PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

P. ROBBA

# Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels et les opérateurs aux différences

*Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, 1985, fascicule 4
« Séminaires de mathématiques - science, histoire et société », , p. 10-24
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985___4_10_0>

# LEMMES DE HENSEL POUR LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ET LES OPÉRATEURS AUX DIFFÉRENCES.

(D'après A. DUVAL)

**Par P. ROBBA**

En 1979, B. Malgrange [M] proposait une nouvelle démonstration du théorème de Turittin utilisant une propriété de factorisation d'un polynôme différentiel liée aux côtés de son polygône de Newton. Dans [R], j'ai développé et systématisé les idées de Malgrange, simplifiant les démonstrations grâce à l'utilisation de la fonction de valuation au lieu du polygône de Newton. Enfin, récemment A. Duval [D], a généralisé ces résultats dans un cadre qui englobe les opérateurs différentiels et les opérateurs aux différences.

Au § 2 nous verrons que, du point de vue de la fonction de valuation, les polynômes différentiels se comportent, jusqu'à un certain point, comme dans le cas commutatif. Au § 3, on énoncera les principaux résultats de factorisation. On verra que la notion d'opérateur fuchsien (qui vérifie la condition de Fuchs) s'introduit naturellement. Enfin, au § 4, on indiquera quelques théorèmes de structures.

Les démonstrations se trouvent dans les articles cités.

## 1. NOTATIONS.

K désigne un corps commutatif, complet pour une valuation ultramétrique. La valuation sera notée additivement et dénotée par v( ).

Soit $\tau$ un automorphisme continu du corps K. Nécessairement $\tau$ est une isométrie.

On dira que l'application $\delta : K \longrightarrow K$ est une $\tau$-dérivation si

**1)** $\delta(a+b) = \delta(a)+\delta(b), \quad \forall\, a,b \in K.$

**2)** $\delta(ab) = \tau(a)\,\delta(b)+\delta(a)b, \quad \forall\, a,b \in K.$

On appellera <u>degré</u> de $\delta$ le nombre

$$\alpha(\delta) = \inf_{a\in K, a\neq o} v(\delta(a))-v(a) .$$

On supposera que $\delta$ est continue, ce qui équivaut à $\alpha(\delta) > -\infty$. Comme K est commutatif, on est dans l'un des cas suivants :

**a)** $\tau$ est l'identité, on a affaire au cas différentiel proprement dit.

<u>Exemple</u> : Soit k un corps commutatif. Soit $K = k((x))$ muni de la valuation x-adique. Pour la dérivation $\delta = \frac{d}{dx}$ on a

$$\alpha(\frac{d}{dx}) = -1 .$$

**b)** $\tau \neq$ l'identité, alors $\delta = c(\tau-1)$ avec $c \in K$.

<u>Exemple</u> : Soit $K = k((\frac{1}{x}))$ muni de valuation $\frac{1}{x}$-adique. Prenons pour $\tau$ la translation : $\tau a(x) = a(x+1)$. Pour $\delta = \tau-1$ on a

$$\alpha(\tau-1) = 1 .$$

Cet exemple correspond au cas des opérateurs aux différences.

D'une façon générale, comme $\tau$ est une isométrie, on a nécessairement, pour la $\tau$-dérivation $\tau-1$, $\alpha(\tau-1) \geqslant 0$. <u>Dans la</u>

suite de cet exposé nous supposerons que

$$\alpha(\tau-1) > 0$$

Dans $K[X]$, resp. $K[\tau]$, resp. $K[\delta]$, on définit une multiplication par : $\forall a \in K \quad Xa = aX$, resp. $\tau a = \tau(a)\tau$, resp. $\delta a = \tau(a)\delta + \delta(a)$. Avec ces définitions $K[X]$, $K[\tau]$ et $K[\delta]$ sont des anneaux euclidiens aussi bien pour la division à droite qu'à gauche. L'anneau $K[\tau]$, resp. $K[\delta]$, n'est pas commutatif sauf si $\alpha(\tau-1) = +\infty$ (soit $\tau$ = identité), resp. $\alpha(\delta) = +\infty$ et $\alpha(\tau-1) = +\infty$ (la dérivation triviale et $\tau$ = identité).

## 2. LA FONCTION DE VALUATION. PROPRIETES.

**2.1. Définition** : Pour $P \in K[X]$, resp. $K[\tau]$, resp. $K[\delta]$ et pour $t \in R = R \cup \{+\infty, -\infty\}$ si $P = \sum a_i Y^i$ ($Y=X$, resp. $\tau$, resp. $\delta$) on définit la fonction de valuation de $P$ :

$$v(P,t) = \inf_i \{v(a_i)+it\}$$

$$v(0,t) = +\infty \ \forall t .$$

On pose aussi :

$$N(P,t) = \sup\{i \mid v(a_i)+it = v(P,t)\}$$

$$n(P,t) = \inf\{i \mid v(a_i)+it = v(P,t)\}$$

$$N(0,t) = n(0,t) = -\infty \quad .$$

Si $N(P,t) \neq n(P,t)$ on dit que $t$ est une valeur exceptionnelle pour $P$. Les valeurs exceptionnelles pour $P$ sont en nombre fini.

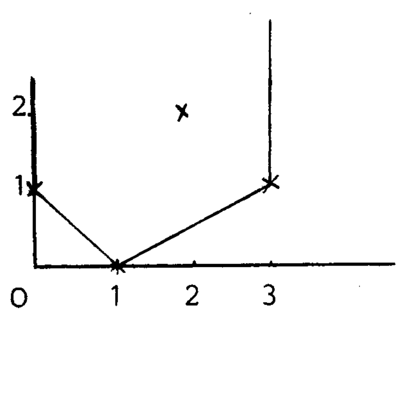
**2.2. Polygone de valuation et polygone de Newton.**

Il est bien connu que la fonction $v(P,t)$ est continue, concave, affine par morceaux et sa dérivée à gauche (resp. à droite) est $N(P,t)$ (resp. $n(P,t)$). Son graphe est appelé le <u>polygone de valuation</u> de P.

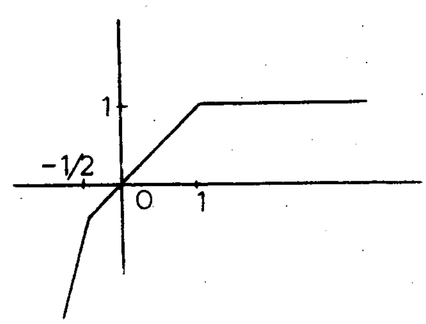
Si $P = \sum a_i Y^i$, la frontière de l'enveloppe convexe supérieure des points de coordonnées $(i, v(a_i))$ est un polygone convexe appelé <u>polygone de Newton</u> de P.

Le polygone de valuation et le polygone de Newton sont en dualité. Précisément : la suite des abscisses des sommets du polygone de Newton (lues de gauche à droite) est égale à la suite des pentes des côtés du polygone de valuation (lues de droite à gauche) ; la suite des abscisses des sommets du polygone de valuations, qui sont les valeurs exceptionnelles pour P, (lues de droite à gauche) est égale à la suite des pentes des côtés du polygone de Newton, changées de signe, (lues de gauche à droite).

<u>Exemple</u> : Soit $P = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + a_3 Y^3$ avec $v(a_0) = 1$, $v(a_1) = 0$, $v(a_2) = 2$, $v(a_3) = 1$.




Polygone de Newton




Polygone de valuation

## 2.3. Addition.

**Proposition** : Pour $P,Q \in K[Y]$ où $Y=X$, resp. $\tau$ , resp. $\delta$ et pour $t \in \bar{\mathbf{R}}$ on a : $v(P+Q) \geqslant \inf(v(P,t),v(Q,t))$ avec égalité si $v(P,t) \neq v(Q,t)$ ou si $N(P,t) \neq N(Q,t)$ ou si $n(P,t) \neq n(Q,t)$.

## 2.4. Multiplication.

**Proposition** : Soient $P(X)$, $Q(X) \in K[X]$ et $R(X) = P(X)Q(X)$.

**1)** Pour $t \in \bar{\mathbf{R}}$ on a $v(R,t) = v(P,t)+v(Q,t)$

$N(R,t) = N(P,t)+N(Q,t)$ et $n(R,t) = n(P,t)+n(Q,t)$.

**2)** i) Pour $t \in \bar{\mathbf{R}}$ on a $v(R(\tau)-P(\tau)Q(\tau),t) \geqslant v(P,t)+v(Q,t)+\alpha(\tau-1)$

ii) Pour $t \leqslant \alpha(\delta)$ on a $v(R(\delta)-P(\delta)Q(\delta),t) \geqslant v(P,t)+v(Q,t)+ \inf(\alpha(\tau-1),\alpha(\delta)-t)$ .

**3)** i) $v(P(\tau)Q(\tau),t) = v(P,t)+v(Q,t)$ et des égalités analogues pour $N$ et $n$ pour tout $t \in \bar{\mathbf{R}}$.

ii) $v(P(\delta)Q(\delta),t) = v(P,t)+v(Q,t)$ pour $t<\alpha(\delta)$. Egalité analogue pour $N$ si $t \leqslant \alpha(\delta)$ et pour $n$ si $t<\alpha(\delta)$.

## 2.5. Homothétie.

**Proposition** : Pour $P(X) \in K[X]$ et pour $c \in K$ on pose $R(X) = P(cX)$ $(c \neq 0)$. Alors

**1)** $\forall t \in \bar{\mathbf{R}}$, $v(R,t) = v(P(c\tau),t) = v(P,t+v(c))$,

**2)** $\forall t \in \bar{\mathbf{R}}$ on a $v(R(\delta)-P(c\delta),t) \geqslant v(P,t+v(c))\inf(\alpha(\tau-1),\alpha(\delta)-t)$,

**3)** on a pour $t \leqslant \alpha(\delta)$ :

$$v(P(c\delta),t) = v(P,t+v(c)).$$

**2.6. Translation.**

**Proposition** : Soient $P \in K[X]$ et $b \in K$, on pose $T(X) = P(X+b)$.

**1)** Pour $t \leqslant v(b)$ on a $v(T,t) = v(P,t)$.

**2)** Pour $t \leqslant v(b)$ on a

i) $v(T(\tau)-P(\tau+b),t) \geqslant v(P,t)+v(b)+\alpha(\tau-1)-t$

et ii) $v(T(\delta)-P(\delta+b),t) \geqslant v(P,t)+\inf(\alpha(\tau-1)+v(b),\alpha(\delta))-t)$.

**3)** i) Si $t \leqslant v(b)$ on a $v(P(\tau+b),t) = v(P,t)$ et

$n(P(\tau+b),b(b)) = n(P,v(b))$.

ii) Si $t \leqslant \inf(v(b),\alpha(\delta))$ on a $v(P(\delta+b),t) = v(P,t)$.

Si $v(b) < \alpha(\delta)$ on a $n(P(\delta+b),v(b)) = n(T,v(b))$.

**2.7. Continuité de la division euclidienne.**

**Définition** : Pour $P \in K[\tau]$ (resp. $K[\delta]$) et $t \in \bar{\mathbf{R}}$ on dit que $P$ est $t$-dominant si $N(P,t) = d^\circ P$ et que $P$ est $t$-extrêmal si, de plus, $n(P,t) = 0$. Autrement dit $P$ est $t$-dominant s'il n'a pas de valeur exceptionnelle $< t$, $t$-extrêmal si sa seule valeur exceptionnelle est $t$.

Une conséquence directe des propositions ci-dessus est la

**Proposition** : Si $P \in K[\tau]$ (resp. $K[\delta]$) est $t$-dominant et resp. si $t \leqslant \alpha(\delta)$, si $A,Q,R,Q',R' \in K[\tau]$ (resp. $K[\delta]$) sont tels que :

$$A = QP+R = PQ'+R' \quad \text{avec} \quad d^\circ R < d^\circ P \quad \text{et} \quad d^\circ R' < d^\circ P$$

alors

$$\inf(v(Q,t),v(Q',t)) \geqslant v(A,t)-v(P,t),$$

$$\inf(v(R,t),v(R',t) \geqslant v(A,t).$$

## 2.8. Remarques.

**2.8.1.** Les propositions précédentes montrent que pour $K[\delta]$, la fonction de valuation se comporte comme dans le cas commutatif seulement pour $t < \alpha(\delta)$. On considère donc que pour $P \in K[\delta]$, sa fonction de valuation est définie seulement pour $t \leqslant \alpha(\delta)$, et de façon équivalente, il ne faut garder dans le polygone de Newton de P que les côtés de pente $\geqslant -\alpha(\delta)$ (on rajoute éventuellement un côté de pente $-\alpha(\delta)$ s'appuyant sur le polygone de Newton).

**2.8.2.** Au vu de la proposition 2.7, il est naturel de donner un nom aux polynômes $\alpha(\delta)$-dominants.

**Définition** : On dira que $P \in K[\delta]$ est fuchsien s'il est $\alpha(\delta)$-dominant.

La terminologie est justifiée par le fait que si $K = k((x))$, $\tau$ = identité, $\delta = \frac{d}{dx}$, alors dire que $P \in K[\delta]$ est fuchsien équivaut à dire qu'il vérifie la condition de Fuchs (ce qui signifie que 0 est un point singulier régulier).

**2.8.3.** Soit $c \in K$, $c \neq 0$ et soit $\delta$ une $\tau$-dérivation. Alors $\delta' = c\delta$ est aussi une $\tau$-dérivation. Soit $P \in K[\delta]$, on définit $Q \in K[\delta']$ par

$$Q(\delta') = P(c^{-1}\delta').$$

Il est clair que $P(\delta)$ et $Q(\delta')$ définissent le même opérateur. De plus, il résulte immédiatement de 2.7 que $Q(\delta')$ est $\alpha(\delta')$-dominant si et seulement si $P(\delta)$ est $\alpha(\delta)$-dominant (car $\alpha(\delta') = \alpha(\delta)+v(c)$). Ceci signifie que la propriété d'être fuchsien est une propriété de l'opérateur qui ne dépend pas de sa représentation avec une dérivation ou une autre.

## 3. LEMMES DE HENSEL.

### 3.1. Factorisation associée à la forme du polygone de valuation.

#### 3.1.1. Le cas classique.

On sait que si $K^{alg}$ désigne la clôture algébrique de K et si $P \in K[X]$,

$N(P,t)$ est le nombre de zéros de P dans $K^{alg}$ de valuation $\geqslant t$,

$n(P,t)$ est le nombre de zéros de P dans $K^{alg}$ de valuation $> 1$,

(donc $N(P,t)-n(P,t)$ est le nombre de zéros de P dans $K^{alg}$ de valuation t).

Par conséquent, P est t-dominant si ses zéros dans $K^{alg}$ sont de valuation $\geqslant t$, t-extrêmal si ses zéros dans $K^{alg}$ sont de valuation t.

Les assertions ci-dessus sont valides pour toute valuation de $K^{alg}$ étendant la valuation de K. On sait que toute valuation sur K s'étend à $K^{alg}$, et que, si K est complet, cette extension est unique. Donc si $a \in K^{alg}$, tous ses conjugués au-dessus de K ont même valuation que a et par conséquent si $P \in K[X]$, le polynôme unitaire dont les zéros sont les zéros de P de valuation t a ses coefficients dans K. Il est équivalent de dire qu'il existe un polynôme unitaire de $K[X]$, t-extrêmal, de degré $N(P,t)-n(P,t)$ qui divise P. Cet énoncé n'a évidemment d'intérêt que si $N(P,t)-n(P,t) \neq 0$, c'est-à-dire si t est une valeur exceptionnelle pour P. (En fait c'est cette propriété qui sert à démontrer l'unicité du prolongement de la valuation).

Nous allons voir que cette propriété de factorisation de P, pour chacune de ses valeurs exceptionnelles (c'est-à-dire pour chacun des sommets du polygone de valuation, ou encore chacun des côtés du polygone de Newton), est encore valide dans le cas non commutatif (au moins pour les valeurs exceptionnelles $<\alpha(\delta)$).

Observons que l'on peut aussi regrouper toutes les racines de P de valuation > t, le polynôme unitaire associé est alors t-dominant, divise P, et a ses coefficients dans K.

### 3.1.2. Factorisation par un opérateur dominant.

**Théorème** : Soient $A \in D = K[\tau]$ (resp., $K[\delta]$) et $t \in \mathbf{R}$ tel que resp. $t \leqslant \alpha(\delta)$.

**1)** Il existe Q, $P \in D$ avec P t-dominant, $d°P = N(A,t)$ tels que $A = QP$.

**2)** (Unicité). Si $A = Q_1 P_1$ avec les mêmes conditions, il existe $a \in K$, $a \neq 0$, tel que $Q_1 = Qa^{-1}$ et $P_1 = aP$.

**3)** Il existe Q' et $P' \in D$ avec P' t-dominant, $d°P = N(A,t)$ tels que $A = P'Q'$.

**4)** $D/DP \approx D/DP', D/DQ \approx D/DQ', D/DA \approx D/DP \oplus D/DQ$.

La démonstration est identique à celle du cas commutatif et se fait par une suite de divisions euclidiennes. On utilise la propriété de continuité de la division euclidienne (proposition 2.7), d'où la condition $t \leqslant \alpha(\delta)$.

L'assertion 4 utilise le lemme suivant de Malgrange.

**3.1.3 Lemme** : Soient $A, P, Q, P', Q' \in D = K[\tau]$ (resp., $K[\delta]$) tels que

(i) $A = QP = P'Q'$

(ii) $d°P = d°P'$ (donc $d°Q = d°Q'$)

(iii) pour tous $P_1, Q_1 \in D$, $d°P_1 < d°P$ et $P_1Q' = Q_1P$ entraînent $P_1 = Q_1 = 0$.

Alors on a $D/DP \approx D/DP'$, $D/DQ \approx D/DQ'$, $D/DA \approx D/DP \oplus D/DQ$ (isomorphismes de D-modules à gauche).

**3.1.4. Factorisation par un opérateur extrêmal.**

**Corollaire** : Soient $A \in D = K[\tau]$ (resp. $K[\delta]$) et $t \in \mathbf{R}$ tel que resp. $t < \alpha(\delta)$, alors

**1)** il existe $Q, P \in D$ avec P t-extrêmal et $d°P = N(A,t) - n(A,t)$ tels que $A = QP$,

**2)** id avec $A = P'Q'$,

**3)** $D/DP \approx D/DP'$, $D/DQ \approx D/DQ'$, $D/DA \approx D/DP \oplus D/DQ$.

Il se démontre en appliquant deux fois le théorème 3.1.2 : une fois avec t puis avec $t_1 > t$ assez proche de t. C'est pour cela qu'il faut avoir $t < \alpha(\delta)$.

**3.1.6. Remarque** : Le théorème et son corollaire permettent :
- dans le cas de l'opérateur $\delta$ de décomposer (à droite ou à gauche) $A \in K[\delta]$ en un produit de facteurs dont l'un est fuchsien et les autres $t_i$-extrêmaux avec $t_i < \alpha(\delta)$, les $t_i$ étant les valeurs exceptionnelles de A inférieures à $\alpha(\delta)$
- dans le cas de l'opérateur $\tau$ de décomposer (à droite ou à gauche) $A \in K[\tau]$ en un produit de facteurs $t_i$-extrêmaux, les $t_i$ étant les valeurs exceptionnelles de A.

### 3.2. Relèvement d'une factorisation dans le corps résiduel.

Si $\mathcal{O}$ est l'anneau de valuation de K et $\mathcal{M}$ son idéal maximal, l'isométrie $\tau$ envoie $\mathcal{M}$ dans lui-même et définit donc par passage au quotient une application $\bar{\tau}$ du corps résiduel k de K dans lui-même ; comme $\alpha(\tau-1)>0$ $\bar{\tau}=\mathrm{id}$ (car $v(\tau(a)-a)>0$ i.e. $\tau(a)-a \in \mathcal{M}$ ).

Si maintenant $\delta$ est une $\tau$-dérivation telle que $\alpha(\delta)>0$, $\delta$ passe au quotient et induit sur k la dérivation triviale.

**3.2.1 Théorème** : Supposons que $\alpha(\delta)>0$. Soit $A \in \mathcal{O}[X]$ de degé m+n. Supposons que son image $\bar{A}$ dans k[X] se factorise sous la forme (i) $\bar{A}=Q^*P^*$ où $P^*$ est unitaire de degré n, $Q^*$ et $P^*$ étant premiers entre eux. Alors

a) il existe un unique relèvement Q, P de $Q^*$, $P^*$ avec $d^\circ P=n$, P unitaire, tel que

(ii) $$A(\delta)=Q(\delta)P(\delta),$$

b) idem de l'autre côté avec P' et Q',

c) si $D=K[\delta]$, $D/DP \approx D/DP'$, $D/DQ \approx D/DQ'$, $D/DA \approx D/DP \oplus D/DQ$.

<u>Idée de la démonstration</u> : On interprète (ii) comme un système d'équations différentielles non linéaires, les inconnues étant les coefficients de P et Q. Un relèvement quelconque de $Q^*$ et $P^*$ fournit une solution approchée de ce système. On applique ensuite la méthode de Newton pour la raffiner en solution exacte. L'hypothèse que $Q^*$ et $P^*$ sont premiers entre eux signifie que le système linéaire tangent, dans le corps résiduel, est inversible (théorème de Bezout). C'est ce qui permet d'appliquer la

méthode de Newton.

Le partie c) résulte encore du lemme de Malgrange 3.1.3.

**3.2.2. Corollaire** : Soit $A \in \mathcal{O}[X]$ de degré m+n. Supposons que son image $\bar{A}$ dans k[X] se factorise sous la forme (i) $\bar{A} = Q^* P^*$ où $P^*$ et $Q^*$ sont premiers entre eux, il existe un unique relèvement Q, P de $Q^*$, $P^*$ avec $d°P = n$, P unitaire, tel que
(ii) $A(\tau) = Q(\tau)P(\tau)$, etc... .

Le cas intéressant est celui où $\tau \neq \mathrm{id}$. On pose alors $\delta = \tau - 1$. Comme $\delta$ vérifie l'hypothèse du théorème 3.2.1, on peut appliquer ce théorème après avoir remplacé $\tau$ par $\delta+1$.

## 4. THEOREME DE STRUCTURE.

On suppose dans ce paragraphe que <u>la valuation de</u> K <u>est discrète</u> et que <u>le corps résiduel</u> k <u>de</u> K <u>est de caractéristique</u> 0 ; par exemple $K = k((x))$ muni de la valuation x-adique, avec k de caractéristique 0. On devra considérer des extensions algébriques de K.

**4.1. Lemme** : Soit L une extension algébrique de K. Tout automorphisme continu $\tau$ de K tel que $\alpha(\tau - 1) > 0$ (resp. toute $\tau$-dérivation $\delta$) se prolonge de façon unique en un automorphisme continu $\tau'$ de L tel que $\alpha(\tau' - 1) > 0$ (resp. en une $\tau'$-dérivation $\delta'$ de même degré que $\delta$).

C'est la condition $\alpha(\tau'-1)>0$ qui assure l'unicité du prolongement $\tau'$.

Dorénavant on notera encore $\tau$ et $\delta$ les prolongements de $\tau$ et $\delta$.

Comme $\alpha_L(\delta)=\alpha_K(\delta)$, il en résulte que si $P\in K[\delta]$ est fuchsien en tant qu'élément de $K[\delta]$, il reste fuchsien en tant qu'élément de $L[\delta]$.

**4.2.** Il est facile de vérifier que le changement de variable $y=bz$ dans l'équation $P(\delta)y=0$ conduit à l'équation $P((\tau(b)/b)\delta+(\delta(b)/b))z=0$, c'est-à-dire correspond à une similitude si $\tau(b)/b$ et $\delta(b)/b$ appartiennent à $K$. Posons $a=\delta(b)/b$.

Si $\tau=\mathrm{id}$, $\tau(b)/b=1$ on a une translation $P(\delta+a)$.

Si $\tau\neq\mathrm{id}$ et $\delta=c(\ -1)$ on a $\tau(b)/b=1+a/c$ et on a donc la similitude $P((1+a/c)\delta+a)$.

**4.3. Théorème** : Soit $K$, $\tau$ et $\delta$ vérifiant les hypothèses mentionnées précédemment. Soit $P\in K[\delta]$, $P\neq 0$. Il existe une extension finie $L$ de $K$, des $\beta_i\in L$ $(1\leqslant i\leqslant q)$ et des $P_i\in L[\delta]$ fuchsiens tels qu'on ait :

**1)** $P(\delta)=\Pi_{i=1}^{q}P_i(\delta+\beta_i)$

**2)** $L[\delta]/L[\delta]P(\delta)\simeq\oplus_i L[\delta]/L[\delta]P_i(\delta+\beta_i)$

**3)** (Unicité) : Dans la décomposition précédente, on peut supposer que les $P_i$ ne sont pas constants et que pour $i\neq j$ $v(\beta_i-\beta_j)<\alpha(\delta)$. Alors si l'on a, dans une même extension $L$, une deuxième décomposition

$$P(\delta)=\Pi_{j=1}^{r}P'_j(\delta+\gamma_j)\ ,$$

on a r=q et il existe une permutation $\sigma$ de $\{1,2,...,q\}$ telle que

$$v(\beta_i - \gamma_{\sigma(i)}) \geq \alpha(\delta) \qquad \text{et}$$

$$L[\delta]/L[\delta]P_i(\delta-\beta_i) \simeq L[\delta]/L[\delta]P'_{\sigma(i)}(\delta-\gamma_{\sigma(i)}) \qquad (i=1,...,q).$$

Si $K = k((x))$, $\tau = \mathrm{id}$ et $\delta = \frac{d}{dx}$, on retrouve l'énoncé par Malgrange du théorème de Turrittin mentionné dans l'introduction.

Si $\tau \neq \mathrm{id}$, on ne sait pas interpréter l'effet d'une translation sur la $\tau$-dérivation $\delta$ au niveau des solutions de l'équation $P(\delta)y = 0$. Mais on a dans ce cas là le théorème suivant.

**4.4. Théorème** : Soient K, $\tau$ et $\delta$ comme ci-dessus avec de plus $\tau \neq \mathrm{id}$ et $\delta = c(\tau-1)$. Soit $P \in K[\delta]$ tel que $\tau = 1+\delta/c$ ne soit pas en facteur de P. Il existe une extension finie L de K, des $\beta_i \in L$ $(1 \leq i \leq q)$ et des $P_i \in L[\delta]$ fuchsiens tels qu'on ait :

**1)** $P(\delta) = \Pi_{i=1}^{q} P_i((1+\beta_i/c)\delta + \beta_i)$

**2)** $L[\delta]/L[\delta]P(\delta) \approx \bigoplus_i L[\delta]/L[\delta]P_i((1+\beta_i/c)\delta+\beta_i)$

**3)** (Unicité) : Dans la décomposition précédente on peut supposer que les $P_i$ ne sont pas constants et que pour $i \neq j$ $v((\beta_i-\beta_j)/(1+\beta_i/c)) < \alpha(\delta)$. Alors si on a dans une même extension L une deuxième décomposition

$$P(\delta) = \prod_{j=1}^{r} P'_j((1+\gamma_j/c)\delta + \gamma_j)$$

on a r=q et il existe une permutation $\sigma$ de $\{1,2,...,q\}$ telle que :

$$v\left(\frac{\beta_i-\gamma_{\sigma(i)}}{1+\beta_i/c}\right) \geq \alpha(\delta) \qquad \text{et}$$

$$L[\delta]/L[\delta]P_i((1+\beta_i/c)\delta+\beta_i) \approx L[\delta]/L[\delta]P'_{\sigma(i)}((1+\gamma_{\sigma(i)}/c)\delta+\gamma_{\sigma(i)})$$

$$(i=1,...,q).$$

Dans le cas où $K = k((\frac{1}{x}))$ et $\tau$ est la translation $\tau a(x) = a(x+1)$, on sait que, si $P_i$ est fuchsien, ses solutions sont "à croissance lente".

**BIBLIOGRAPHIE**

[D] DUVAL, A., Lemmes de Hensel et factorisation formelle pour les opérateurs aux différences, Funkciala ; Ekvacioj, 26 (1983), 349-368.

[M] MALGRANGE, B., Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularité irrégulière, Grenoble, 1979, (Preprint).

[R] ROBBA, P., Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels. Application à la réduction formelle des équations différentielles, Enseignement Math., XXVI, fasc. 3-4 (1980), 279-311.

P. ROBBA
Université Paris XI
Département de Mathématiques
91406 - ORSAY
FRANCE