots + x_{i-1}A)$. On appelle profondeur de A, et on note prof A, le sup des longueurs (ou nombre d'éléments) des suites A-régulières de A ; on a toujours l'inégalité : prof A $\leqslant$ dim A. On dit que l'anneau A est un anneau de Cohen Macaulay si prof A = dim A. On dit que l'anneau A est régulier s'il existe une suite A-régulière de A engendrant l'idéal maximal ; une telle suite s'appelle système régulier de paramètres de A, et, si elle est de longueur n, on a prof A = dim A = n autrement dit elle est de longueur maximum, et l'anneau A est de Cohen Macaulay.

Nous utiliserons les deux résultats suivants, que nous ne démontrons pas. (Matsumura, Commutative Algebra, 13.B, 21.C, 21.D).

Proposition 2.1.1.

Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme local plat d'anneaux locaux noethériens : on désigne par k le corps résiduel de A en son idéal maximal. Alors on a les relations :

$$\dim B = \dim A + \dim (B \otimes_A k)$$
$$\operatorname{prof} B = \operatorname{prof} A + \operatorname{prof} (B \otimes_A k).$$

Proposition 2.1.2.

Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme local plat d'anneaux locaux noethériens : on désigne par k le corps résiduel de A en son idéal maximal. Alors

i) si B est régulier, A est aussi régulier.

ii) si A et $B \otimes_A k$ sont réguliers, B est aussi régulier.

Remarque 2.1.3.

Si φ est plat et B régulier, l'anneau $B \otimes_A k$ n'est pas nécessairement régulier. Considérer l'exemple suivant $\varphi : A \to B$, k est un corps, $A = k[X]_{(X)}$, $M = XA$, $B = k[x,y]_{(x,y)}$ avec $k[x,y] = k[X,Y]/((X-1)^2+Y^2-1)$ $B \otimes_A k = k[Y]/(Y^2)$ n'est pas régulier, B est régulier ; φ est plat car B est un A-module sans torsion de type fini sur un anneau de Dedekind.

Dans le cas global, nous dirons qu'un anneau noethérien A est régulier (resp. de Cohen Macaulay) si A_p est régulier (resp. de Cohen Macaulay) pour tout idéal premier P de A ; que A est normal si A_p est intègre et intégralement clos pour tout idéal premier p de A. Si A est régulier, de Cohen Macaulay, normal ou réduit, il en est de même de tout anneau de polynômes $A[X_1, \dots, X_n]$. Ceci dit, nous utiliserons les critères suivants de Serre : (Matsumura, Commutative Algebra, 17.I).

Critère de normalité 2.1.4.

Un anneau noethérien A est normal si et seulement si A_p est régulier pour tout idéal premier p de hauteur $\leqslant 1$ et prof $A_p \geqslant 2$ pour tout idéal premier p de hauteur $\geqslant 2$.

Critère de réduction 2.1.5.

Un anneau noethérien A est réduit si et seulement si A_p est un corps pour tout idéal premier minimal p de A et prof $A_p \geqslant 1$ pour tout idéal premier p de hauteur $\geqslant 1$.

Nous allons en déduire les résultats suivants.

Proposition 2.1.6.

Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme fidèlement plat d'anneaux noethériens (non nécessairement locaux). Alors

i) si B est régulier, de Cohen Macaulay, normal, réduit, il en est de même de A.

ii) Supposons en outre que, pour tout idéal premier p de A, l'anneau $B \otimes_A k(p)$ est régulier, k(p) désignant le corps résiduel de A en p. Si A est régulier, de Cohen Macaulay, normal, réduit, il en est de même de B.

i) Soit p un idéal premier de A ; comme φ est fidèlement plat, il existe un idéal premier q de B au dessus de p. En appliquant 2.1.2 au morphisme

$\varphi : A_p \longrightarrow B_q$, on voit déjà que, si B est régulier, il en est de même de A_p pour tout idéal premier p de A, donc de A. Pour les autres propriétés, on choisit q minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de B au dessus de p ; alors

$$\dim (B_q \otimes_{A_p} k(p)) = \mathrm{prof}\ (B_q \otimes_{A_p} k(p)) = 0.$$

Les formules 2.1.1., appliquées au morphisme $\varphi : A_p \longrightarrow B_q$, donnent : $\dim A_p = \dim B_q$, $\mathrm{prof}\ A_p = \mathrm{prof}\ B_q$. Si B est de Cohen Macaulay, on a $\dim B_q = \mathrm{prof}\ B_q$, donc $\dim A_p = \mathrm{prof}\ A_p$, pour tout idéal premier p de A : A est aussi de Cohen Macaulay. Supposons B normal : si $\dim A_p \leqslant 1$, alors $\dim B_q \leqslant 1$, B_q est régulier, ainsi que A_p d'après 2.1.2 ; si $\dim A_p \geqslant 2$, alors $\dim B_q \geqslant 2$, donc $\mathrm{prof}\ B_q \geqslant 2$, soit $\mathrm{prof}\ A_p \geqslant 2$: ceci montre que A est normal (2.1.4). La démonstration est identique dans le cas réduit.

ii) Soient q un idéal premier de B, et $p = {}^a\varphi(q)$. L'anneau $B_q \otimes_{A_p} k(p)$ est régulier par hypothèse, car c'est un localisé de $B \otimes_A k(p)$: en particulier il est de Cohen Macaulay. Si A est régulier, on en déduit en appliquant 2.1.2 au morphisme $\varphi : A_p \longrightarrow B_q$ que B_q est régulier pour tout idéal premier q de B, donc que B est régulier. Si A est de Cohen Macaulay, en appliquant 2.1.1. au même morphisme $\varphi : A_p \longrightarrow B_q$, on a $\dim B_q = \mathrm{prof}\ B_q$, pour tout idéal premier q de B ; donc l'anneau B est aussi de Cohen Macaulay. Supposons A normal : si $\dim B_q \leqslant 1$, alors $\dim A_p \leqslant 1$, A_p est régulier, donc B_q est régulier d'après 2.1.2 ; si $\dim B_q \geqslant 2$, nécessairement $\mathrm{prof}\ B_q \geqslant 2$, sinon d'après 2.1.1. on aurait $\mathrm{prof}\ A_p \leqslant 1$, donc $\dim A_p \leqslant 1$ car A est normal, alors A_p est régulier, donc aussi B_q et ceci est contradictoire puisque la dimension et la profondeur de B_q sont alors distinctes. La démonstration est identique dans le cas réduit.

Proposition 2.1.7.

Soient k un corps de caractéristique zéro, A une k-algèbre noethérienne, et k' une extension de type fini de k : posons $A' = A \otimes_k k'$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est régulier, de Cohen Macaulay, normal, réduit.

ii) A' est régulier, de Cohen Macaulay, normal, réduit.

L'hypothèqe de finitude assure que l'anneau A' est noethérien. D'autre part, le morphisme canonique $\varphi : A \longrightarrow A'$ est fidèlement plat. D'après 2.1.6., il suffit donc de montrer que, pour tout idéal premier p de A, l'anneau $A' \otimes_A k(p)$ est régulier. Comme $A' \otimes_A k(p) = (k' \otimes_k A) \otimes_A k(p) = k' \otimes_k k(p)$, on est ramené à prouver le

Lemme 2.1.8.

Soient k un corps de caractéristique zéro, K une extension de k, et k' une extension de type fini de k. Alors l'anneau $k' \otimes_k K$ est régulier.

Comme k' est une extension de type fini de k, k' est une extension finie d'une extension transcendante pure $k_1 = k(t)$ de k, où $t = (t_1, \ldots, t_n)$ est un système fini d'indéterminées. Posons $B = K \otimes_k k_1$, $B' = K \otimes_k k' = B \otimes_{k_1} k'$. L'anneau B est régulier car c'est un anneau de fractions de $K \otimes_k k[t] = K[t]$, qui est régulier. Le morphisme $B \longrightarrow B'$ est fidèlement plat. D'après 2.1.6, il suffit de montrer que, pour tout idéal premier p de B, l'anneau $k(p) \otimes_B B'$ est régulier. Mais $k(p) \otimes_B B' = k(p) \otimes_{k_1} k'$; et cet anneau est un composé direct d'un nombre fini de corps (donc est régulier), puisque k' est une extension finie séparable de k_1.

2.2. Morphismes réguliers

Tous les anneaux sont supposés contenir un corps de caractéristique nulle k ; les morphismes considérés sont des morphismes d'anneaux, et non de k-algèbres.

Définition 2.2.1.

Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux noethériens (non nécessairement locaux) : on suppose que A (et B) contiennent un corps de caractéristique nulle. On dit que φ est régulier si

i) φ est plat

ii) Pour tout idéal premier q de B, avec $p = \varphi^{-1}(q)$, l'anneau $B \otimes_A k(p)$ est régulier.

L'hypothèse sur A implique que $k(p)$ est de caractéristique nulle, donc, d'après 2.1.7, pour toute extension de type fini L de $k(p)$, l'anneau $(B \otimes_A k(p)) \otimes_{k(p)} L = B \otimes_A L$ est aussi régulier.

Remarques et exemples 2.2.2.

i) La $k(p)$-algèbre $B \otimes_A k(p)$ s'appelle la fibre du morphisme φ en p.

ii) Si A est un corps k, le morphisme $k \longrightarrow B$ est régulier si et seulement si l'anneau B est régulier.

iii) La notion de morphisme régulier est <u>une notion locale</u>. Plus précisément, les assertions suivantes sont équivalentes :

α) le morphisme $\varphi : A \longrightarrow B$ est régulier.

β) Pour tout idéal maximal N de B, le morphisme

$\varphi : A_{\varphi^{-1}(N)} \longrightarrow B_n$ est régulier.

γ) Pour tout idéal premier q de B, le morphisme

$\varphi : A_{\varphi^{-1}(q)} \longrightarrow B_q$ est régulier.

iv) Si le morphisme $\varphi : A \rightarrow B$ est régulier, il en est de même des morphismes induits :

$\varphi : A/I \longrightarrow B/IB$, pour tout idéal I de A tel que $IB \neq B$.

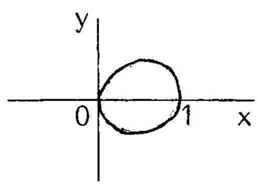
$\varphi : S^{-1}A \longrightarrow T^{-1}B$, pour toutes parties multiplicatives S de A et T de B avec $S \subseteq T$.

v) Comme $B \otimes_A k(p) = B/pB \otimes_{A/p} k(p)$, le morphisme $\varphi : A \rightarrow B$ est régulier si et seulement si pour tout idéal premier minimal p de A tel que $pB \neq B$, le morphisme induit $\varphi : A/p \rightarrow B/pB$ est régulier.

vi) Pour tout anneau A, les morphismes $A \rightarrow S^{-1}A$ et $A \longrightarrow A[X_1, \dots, X_n]$ sont réguliers.

Un morphisme étale est un morphisme régulier.

Enfin, le morphisme φ défini en 2.1.3 n'est pas régulier.



Les morphismes réguliers se comportent bien par changement de base. Plus précisément, on a le

<u>Théorème 2.2.3.</u>

Soient $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme régulier, et A' une A-algèbre de type fini. Alors le morphisme induit $\varphi' : A' \longrightarrow B' = B \otimes_A A'$ est régulier.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r, "\varphi'"] & B' \end{tikzcd}$$

Tout d'abord, le morphisme φ' est plat. Soient d'autre part q' un idéal premier de B', et p', p ses images réciproques respectivement dans A', A ;

$h(p')$ est une extension de type fini de $k(p)$, par hypothèse. Alors l'anneau

$$B' \otimes_{A'} k(p') = B \otimes_A k(p') = (B \otimes_A k(p)) \otimes_{k(p)} k(p')$$

est régulier d'après 2.1.7.

La proposition suivante, immédiate, est d'intérêt technique : elle donne des conditions équivalentes pour qu'un morphisme soit régulier. Pour tout anneau A, on désigne par $\mathrm{Reg}\, A$ l'ensemble de ses points réguliers, c.à.d. la partie de $\mathrm{Spec}\, A$ formée des idéaux premiers p tels que A_p soit régulier. Pour tout morphisme d'anneaux $\varphi : A \longrightarrow B$, on désigne par ${}^a\varphi : \mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ le morphisme correspondant sur les spectres. Enfin, si A' est une A-algèbre, on pose $B' = B \otimes_A A'$, et on désigne par $\varphi' : A' \longrightarrow B'$ le morphisme induit par φ. Nous avons alors la

Proposition 2.2.4.

Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme plat d'anneaux noethériens. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) φ est régulier.

ii) Pour toute A-algèbre de type fini A', avec $B' = B \otimes_A A'$, on a

$$^a\varphi'^{-1}(\mathrm{Reg}\, A') = \mathrm{Reg}\, B'.$$

iii) Pour toute A-algèbre finie A', avec $B' = B \otimes_A A'$, on a

$$^a\varphi'^{-1}(\mathrm{Reg}\, A') = \mathrm{Reg}\, B'.$$

iv) Pour toute A-algèbre intègre finie A', avec $B' = B \otimes_A A'$, on a

$$^a\varphi'^{-1}(\mathrm{Reg}\, A') = \mathrm{Reg}\, B'.$$

v) Pour tout quotient intègre A' de A, pour tout idéal premier q de $B' = B \otimes_A A'$ tel que ${}^a\varphi'(q) = 0$, l'anneau B'_q est régulier.

i) $\Rightarrow$ ii). D'après 2.2.3, le morphisme φ' est aussi régulier : on peut donc supposer $A' = A$ et $B' = B$. Soient $q \in \mathrm{Spec}\, B$ et $p = {}^a\varphi(q)$. Le morphisme $\varphi : A_p \longrightarrow B_q$ est régulier ; sa fibre en p est $k(p) \otimes_{A_p} B_q$, qui est un localisé de la fibre en p du morphisme $\varphi : A \longrightarrow B$; c'est un anneau régulier par hypothèse. D'après 2.1.2, $q \in \mathrm{Reg}\, B$ si et seulement si $p \in \mathrm{Reg}\, A$. On conclut.

ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) OUI !

iv) $\Rightarrow$ **v).** Comme A' est intègre, tout idéal premier q de B' tel que ${}^a\varphi'(q) = 0$ appartient à ${}^a\varphi'^{-1}(\mathrm{Reg}\ A')$, donc à $\mathrm{Reg}\ B'$.

v) $\Rightarrow$ **i).** Soient q un idéal premier de B et $p = {}^a\varphi(q)$. Avec $A' = A/p$, on a

$$B \otimes_A k(p) = B' \otimes_{A'} k(p) = S^{-1}B',$$

où S désigne la partie multiplicative des éléments non nuls de A'. L'anneau $S^{-1}B'$ est régulier, puisque, pour tout idéal premier q de $S^{-1}B'$, on a ${}^a\varphi'(q) = ($

Le théorème suivant nous sera très utile, car il nous permettra de nous ramener à de "bonnes situations".

Théorème 2.2.5

Soient $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ des morphismes d'anneaux noethériens. Alors

i) Si φ et ψ sont réguliers, $\psi \circ \varphi$ est aussi régulier.

ii) Si $\varphi \circ \psi$ est régulier et si ψ est fidèlement plat, φ est régulier.

Dans les deux cas, on vérifie le **ii)** de la proposition 2.2.4. Soit A' une A-algèbre de type fini ; alors $B' = B \otimes_A A'$ est une B-algèbre de type fini, et $C' = C \otimes_A A' = C \otimes_B B'$ une C-algèbre de type fini. Désignons par $\varphi' : A' \to B'$ et $\psi' : B' \to C'$ les morphismes induits par φ et ψ.

Montrons **i).** D'après 2.2.4, nous avons

$${}^a(\psi' \circ \varphi')^{-1}(\mathrm{Reg}\ A') = {}^a\psi'^{-1}({}^a\varphi'^{-1}(\mathrm{Reg}\ A')) = {}^a\psi'^{-1}(\mathrm{Reg}\ B') = \mathrm{Reg}\ C'.$$

Donc $\psi \circ \varphi$ est régulier d'après 2.2.4.

Montrons **ii).** D'après 2.2.4, nous avons

$$\mathrm{Reg}\ C' = {}^a(\psi' \circ \varphi')^{-1}(\mathrm{Reg}\ A') = {}^a\psi'^{-1}({}^a\varphi'^{-1}(\mathrm{Reg}\ A')).$$

Mais ${}^a\psi'$ est surjectif, puisque ψ' est fidèlement plat, donc

$${}^a\psi'(\mathrm{Reg}\ C') = {}^a\varphi'^{-1}(\mathrm{Reg}\ A').$$

D'autre part, comme ψ' et φ' sont plats, on a en utilisant 2.1.2.

$${}^a\psi'(\mathrm{Reg}\ C') \subseteq \mathrm{Reg}\ B' \quad \text{et} \quad {}^a\varphi'(\mathrm{Reg}\ B') \subseteq \mathrm{Reg}\ A'.$$

On en déduit que ${}^a\varphi'^{-1}(\mathrm{Reg}\ A') = \mathrm{Reg}\ B'$, donc que φ est régulier.

Remarque 2.2.6

Un cas usuel d'application du théorème 2.2.5 est le suivant. On veut montrer qu'un morphisme local et plat $\varphi : A \to B$ d'anneaux locaux noethériens est régulier. Soient $\hat{A}$, $\hat{B}$ les séparés

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ \hat{A} \arrow[r, "\hat{\varphi}"] & \hat{B} \end{tikzcd}$$

complétés de A et B, $\alpha : A \to \hat{A}$ et $\beta : B \to \hat{B}$ les morphismes canoniques, et $\hat{\varphi} : \hat{A} \to \hat{B}$ le morphisme induit par φ. Si le morphisme α est régulier, il suffira de montrer que $\hat{\varphi}$ est régulier ; car alors $\hat{\varphi} \circ \alpha$ est régulier, donc $\beta \circ \varphi$, donc φ.

Pour tout anneau A, nous désignerons par Reg A, CMA, Nor A, Red A, l'ensemble des points $p \in \operatorname{Spec} A$ tels que A_p soit régulier, de Cohen Macaulay, normal, réduit. Soit U_A l'un quelconque de ces ensembles ; nous avons la

Proposition 2.2.7.

Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme régulier. Alors

i) ${}^a\varphi^{-1}(U_A) = U_B$.

ii) Si U_A est ouvert dans Spec A, U_B est ouvert dans Spec B.

iii) Supposons en outre que φ est fidèlement plat. Si U_B est ouvert dans Spec B, U_A est ouvert dans Spec A.

i) Nous l'avons montré (2.2.4) lorsque U_A = Reg A. Les autres cas découlent de suite de 2.1.6.

ii) C'est la continuité de ${}^a\varphi$.

iii) Découle de i), en remarquant que, lorsque φ est fidèlement plat, la topologie de Spec A est quotient de celle de Spec B.

3. OUVERTURE DU LIEU REGULIER ET DU LIEU NORMAL

Etant donné un anneau noethérien A, nous énonçons des critères pour que $\mathrm{Reg}\, A$ et $\mathrm{Nor}\, A$ soient ouverts dans $\mathrm{Spec}\, A$: nous nous limitons à ces deux lieux. Nous nous plaçons toujours en caractéristique zéro.

3.1. Ouverture du lieu régulier

Dans ce n°, nous démontrons d'abord un critère d'ouverture (critère de Nagata), puis nous examinons à quelle condition la propriété d'ouverture se transmet par extension de type fini, enfin nous étudions le cas des algèbres de type fini sur un anneau semi local complet.

Le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 3.1.1.

Soient A un anneau noethérien, et U une partie de $\mathrm{Spec}\, A$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) U est ouvert dans $\mathrm{Spec}\, A$.
ii) a) U est stable par générisation.
b) Pour tout $p \in U$, U contient un ouvert non vide de $V(p)$.

L'implication i) $\Rightarrow$ ii) est évidente. Montrons que ii) $\Rightarrow$ i). $\mathrm{Spec}\, A$ est réunion finie de fermés irréductibles V_i ; comme toute partie F de $\mathrm{Spec}\, A$ est fermée dans $\mathrm{Spec}\, A$ si et seulement si ses traces $F \cap V_i$ sont fermées dans V_i pour tout i, on peut supposer que $\mathrm{Spec}\, A$ est irréductible. Alors tout ouvert non vide de $\mathrm{Spec}\, A$ est dense. Soient maintenant U une partie de $\mathrm{Spec}\, A$ vérifiant ii), et F son complémentaire dans $\mathrm{Spec}\, A$. Désignons par $\overline{F}$ la fermeture de F, et par $V(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les composantes irréductibles (en nombre fini) de $\overline{F}$. Par hypothèse, F est stable par spécialisation ; pour montrer que U est ouvert, il suffit donc de prouver que $p_i \in F$ pour tout i. Raisonnons par l'absurde, et supposons par exemple que $p_1 \notin F$. D'après ii) b), il existe $a \in A$ tel que $\emptyset \neq D(a) \cap V(p_1) \subset U$. D'autre part, pour tout $i \geqslant 2$, il existe $b_i \notin p_1$, $b_i \in p_i$ puisque $p_i \not\subset p_1$. Alors, avec $f = a.b_2.\dots..b_n$, on a $\emptyset \neq D(f) \cap V(p_1) \subseteq U$ et $D(f) \cap V(p_i) = \emptyset$ pour tout $i \geqslant 2$. On en déduit que $D(f) \cap \overline{F} \subsetneq U$, soit $D(f) \cap F = \emptyset$. Ceci est contradictoire, car $p_1 \in \overline{F}$ et $D(f)$ est un voisinage ouvert de p_1. En définitive, $p_i \in F$ pour tout i, et U est ouvert.

Le critère d'ouverture de Nagata découle du lemme précédent.

Théorème 3.1.2. (Critère de Nagata)

Soit A un anneau noethérien. On suppose que, pour tout $p \in \mathrm{Reg}\, A$, $\mathrm{Reg}(A/p)$ est un voisinage de p dans $V(p) = \mathrm{Spec}(A/p)$ Alors $\mathrm{Reg}\, A$ est un ouvert de Spec A.

Comme Reg A est stable par générisation, il suffit de vérifier le **ii) b)** du lemme 3.1.1. Nous commençons par établir la propriété suivante (P) : "Pour tout $p \in \mathrm{Reg}\, A$, il existe $f \in A-p$ tel que $D(f) \cap \mathrm{Reg}(A/p) \subseteq \mathrm{Reg}\, A$". Comme A_p est régulier, il existe des éléments $a_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ de p formant un système régulier de paramètres de A_p. Si I désigne l'idéal $\sum_{i=1}^{r} a_i A$ de A, nous avons $IA_p = pA_p$; donc il existe $f \in A-p$ tel que $IA_f = pA_f$. Soit maintenant $q \in D(f) \cap \mathrm{Reg}(A/p)$: l'anneau A_q/pA_q est régulier. D'autre part, les a_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ engendrent l'idéal $pA_q = p(A_f)_q$ de A_q et forment une suite A_q-régulière. On en déduit que A_q est régulier, donc que q appartient à Reg A. Ceci démontre (P).

Cela étant, d'après l'hypothèse, il existe un ouvert W de Spec A contenant p tel que $W \cap V(p) \subseteq \mathrm{Reg}(A/p)$ D'après la propriété (P), on a $D(f) \cap W \cap V(p) \subseteq \mathrm{Reg}\, A$; de plus $D(f) \cap W \cap V(p) \neq \emptyset$, puisque p appartient à $D(f) \cap W$. Le lemme 3.1.1 permet de conclure.

Etant donné un anneau noethérien A, nous allons donner une condition nécessaire et suffisante (faisant intervenir les quotients intègres de A) pour que, pour toute A-algèbre de type fini A', Reg A' soit ouvert dans Spec A'. La proposition suivante apporte déjà un élément de réponse.

Proposition 3.1.3.

Soient A un anneau noethérien intègre, de corps des fractions K, et A' une A-algèbre intègre de type fini contenant A, de corps des fractions K' : on suppose que K est de caractéristique zéro. Alors, si Reg A contient un ouvert non vide de Spec A, Reg A' contient un ouvert non vide de Spec A'.

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Réduction au cas où A est régulier

Par hypothèse, il existe $a \in A$, $a \neq 0$ tel que A_a soit régulier quitte à remplacer A par A_a (et A' par A'_a), on peut supposer A régulier.

Réduction au cas où A' est une A-algèbre libre finie

Comme K' est une extension de type fini de K, K' est une extension finie d'une extension transcendante pure $K_1 = K(t)$ de K, où $t = (t_1, \dots, t_n)$ désigne un système fini d'indéterminées. Posons $A_1 = A[t]$; comme K' est finie sur K_1, il existe une A_1-algèbre finie A'_1 contenant A_1 de corps des fractions K'. Comme A' et A'_1 sont des A-algèbres

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A'_1 \arrow[d] & A' \arrow[dl] \\ K \arrow[r] & K_1 \arrow[r] & K' & \end{tikzcd}$$

intègres de type fini et de même corps des fractions K', il existe $s \in A'$, $s \neq 0$, $s_1 \in A'_1$, $s_1 \neq 0$ tels que les A-algèbres A'_s et $(A'_1)_{s_1}$ soient isomorphes. On peut donc supposer que $A' = A'_1$, autrement dit que A' est une A_1-algèbre finie. Mais A_1 est un anneau régulier comme A ; donc, quitte encore à remplacer A par A_1 (et K par K_1), on se ramène au cas où A' est une A-algèbre finie et K' une extension finie de K. Alors, d'après (**Bourbaki, Algèbre Commutative, ch.2, §5, n° 1**), il existe $a \in A$, $a \neq 0$ tel que A'_a soit une A_a-algèbre libre finie (dont le rang est celui de K' sur K). Quitte enfin à remplacer A par A_a (et A' par A'_a), on peut supposer que A' est une A-algèbre libre finie.

Fin de la démonstration

Soit $(w_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ une base de A' sur A. Comme K' est séparable sur K, le discriminant de cette base

$$d = \det (\mathrm{Tr}_{A'/A} (w_i w_j)) = \det (\mathrm{Tr}_{K'/K} (w_i w_j))$$

est non nul et appartient à A. Nous allons montrer que A'_d est régulier. Quitte à remplacer A par A_d (et A' par A'_d), on peut supposer que d est inversible dans A ; il s'agit alors de montrer que A' est régulier. Le morphisme canonique $A \longrightarrow A'$ est fidèlement plat puisque A' est un A-module libre ; d'autre part, l'anneau A est régulier. D'après la proposition 2.1.6,il suffit d'établir que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, l'anneau $A'(\mathfrak{p}) = A' \otimes_A k(\mathfrak{p})$ est régulier.

Si $\overline{w_i}$ désigne l'image de w_i dans $A'(p)$, $(\overline{w_i})_{1\leqslant i\leqslant r}$ est une base de $A'(p)$ sur $k(p)$ de discriminant $\overline{d} \neq 0$, puisque d est inversible dans A. Ceci montre que $A'(p)$ est séparable sur. $k(p)$. Mais $A'(p)$ est de dimension zéro ; donc $A'(p)$ est composé direct d'un nombre fini de corps : c'est un anneau régulier. Ceci détermine la démonstration.

Remarque 3.1.4.

Nous avons un énoncé analogue, en remplaçant Reg A par Nor A, Reg A' par Nor A'.

Nous pouvons maintenant prouver le

Théorème 3.1.5.

Soit A un anneau noethérien contenant un corps de caractéristique zéro. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Pour toute A-algèbre de type fini A', Reg A' est un ouvert de Spec A'.

ii) Pour tout quotient intègre B de A, Reg B contient un ouvert non vide de Spec B.

L'implication i) $\Rightarrow$ ii) est triviale. Montrons que ii) $\Rightarrow$ i). D'après le critère de Nagata, il suffit de prouver que, pour tout $p' \in$ Reg A', Reg A'/p' contient un ouvert non vide de Spec A'/p'. On peut donc supposer que A' est une A-algèbre intègre de type fini. Soient p le noyau du morphisme $A \longrightarrow A'$, et $B = A/p$; A' est canoniquement une B-algèbre de type fini, contenant B. Le corps des fractions de B est de caractéristique nulle, puisque A construit un corps de caractéristique zéro. Comme Reg B contient un ouvert non vide de Spec B, Reg A' contient un ouvert non vide de Spec A' d'après (3.1.3).

Donnons deux applications de ce résultat.

Corollaire 3.1.6.

Soit k un corps de caractéristique zéro. Alors, pour toute k-algèbre de type fini A', Reg A' est un ouvert de Spec A'.

En effet, la condition ii) de 3.1.5. est alors trivialement satisfaite.

Théorème 3.1.7.

Soit A un anneau noethérien semi local complet contenant un corps de caractéristique nulle. Alors, pour toute A-algèbre de type fini A', Reg A' est un ouvert de Spec A'.

On vérifie le **ii)** de 3.1.5. Tout quotient intègre B de A est un anneau local complet. Soient k le corps résiduel de B en son idéal maximal, et n la dimension de B. D'après le théorème de Cohen (voir par exemple **Commutative Algebra, par H. Matsumura**), comme B contient un corps de caractéristiq zéro, il existe un morphisme injectif fini $C = k[[T_1,\dots, T_n]] \to B$. Comme C est régulier, la proposition 3.1.3 montre que Reg B contient un ouvert non vide de Spec B. On conclut par 3.1.5.

3.2. Ouverture du lieu normal

Dans ce n°, nous démontrons quelques critères d'ouverture du lieu normal d'un anneau noethérien ; puis, nous en donnons une application au problème de la finitude de la fermeture intégrale d'un anneau noethérien intègre, dans une extension finie de son corps des fractions.

Propositon 3.2.1.

Soit A un anneau noethérien intègre. On suppose que Nor A contient un ouvert non vide de Spec A. Alors Nor A est ouvert dans Spec A.

Par hypothèqe, il existe $a \in A$, $a \neq 0$, tel que A_a soit normal. Désignons par E l'ensemble fini $\{p \in \mathrm{Ass}_A A/aA /$ soit $h^t p > 1$, soit $h^t p = 1$ et A_p n'est pas régulier$\}$; et par F l'ensemble $\bigcup_{p \in E} V(p)$, qui est un fermé de Spec A. Nous allons montrer que Nor A = Spec A - F. En effet, soit $q \in$ Nor A, alors $q \notin F$: sinon il existe $p \in E$ tel que $p \subseteq q$, A_p est normal comme A_q, $p \in \mathrm{Ass}_{A_p} A_p/aA_p$, donc $h^t p = 1$, ceci est en contradiction avec l'appartenance de p à E. Réciproquement, soit $q \notin F$: pour montrer que A_q est normal, nous vérifions le critère de Serre (2.1. 4) ; soit $p \subseteq q$, alors $p \notin E$, nous considérons deux cas :

- si $a \notin p$, A_p est normal, car c'est un localisé de A_a, donc si $h^t p \leqslant 1$, A_p est régulier, et si $h^t p \geqslant 2$, prof $A_p \geqslant 2$,
- si $a \in p$, A_p est normal si $h^t p \leqslant 1$ car $p \notin E$, et si $h^t p \geqslant 2$, $p \notin \mathrm{Ass}_A A/_{aA}$, donc prof $A_p \geqslant 2$.

Proposition 3.2.2.

Soit A un anneau noethérien intègre, K son corps des fractions, et A' sa clôture intégrale. Alors, si A' est une A-algèbre finie, $\mathrm{Nor}\, A$ est ouvert dans $\mathrm{Spec}\, A$.

Il est alors immédiat qu'il existe $a \in A$, $a \neq 0$ tel que $A \subseteq A' \subseteq A_a$. On en déduit que A_a est normal. D'ailleurs, dans ce cas, $\mathrm{Nor}\, A$ est l'ouvert $D(I)$, où I est le conducteur $A : A'$ de A' dans A (Bourbaki, Algèbre Commutative ch 5, §1, n° 5).

Proposition 3.2.3.

Soit A un anneau noethérien. Alors $\mathrm{Nor}\, A$ est ouvert dans $\mathrm{Spec}\, A$, si et seulement si, pour tout idéal premier minimal p de A appartenant à $\mathrm{Nor}\, A$, $\mathrm{Nor}\, A$ est un voisinage de p.

La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, on peut supposer, exactement comme dans la démonstration du lemme 3.1.1 que $\mathrm{Spec}\, A$ est irréductible. Soit p l'idéal premier minimal de A. Si A_p n'est pas un corps, alors $\mathrm{Nor}\, A = \emptyset$; si A_p est un corps, A est intègre et son corps des fractions est A_p ; par hypothèse, $\mathrm{Nor}\, A$ contient un ouvert non vide de $\mathrm{Spec}\, A$ puisque p appartient à $\mathrm{Nor}\, A$; donc $\mathrm{Nor}\, A$ est ouvert dans $\mathrm{Spec}\, A$ d'après 3.2.1.

Corollaire 3.2.4.

Soit A un anneau noethérien. Si $\mathrm{Reg}\, A$ est ouvert dans $\mathrm{Spec}\, A$, alors $\mathrm{Nor}\, A$ est ouvert dans $\mathrm{Spec}\, A$.

Soit p un idéal premier minimal de A appartenant à $\mathrm{Nor}\, A$; A_p est un corps, donc $p \in \mathrm{Reg}\, A$. Comme $\mathrm{Reg}\, A$ est ouvert et est contenu dans $\mathrm{Nor}\, A$, $\mathrm{Nor}\, A$ est un voisinage de p. On conclut par 3.2.3.

Corollaire 3.2.5.

Soit A un anneau noethérien semi local complet contenant un corps de caractéristique nulle. Alors, pour toute A-algèbre de type fini A', $\mathrm{Nor}\, A'$ est un ouvert de $\mathrm{Spec}\, A'$.

Cela découle de 3.1.7 et 3.2.4.

Le théorème qui suit est une application de ces critères d'ouverture au problème de la finitude de la fermeture intégrale d'un anneau noethérien intègre, dans une extension finie de son corps des fractions.

Théorème 3.2.6.

Soient A un anneau noethérien intègre, K son corps des fractions, K' une extension finie de K, et A' la fermeture intégrale de A dans K'. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A' est une A-algèbre finie.

ii) a) Il existe $a \in A$, $a \neq 0$ tel que A'_a soit une A_a-algèbre finie.

b) Pour tout idéal maximal M de A, A'_M est une A_M-algèbre finie.

Il suffit de montrer que **ii)** $\Rightarrow$ **i)**. Bien entendu, l'assertion **ii)b)** est aussi vérifiée pour tout idéal premier p de A. D'après **ii)a)**, il existe un nombre fini d'éléments $u_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ de A' tels que $A'_a = A_a[u_1, \ldots u_n]$. Alors la A-algèbre $A'' = A[u_1, \ldots, u_n]$ est finie ; elle contient A, et admet K' comme corps des fractions ; de plus A''_a est intégralement clos puisque $A''_a = A'_a$. Il suffit de montrer que A' est une A''-algèbre finie, puisque $A'' \subseteq A'$. Comme l'hypothèse **ii)b)** est encore satisfaite lorsqu'on remplace A par A'', on peut supposer $K' = K$ et $A'' = A$, autrement dit que A_a est intégralement clos.

Soit alors (A_λ) la famille filtrante croissante des sous-A-algèbres finies de K contenant A : on a évidemment $A' = \varinjlim A_\lambda$, et $A_a = \varinjlim (A_\lambda)_a$. Donc $(A_\lambda)_a$ est intégralement clos pour tout λ ; et, d'après 3.2.1, $\mathrm{Nor}\, A_\lambda$ est un ouvert de $\mathrm{Spec}\, A_\lambda$ pour tout λ . D'après le théorème de Cohen Seidenberg, le morphisme entier $\varphi_\lambda : \mathrm{Spec}\, A_\lambda \to \mathrm{Spec}\, A$ est fermé ; donc, avec $S_\lambda = \mathrm{Spec}\, A_\lambda - \mathrm{Nor}\, A_\lambda$ $T_\lambda = \varphi_\lambda(S_\lambda)$ est un fermé de $\mathrm{Spec}\, A$ pour tout λ. Soit alors p un idéal premier de A ; d'après **ii)b)**, pour tout λ, $(A_\lambda)_p$ est une A_p-algèbre finie ; donc il existe λ_o tel que, pour tout $\lambda \geqslant \lambda_o$, $(A_\lambda)_p = A'_p$. Ceci signifie que $(A_\lambda)_p$ est normal, donc que p n'appartient pas à T_λ : il en découle que $\bigcap_\lambda T_\lambda = \emptyset$. Comme $\mathrm{Spec}\, A$ est noethérien et que la famille des T_λ est une famille filtrante décroissante de fermés de $\mathrm{Spec}\, A$, il existe alors λ_1 tel que $T_{\lambda_1} = \emptyset$. Ceci signifie que A_{λ_1} est intégralement clos ; donc que A', qui est alors égal à A_{λ_1} , est une A-algèbre finie.

4. ANNEAUX SEMI LOCAUX EXCELLENTS

Nous nous plaçons toujours en caractéristique nulle. Dans ce n°, nous montrons essentiellement qu'un anneau noethérien semi local complet est excellent ; puis nous donnons quelques propriétés des anneaux semi locaux excellents.

Théorème 4.1.

Soit A un anneau noethérien semi local complet, contenant un corps de caractéristique nulle. Alors l'anneau A est excellent.

On doit vérifier les propriétés suivantes i), ii), iii).

i) L'anneau A est universellement caténaire. Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout idéal maximal M de A, l'anneau A_M est universellement caténaire. Mais A_M est aussi complet ; donc, d'après le théorème de Cohen, A_M est quotient d'un anneau local régulier, donc est universellement caténaire.

ii) Pour tout quotient intègre B de A, $\operatorname{Reg} B$ est un ouvert de $\operatorname{Spec} B$. Cela découle de 3.1.7.

iii) Pour tout idéal premier p de A, le morphisme canonique $A_p \longrightarrow \hat{A}_p$ est régulier. Nous procédons en plusieurs étapes.

Réduction au cas où A est local intègre complet

Posons $B = A_p$; on doit montrer que, pour tout idéal premier q de B, l'anneau $\hat{B} \otimes_B k(q)$ est régulier. Soient $L = k(q)$ et r l'image réciproque de q dans A, on a $\hat{B} \otimes_B k(q) = (\widehat{B/q}) \otimes_{B/q} L$, et $B/_q = (A/r)_p$. Quitte à remplacer A par A/r, donc B par B/q, on peut supposer que A est intègre complet, donc local ; L est alors le corps des fractions de A et de B. L est de caractéristique nulle, puisque A contient un corps de caractéristique zéro.

Réduction au cas où A est local régulier complet.

Comme A est local intègre complet, d'après le théorème de Cohen, il existe un anneau local régulier R et un morphisme injectif fini $R \rightarrow A$. Soit p_o l'image réciproque de p dans R ; posons $S = R_{p_o}$, $C = A_{p_o}$; et notons

K le corps des fractions de R et S.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d] & S = R_{p_o} \arrow[rr] \arrow[d] & & K \arrow[d] \\
A \arrow[r] & C = A_{p_o} \arrow[r] \arrow[d] & B = A_p \arrow[r] \arrow[d] & L \\
& \hat{C} \arrow[r] & \hat{B} &
\end{tikzcd}$$

Comme le morphisme $R \to A$ est injectif et fini, il en est de même des morphismes $S \to C$ et $K \to L$. D'autre part, comme C est entier sur S, les idéaux maximaux de C sont les idéaux premiers de A au dessus de p_o. On en déduit que B est un localisé de l'anneau semi local C en un idéal maximal ; $\hat{B}$ est alors un localisé de $\hat{C}$ en un idéal maximal, et $\hat{B} \otimes_B L$ est un anneau de fractions de $\hat{C} \otimes_C L$. Mais, comme C est fini sur S, on a $\hat{C} = \hat{S} \otimes_S C$; donc $\hat{C} \otimes_C L = \hat{S} \otimes_S L = (\hat{S} \otimes_S K) \otimes_K L$. Comme K est de caractéristique zéro, il nous suffit de montrer, d'après 2.1.7, que $\hat{S} \otimes_S K$ est un anneau régulier. Cela revient à supposer $A = R$ et $B = S$, c.à.d. A local régulier complet.

Fin de la démontration

Comme A est local régulier, il en est de même de B, donc de $\hat{B}$, a fortiori de $\hat{B} \otimes_B L$ qui est un anneau de fractions de $\hat{B}$. Ceci termine la démonstration.

Corollaire 4.2.

Soit A un anneau noethérien contenant un corps de caractéristique nulle. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout idéal premier p de A, le morphisme $A_p \to \hat{A}_p$ est régulier.
ii) Pour tout idéal maximal M de A, le morphisme $A_M \to \hat{A}_M$ est régulier.
Si A est semi local, **i)** et **ii)** sont encore équivalentes à **iii)** :
iii) Le morphisme $A \to \hat{A}$ est régulier.

L'implication **i)** $\Rightarrow$ **ii)** est triviale. Montrons que **ii)** $\Rightarrow$ **i)**.
Soient p un idéal premier de A, et M un idéal maximal de A contenant p : posons $B = A_M$ et $C = \widehat{A_M}$. Par hypothèse, le morphisme $\varphi : B \to C$ est régulier ; comme φ est fidèlement plat, il existe un idéal premier q de C au dessus

de p. Considérons alors le diagramme commutatif canonique ci-contre. Le morphisme $\hat{\varphi}$, induit par φ est fidèlement plat. Comme C contient un corps de caractéristique nulle, le morphisme

$$\begin{array}{ccc} B_p & \xrightarrow{\varphi} & C_q \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \hat{B}_p & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \hat{C}_q \end{array}$$

β est régulier, d'après le théorème 4.1. D'après 2.2.5, il en est de même de $\hat{\varphi} \circ \alpha = \beta \circ \varphi$, donc de α, puisque $\hat{\varphi}$ est fidèlement plat. Ceci démontre **i)**, puisque $B_p = A_p$.

Lorsque A est semi local, **ii)** et **iii)** sont équivalentes. En effet le morphisme $A \to \hat{A}$ est régulier si et seulement si, pour tout idéal maximal N de $\hat{A}$, le morphisme induit $A_{N \cap A} \longrightarrow (\hat{A})_N$ est régulier ; mais $N \cap A$ est un idéal maximal M de A, et $(\hat{A})_N = \widehat{A_M}$; donc $A \to \hat{A}$ est régulier si et seulement si $A_M \to \widehat{A_M}$ est régulier pour tout idéal maximal M de A.

Nous dirons qu'un anneau noethérien A, contenant un corps de caractéristique nulle, est <u>quasi excellent</u> s'il vérifie toutes les conditions de définition d'un anneau excellent, sauf la condition de caténarité, autrement dit, s'il vérifie :

ii) Pour tout idéal premier p de A, le morphisme $A_p \to \hat{A}_p$ est régulier.

iii) Pour tout quotient intègre B de A, Reg B est un ouvert de Spec B.

Le théorème suivant montre que, dans le cas semi local, la condition **iii)** découle de la condition **ii)**.

<u>**Théorème 4.3.**</u>

Soit A un anneau noethérien semi local contenant un corps de caractéristique nulle. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) L'anneau A est quasi excellent.

ii) Le morphisme $A \to \hat{A}$ est régulier.

iii) Pour tout idéal maximal M de A, le morphisme $A_M \longrightarrow \widehat{A_M}$ est régulier.

iv) Pour tout quotient intègre B de A, si φ désigne le morphisme canonique $B \to \hat{B}$, on a ${}^a\varphi^{-1}(\text{Reg } B) = \text{Reg } \hat{B}$.

. **i)** $\Rightarrow$ **ii)** $\Leftrightarrow$**iii)** C'est le corollaire 4.2.

. **ii)**$\Leftrightarrow$ **iv)**. C'est un cas particulier de la proposition 2.2.4, en remarquant que $\widehat{B} = B \otimes_A \widehat{A}$.

. **ii)** $\Rightarrow$ **i)**. D'après 4.2, pour tout idéal premier p de A, le morphisme $A_p \longrightarrow \widehat{A}_p$ est régulier. D'autre part, l'assertion **iv)** est vérifiée ; et Reg $\widehat{B}$ est un ouvert de Spec $\widehat{B}$ d'après 3.1.7, puisque $\widehat{B}$ contient un corps de caractéristique nulle. Comme φ est fidèlement plat, la topologie de Spec B est quotient de celle de Spec $\widehat{B}$: on déduit alors de **iv)** que Reg B est un ouvert de Spec B. Ceci montre que A est un anneau quasi-excellent.

Remarque 4.4.

Le théorème précédent ne s'étend pas au cas global. Il existe un anneau noethérien A de dimension 2, contenant un corps de caractéristique nulle, tel que Reg A ne soit pas ouvert dans Spec A et que, pour tout idéal premier p de A, le morphisme $A_p \rightarrow \widehat{A}_p$ soit régulier.

La clôture intégrale d'un anneau excellent intègre A est une A-algèbre finie. Plus précisément, nous avons le

Théorème 4.5.

Soient A un anneau noethérien semi local réduit excellent ; $\widehat{A}$ son complété, et A' sa fermeture intégrale dans son anneau total des fractions. On suppose que A contient un corps de caractéristique nulle. Alors

i) $\widehat{A}$ est réduit.

ii) A' est une A-algèbre finie.

iii) La fermeture intégrale de $\widehat{A}$ dans son anneau total des fractions s'identifie canoniquement au complété de A', autrement dit $(\widehat{A})' = \widehat{A'}$.

iv) Il y a bijection canonique entre le spectre minimal de $\widehat{A}$ et le spectre maximal de A'.

i) Par hypothèse A est réduit et le morphisme $A \rightarrow \widehat{A}$ est régulier. Donc, d'après 2.1.7, $\widehat{A}$ est réduit.

ii) On va montrer que ii) découle de **i)**. Soient $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les idéaux premiers minimaux de $\widehat{A}$; pour tout i, posons $B_i = \widehat{A}/p_i$ et soit L_i le corps des fractions de B_i. Alors, l'anneau total des fractions de $\widehat{A}$ est $L = \prod_i L_i$; la fermeture intégrale de $\widehat{A}$ dans L est $(\widehat{A})' = \prod_i B_i'$, où, pour tout i, B_i' désigne la clôture intégrale de B_i dans L_i.

$$\begin{tikzcd}
\hat{A} \arrow[r] \arrow[d] & \prod_i B_i \arrow[r] & (\hat{A})' = \prod_i B'_i \arrow[r] & L = \prod_i L_i \arrow[d, "\wr"] \\
A' \otimes_A \hat{A} \arrow[r] \arrow[urr] & & K \otimes_A \hat{A} \arrow[r] & L
\end{tikzcd}$$

Comme B_i est intègre complet, B'_i est une B_i-algèbre finie, donc une $\hat{A}$-algèbre finie ; alors $(\hat{A})'$ est une $\hat{A}$-algèbre finie. D'autre part, si K désigne l'anneau total des fractions de $\hat{A}$, $A' \otimes_A \hat{A}$ s'identifie à un sous-anneau de $K \otimes_A \hat{A}$, qui s'identifie lui-même à un sous-anneau de L, puisque tout élément de A, non diviseur de zéro dans A, est non diviseur de zéro dans $\hat{A}$. Comme $A' \otimes_A \hat{A}$ est entier sur $\hat{A}$, $A' \otimes_A \hat{A}$ s'identifie à une sous-$\hat{A}$-algèbre de $(\hat{A})'$ contenant $\hat{A}$. Comme $(\hat{A})'$ est finie sur $\hat{A}$, il en est alors de même de $A' \otimes_A \hat{A}$. On en déduit, par fidèle platitude de $\hat{A}$ sur A, que A' est fini sur A. Ceci démontre **ii)** ; en outre $\hat{A'} = A' \otimes_A \hat{A}$.

iii) D'après **ii)**, $\hat{A'}$ et $(\hat{A})'$ ont même anneau total des fractions : de plus $\hat{A'} \subseteq (\hat{A})'$. Pour montrer que $\hat{A'} = (\hat{A})'$, il suffit alors de prouver que $\hat{A'}$ est normal. Cela découle de 2.1.7, puisque A' est normal et que le morphisme $A' \to \hat{A'}$ est régulier d'après 2.2.4.

iv) Nous avons

d'une part $\hat{A'} = \prod_j \widehat{A'_{M_j}}$, où M_j décrit le spectre maximal de A'

d'autre part $(\hat{A'}) = \prod_i (\hat{A}/p_i)'$, où p_i décrit le spectre minimal de $\hat{A}$.

La bijection entre le spectre maximal de A' et le spectre minimal de $\hat{A}$ découle de l'égalité $\hat{A'} = (\hat{A})'$, et du fait que $(\hat{A}/p_i)'$ est un anneau local.

<u>Corollaire 4.6</u>

Soit A un anneau local excellent. Alors

i) A est réduit si et seulement si $\hat{A}$ est réduit.

ii) A est intègre intégralement clos si et seulement si $\hat{A}$ est intègre intégralement clos.

iii) Les assertions suivantes sont équivalentes :

α) A est intègre et sa clôture intégrale est un anneau local.

β) A est intègre.

γ) le henselisé ${}^hA$ de A est intègre.

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que A est unibranche.

5. ANNEAUX EXCELLENTS : CAS GLOBAL

Dans ce n°, nous montrons essentiellement qu'une algèbre de type fini sur un anneau excellent est un anneau excellent ; puis nous donnons quelques propriétés des anneaux excellents. Nous nous plaçons toujours en <u>caractéristique nulle.</u>

<u>Théorème 5.1.</u>

Soit A un anneau excellent. Alors toute A-algèbre de type fini est un anneau excellent.

Soit B une A-algèbre de type fini. On doit vérifier les propriétés suivantes i), ii), iii) :

i) <u>L'anneau B est universellement caténaire</u>. Cela découle de suite de l'universelle caténarité de A.

ii) <u>Pour tout quotient intègre C de B</u>, Reg C est un ouvert de Spec C. C'est le théorème 3.1.5.

iii) <u>Pour tout idéal premier N de B</u>, le morphisme canonique $B_N \to \widehat{B_N}$ est régulier : d'après 4.2, on peut supposer N maximal. La démonstration se fait en plusieurs étapes. En raisonnant par récurrence sur le nombre de générateurs de B, on peut supposer que B est engendrée par un seul élément t ; autrement dit on a $B = A[t]$. Désignons par M l'image réciproque de N dans A.

<u>Réduction au cas où A est local complet d'idéal maximal M.</u>

Comme B_N est un localisé de $A_M[t]$ et que A_M est excellent, on peut supposer A local d'idéal maximal M.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B = A[t] \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & B_N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\beta'"] & \widehat{B_N} \arrow[d, "\widehat{\beta'}"] \\
A \arrow[r] & B' = B \otimes_A \hat{A} \arrow[r] & B'_{N'} \arrow[r, "\varphi'"] & \widehat{B'_{N'}}.
\end{tikzcd}$$

Considérons le diagramme commutatif ci-dessus. Le morphisme α est régulier fidèlement plat par hypothèse ; il en est de même de β d'après 2.2.4. Il existe alors un idéal premier N' de B' au dessus de N ; le morphisme β' est régulier fidèlement plat, et $\widehat{\beta}'$ est fidèlement plat. Il découle alors de 2.2.5 que, si φ' est régulier, il en est de même de φ. Autrement dit, on peut supposer $B = B'$; et comme $B' = \hat{A}[t]$, cela revient à supposer que A est local complet d'idéal maximal M.

Réduction au cas où A local complet intègre d'idéal maximal M.

Posons $C = B_N$; pour montrer que le morphisme $\varphi : C \longrightarrow \widehat{C}$ est régulier, il suffit d'après le théorème 4.3 de prouver que, pour tout quotient intègre D de C, on a ${}^a\psi^{-1}(\mathrm{Reg}\ D) = \mathrm{Reg}\ \widehat{D}$, ψ désignant le morphisme canonique $\psi : D \longrightarrow \widehat{D}$. L'anneau D est de la forme C/I, où I est un idéal premier

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B = A[t] \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\wr"] & \widehat{D} \arrow[d, "\wr"] \\
A/A\cap I \arrow[r] & B/B\cap I \arrow[r] & C/I \arrow[r, "\sim"] & D \arrow[r, "\psi"] & \widehat{D}
\end{tikzcd}$$

de C. Toutes les hypothèses sont conservées si on remplace A par $A/A\cap I$, B par $B/B\cap I$, et C par D. On peut donc supposer que A est local intègre complet d'idéal maximal M ; toutes les flèches horizontales sont alors injectives, et il s'agit de montrer que

(1) $\quad {}^a\psi^{-1}(\mathrm{Reg}\ D) = \mathrm{Reg}\ \widehat{D}$.

Fin de la démonstration

On raisonne par l'absurde. On suppose que (1) n'est pas vérifiée, autrement dit que l'on a

$${}^a\psi^{-1}(\mathrm{Reg}\ D) \cap \mathrm{Sing}\ \widehat{D} \neq \emptyset.$$

Mais cet ensemble est localement fermé dans Spec $\widehat{D}$; car, d'après 3.1.7, Sing $\widehat{D}$ est un fermé de Spec $\widehat{D}$, et Reg D est un ouvert de Spec D puisque D est un localisé d'une algèbre de type fini sur un anneau local complet. D'après le lemme 5.2 ci-dessous, il existe $p' \in {}^a\psi^{-1}(\mathrm{Reg}\ D) \cap \mathrm{Sing}\ \widehat{D}$ tel que $\dim \widehat{D}/p' \leqslant 1$: posons $p = {}^a\psi(p')$. Alors D_p est régulier, et $\widehat{D}_{p'}$ ne l'est pas. Donc la fibre au point fermé $\widehat{D}_{p'} \otimes_{D_p} k(p)$ n'est pas régulière (2.1.2). Comme cette fibre est un localisé de $\widehat{D} \otimes_D k(p)$, pour obtenir une contradiction, il nous suffit de montrer que l'anneau $\widehat{D} \otimes_D k(p)$ est régulier. Mais $\widehat{D} \otimes_D k(p) = \widehat{(D/p)} \otimes_{D/p} k(p)$; en raisonnant comme plus haut (conservation des hypothèses si on remplace A par

$A/A\cap p$, B par $B/B\cap p$, D par D/p), on peut supposer $p = 0$: $k(p)$ est alors le corps des fractions K de D.

$$(2) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[dr] & \widehat{D} \arrow[d] \\ & & & \widehat{D}/p' \end{tikzcd}$$

Nous distinguons deux cas.

Premier cas : A est un corps k.

L'anneau B est de dimension $\leqslant 1$, puisqu'on a $B = k[t]$; et, comme D est un localisé de B, on a aussi $\dim D \leqslant 1$. La clôture intégrale D' de D est une D-algèbre finie, puisque D est un localisé d'une algèbre de type fini sur un corps (**Bourbaki, Alg. Comm., Ch. 5, §3, n° 2**). On en déduit que D' est noethérien semi local régulier de dimension $\leqslant 1$; $\widehat{D'}$ est aussi régulier, et on a $\widehat{D'} = \widehat{D} \otimes_D D'$. Enfin la fibre $\widehat{D} \otimes_D K$ est régulière, car $\widehat{D} \otimes_D K$, qui s'écrit encore $\widehat{D'} \otimes_{D'} K$, est un anneau de fractions d'un anneau régulier. La démonstration est terminée dans ce cas.

Second cas : A n'est pas un corps

Posons $V = \widehat{D}/p'$; et soit N' l'idéal maximal de V. L'idéal maximal M de A n'est pas nul par hypothèse, et $MV \neq 0$ puisque A est un sous anneau de V. Alors, puisque $\dim V \leqslant 1$, N' est la racine de MV ; il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $N'^p \subseteq MV$. La suite (2) donne la suite de morphismes :

$$A/M \longrightarrow B/N \xrightarrow{\sim} D/ND \xrightarrow{\sim} \widehat{D}/N\widehat{D} \xrightarrow{\sim} V/N'.$$

Le morphisme $A/M \longrightarrow B/N$ est fini puisque B est une A-algèbre de type fini, et que les idéaux M et N sont maximaux. On en déduit que V/N' est un A-module de type fini. Une récurrence immédiate à partir de la suite exacte de A-modules :

$$0 \longrightarrow N'^n/_{N'^{n+1}} \longrightarrow V/_{N'^{n+1}} \longrightarrow V/_{N'^n} \longrightarrow 0,$$

montre alors que $V/_{N'^n}$ est un A-module de type fini pour tout entier $n \geqslant 1$. On en déduit que V/MV est un A-module de type fini, puisque V/MV est quotient de $V/_{N'^p}$ pour un entier p convenable. Comme V est séparé pour la topologie M-adique et que A est complet, il en découle que V est un A-module de type fini. Comme D est contenu dans V, D est aussi un A-module de type fini. Alors

D est complet, et la fibre $\hat{D} \otimes_D K$ est un corps. Nous obtenons encore une contradiction.

Ceci termine la démonstration du théorème 5.1, modulo le

<u>Lemme 5.2.</u>

Soient A un anneau noethérien, et Z une partie non vide localement fermée de Spec A. Alors Z contient un idéal premier p tel que $\dim A/p \leqslant 1$.

Géométriquement parlant, cela signifie que Z contient un point ou une courbe. Diminuant Z au besoin, nous pouvons supposer que Z est de la forme $D(a) \cap V(P)$, avec $a \in A$, $P \in Z$, $a \notin P$; alors Z est homéomorphe à Spec $(A/P)_a$. Soient M un idéal maximal de $(A/P)_a$, p l'image réciproque de M dans A, et α l'image de a dans A/p ; alors $A/p[\alpha^{-1}] = A_a/pA_a = (A/P)_a/M$ est un corps. Ceci signifie que tous les idéaux premiers non nuls de A/p contiennent α; ce qui est impossible si $\dim A/p > 1$ car, alors, A/p possède une infinité d'idéaux premiers de hauteur 1.

Nous donnons maintenant un peu dans le désordre quelques propriétés des anneaux excellents.

<u>Proposition 5.3.</u>

Soit A un anneau excellent. Alors Reg A, CMA, Nor A, Red A sont ouverts dans Spec A.

C'est vrai pour Reg A par définition ; nous ne l'avons montré que pour Nor A (proposition 3.2.).

<u>Théorème 5.4.</u>

Soit A un anneau excellent. Alors A est un anneau de Nagata ; c.à.d pour toute A-algèbre intègre de type fini B, la fermeture intégrale de B dans toute extension finie de son corps des fractions est une B-algèbre finie.

Un anneau de Nagata est encore appelé anneau universellement japonais.

Soient K le corps des fractions de B, K' une extension finie de K, et B' la fermeture intégrale de B dans K' ; on doit montrer que B' est une B-algèbre finie. Il existe une B-algèbre finie B'', contenant B, et ayant K' pour corps des fractions. Comme B' est la clôture intégrale de B'', il suffit de montrer que B' est une B''-algèbre finie. Mais, d'après le théorème 5.1., B'' est un anneau excellent ; on peut donc supposer $B'' = A$ et $K' = K$. On est ramené à montrer que la clôture intégrale A' d'un anneau excellent intègre A est une A-algèbre finie. D'après 5.3, $\mathrm{Nor}\, A$ est un ouvert non vide de $\mathrm{Spec}\, A$. D'autre part, pour tout idéal premier p de A, A_p est un anneau excellent ; donc d'après le théorème 4.5, A'_p est une A_p-algèbre finie. Il résulte alors de 3.2. que A' est une A-algèbre finie.

Proposition 5.5

Soit A un anneau noethérien vérifiant la condition ii) des anneaux excellents : "Pour tout idéal maximal M de A, le morphisme $A_M \to \widehat{A_M}$ est régulier" ; soient I un idéal de A contenu dans son radical, et A^* le séparé complété de A pour la topologie I-adique. Alors

i) Le morphisme canonique $\varphi : A \to A^*$ est régulier.
ii) L'anneau A^* est régulier, de Cohen Macaulay, normal, réduit si et seulement s'il en est de même de A.

$$\begin{array}{ccc} A_M & \xrightarrow{\varphi} & (A^*)_N \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \widehat{A_M} & \xrightarrow{\sim} & \widehat{(A^*)_N} \end{array}$$

Le morphisme φ est fidèlement plat puisque I est contenu dans le radical de A. D'après la proposition 2.1.6, il suffit de montrer que φ est régulier. Soient N un idéal maximal de A^*, M son image réciproque dans A, qui est un idéal maximal de A. Considérons le diagramme commutatif ci contre ; par hypothèse, α est régulier, donc (2.2.5) aussi φ, puisque $\beta \circ \varphi = \alpha$ et que β est fidèlement plat.

La propriété de quasi excellence descend par morphisme régulier fidèlement plat. Plus précisément,

Proposition 5.6.

Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme régulier fidèlement plat d'anneaux noethériens. Alors, si B est quasi excellent, A est aussi quasi excellent.

Soit p un idéal premier de A ; on doit montrer que le morphisme canonique $\alpha : A_p \longrightarrow \widehat{A}_p$ est régulier, et que $\operatorname{Reg} A/p$ est ouvert dans $\operatorname{Spec} A/p$. Comme φ est fidèlement plat, il existe un idéal premier q de B au dessus de p. Considérons le diagramme commutatif ci-contre : par hypothèse, β est régulier ; donc, d'après 2.2.5, $\widehat{\varphi} \circ \alpha = \beta \circ \varphi$ est régulier, il en est de même de α puisque φ est fidèlement plat. Enfin le morphisme $A/p \longrightarrow B/pB$ est régulier fidèlement plat d'après 2.2.2. D'après le théorème 5.1, $\operatorname{Reg} B/pB$ est un ouvert de $\operatorname{Spec} B/pB$; donc $\operatorname{Reg} A/p$ est un ouvert de $\operatorname{Spec} A/p$ d'après 2.2.7.

$$\begin{tikzcd}
A_p \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B_q \arrow[d, "\beta"] \\
\widehat{A}_p \arrow[r, "\widehat{\varphi}"] & \widehat{B}_q
\end{tikzcd}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ANDRE : Localisation de la lissité formelle Manuscripta Math. 13, 1974, 297-307.

[2] N. BOURBAKI : Algèbre Commutative.

[3] A. GROTHENDIECK : EGA IV (n° 24-28-32).

[4] J. MAROT : Limite inductive plate de P-anneaux, Journal of Algebra, 57 (2), 1979, 484-496.

[5] J. MAROT : P-rings and P-homomorphisms, Journal of Algebra 87 (1), 1984, 136-149.

[6] H. MATSUMURA : Commutative Algebra.

[7] H. MATSUMURA : Formal power series rings over polynomial rings (Number theory, Algebraic geometry, Commutative Algebra, Kinokuniya, Tokyo, 1973, 511-528).

[8] H. MATSUMURA : Recent developments in the theory of excellent rings, Math. studies 74, 1982, 81-84.

[9] J. NISHIMURA : On ideal adic completion of noetherian rings, J. Math. Kyoto Univ. 21, 1981, 153-169.

[10] C. ROTTHAUS : Komplettierung ausgezeichneter Ringe, Math. Ann. 253, 1980, 213-226.

[11] C. ROTTHAUS : Komplettierung semilokaler quasi-ausgezeichneter Ringe, Nagoya Math. J. 76, 1979, 173-180.

[12] P. VALABREGA : On the excellent property for rings of restricted power series, J. Math. Kyoto Univ. 15, 1975, 378-395.

[13] H. SEYDI : Sur la completion des anneaux excellents (preprint).