DENIS ROTILLON

Anneaux d'invariants de groupes finis Intersections complètes

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 4
« Séminaires de mathématiques - science, histoire et société », , p. 40-70
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985___4_40_0>

ANNEAUX D'INVARIANTS DE GROUPES FINIS INTERSECTIONS COMPLETES

Par Denis ROTILLON

Sauf mention contraire, on considérera le cas $k = \mathbb{C}$, corps des nombres complexes.

Pour V espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$, G un sous-groupe fini de GL(V). On considère alors l'action naturelle de G sur $S = S(V)$ l'algèbre symétrique de V sur $\mathbb{C}$ ou encore l'action de G sur $S = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ anneau des polynômes à n variables sur $\mathbb{C}$.

Posant $R = S^G$ pour l'anneau des invariants de S par l'action de G ou encore $R = S^G = \{P \in S \mid gP=P \ \ \forall g \in G\}$ on s'intéresse au problème suivant.

Problème : Quelles conditions imposer à G pour que S^G soit un anneau d'intersection complète ?

Peut-on obtenir une classification complète de tous ces groupes G ? En fait la solution à ce problème n'a été donnée que récemment par Nakajima et (peut-être) Gordeev.

Après avoir rappelé quelques résultats généraux sur les actions de groupes finis, on donnera les étapes successives qui ont jalonné les recherches dans ce domaine, en mettant en évidence la complexité du problème par l'introduction d'exemples et contre-exemples.

Ensuite on présentera les théorèmes fondamentaux qui sont les outils essentiels en vue d'aboutir à notre classification de groupes annoncée.

Pour la classification proprement dite, on se contentera d'en esquisser les grandes lignes, et de renvoyer pour les détails à [N,W] puis ensuite aux articles de Nakajima [N_1 à N_5].

1ère Partie - Résultats généraux sur les anneaux d'invariants de groupes finis et évolution du problème.

Définition : L'anneau d'invariant $R = S^G$ sera dit d'intersection complète (qu'on abréviera en IC) s'il est isomorphe à un anneau $\mathbb{C}[Y_1,\dots,Y_s]/J$, J étant un idéal minimalement engendré par r éléments $(f_1,\dots,f_r)$ avec la condition $n = \dim S = \dim R = s-r$, on appellera s la dimension de plongement de R.

Dans le cas particulier $r = 1$, on dit que R est une hypersurface. En dehors du cas le plus favorable où l'anneau R est un anneau de polynômes (engendré donc par n éléments algébriquement indépendants) cette situation est la meilleure possible, compte tenu qu'une intersection complète est de Gorenstein, lequel est nécessairement de Cohen-Macaulay.

Rappelons donc les théorèmes connus caractérisant les groupes pour lesquels l'anneau d'invariant a les différentes propriétés respectivement énumérées (en dehors du fait que dans tous les cas pour G fini, on a R de Cohen-Macaulay).

Théorème A [Sh, T] : S^G est polynômial si et seulement si G est engendré par des pseudo-réflexions.

On dira alors que G est un groupe de réflexions, lesquels sont complètement classifiés dans [Sh, T], la classification étant reprise sous un autre point de vue, plus récemment dans [Co].

Définition : $\sigma \in G$ est une pseudo-réflexion si $rg(\sigma - I) = 1$. I étant la matrice identité de $GL(V)$.

Théorème B : Si G ne contient pas de pseudo-réflexions, S^G est de Gorenstein si et seulement si $G \subset SL(V)$.

En fait la restriction aux groupes sans réflexions n'est qu'apparente puisque si G contient des pseudo-réflexions, pour H son sous groupe engendré par toutes les pseudo-réflexions de G, on peut considérer l'action linéaire de G/H, sans réflexion sur S^H anneau de polynômes d'après le théorème A. Et on a $S^G = (S^H)^{G/H}$ et le théorème B s'applique.

Comme un anneau IC est de Gorenstein, on peut se restreindre pour notre étude au cas $G \subset SL(V)$.

Examinons maintenant les résultats successivement obtenus sur les anneaux d'invariants IC en essayant de donner un aperçu chronologique (ou presque).

Le premier résultat connu depuis très longtemps traite du cas où $x = \dim V = 2$.

Proposition : Si $n = \dim V = 2$ et G son groupe fini de $SL(V)$, S^G est une hypersurface.

Ces groupes sont classés en 5 catégories et liés aux groupes d'isométrie des polyèdres réguliers. Les hypersurfaces obtenues interviennent dans la classification des singularités quotient dites de Klein, qui avait calculé explicitement S^G dans les cinq cas. On aboutit ainsi à la résolution des singularités rationnelles "points doubles" divisées en cinq types (A_m), (D_m), (E_6), (E_7), (E_8), ce qui explique l'abondance des références sur ces sous groupes finis de $SL(V)$ $\dim V = 2$. On se contentera de renvoyer à [Sp] comme exposé moderne sur la question.

L'autre exemple connu d'hypersurface était fourni par l'action du groupe alterné $\mathcal{A}_n$ représenté par les matrices de permutation de déterminant 1.

Cela donne $S^{\mathcal{A}_n} = \mathbb{C}[\sigma_1,\dots,\sigma_n]/(\Delta^2 - P(\sigma_1,\dots,\sigma_n))$ avec $\Delta = \prod_{i<j}(X_i - X_j)$ discriminant. (Polynôme alterné) P polynôme, $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ fonctions symétriques élémentaires. Comme $S^{\mathcal{S}_n} = \mathbb{C}[\sigma_1,\dots,\sigma_n]$ anneau de polynômes avec $\mathcal{S}_n$ groupe symétrique engendré par des pseudo-réflexions, on est conduit à partir d'un groupe de réflexion G, à se demander quant a-t-on S^H IC avec $H = G \cap SL(V)$? C'est ce qu'a fait notamment Stanley dans [St_1] qui obtient

Théorème C [St_1] : Si $G = H \cap SL(V)$, H groupe de réflexions, alors S^G est IC si et seulement si l'ensemble des ordres des pseudo-réflexions est complètement irréductible.

La condition mentionnée étant compliquée on renvoie à [St_1], mais comme corollaire, on obtient effectivement des exemples d'hypersurfaces et d'anneaux IC.

Proposition [St_1] : Soit $G = H \cap SL(V)$, H groupe fini de réflexions de $GL(V)$. Si l'indice $[H:G] = p^k$ puissance d'un nombre premier p, alors $R = \underline{S^G \text{ est IC}}$. Si $[H:G] = p$, alors S^G est une <u>hypersurface</u>.

Le problème est que, en général une intersection complète ne se présente pas sous la forme ci-dessus, et élargissant cette situation, Stanley élabore la conjecture suivante

Conjecture de Stanley [St_3] : Si S^G est IC, il existe H groupe de réflexions tel que $H' \subset G \subset H$, H' étant le commutateur de H.

Bien qu'elle s'avère fausse, cette conjecture est valide dans de nombreux cas, notamment en dimension supérieure, et fournit un cadre d'étude satisfaisant.

Par ailleurs, les premiers contre-exemples apparaissent en dimension 3, ce qui amène à examiner quelques cas intéressants survenant dans cette étude pour n=3.

Exemple 1 : ε_m est une racine m primitive de l'unité. Watanabe trouve une famille de contre-exemples donnée par des groupes imprimitifs.

Notation : $<\sigma_1,\dots,\sigma_n>$ désigne le groupe engendré par $\sigma_1,\dots,\sigma_n$, $(a_1,\dots,a_n)$ est la matrice diagonale de $SL(n,\mathbb{C})$ dont les éléments diagonaux sont $a_1,\dots,a_n$.

$$G = \left\langle (\varepsilon_m,\varepsilon_m^{-1},1),(\varepsilon_{7m},\varepsilon_{7m}^{2},\varepsilon_{7m}^{-3}),\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T \right\rangle \quad m \geqslant 1$$

$$|G| = 21m^2 \quad S^G = \mathbb{C}[X^{7m}+Y^{7m}+Z^{7m},X^mY^{3m}+X^mZ^{3m}+Y^mZ^{3m},X^{3m}Y^{2m}+Y^{3m}Z^{2m}+X^{2m}Z^{3m},X^{5m}Y^m+Y^{5m}Z^m+Z^{5m}X^m,XYZ] .$$

On a bien S^G IC puisque la dimension de plongement est cinq. On vérifie par ailleurs que la conjecture de Stanley n'est pas satisfaite.

Par ailleurs, le même type de groupe

$$G = \langle (\varepsilon_m, \varepsilon_m^{-1}, 1), (\varepsilon_{nm}, \varepsilon_{nm}^{q}, \varepsilon_{nm}^{q^2}), T \rangle \quad \begin{array}{l} 1+q+q^2 \equiv 0 \ (\text{non}) \\ (n,q) = 1 \end{array}$$

ne donne d'anneau invariant IC que si $(n,q) = (3,1)$ ou $(n,q) = (7,2)$ (cas précédent) (cf. [W.R]).

Ceci illustre déjà la difficulté d'obtenir des conditions générales sur les groupes.

Exemple 2 : Dans [R] on obtient deux contre exemples à la conjecture avec des groupes primitifs.

- Le premier a pour dimension de plongement cinq

$$G_1 = \langle (\varepsilon_3, \varepsilon_3^{-1}, 1), T, \frac{1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_3^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3^2 \\ 1 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \rangle.$$

- Le second est une hypersurface

$$G_2 = \langle G_1 , \frac{1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_3^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \varepsilon_3^2 \\ 1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 & 1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, (\theta, \theta, \theta\varepsilon_3) \rangle \quad \theta^3 = \varepsilon_3^2 .$$

Ce nouvel exemple à l'intérêt de mettre en défaut l'énoncé (*) suivant qui jusque là était vérifié (notamment pour n=2).

(*) Si S^G est une hypersurface, alors $G = H \cap SL(V)$ avec H groupe de réflexion.

Exemple 3 : Dans [Go_1], Gordeev obtient deux séries de contre-exemples de groupes imprimitifs en <u>dimension 4</u>.

- $G_n = A_n.H$ produit semi-direct avec $A_r = <(\varepsilon_n,1,1,1),(1,\varepsilon_n,1,1)(1,1,\varepsilon_n,1),(1,1,1,1)>$

$$\text{et} \qquad H = < \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} >$$

- $\overline{G}_n = \overline{A}_n.H$ avec $\overline{A}_n = <(\varepsilon_n,\varepsilon_n^{-1},1,1),(1,\varepsilon_n,\varepsilon_n^{-1},1),(1,1,\varepsilon_n,\varepsilon_n^{-1})>$

On a S^{G_n} IC avec une dimension de plongement cinq (donc hypersurface)

$S^{G_n} = \mathbb{C}[f_1,f_2^2,f_3^2,f_4^2,f_2f_3f_4]$ avec $f_1 = X_1^n + X_2^n + X_3^n + X_4^n$

$f_2 = X_1^n - X_2^n + X_3^n - X_4^n$; $f_3 = X_1^n + X_2^n - X_3^n - X_4^n$; $f_4 = X_1^n - X_2^n - X_3^n + X_4^n$.

Puis $S^{\overline{G}_n} = S^{G_n}[X]/(X^n - \Theta)$ $\Theta = (X_1X_2X_3X_4)^n \in S^{G_n}$ d'où S^{G_n} IC $\Longrightarrow$ $S^{\overline{G}_n}$ IC .

Toujours dans $[Go_1]$, Gordeev obtient un résultat général en grande dimension.

Exemple 4 : A l'aide de la classification dans [M] des sous groupes primitifs de $GL(n,\mathbb{C})$ contenant des pseudo-réflexions ($n>4$) puis des classifications dans [H,W] , $[H_1]$, [Wa] des groupes primitifs contenant des matrices avec deux valeurs propres distinctes de l'unité il obtient

Théorème : Si $G \subset GL(V)$ $\dim V = n$, G fini, irréductible primitif tel que S^G est IC, alors si $n \geqslant 11$ alors $G = \mathcal{S}_{n+1}$ ou $G = \mathcal{A}_{n+1}$ groupes symétriques et alternés (vérifiant donc la conjecture de Stanley).

Enfin signalons le résultat général permettant d'obtenir de nouveaux anneaux IC.

Théorème (cf. [Go_1]) : Soit G groupe fini de réflexions de GL(V) et $\Gamma = [G,G]$ son commutateur.

Alors S^{Γ} est IC.

Auparavant dans [W_2], Watanabe avait complètement classé les groupes Gabéliens, en toute généralité pour lesquels S^G est IC, nous y reviendrons dans la classification plus tard.

Ensuite, Nakajima classe les hypersurfaces et obtient la caractérisation suivante améliorant le résultat de Stanley.

Théorème D [N_3] : Si $n > 10$, $G \subset SL(n,\mathbb{C})$ G fini. S^G est une hypersurface si et seulement si $G = \tilde{G} \cap SL(n,C)$ avec $\tilde{G}$ groupe de réflexions dans lequel les ordres des pseudo-réflexions sont tous égaux à l'indice $[\tilde{G} : G]$ (les $\tilde{G}$ étant classés).

Remarques

1) La condition suffisante a d'abord été établie dans [N_2] et est valide sans l'hypothèse $n > 10$. La condition nécessaire est démontrée dans le cas où G n'a pas de réflexions.

2) Pour la condition nécessaire, on a vu déjà pour $n = 3,4$, que la propriété $\tilde{G} = G \cap SL(n,\mathbb{C})$ pouvait être mise en défaut. D'où l'importance de la restriction $n > 10$.

Enfin la classification complète des S^G IC revient également à Nakajama annoncée dans [N_3], puis développée dans [N_4,N_5], achevée à la fin de 1983 et résumée dans [N,W], dont on s'inspirera pour esquisser la classification dans la 3ème partie.

Par ailleurs, la même année, Gordeev dans [Go_2] publie des résultats sur la classification des groupes réductibles et imprimitifs établissant, pour ces derniers groupes, la validité de la conjecture de Stanley pour $n>4$.

Dans une lettre à l'auteur de cette note, il signale l'achèvement de la classification de IC dans un preprint. Preprint, dont pour ma part, je n'ai plus eu de nouvelles.

En conclusion, bien que fausse, la conjecture de Stanley couvre une grande majorité de cas les contre-exemples provenant essentiellement des dimensions 3 et 4.

2ème Partie - Théorèmes fondamentaux

Nous exposons ici les théorèmes essentiels qui permettent d'obtenir des conditions nécessaires assez fortes pour classifier tous les groupes finis G tels que S^G soit IC.

Théorème 1 [K,W] : Soit G sous groupe fini de $GL(n,\mathbb{C})$ agissant sur $S = \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$. Si S^G est IC, alors G est engendré par $\{\sigma \in G \mid rg(\sigma - I) \leqslant 2\}$.

Nous donnerons ici la première démonstration de ce théorème dû à Kac et Watanabe, dont la teneur est topologique. On pourra trouver d'autres versions dans [Go_1] , [N_3] et [N,W], mais elles ont toutes en commun l'utilisation du concept de "pureté".

Définition : Si $(A,\mathfrak{m})$ est un anneau local noethérien et $X = \mathrm{Spec}(A)$ $X' = \mathrm{Spec}(A) - \mathfrak{m}$. A est <u>pur</u> si le foncteur $\varphi = Et(X) \longrightarrow Et(X')$ induit par l'inclusion $X' \hookrightarrow X$ est une équivalence de catégories $Et(X)$ désignant la catégorie des revêtements étales de X.
(Ou encore tout revêtement étale de X' se prolonge de façon unique en un revêtement étale au-dessus de X).

Le théorème de pureté de Zariski-Magata dans [SGA_2, X, 3.3] donne un tel exemple qui nous sera utile puisque ayant trait à des anneaux IC.

Théorème de Pureté : Si A local est IC et $\dim A \geqslant 3$, alors A est pur.
On peut démontrer maintenant le théorème 1.

Démonstration du théorème 1 : On utilise deux lemmes topologiques, et pour $Y = \mathrm{Spec}(R)$, on dira que Y est simplement connexe si Y n'admet pas de revêtement étale non trivial. Considérons le morphisme quotient $f : \mathrm{Spec}(S) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R) = Y$, $(R = S^G) \mathbb{C}^n = \mathrm{Spec}(S)$ et $\mathrm{Spec}(R)$ sont simplement connexes. En effet, pour $\mathrm{Spec}(R)$ on a un <u>cône</u>, donc contractile sur son sommet [on entend par là si R a une dimension de plongement m, correspondant au plongement $\mathrm{Spec}(R) \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ invariant par les transformations $(c_1,\ldots,c_m) \longrightarrow (t^{s_1}c_1,\ldots,t^{s_m}c_m)$ $t \in \mathbb{C}$ $s_i > 0$. On va appliquer à $Y = \mathrm{Spec}(R)$ simplement connexe le lemme suivant :

Lemme 1 : Soit Y schéma simplement connexe, Z sous schéma fermé et Y' Y-Z. Si Y est IC et $\mathrm{codim}\, Z \geqslant 3$, alors Y' est simplement connexe.

Preuve : On utilise le théorème de pureté aux anneaux locaux $R_{\mathfrak{p}}$ IC avec $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geqslant 3$ $\mathfrak{p} \in Y$ qui sont donc purs ou encore les éléments $\mathfrak{p}$ de Z sont tels que $R_{\mathfrak{p}}$ pur, on en déduit alors que $\Pi_1(Y') = \Pi_1(Y)$ d'où le résultat. (SGA_1, X 3.3). Le couple (Y,Z) étant pur.

Lemme 2 : Soient X schéma intègre, G groupe fini de k automorphismes de X. Soient $Y = X/G$ et $f : X \longrightarrow Y$ le morphisme quotient. Pour tout point fermé x de X, G_x est le stabilisateur de x. Si Y est simplement connexe, G est engendré par les G_x.

Preuve : Si $H = \langle G_x \,,\, x \in X \rangle$ sous groupe normal de G. Pour l'action de G/H sur X/H, tout $g \neq e$ n'admet aucun point fixe, donc le morphisme $X/H \longrightarrow Y$ est étale (SGA_1, I 10.1). Comme Y est simplement connexe, ce morphisme est trivial, cela donne $G/H = \{e\}$ ou $G = H$.

Revenons au morphisme quotient $f : X = \mathrm{Spec}(S) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R) = Y$. Pour $g \in G$, L_g est le sous espace vectoriel des éléments de $V = \langle X_1,\ldots,X_n \rangle$ ($\mathbb{C}$ espace vectoriel) fixes par g. Puis $L = \bigcup_{g \in G} L_g$ avec $\underset{V}{\mathrm{codim}}\, L_g \geqslant 3$ $L \subset S$, f induit l'application $X' = X-\bar{L} \longrightarrow Y-Z = Y'$, $\bar{L}$ étant l'image de L dans X. On a alors $\operatorname{codim}_Y Z \geqslant 3$ et le lemme 1 s'applique, d'où Y' est simplement connexe.

Comme $Y' = X'/G$, le lemme 2 donne que G est engendré par les $G_{x'}$ avec $x' \in X$, d'où par définition de X', $g \in G_{x'}$ pour $x' \in X'$ si et seulement si $\operatorname{codim}_V L_g \leqslant 2$ ou de façon équivalente $\operatorname{rg}(g-I) \leqslant 2$.

Remarques.

1) On peut démontrer ce théorème pour tout corps k à condition de prendre les hensélisés de Spec(S) et Spec(R) (cf. [K,W]).

2) On peut montrer plus généralement que si $R = S^G$ a une dimension de plongement de m, et un idéal des relations engendré par m-n+s éléments, G est engendré par les $g \in G$ tels que $\operatorname{rg}(g-I) \leqslant s+2$ à condition de prendre $k = \mathbb{C}$. Ce résultat contient alors (s=0), le cas précédent qui correspond à R IC.

3) La condition du théorème 1 est bien entendu non suffisante pour que S^G soit IC. On a même un exemple simple en dimension 2. Soit $G = (\varepsilon_3, \varepsilon_3)$ matrice diagonale de GL_2. Alors $\mathbb{C}[X,Y]^G$ n'est pas IC puisque $R = \mathbb{C}[X,Y]^G = \mathbb{C}[X^3,X^2Y,XY^2,Y^3]/(I)$ avec $I = (P_2^2-P_1P_3, P_1P_4-P_2P_3, P_2P_4-P_3^2)$, les P_i désignant les générateurs de R.

Egalement en dimension 3, on peut prendre les exemples non IC cités à l'exemple 1 de la première partie ou encore voir [W,R].

Le deuxième théorème fondamental concerne la dimension de plongement d'un anneau d'invariants IC que nous noterons $\operatorname{emb}(S^G)$.

Théorème 2 [G,W] : Si S^G est IC alors $\operatorname{emb}(S^G) \leqslant 2n-1$ (G agissant sur $S = \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$).

Démonstration du théorème 2 : On va appliquer à l'anneau local régulier S_M, M étant l'idéal maximal $M=(X_1,\ldots,X_n$ le théorème suivant :

Théorème [L.T] : Tout anneau local régulier est pseudo-rationnel.

Remarque : Nous omettrons la définition de pseudo-rationnel dans la mesure où elle comporte des aspects très techniques. Dans le cas présent, on a pseudo-rationnel équivalent à rationnel. On utilise simplement la propriété suivante des anneaux locaux pseudo-rationnels démontrée dans [L.T].

Théorème [L.T] : Soit (A,M) local pseudo-rationnel de dimension n, I idéal, $\forall\,\lambda\in\mathbb{N}$, $\overline{I}^{\lambda+n-1}\subset I^{\lambda}$, ($\overline{I}$ clôture intégrale).

Corollaire : Soit $J\subset I$ idéaux d'un pseudo-rationnel (local) de dimension n et I entier sur J. Alors $I^n\subset J$.

On fait $\lambda=1$ dans le théorème précédent, d'où $\overline{J}^n\subset J$.

I entier sur J donne $I\subset\overline{J}$, d'où le résultat.

On peut revenir maintenant à l'anneau $B=S_M$ et $A=(S^G)_{M\cap A}$. On considère une réduction minimale J de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A (qui existe toujours dans le cas d'un corps de base infini et auquel de toute façon on peut se ramener par localisation $R \dashrightarrow R[T]_{\mathfrak{m}\overline{R}[T]}=R_1$, R_1 restant pseudo-rationnel).

J étant engendré par une suite régulière. $\mathfrak{m}$ est entier sur J puis $\mathfrak{m}B$ sur JB et on applique le résultat précédent à ces deux idéaux, d'où $(\mathfrak{m}B)^n\subset JB$.

B est pure sur A et donc $\mathfrak{m}^n = (\mathfrak{m}B)^n \cap A \subset JB \cap A$. Soit $\mathfrak{m}^n \subset J$ et A/J artinien avec $\mathrm{emb}(A/J) = \mathrm{emb}(A)-n$. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{emb}(A/J) \leqslant n-1$.

Ceci est assuré par l'utilisation de ce lemme appliqué à A/J qui est également IC comme A.

Lemme : Si $(A,\mathfrak{m})$ est local artinien, IC et $\mathfrak{m}^n = 0$ on a $\mathrm{emb}(A) \leqslant n-1$.

Démonstration : $A = B/(f_1,\dots,f_s)$ B local régulier, $\dim B = \mathrm{emb}(A) = s$ $\{f_1,\dots,f_s\}$ B-suite régulière. Soit $(X_1,\dots,X_s)$ un système régulier de paramètres de B, on a donc $f_j = \sum_{i=1}^{s} a_{ij}X_i$ avec a_{ij} dans B.

Posons $\Delta = \det(a_{ij})$ $1 \leqslant i,j \leqslant s$. Cet élément Δ est dans $(X_1,\dots,X_s)^s$ et son image dans A est un élément de $\mathfrak{m}^s$, $\mathfrak{m}$ idéal maximal de A.

Les propriétés de complexes de Koszul nous donnent le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^s_B(B/(X_1,\dots,X_s),B) & \xrightarrow{\sim} & B/(X_1,\dots,X_s) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \times\Delta \\
\mathrm{Ext}^s_B(B/(f_1,\dots,f_s),B) & \xrightarrow{\sim} & B/(f_1,\dots,f_s) = A
\end{array} .$$

La flèche de droite étant la multiplication par Δ, c'est-à-dire l'application : $\bar{b} \longrightarrow \overline{\Delta b}$ (les classes étant prises dans les anneaux quotients).

L'algèbre homologique nous montre que de plus cette application est injective, par conséquent l'élément $\bar{\Delta} \in \mathfrak{m}^s \subset A$ est non nul. Comme $\mathfrak{m}^n=0 \Longrightarrow s < n$ c.q.f.d.

Comme pour le théorème précédent, cela ne fournit pas de condition suffisante pour les anneaux IC.

Toutefois dans le cas n=3 on a

Proposition : Si G est un sous groupe fini de $SL(3,\mathbb{C})$, S^G est IC si et seulement si $\operatorname{emb}(S^G) \leqslant 5$.

Preuve : En effet, en codimension inférieure ou égale à 2, un anneau de Gorenstein est IC d'après un résultat de Serre.

Dès n=4, on retrouve des contre-exemples.

Exemple : $G \subset SL(4,\mathbb{C})$ $|G| = 6$

$$G = \left\langle (\varepsilon_3, \varepsilon_3^2, \varepsilon_3, \varepsilon_3^2) \ , \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$S^G = \mathbb{C}[X_1X_2, X_3X_4, X_1X_4+X_2X_3, X_1^3+X_2^3, X_3^3+X_4^3, X_1^2X_3+X_2^2X_4+X_1X_3^2+X_2X_4^2]$$

$\operatorname{emb}(S^G) = 7$.

On montre que S^G n'est pas IC en calculant la série de Molien $P(S^G,t) = \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in G} \frac{1}{\operatorname{Det}(I-\sigma t)}$ car on a le résultat suivant qui donne une condition nécessaire sur les séries de Molien des anneaux IC.

Théorème 3 [St_2 , St_3] : Si $S^G = \mathbb{C}[P_1,\dots,P_{n+r}]/(F_1,\dots,F_r)$ est IC avec degré de $Y_i = d_i$ et degré de $F_j = e_j$. Alors on a

$$P(S^G,t) = \prod_{j=1}^{r} (1-t^{e_j}) \Big/ \prod_{j=1}^{n+r} (1-t^{d_i}) .$$

Dans notre exemple, $P(S^G,t)$ ne peut se mettre sous la forme d'un produit de polynômes cyclotomiques au numérateur. Cela établit le contre-exemple.

Lorsque la série de Molien ne peut se calculer faute de définition explicite du groupe G, le théorème 2 est donc un outil essentiel qui apparaîtra dans nombre de cas abordés dans la classification finale.

Citons encore un résultat utile pour la suite, connu sous le nom de "Slice Method".

Théorème 4 : G fini opérant sur V et S^G IC. Alors pour tout $v \in V$, S^{G_v} est IC, G_v étant le groupe d'isotropie de v dans G.

En effet. S^{G_v} est étale sur S^G, G_v se représentant comme groupe d'inertie d'idéal de Sym(V) engendré par des formes linéaires, sous l'action de G sur Sym(V). Pour les détails, cf. [N_3, § 2.5, 2.6].

Enfin, une notion fondamentale dans la caractérisation des S^G IC est celle de triplet IC exposée pour la première fois dans [N_1]. Toutefois, dans un but de clarté, il est nécessaire de faire un bref retour à la classification des groupes abéliens G tels que S^G soit IC, qui est connue complètement et contenue dans [W_1].

Cas abélien : G est diagonalisable, et utilisant les notations de [W_1], on notera $(\alpha;i)$ et $(\alpha,\beta;i,j)$ les matrices diagonales dont les termes (i,i) sont α (respectivement α pour (i,i) et β pour (j,j)) et les autres termes 1.

La classification des groupes abéliens se fait à partir de la notion de "datum" due à Watanabe.

Définitions :

1) Un "datum" spécial est un couple $\mathbb{D} = (D,W)$ où :

- D est un ensemble de sous-ensembles de $\{1,\dots,n\}$.
- W une application de $D \longrightarrow \mathbb{N}$ ayant les propriétés :

  (1) $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\{i\} \in D$.

  (2) Si $J, J' \in D$ $J \subset J'$ ou $J' \subset J$ ou $J \cap J' = \emptyset$.

  (3) Si J maximal pour l'inclusion $W(J) = 1$.

  (4) Si $J \underset{\neq}{\subset} J'$ $W(J')$ divise $W(J)$ et $W(J') < W(J)$.

  (5) Si $J_1, J_2 < J \Longrightarrow W(J_1) = W(J_2)$ ($J' < J$ si $J' \underset{\neq}{\subset} J$ et il n'existe pas $J'' \in D$ tel que $J' \subset J'' \subset J$).

2) Un <u>datum</u> est une paire $(\mathbb{D}\,;\,a_1,\dots,a_n)$, $\mathbb{D}$ étant un "spécial datum" ; $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{D}$ s'identifiant avec le datum $(\mathbb{D}\,;\,1,\dots,1)$.

3) Pour un datum $(D,W\,;\,a_1,\dots a_n) = \mathbb{D}$, on peut définir un sous groupe $G_{\mathbb{D}}$ de $GL(n,\mathbb{C})$ et un sous anneau $R_{\mathbb{D}}$ de S par

$$G_{\mathbb{D}} = \{(\varepsilon_{a_j}\,;j) \mid j \subset \{1,\dots,n\}\}, \{(\varepsilon_{wa_i}, \varepsilon_{wa_j}^{-1}\,; i,j) \mid i \in J_1, j \in J_2, J_1, J_2 < J,\ w = w(J_1) = w(J_2)\}$$

$$R_{\mathbb{D}} = S^{G_{\mathbb{D}}} = C[\{(\prod_{i \in J} X_i^{a_i})^{w(J)}\}] \quad \text{avec} \quad J \in D$$

$G_{\mathbb{D}} \subset SL(n,C) \Longleftrightarrow \mathbb{D}$ datum spécial.

On a enfin le théorème de classification.

Théorème $[W_2]$: G fini abélien, $G \subset GL(n,\mathbb{C})$.

$S^G | C \Longleftrightarrow G$ conjugué à un $G_{\mathbb{D}}$, $\mathbb{D}$ datum

(G conjugué à un spécial datum si $G \subset SL(n,\mathbb{C})$).

Exemples

1) $G = (\varepsilon_a, \varepsilon_a^{-1}, 1, 1), (1, \varepsilon_{ab}, \varepsilon_{ab}^{-1}, 1), (1, 1, \varepsilon_{ab}, \varepsilon_{ab}^{-1})$

$S^G = \mathbb{C}[X^a, Y^{ab}, W^{ab}, Z^{ab}, XYZW, (YZW)^a]$

$D = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}$. $W\{1\} = a$; $W\{2\} = W\{3\} = W\{4\} = ab$;

$W\{2,3,4\} = a$; $W\{1,2,3,4\} = 1$.

2) $G = \ (\varepsilon_{ab}, \varepsilon_{ab}^{-1}, 1, 1), (1, 1, \varepsilon_{ac}, \varepsilon_{ac}^{-1}), (\varepsilon_a, 1, \varepsilon_a^{-1}, 1)$

$S^G = C[X^{ab}, Y^{ab}, Z^{ac}, W^{ac}, XYZW, (XY)^a, (ZW)^a]$

$D = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{3,4\},\{1,2,3,4\}\}$ $W\{1\} = W\{2\} = ab$; $W\{3\} = W\{4\} = ac$;

$W\{1,2\} = W\{3,4\}$.

3) $G = \ <(\varepsilon_a, \varepsilon_a^{-1}, 1, 1), (1, \varepsilon_{ab}, \varepsilon_{ab}^{-1}, 1), (1, 1, \varepsilon_{abc}, \varepsilon_{abc}^{-1})>$

$S^G = \mathbb{C}[X^a, Y^{ab}, Z^{abc}, W^{abc}, XYZW, (YZW)^a, (ZW)^{ab}]$

$D = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}$

$W\{1\} = a$; $W\{2\} = ab$; $W\{3,4\} = ab$; $W\{2,3,4\} = a$; $W\{3\} = W\{4\} = abc$.

Nous avons besoin pour la suite d'introduire de nouvelles notations et fixer une certaine terminologie pour énoncer le dernier théorème fondamental dû à Nakajima $[N_1]$.

Pour un sous groupe fini N de GL(V) V espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$, on appellera <u>hyperplan de réflexion relatif à N</u> un sous espace U de codimension 1 dans N tel que $U = \{x \in V \mid \sigma x = x\}$ pour $\sigma \in N$.

Soit H(V,N) l'ensemble des hyperplans de réflexions relatifs à N. σ est une pseudo-réflexion car $rg(\sigma - 1) \leqslant 1$, et pour $U \in H(V,N)$ on a $V = U \oplus \mathbb{C}\, L_U(V,N)$ $L_U(V,N)$ élément de N ou encore $<L_U(V,N)> = Im(\sigma - 1)$ $\sigma \in N$, $U \subset Ker(\sigma - 1)$ et $|\{\sigma \in N \mid U \subset Ker(\sigma - 1)\}|$ sont appelés <u>ordre des pseudo réflexions de N</u>.

Alors pour un caractère linéaire χ de N ($\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(N, \mathbb{C}^*)$) on pose

$$S_U(V,N,\chi) = \inf\{r \in \mathbb{N} \mid \chi(\sigma) = (\det(\sigma))^r), \forall \sigma \in N, \ \mathrm{Ker}(\sigma - 1) \supset U$$

et

$$f_\chi(U,N) = \prod_{U \in H(V,N)} L_U(V,N)^{S_U(V,N,\chi)} .$$

Enfin $S_\chi^N = \{f \in S = \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n] \mid \sigma(f) = \chi(\sigma) f \quad \forall \sigma \in N\}$ dont les éléments sont appelés invariants relatifs au caractère χ. $R(V,N)$ est le plus grand sous groupe de réflexions contenu dans N.

Sous l'action naturelle de G sur V, on considère l'équivalence sur $H(V,N)$, et on pose $U_i \sim U_j$ pour $U_i, U_j \in H(V,N)$ si U_i est conjugué à U_j.

Quitte à échanger la numérotation des hyperplans, on pourra supposer que l'ensemble $\{U_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$ désigne les représentants des classes d'équivalence de $H(V,N)$ modulo N.

Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant m$ et tout σ_i tel que $\mathrm{Ker}(\sigma_i - 1) \supset U_i$, on considère l'application : $\sigma_i \longmapsto \det \sigma_i \in C^*$ puis $\sigma_i \longmapsto (\underbrace{1,\ldots,1}_{(i-1)\text{ fois}}, \det \sigma_i, 1, \ldots, 1)$ matrice diagonale dans $GL_m(\mathbb{C})$, on peut alors construire l'homomorphisme naturel $\Phi_{N,V} : R(V,N) \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$.

On a alors le théorème important

Théorème 5 [N_1, th. 3.8] : Si K sous groupe tel que $R(V,N)' \subset K \subset R(V,N)$, alors S^K est IC si et seulement si $\Phi_{N,V}(K)$ est conjugué dans $GL_m(\mathbb{C})$ à un $G_{\mathbb{D}}$, $\mathbb{D}$ datum (dans le sens défini précédemment).

De nombreux lemmes préliminaires techniques sont nécessaires. Le tout est de se ramener à trouver que l'on a S^K IC, si et seulement si $S^{\Phi_{N,V}(K)}$ est IC, et appliquer le résultat caractérisant les S^H IC avec H abélien. On renverra donc à [N_1].

Ce théorème appelle donc une définition.

On dira avec les notations du théorème que le triplet $(R(V,N),K,V)$ constitue un triplet IC. Plus généralement, pour K groupe fini de GL(V), on dira que K est étendu à un triplet IC dans GL(V) s'il existe un groupe fini de réflexion L dans GL(V) tel que (L,K,V) est un triplet IC.

On peut donc dire que S^K IC $\Longleftrightarrow$ K étendu à un triplet IC dans GL(V).

Enfin on rappelle un résultat obtenu par Stanley, puis généralisé par Nakajima en caractéristique quelconque [N_1] concernant les invariants relatifs S^N_χ χ caractère linéaire.

Théorème 6 [St_1] : S^N_χ est un S^N module libre si et seulement si $f\ (V,N) \in S^N$ [avec $S^N_\chi = f_\chi(V,N)S^N$].

On sait de plus que ceci est précisément réalisé dans le cas où N est un groupe de réflexions.

3ème Partie : Classification.

Notations préliminaires.

G étant sous groupe fini de $GL(V)$ $\dim V = n$. S'il existe des $\mathbb{C}G$ sous-module de V irréductibles V_i avec $V = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} V_i$ $m \geqslant 2$ $\dim_{\mathbb{C}} V_i = n_i$, G agissant non trivialement sur V_i. Soit la représentation $P_i : G \longrightarrow GL(V_i)$, $P_i(G)$ est considéré comme sous groupe de $GL(V)$, un élément de $GL(V_i)$ étant vu comme l'identité sur V_j pour $j \neq i$. Alors on pose $G^* = \prod_{i=1}^{m} P_i(G)$ puis $R = R(V,G^*)$ avec les notations de la partie précédente.

G est alors un sous groupe de G^*.

Si $\sigma \in G$ tel que $rg(\sigma - I) = 2$.

Si $P_i(\sigma) \neq 1$ et $P_i(\sigma)$ non pseudo-réflexion alors $P_j(\sigma) = 1$ $\forall j \neq i$.

Si G est tel que S^G IC, G est engendré par des σ tels que $rg(\sigma - I) \leqslant 2$. Alors si $P_i(G)$ $1 \leqslant i \leqslant m$ ne contient pas de pseudo-réflexions on a $G = G^*$. Donc on étudie essentiellement le cas où les $P_i(G)$ contiennent des pseudo-réflexions.

Ainsi on a le premier lemme.

Lemme 1 : Si S^G est IC. Alors on a $[G^*,G^*] \subset G \subset G^*$.

Par le théorème 1 de la partie précédente on se ramène à m=2 et $n_1=n_2=2$.

On distingue trois cas selon que les représentations P_i sont primitives ou imprimitives. Puis, utilisant la classification des sous-groupes finis de $GL(2,\mathbb{C})$, on calcule les séries de Molien des différents S^G pour S^G IC et G éventuel contre-exemple au lemme.

Dans tous les cas de figures, on obtient alors $\mathrm{emb}(S^G) > 7$, et le théorème 2 de la partie précédente permet de conclure. On peut alors passer au lemme suivant.

Lemme 2 : Si $f_\chi(V,G^*)$ est χ invariant de G^* pour tout χ caractère linéaire tel que $\chi(G) = 1$. On a alors S^G IC si et seulement si

1) G est engendré par les g tels que $rg(\sigma - I) \leqslant 2$.

2) $(R, R \cap G, V)$ est un triplet IC.

3) $S(V_i)^G$ est IC pour $1 \leqslant i \leqslant m$.

On utilise le théorème de Stanley de la partie précédente (th. 6).

On peut déduire le théorème général préliminaire à la classification proprement dite.

Théorème [N_4] : S^G est IC si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites

1) G est engendré par les g tels que $rg(\sigma - I) \leqslant 2$.

2) $(R, R \cap G, V)$ est triplet IC.

3) $S(V_i)^G$ IC pour $1 \leqslant i \leqslant m$.

4) $f_\chi(V_i, G_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ sont invariants de $\mathrm{Ker}(\bigoplus_{j \neq i} P_j)$ $\forall \chi \in \mathrm{Hom}(G^*, \mathbb{C}^*)$ tels que $\chi(G) = 1$ $(G_i = P_i(G))$.

Il suffit de montrer que 4) est vérifié si S^G IC compte tenu du lemme 2. On peut aboutir ensuite à une classification explicite et remplacer les conditions 3) et 4) par une liste de groupes pour les $G_i = P_i(G)$ $1 \leqslant i \leqslant m$.

Cette liste est trop longue pour être donnée ici, et on renvoie à [N-W] (théorème 6) pour la liste ou [N_4] et [N_5] pour un examen détaillé.

On va maintenant cependant indiquer des éléments essentiels intervenant dans la classification suivant la subdivision classique G réductible, G irréductible imprimitif et enfin G primitif.

Cas réductible.

Avec les mêmes notations que précédemment on a

Théorème [Go_2] : Si S^G est IC, alors $S(V_i)^{G_i}$ est IC $1 \leqslant i \leqslant m$. De plus il existe un groupe Γ tel que $[G,G] \subset \Gamma \subset G$ $(\Gamma \triangleleft G)$ et une représentation linéaire de G/Γ, $t : G/\Gamma \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$. Alors S^G est IC si et seulement si l'action de Γ sur $\mathbb{C}[Y_1,\dots,Y_m]$ est identique à celle de G/Γ définie par t.

G/Γ étant abélien, on voit que l'on est ramené aux cas irréductibles et abéliens.

Citons encore le résultat de Nakajima concernant les hypersurfaces dans ce cas réductible.

Théorème [N_3, th. 3.1] : G sous groupe fini de SL(V).
Si $S(V)^G$ est une hypersurface on a

1) G^* est un groupe de réflexions.
2) L'ordre des pseudo-réflexions dans G^* est égal à l'indice $[G^* : G]$.
3) $G^* \cap SL(V) = G$.

Cas irréductible imprimitif.

Les cas n=2 et n=3 étant connus [W,R], on voit que pour $n > 3$, il reste en fait deux possibilités grâce au théorème de Nakajima qui obtient une propriété fondamentale pour $n \geqslant 5$.

Proposition [N_3, 4.2] : Si G est fini dans SL(V) irréductible imprimitif et $n = \dim(V) \geqslant 5$. S^G est IC si et seulement si $G = \tilde{G} \cap SL(V)$ pour $\tilde{G}$ groupe fini imprimitif de réflexion de GL(V) dans lequel l'ordre des pseudo-réflexions est égal à deux.

En particulier <u>S^G est en fait hypersurface</u> et la conjecture de Stanley valide. On pourra ainsi formuler

Si G fini imprimitif dans SL(V) et S^G est IC, alors G est étendu à un triplet IC dans GL(V) ou <u>$n < 5$.</u>

Il reste donc à considérer le cas <u>$n = 4$</u> en notant que dans le cas $n > 4$ les groupes imprimitifs sont nécessairement monomiaux.

Ce cas est traité en détail dans [N_4].

On se contente des grandes lignes de la classification obtenue à partir des cas d'études suivants :

1) G est monomial.

On doit considérer quatre cas distincts en examinant les différents types d'action de permutation sur le système complet d'imprimitivités induite par G. Eliminant les cas où ce groupe de permutation $\mathcal{G}$ est isomorphe à $\mathcal{S}_2$ ou $\mathcal{S}_3$ (qui nous ramènerait aux cas n=2 et n=3), il reste les possibilités :

- $\mathcal{G} = \mathcal{S}_4$
- $\mathcal{G} = \mathcal{A}_4$
- $\mathcal{G} = <(12),(34),(13)(24)>$ isomorphe au groupe diédral d'ordre 8
- $\mathcal{G} = <(12)(34),(13)(24)>$ isomorphe au groupe de Klein d'ordre 4.

* Les deux premiers cas fournissent une liste de groupes G décrite dans [H_2, théorème 2.1] et dont on calcule les invariants. On élimine les groupes conduisant à $\mathrm{emb}(S^G) > 7$. Les autres donnent $\mathrm{emb}(S^G) = 6$, et on vérifie alors que S^G est bien IC. Ces groupes sont donnés dans [N_4, th. 4.1, 3)].

* Le cas $\mathcal{G} = <(12),(34),(13)(24)>$ est traité en détail dans [N_4], et ne se traduit pas par une liste explicite de groupes, mais par une caractérisation établie à la proposition 3.1.

La démonstration de cette proposition dans le cas présent, utilise les théorèmes fondamentaux de la deuxième partie (cf. [N_4 , § 3.8, 3.9]), permettant d'aboutir au résultat intermédiaire du paragraphe 3.5 qui est valide dans tous les cas d'étude pour G imprimitif. Compte tenu de la technicité et la lourdeur des notations, on renvoie à [N_4].

* Si $\mathcal{G} = <(12)(34),(13)(24)>$.

La liste de groupes G est donnée dans [N-W, exemple 4] ou [N_4, § 2.4], et la démonstration du [N_5]. Cela donne huit types de groupes.

2) G non monomial.

Cela renvoie également à la caractérisation [N_4, § 3.1] par l'intermédiaire du paragraphe 3.5, mais dont la démonstration ici est développée dans les paragraphes 3.10, 3.11, toujours à l'aide des considérations mentionnées dans la partie précédente.

Cas primitif.

De même, excluant n=2 et n=3 (cf. [W-R]) pour $n \geqslant 4$, on utilise les classifications de [Bl] pour n=4, [Br] pour n=5 et [Wal] pour $n > 5$.

On obtient :

1) <u>n=4</u>. Avec les notations de [Bl], on trouve les groupes (B),(F),(G),(H),(K), puis les groupes $<\varepsilon_m>T^{\otimes 2}, <\varepsilon_m>O^{\otimes 2}, <\varepsilon_m>I^{\otimes 2}$ avec m=1,2, $(4,2;O,T)^{\otimes 2}$ avec les notations habituelles ([Co]) correspondant à la classification 1°) à 21°). La considération des groupes 13°) à 21°) se ramenant au cas n=5 puisque S^G IC $\Longleftrightarrow$ $K[T_1,\ldots,T_5]^{G/(K)}$ IC, (K) étant le groupe considéré plus haut.

2) <u>n=5</u>. Pas de groupe en dehors de (III), notation de [Br] associé au groupe de réflexions $W(K_5)$, notation de [Co].

3) <u>n>5</u>. Avec les notations de [Wal], on passe en revue les groupes de (A) à (M), et on les élimine au fur et à mesure.

On se sert ici particulièrement du "Slice" mentionné au théorème 4 de la deuxième partie, on notera que les invariants du groupe (I) ont été calculés dans [H.S]. Seuls restent les groupes notés (A),(B),(H) liés aux groupes de réflexions, autrement dit, des groupes étendus à un triplet IC. Plus particulièrement, grâce au théorème de Wales [Wal, p. 58], on voit que si $n > 10$ alors G est du type (A) ou (C), donc si S^G est IC seul le cas (A) est valide, soit $G/Z(G) \simeq A_{n+1}$ ou S_{n+1}, ce qui permet de retrouver le résultat de Gordeev mentionné à la première partie.

Pour récapituler on énonce :

Théorème [N_4, 4.1] : G groupe fini de SL(V) irréductible et primitif. Alors S^G est IC si et seulement si G peut être étendu à un triplet IC ou G est conjugué aux groupes suivants :

1) Les groupes classifiés dans [W-R] (n=3).

2) Les groupes $<\varepsilon_m>T^{\otimes 2}$; $<\varepsilon_m>O^{\otimes 2}$; $<\varepsilon_m>I^{\otimes 2}$ m=1,2 $(4,2;O,T)^{\otimes 2}$ (n=4).

Pour les hypersurfaces, enfin on a

Théorème [N_3, th. 4.6] : Si G est fini primitif irréductible dans SL(V). Si S^G est une hypersurface, alors $n < 10$ ou G conjugué au groupe $W(A_n) \cap SL(V)$ (notation [Co]). Si $n \geqslant 22$ si S^G IC alors S^G hypersurface.

Références Bibliographiques

[Bl] H. BLICHFELDT, Finite Collineation Groups, University of Chicago Press, 1917.

[Br] R. BRAUER, Uber endliche lineare Gruppen von Prinzahlgrad, Math. Annalen 169, 73-96 (1967).

[Co] A.M. COHEN, Finite complex reflection groups, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 9, 379-436 (1976).

[G.W] S. GOTO, K. WATANABE, The embedding dimension and multiplicities of rational singularities which are IC. To appear.

[Go_1] N.L. GORDEEV, Invariants of linear groups generated by matrices with two non unit eigenvalues, J of Soviet Math., 1984, 2919-27.

[Go_2] N.L. GORDEEV, On the Stanley Conjecture and the classification of finite groups whose algebra of invariants is a complete intersection J of Soviet Math. Doklady 26, 3, 722-24 (1982).

[H_1] W.G. HUFFMANN, Linear groups containing an element with an eigenspace of codimension two, J of Algebra 34, 260-87 (1975).

[H_2] W.G. HUFFMANN, Imprimitive linear groups generated by elements containing an eigenspace of codimension two, J of Algebra 63, (1980) 499-513.

[H.S] W.G. HUFFMANN, N.J. SLOANE, Most primitive groups have messy invariants, Advance in Math. 32, 118-127 (1979).

[H.W] W.C. HUFFMANN, D.B. WALES, Linear groups of degree n containing an element with exactly n-2 equel eigenvalues, J linear and Multilinear Algebra, 3, 53-59 (1975).

[K.W] V. KAC, K. WATANABE, Finite linear groups whose rings of invariants is a complete intersection, Bull. AMS 6 (1982) 221-23.

[L.T] J. LIPMAN, B. TEISSIER, Pseudo Rationnel local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals Michigan J of Math., 28 (1981) 97-116.

[M] H.H. MITCHELL, Determinations of all primitive collineation groups in more then four variables which contain homologies, Am J of Math. 36 (1914) 1-12.

[N_1] N. NAKAJIMA, Relative invariants of finite groups, J of Algebra, 79, 218-34 (1982).

[N_2] H. NAKAJIMA, Rings of invariants of finite groups which are hypersurfaces I, J of Algebra, 80, 279-94 (1983).

[N_3] H. NAKAJIMA, Rings of invariants of finite groups which are hypersurface II, to appear in Advances in Math.

[N_4] H. NAKAJIMA, Quotient singularities which are complete intersection, Manuscripta Math. 48, 163-87 (1984).

[N_5] H. NAKAJIMA, Quotient complete intersections of affine spaces by finite linear groups, Preprint.

[N-W] H. NAKAJIMA, K. WATANABE, The classification of quotient singularities which are complete intersections. Proc CIME Lecture Notes, 1092, Springer Verlag. Berlin.

[R] D. ROTILLON, Groupes linéaires finis de degré trois et anneaux d'invariants intersection complète, Preprint Univ. Paris-Nord (1981).

[SGA_1] A. GROTHENDIECK, Séminaire Géométrie Algébrique. Tome I (1961).

[SGA_2] A. GROTHENDIECK, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, North Holland (1968).

[Sh, T] G.C. SHEPARD, J.A. TODD, Finite unitary reflection groups Can J of Math. 6 (1954), 274-304.

[Sp] T.A. SPRINGER, Invariant Theory, Lecture Notes in Math., 585, Springer (1977). Berlin.

[St_1] R. STANLEY, Relative invariants of finite groups generated by pseudoreflections, J of Algebra 49 (1977) 134-48.

[St_2] R. STANLEY, Hilbert functions of graded algebras, Adv. in Math., 28 (1978) 57-83.

[St_3] R. STANLEY, Invariants of finite groups and their applications to combinatoires, Bull. A.M.S. 1 (1979) 475-511.

[Wal] D.B. WALES, Linear groups of degree n containing an involution with two eigenvalues -1, J of Algebra 53 (1978) 58-67.

[W_1] K. WATANABE, Certain invariant subrings are Gorenstein II, Osaka J. Math. 11, (1974), 379-388.

[W_2] K. WATANABE, Invariant subrings which are complete intersection I (invariants of finite groups : abelian case) Nagoya J. of Math. 77 (1980) 89-9 .

[W-R] K. WATANABE, D. ROTILLON, Invariant subrings of C[X,Y,Z] which are complete intersections, Manuscripta Math. 39 (1982), 339-57.

D. ROTILLON
Université Paul Sabatier
U.E.R. M.I.G.
118, route de Narbonne
31062 TOULOUSE Cédex
FRANCE