

DANIEL LE BAIL

Analyticité locale pour les solutions de l'équation d'Euler

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 3
« Équations aux dérivées partielles », , p. 89-120

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985__3_89_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAPITRE IV

ANALYTICITE LOCALE POUR LES SOLUTIONS DE L'EQUATION D'EULER

LE BAIL Daniel

Université de Rennes I

UER Mathématiques & Informatique

Campus de Beaulieu

35 042 - RENNES - FRANCE

1 - INTRODUCTION

L'analyticité locale pour les solutions de l'équation d'Euler dans \mathbb{R}^n a été traitée par S. Alinhac et G. Métivier dans [2]. Il s'agit ici de reprendre cette étude au voisinage du bord dans le cas d'un problème aux limites.

La variable de \mathbb{R}^{n+1} sera notée $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On considère un ouvert borné Ω , de bord analytique $\partial\Omega$, inclus dans \mathbb{R}^n . Le mouvement d'un fluide parfait incompressible et non homogène à l'intérieur de Ω est régi par les équations suivantes :

$$(1.1) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \frac{1}{\rho} (\text{grad } P + f) & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \text{div } u = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\rho = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0 & \text{dans } (0, T) \times \partial\Omega \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \rho|_{t=0} = \rho_0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Les inconnues sont $u = (u_1, \dots, u_n)$, ρ et P à valeurs respectivement dans \mathbb{R}^n , \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R} . u_0 , ρ_0 et f sont données, ρ_0 étant strictement positive sur $\bar{\Omega}$.

n désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$. Rappelons que $\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$ et que $(u \cdot \nabla)v$ désigne $\sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial v}{\partial x_j}$. On notera $\sigma = \frac{1}{\rho}$ et $U = (u, \rho)$.

Soit $\mu > n/2$. Sous les conditions $U_0 \in (H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1}$ et $f \in C^0([0, T_0], (H^{\mu+1}(\Omega))^n)$, on sait qu'il existe des solutions (U, P) dans $[0, T] \times \bar{\Omega}$ avec $T < T_0$ vérifiant :

$$(1.2) \quad \begin{cases} U \in C^0([0, T], (H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1}) \\ \frac{\partial U}{\partial t} \in C^0([0, T], (H^{\mu}(\Omega))^{n+1}) \\ P \in C^0([0, T], H^{\mu+2}(\Omega)) \end{cases}$$

On renvoie en ce qui concerne le cas homogène à T. Kato [10], D.G. Ebin - J. Marsden [7], J.P. Bourguignon - H. Brezis [6] et R. Temam [13] et pour le cas non homogène à J.E. Marsden [16] et A. Valli - H.B. Daveiga [15].

Dans toute la suite, nous supposerons donc donnée une telle solution (U, P) dans $[0, T] \times \bar{\Omega}$. Pour simplifier les calculs, nous supposerons aussi que μ est entier.

La fonction u est alors bornée et à dérivées bornées sur $[0, T] \times \bar{\Omega}$ et les courbes intégrales du système :

$$(1.3) \quad \frac{dx}{dt}(t) = u(t, x(t))$$

sont bien définies pour $t \in [0, T]$. En effet, le champ u étant tangent au bord, les courbes intégrales de (1.3) issues de points du bord restent dans le bord et celles issues de points de Ω restent dans Ω . Si l'on

note $\phi_{t,s}(x)$ la solution de (1.3) avec condition initiale x en $t = s$, les $\phi_{t,s}$ sont donc des difféomorphismes de $\bar{\Omega}$ sur lui-même.

Le résultat principal de ce travail peut s'énoncer de la façon suivante :

THEOREME 1

Soit $x_0 \in \partial\Omega$ et $\gamma_T(x_0) = \{(t, \phi_{t,0}(x_0)), t \in [0, T]\}$. Si U_0 est analytique jusqu'au bord au voisinage de x_0 , si f est analytique jusqu'au bord au voisinage de $\gamma_T(x_0)$ alors U est analytiques jusqu'au bord au voisinage de $\gamma_T(x_0)$.

L'idée de la preuve est la suivante : on reprend la démonstration de S. Alinhac et G. Métivier dans [2] consistant à dériver l'équation en U et à estimer les dérivées de U grâce à une inégalité d'énergie. Pour cela, on doit évaluer les dérivées de P en fonction de celles de U . Dans [2], cela se fait en utilisant une paramétrix du Laplacien. Ici, la pression qui est solution du système :

$$(1.4) \quad \begin{cases} \text{div}(\sigma \text{ grad } P) = \text{div}(u \cdot \nabla)u - \text{div}(\sigma f) & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \text{grad } P \cdot n = \rho((u \cdot \nabla)u \cdot n) - f \cdot n & \text{dans } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

est étudiée par la méthode des ouverts emboîtés de C.B. Morrey et L. Nirenberg [12].

2 - DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Admettons tout d'abord le

LEMME 2.1

Sous les hypothèses du théorème 1, U est C^∞ jusqu'au bord sur un voisinage de $\gamma_T(x_0)$.

dont la preuve est reportée à la fin de cet article.

2a - Notations

On se place alors dans une carte locale : il existe un voisinage ω_1 de x_0 , un voisinage $\tilde{\omega}_1$ de 0 dans \mathbb{R}^n et un difféomorphisme analytique θ de ω_1 sur $\tilde{\omega}_1$ tels que $\theta_* \left(\frac{\partial}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial y_n}$ et $\theta(\omega_1 \cap \bar{\Omega}) = \tilde{\omega}_1 \cap \{y_n \geq 0\}$. On note $\tilde{\omega}_1^+ = \tilde{\omega}_1 \cap \{y_n > 0\}$ et $\partial \tilde{\omega}_1^+ = \tilde{\omega}_1 \cap \{y_n = 0\}$.

Quitte à découper la courbe intégrale $\gamma_T(x_0)$, on peut supposer que sa projection en x est entièrement contenue dans ω_1 , c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ω de x_0 tel que $\forall t \in [0, T], \phi_{t,0}(\omega \cap \bar{\Omega}) \subset \subset \omega_1 \cap \bar{\Omega}$. Si l'on note $\mathcal{C}(\omega) = \{(t, x) \in [0, T] \times \bar{\Omega} / x \in \phi_{t,0}(\omega \cap \bar{\Omega})\}$, on peut donc prendre pour hypothèses que U_0 est analytique jusqu'au bord sur $\bar{\omega} \cap \bar{\Omega}$, f est analytique jusqu'au bord sur $\overline{\mathcal{C}(\omega)}$ et grâce au lemme 2.1, que U et P sont C^∞ jusqu'au bord sur $\overline{\mathcal{C}(\omega)}$.

Introduisons maintenant quelques notations : nous fixons une fonction réelle δ, C^∞ sur $\tilde{\omega}_1$, équivalente à la distance au bord de $\tilde{\omega}$ et pour $t \in [0, T]$, nous notons $\delta_t(y) = \delta(\theta \circ \phi_{0,t} \circ \theta^{-1}(y))$. Pour $\delta > 0$, $\tilde{\omega}_\delta$ désigne l'ensemble $\{y \in \tilde{\omega} / \delta(y) > \delta\}$ et $\tilde{\omega}_{t,\delta}^+ = \theta \circ \phi_{t,0} \circ \theta^{-1}(\tilde{\omega}_\delta^+)$. On normalise aussi la fonction δ de sorte que : $\forall t \in [0, T], \forall (x, y) \in \tilde{\omega}_t^+ \times \tilde{\omega}_t^+, |\delta_t(x) - \delta_t(y)| \leq |x-y|$, $\tilde{\omega}_t^+$ désignant $\theta \circ \phi_{t,0} \circ \theta^{-1}(\tilde{\omega}^+)$. Enfin $\theta(\mathcal{C}(\omega))$ désigne $\{(t, \theta(x)) / (t, x) \in \mathcal{C}(\omega)\}$.

L'entier μ étant fixé, $\mu > \frac{n}{2}$, les espaces $H^\mu(\tilde{\omega}_{t,\delta}^+)$ sont des algèbres, munies de leurs normes habituelles qu'on notera $\| \cdot \|_{\mu,t,\delta}$.

On a alors, pour tous u et v dans $H^\mu(\tilde{\omega}_{t,\delta}^+)$

$$(2.2) \quad ||u.v||_{\mu,t,\delta} \leq C_0 ||u||_{\mu,t,\delta} \cdot ||v||_{\mu,t,\delta}$$

Utilisant l'équivalence des normes $||u \circ \theta||_{H^\mu(\omega)}$ et $||u||_{H^\mu(\tilde{\omega})}$ et les changements de variables $\phi_{t,o}$, il est clair que la constante C_0 peut être prise indépendante de $t \in [0, T]$. Pour $t = 0$, cette constante ne dépend que de la géométrie de $\tilde{\omega}_\delta$ et on peut donc trouver δ_0 assez petit pour que (2.2) ait lieu avec la même constante C_0 pour tout $\delta \in]0, \delta_0]$ et pour tout $t \in [0, T]$.

2b - L'inégalité d'énergie

L'inégalité d'énergie utilisée est inchangée par rapport à [2] :

si $v \in C^\infty(\mathcal{E}(\omega))$ est solution dans $\mathcal{E}(\omega)$ de

$$(2.3) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (u.\nabla)v = g$$

alors

$$||v(t, \cdot)||_{L^2(\phi_{t,o}(\omega \cap \bar{\omega}))} \leq ||v(0, \cdot)||_{L^2(\omega \cap \bar{\omega})} + 2 \int_0^t ||g(s, \cdot)||_{L^2(\phi_{s,o}(\omega \cap \bar{\omega}))} ds$$

Elle se traduit en carte locale en utilisant l'équivalence de

$||u \circ \theta||_{H^\mu(\omega)}$ et $||u||_{H^\mu(\tilde{\omega})}$. Soit \tilde{v} définie par $\tilde{v}(y) = v(x)$. Si

$\tilde{v} \in C^\infty(\theta(\mathcal{E}(\omega)))$ est solution dans $\theta(\mathcal{E})$ de (2.3), écrite en carte locale,

alors :

$$||\tilde{v}(t, \cdot)||_{L^2(\theta \circ \phi_{t,o}(\omega \cap \bar{\omega}))} \leq c (||\tilde{v}(0, \cdot)||_{L^2(\theta(\omega \cap \bar{\omega}))} + \int_0^t ||\tilde{g}(s, \cdot)||_{L^2(\theta \circ \phi_{s,o}(\omega \cap \bar{\omega}))} ds)$$

On l'applique à $\theta^{-1}(\tilde{\omega}_\delta^+)$ et on démontre ainsi qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\delta \in]0, \delta_0]$, pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $\tilde{v} \in C^\infty(\overline{\theta(\mathcal{G})(\omega)})$ solution de (2.3) :

$$(2.4) \quad \left\| \tilde{v}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\tilde{\omega}_{t, \delta}^+)} \leq C \left(\left\| \tilde{v}(0, \cdot) \right\|_{L^2(\tilde{\omega}_\delta^+)} + \int_0^t \left\| \tilde{g}(s, \cdot) \right\|_{L^2(\tilde{\omega}_{s, \delta}^+)} ds \right)$$

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous noterons de la même façon les ouverts et les fonctions avant et après le difféomorphisme.

2c - Semi-normes

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note $m_p = c \cdot \frac{p!}{(p+1)^2}$ et $m_\alpha = m_{|\alpha|}$, la constante c étant choisie pour que l'on ait, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} m_{\alpha-\beta} m_\beta \leq m_\alpha \quad \text{et} \\ \sum_{0 < \beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} m_{|\beta|-1} m_{|\alpha|-|\beta|-1} \leq m_{|\alpha|-1} \end{array} \right.$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et λ étant des paramètres positifs, nous noterons pour M, N et q entiers ≥ 0 :

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} |w|_{M, q, t, \delta} = \sup_{\substack{|\gamma|=M \\ \gamma_n=q}} \left\| \partial^\gamma w \right\|_{\mu, t, \delta} \\ \tilde{T}_{M, q, t}(w) = \sup_{0 < \delta \leq \delta_0} \delta^{(M-1)_+} |w|_{M, q, t, \delta} \\ \tilde{T}_{M, t}(w) = \sup_{0 \leq q \leq M} \varepsilon_2^{(q-1)_+} \tilde{T}_{M, q, t}(w) \\ T_N(w) = \sup_{t \in [0, T]} \sup_{0 \leq M \leq N} \frac{(\varepsilon_1 e^{-\lambda t})^{(M-1)_+}}{m_{(M-1)_+}} \tilde{T}_{M, t}(w) \end{array} \right.$$

La notation m_+ désigne $\sup(m, 0)$.

2d - Dérivation des équations

On note $a_{jk} = \frac{\partial \theta_k}{\partial x_j}$, $A = (a_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$

$$\mathcal{F} = (f, 0) \text{ et } B. \text{ grad } P = (A. \text{ grad } P, 0).$$

En carte locale, les équations (1.1) s'écrivent alors :

$$(2.7) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j,k} a_{jk} u_j \frac{\partial U}{\partial y_k} = \sigma(\mathcal{F} + B. \text{ grad } P) \quad \text{dans } (0, T) \times \omega^+$$

Le résultat est énoncé dans le lemme suivant qui sera démontré au paragraphe 4.

LEMME 2.8

Il existe des constantes C, C_1 et $\varepsilon_1^* > 0$, il existe un polynôme F de degré ≤ 2 , à coefficients positifs, tels que pour $M \geq 2, q \geq 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = M, \alpha_n = q$, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq \mu$, la fonction $V = \partial_y^{\alpha+\beta} U$ vérifie dans $\theta(\mathcal{C})(\omega)$ une équation

$$(2.9) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j,k} a_{jk} u_j \frac{\partial V}{\partial y_k} = G$$

où G satisfait, pour tout $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$ vérifiant $\varepsilon_1 T_{M-1}(U) \leq C_1$, et pour tous $\varepsilon_2 > 0, \lambda \geq 0, \delta \in]0, \delta_0], t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|G\|_{L^2(\omega_{t,\delta}^+)} &\leq C(M \sup(|U|_{M, \inf(q+1, M), t, \delta}, |U|_{M, q, t, \delta}, |U|_{M, \sup(0, q-1), t, \delta}) \\ &\quad + |\text{grad } P|_{M, q, t, \delta} \\ &\quad + (\varepsilon_1 \delta e^{-\lambda t})^{1-M} \varepsilon_2^{-q} m_M F(T_{M-1}(U), T_{M-1}(\text{grad } P))) \end{aligned}$$

2e - Estimation de la pression

En utilisant la méthode des ouverts emboîtés de C.B. Morrey et L. Nirenberg [12], on obtient le

LEMME 2.10

Il existe des constantes C, ε_1^* et $\varepsilon_2 > 0$, un polynôme F à coefficients positifs tels que pour $M \geq 1$, pour tous $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_1^*]$, $\lambda \geq 0$ et pour tout $t \in [0, T]$:

$$\tilde{T}_{M+1,t}(\text{grad } P) \leq C(\tilde{T}_{M+1,t}(U) + (\varepsilon_1 e^{-\lambda t})^{-M} F(T_M(U), \varepsilon_1 T_M(\text{grad } P)))$$

2f - Estimation des dérivées de U

LEMME 2.11

Il existe des constantes $C_1, H_1, \lambda_1, \varepsilon_2$ et $\varepsilon_1^* > 0$, il existe des polynômes F_1 et F_2 tels que pour tout $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_1^*]$, pour tout λ vérifiant $\lambda \geq \lambda_1$ et pour tout $N \geq 2$, la condition $\varepsilon_1 T_{N-1}(U) \leq C_1$ implique :

$$T_N(U) \leq \sup(T_1(U), H_1 + \frac{F_1(T_{N-1}(U), T_{N-1}(\text{grad } P))}{\lambda}) \quad \text{et}$$

$$T_N(\text{grad } P) \leq \sup(T_1(\text{grad } P), F_2(T_N(U), \varepsilon_1 T_{N-1}(\text{grad } P)))$$

PREUVE

La deuxième inégalité est une conséquence immédiate du lemme 2.10.

Pour démontrer la première, on applique le lemme 2.8 et l'inégalité d'énergie (2.4) à $\partial^{\alpha+\beta} U$, $|\alpha| = M$, $\alpha_n = q$, $|\beta| \leq \mu$, $M \geq 1$. D'après l'analyticité de U_0 , on sait qu'il existe ε et $H_1 > 0$ tels que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\|\partial^\alpha U_0\|_{\mu, \delta} \leq H_1 (\varepsilon_0 \delta)^{-(|\alpha|-1)_+} m_{(|\alpha|-1)_+}$$

En utilisant le lemme 2.8, en multipliant (2.4) par δ^{M-1} et en prenant le sup en δ , on obtient, si $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$ et si $\varepsilon_1 T_{M-1}(U) \leq C_1$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{M,q,t}^{(U)} &\leq C(H_1 \varepsilon_0^{1-M} m_{M-1} + \int_0^t \{M \tilde{T}_{M,\inf(q+1,M),s}^{(U)} + \tilde{T}_{M,q,s}^{(U)} \\ &+ \tilde{T}_{M,q,s}^{(\text{grad } P)} + (\varepsilon_1 e^{-\lambda s})^{1-M} \varepsilon_2^{-q} m_M F(T_{M-1}(U), T_{M-1}(\text{grad } P))\} ds) \end{aligned}$$

En multipliant par $\varepsilon_2^{(q-1)_+}$ et prenant le sup sur q , il vient que :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{M,t}^{(U)} &\leq C(H_1 \varepsilon_0^{1-M} m_{M-1} + \int_0^t \{M \varepsilon_2^{-1} \tilde{T}_{M,s}^{(U)} + \tilde{T}_{M,s}^{(\text{grad } P)} \\ &+ (\varepsilon_1 e^{-\lambda s})^{1-M} \varepsilon_2^{-1} m_M F(T_{M-1}(U), T_{M-1}(\text{grad } P))\} ds) \end{aligned}$$

Si $M \geq 2$ on utilise le lemme 2.10, ce qui donne, avec une nouvelle fonction polynôme F et ε_2 convenable :

$$\tilde{T}_{M,t}^{(U)} \leq C(H_1 \varepsilon_0^{1-M} m_{M-1} + M \varepsilon_2^{-1} \int_0^t \{ \tilde{T}_{M,s}^{(U)} + (\varepsilon_1 e^{-\lambda s})^{1-M} m_{M-1} F(T_{M-1}(U), T_{M-1}(\nabla P)) \} ds)$$

Nous appliquons maintenant le

LEMME 2.12 (de Gronwall)

Soient $f \geq 0$, $g \geq 0$, $A \geq 0$, $B \geq 0$, tels que $\forall t \in [0, T]$

$$f(t) \leq A \int_0^t f(s) ds + \int_0^t g(s) ds + B \quad \text{alors } \forall t \in [0, T]$$

$$f(t) \leq B e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)} g(s) ds$$

On obtient, si $M \geq 2$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{M,t}^{(U)} &\leq C(H_1 \varepsilon_0^{1-M} m_{M-1} e^{CM \varepsilon_2^{-1} t} \\ &+ \int_0^t e^{CM \varepsilon_2^{-1} (t-s)} M \varepsilon_2^{-1} (\varepsilon_1 e^{-\lambda s})^{1-M} m_{M-1} F(T_{M-1}(U), T_{M-1}(\text{grad } P)) ds) \end{aligned}$$

Multiplions par $\frac{M-1}{\varepsilon_1} \frac{(e^{-\lambda t})^{M-1}}{m_{M-1}}$ et choisissons $\varepsilon_1 < \inf(\varepsilon_0, \varepsilon_1^*)$:

$$\frac{(\epsilon_1 e^{-\lambda t})^{M-1}}{m_{M-1}} \approx T_{M,t}(U) \leq C(H_1) e^{(C M \epsilon_2^{-1} - \lambda(M-1))t} + \frac{M \epsilon_2^{-1}}{\lambda(M-1) - C M \epsilon_2^{-1}} (1 - e^{(C M \epsilon_2^{-1} - \lambda(M-1))t}) F(T_{M-1}(U), T_{M-1}(\nabla P))$$

Soit $\lambda_1 = 6C$. Alors $\lambda \epsilon_2 > \lambda_1$ implique, pour tout $M \geq 2$:

$$C M \epsilon_2^{-1} - \lambda(M-1) < 0$$

et
$$\frac{M \epsilon_2^{-1}}{\lambda(M-1) - C M \epsilon_2^{-1}} \leq \frac{3}{\lambda \epsilon_2}$$

Finalement, si $N \geq 2$, en modifiant H_1 et F :

$$T_N(U) \leq \sup(T_1(U), H_1) + \frac{F(T_{M-1}(U), T_{M-1}(\text{grad } P))}{\lambda}$$

2g - DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Les notations étant celles du lemme 3.11, posons

$H = \max(T_1(U), 2 H_1)$ et $K = \max(T_1(\nabla P), 2 F_2(H, 0))$, choisissons $\epsilon_1 < \epsilon_1^*$ tel que $F_2(H, \epsilon_1 K) \leq 2 F_2(H, 0)$ et $\epsilon_1 H \leq C_1$ et λ vérifiant $\lambda \geq \max(\lambda_1, \frac{F_1(H, K)}{H_1})$.

Alors les inégalités $T_{N-1}(U) \leq H$ et $T_{N-1}(\nabla P) \leq K$ impliquent, pour $N \geq 2$, $T_N(U) \leq H$ et $T_N(\nabla P) \leq K$. Elles sont donc vraies pour tout $N \geq 2$. On en déduit l'analyticité partielle en x de U et P sur $\mathcal{E}(\omega)$. L'analyticité en toutes les variables se récupère en revenant à l'équation (1.1) (cf. le lemme 3.6.1 de [1]).

3 - ETUDE DE L'EQUATION ELLIPTIQUE

3a - Notations

Nous avons vu que la pression était solution du système (1.4) qui s'écrit encore :

$$\begin{cases} \Delta P = \rho \{ \operatorname{div}(u \cdot \nabla)u - \nabla(\sigma) \nabla(P) - \operatorname{div}(\sigma f) \} \\ \frac{\partial P}{\partial n} = \rho((u \cdot \nabla)u \cdot n) - f \cdot n \end{cases}$$

Traduisons le en carte locale : il existe un opérateur elliptique Q de la forme $\partial_{y_n}^2 + \sum_{\substack{0 < |\beta| \leq 2 \\ \beta \neq (0,2)}} a_\beta \partial^\beta$, avec les a_β analytiques ne dépendant que de Ω , il existe des coefficients a_{jk} et d'après la condition $u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$, des coefficients ϕ_{jk} ne dépendant que de Ω (voir [13]) et analytiques, tels que :

$$(3.1) \quad \begin{cases} Q P = g & \text{dans } (0, T) \times \omega_1^+ \\ \frac{\partial P}{\partial y_n} = h & \text{dans } (0, T) \times \partial\omega_1^+ \end{cases}$$

$$\text{avec } g = \rho \left\{ \sum_{j,k,r,\ell} a_{rj} a_{\ell k} \frac{\partial u_k}{\partial y_r} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial y_\ell} - \sum_{j,r,\ell} a_{rj} \cdot a_{\ell j} \cdot \frac{\partial P}{\partial y_\ell} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y_r} - \sum_{j,r} \frac{\partial \sigma}{\partial y_r} a_{rj} f_j \right\} - \sum_{j,\ell} a_{\ell j} \frac{\partial f_j}{\partial y_\ell}$$

$$\text{et } h = - \rho \sum_{j,k} u_j u_k \phi_{jk} - f \cdot n$$

Nous allons donc reprendre la méthode de C.B. Morrey et L. Nirenberg en contrôlant les puissances de ϵ_1 et ϵ_2 ainsi que les factorielles et en tenant compte des décalages et de l'utilisation des espaces H^μ au lieu de L^2 .

Dans tout ce qui suit, on omet de noter le temps, étant entendu que les constantes utilisées dans les majorations n'en dépendent pas (en particulier grâce à 1.2).

Introduisons de nouvelles semi-normes compatibles avec (2.6). On pose, pour M,N,q entiers :

$$(3.2) \quad \begin{cases} \tilde{S}_{M,q}(w) = \sup_{0 < \delta \leq \delta_0} \delta^M |w|_{M,q,\delta} \\ \tilde{S}_M(w) = \sup_{0 \leq q \leq M} \varepsilon_2^q \tilde{S}_{M,q}(w) \\ S_N(w) = \sup_{0 \leq M \leq N} \frac{\varepsilon_1^M}{m_M} \tilde{S}_M(w) \end{cases}$$

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le lemme suivant :

LEMME 3.3

Il existe $C, \varepsilon_1^*, \varepsilon_2 > 0$ tels que pour $M \geq 1$, pour $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$, et pour P solution de (3.1) on a :

$$\tilde{T}_{M+1}(\nabla P) \leq C(\tilde{S}_M(g) + (M+1) \tilde{T}_M(h) + \sup(\tilde{T}_M(h), \tilde{T}_{M+1}(h)) + \varepsilon_1^{1-M} m_M T_M(\nabla P))$$

3b - Estimation des commutateurs

LEMME 3.4

si a est analytique sur $\bar{\omega}^+$, il existe C et $\varepsilon_1^* > 0$ tels que pour tous $M \geq 1, q \geq 0, \alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| = M$ et $\alpha_n = q$, pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n, 0 < |\gamma| \leq 2$ et $\gamma \neq (0,2)$, et pour tous $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_1^*], \varepsilon_2 > 0$, on a :

$$\| |\partial^\alpha (a \cdot \partial^\gamma P) - a \partial^{\alpha+\gamma} P| \|_{H^\mu(\omega_\delta^+)} \leq C(\delta \varepsilon_1)^{1-M} \varepsilon_2^{-(q-1)+} m_M T_M(\nabla P)$$

En effet, ce commutateur vaut :

$$\sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} a \cdot \partial^{\beta+\gamma} P$$

Puisque a est analytique sur $\bar{\omega}^+$, il existe $H > 0, \varepsilon_1^* > 0$ tels que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \|\partial^\alpha a\|_{H^\mu(\omega_\delta^+)} \leq H(\epsilon_1^* \delta)^{-(|\alpha|-1)_+} m_{(|\alpha|-1)_+}$$

La norme H^μ du commutateur se majore par :

$$C \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^{\alpha-\beta} a\|_{\mu, \delta} \|\partial^{\beta+\gamma} P\|_{\mu, \delta}$$

En utilisant le fait que pour $|\beta+\gamma| \geq 1$ on a

$$\|\partial^{\beta+\gamma} P\|_{\mu, \delta} \leq \|\partial^{\beta+\gamma-\delta} \nabla P\|_{\mu, \delta} \quad \text{avec } \delta \leq \beta+\gamma \text{ et } |\delta| = 1$$

On voit qu'on obtient un majorant :

$$C \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\epsilon_1^* \delta)^{1-|\alpha|+|\beta|} m_{(|\alpha|-|\beta|-1)_+} H \cdot (\epsilon_1 \delta)^{-(|\beta|+|\gamma|-|\delta|-1)_+} \\ m_{(|\beta|+|\gamma|-2)_+} \epsilon_2^{-(\beta_n+\gamma_n-\delta_n-1)_+} T_M(\nabla P)$$

Si $\epsilon_1 < \epsilon_1^*$, les termes en ϵ_1 se majorent par ϵ_1^{1-M} . Les termes en ϵ_2 se majorent par $\epsilon_2^{-(q-1)_+}$. Compte tenu de (2.5) et des notations (2.6) on obtient le résultat.

3c - Estimation des dérivées tangentielles

On part de l'inégalité classique pour l'opérateur elliptique Q d'ordre 2 : il existe $C > 0$ telle que pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$, $|\gamma| \leq 2$ et pour toute fonction P , C^∞ à support compact dans ω^+ solution de (3.1), on a :

$$\|\partial^\gamma P\|_{L^2(\omega^+)} \leq C (\|QP\|_{L^2(\omega^+)} + \|h\|_{H^1(\omega^+)} + \|P\|_{H^1(\omega^+)})$$

Grâce à la normalisation de δ_t (voir paragraphe 2.a), on peut construire pour r et r_1 positifs, une fonction φ , C_0^∞ , identique à 1 sur $\omega_{r+r_1, t}$, à support dans $\omega_{r_1, t}$ et vérifiant :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \exists C(\alpha) : \sup |D^\alpha \varphi(x)| \leq C(\alpha) r^{-|\alpha|}$$

on démontre alors qu'il existe $C > 0$ telle que pour r et $r_1 > 0$, pour $|\gamma| \leq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \|\partial^\gamma P\|_{L^2(\omega_{r+r_1}^+)} &\leq C(\|QP\|_{L^2(\omega_{r_1}^+)} + \frac{1}{r} \|P\|_{H^1(\omega_{r_1}^+)}) \\ &+ \frac{1}{r^2} \|P\|_{L^2(\omega_{r_1}^+)} + \|h\|_{H^1(\omega_{r_1}^+)} + \frac{1}{r} \|h\|_{L^2(\omega_{r_1}^+)} \end{aligned}$$

En dérivant tangentiellement, si $|\alpha'| = M$, $|\beta'| \leq \mu$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\partial^\gamma \partial^{\alpha'+\beta'} P\|_{L^2(\omega_{r+r_1}^+)} &\leq C(\|\partial^{\alpha'+\beta'} QP\|_{L^2(\omega_{r_1}^+)} \\ &+ \|[Q, \partial^{\alpha'+\beta'}]P\|_{L^2(\omega_{r_1}^+)} + \frac{1}{r} \|\partial^{\alpha'+\beta'} P\|_{H^1(\omega_{r_1}^+)}) \\ &+ \frac{1}{r^2} \|\partial^{\alpha'+\beta'} P\|_{L^2(\omega_{r_1}^+)} + \|\partial^{\alpha'+\beta'} h\|_{H^1(\omega_{r_1}^+)} + \frac{1}{r} \|\partial^{\alpha'+\beta'} h\|_{L^2(\omega_{r_1}^+)}) \end{aligned}$$

(On convient ici de noter $\partial^{\alpha'} = \partial^{(\alpha', 0)}$ pour $\alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}$).

$$\text{Le commutateur s'écrit } \sum_{\substack{0 < |\delta_1| \leq 2 \\ \delta_1 \neq (0, 2)}} \{a_{\delta_1} \partial^{\delta_1} \partial^{\alpha'+\beta'} P - \partial^{\alpha'+\beta'} (a_{\delta_1} \partial^{\delta_1} P)\}$$

et chacun de ces termes $\partial^{\alpha'+\beta'} (a_{\delta_1} \partial^{\delta_1} P) - \partial^{\beta'} (a_{\delta_1} \partial^{\alpha'+\delta_1} P) + \partial^{\beta'} (a_{\delta_1} \partial^{\alpha'+\delta_1} P)$

- $a_{\delta_1} \partial^{\delta_1 + \alpha' + \beta'} P$. La première différence se majore en norme $L^2(\omega_{r_1}^+)$ par

$\|\partial^{\alpha'} (a_{\delta_1} \partial^{\delta_1} P) - a_{\delta_1} \partial^{\alpha'+\delta_1} P\|_{\mu, r_1}$. Compte tenu de l'analyticité des a_{δ_1} ,

elle se majore en utilisant le lemme 3.4 par $C(\varepsilon_1 r_1)^{1-M} m_M T_M(\nabla P)$ en choisissant $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$.

La seconde différence se majore par $C \|a_{\delta_1}\|_{\mu+1, r_1}$

$\|\partial^{\alpha'+\delta_1} P\|_{\mu-1, r_1}$ soit, en modifiant C , par $C \sup(|P|_{M, 0, r_1}, |P|_{M+1, 0, r_1})$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|\partial^\gamma \partial^{\alpha'+\beta'} P\|_{L^2(\omega_{r+r_1}^+)} &\leq C(|g|_{M,0,r_1} + \sup(|h|_{M,0,r_1}, |h|_{M+1,0,r_1}, |h|_{M+1,1,r_1})) \\ &+ \frac{1}{r^2} |P|_{M,0,r_1} + \frac{1}{r} \sup(|P|_{M,0,r_1}, |P|_{M+1,0,r_1}, |P|_{M+1,1,r_1}) \\ &+ \frac{1}{r} |h|_{M,0,r_1} + m_M(\epsilon_1 r_1)^{1-M} T_M(\nabla P) \end{aligned}$$

En choisissant $\delta = r + r_1$, $r = \frac{\delta}{M+1}$, en multipliant par δ^M et compte tenu des notations (3.2), on obtient le

LEMME 3.5

Il existe $C > 0$, $\epsilon_1^* > 0$ tels que pour tout $M \geq 1$, pour tout $\alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}$, $|\alpha'| = M$, pour tout $\beta' \in \mathbb{N}^{n-1}$, $|\beta'| \leq \mu$, pour tout γ , $|\gamma| \leq 2$, on a, pour tout $\delta \in]0, \delta_0]$, pour tout $\epsilon_1 \in]0, \epsilon_1^*]$:

$$\begin{aligned} \delta^M \|\partial^{\gamma+\alpha'+\beta'} P\|_{L^2(\omega_\delta^+)} &\leq C(\tilde{S}_{M,0}(g) + (M+1) \tilde{T}_{M,0}(h) + m_M \epsilon_1^{1-M} T_M(\nabla P)) \\ &+ \sup(\tilde{T}_{M,0}(h), \tilde{T}_{M+1,0}(h), \tilde{T}_{M+1,1}(h)). \end{aligned}$$

3d - Estimation des dérivées normales

On revient à l'équation ; si $|\alpha| = M$, $M \geq 1$, $\alpha_n = q$, $|\beta| \leq \mu$

$$\partial_{Y_n}^2 \partial^{\alpha+\beta} P = \partial_Y^{\alpha+\beta} g - \sum_{\substack{0 < |\delta_1| \leq 2 \\ \delta_1 \neq (0,2)}} a_{\delta_1} \partial^{\delta_1+\alpha+\beta} P - \sum_{\substack{0 < |\delta_1| \leq 2 \\ \delta_1 \neq (0,2)}} [\partial^{\alpha+\beta}, a_{\delta_1}] \partial^{\delta_1} P$$

Le commutateur s'étudie comme précédemment en utilisant le lemme

3.4 et le fait que

$$\|\partial^{\alpha+\delta} P\|_{\mu-1,\delta} \leq \sup(|\nabla P|_{M,q,\delta}, |\nabla P|_{M-1,(q-1)_+,\delta})$$

On obtient le

LEMME 3.6

Il existe $C, \epsilon_1^* > 0$ tels que pour $M \geq 1, q \geq 0$, pour tout $\alpha, |\alpha| = M$ et $\alpha_n = q$, pour tout $\beta, |\beta| \leq \mu$, on a, pour tous $\delta \in]0, \delta_0], \epsilon_1 < \epsilon_1^*$ et $\epsilon_2 > 0$.

$$\begin{aligned} \|\partial_{y_n}^2 \partial^{\alpha+\beta} P\|_{L^2(\omega_\delta^+)} &\leq C(|g|_{M,q,\delta} + \sup_{\substack{|\delta_1| \leq 2, \delta_1 \neq (0,2) \\ |\beta| \leq \mu \\ |\alpha|=M, \alpha_n=q}} \|\partial^{\delta_1+\alpha+\beta} P\|_{L^2(\omega_\delta^+)}) \\ &\quad + (\epsilon_1 \delta)^{1-M} m_M \epsilon_2^{-(q-1)} T_M(\nabla P) \end{aligned}$$

3e - Démonstration du lemme 3.3

Considérons, pour $M \geq 1, q \geq 0$, la semi-norme $|\nabla P|_{M+1,q,\delta}$. Elle se majore par $\sup(|P|_{M+2,q,\delta}, |P|_{M+2,q+1,\delta})$. En utilisant les lemmes 3.5, 3.6 et le fait que pour $|\eta| \leq 2, \eta \neq (0,2)$, pour $|\alpha| = M, \alpha_n = q$, pour $|\beta| \leq \mu$ on a

$$\begin{aligned} \|\partial^{\eta+\alpha+\beta} P\|_{L^2(\omega_\delta^+)} &\leq \sup(|\nabla P|_{M-1,(q-1)_+,\delta}, |\nabla P|_{M,(q-1)_+,\delta}, \\ &\quad |\nabla P|_{M,(q-1)_+ + 1,\delta}, |\nabla P|_{M+1,(q-1)_+,\delta}, |\nabla P|_{M+1,(q-1)_+ + 1,\delta}) \end{aligned}$$

on trouve que, pour $\epsilon_1 < \epsilon_1^*$:

$$\begin{aligned} |\nabla P|_{M+1,q,\delta} &\leq \sup\{C\delta^{-M} (\tilde{S}_{M,0}^{\sim}(g) + \sup(\tilde{T}_{M,0}^{\sim}(h), \tilde{T}_{M+1,0}^{\sim}(h), \tilde{T}_{M+1,1}^{\sim}(h))) \\ &\quad + (M+1)\tilde{T}_{M,0}^{\sim}(h) + m_M \epsilon_1^{1-M} T_M(\nabla P)), \\ &\quad \sup(|g|_{M,(q-1)_+,\delta}, |g|_{M,(q-2)_+,\delta}) + (\epsilon_1 \delta)^{1-M} m_M \epsilon_2^{-(q-2)} T_M(\nabla P) \\ &\quad + \sup(|\nabla P|_{M+1,(q-3)_+,\delta}, |\nabla P|_{M+1,(q-3)_+ + 1,\delta}, |\nabla P|_{M+1,(q-2)_+,\delta}, \\ &\quad \quad \quad |\nabla P|_{M+1,(q-2)_+ + 1,\delta})\}. \end{aligned}$$

En multipliant par δ^M et prenant le sup en δ :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{M+1,q}(\nabla P) &\leq C(\varepsilon_2^{-q+1} \tilde{S}_M(g) + \sup(\tilde{T}_M(h), \tilde{T}_{M+1}(h)) + (M+1)\tilde{T}_M(h) \\ &\quad + \varepsilon_1^{1-M} m_M \varepsilon_2^{-q+2} T_M(\nabla P) \\ &\quad + \sup(\tilde{T}_{M+1,(q-2)}^+(\nabla P), \tilde{T}_{M+1,(q-2)}^{+1}(\nabla P), \tilde{T}_{M+1,(q-3)}^+(\nabla P), \\ &\quad \quad \quad \tilde{T}_{(M+1),(q-3)}^{+1}(\nabla P))). \end{aligned}$$

Pour estimer $|\nabla P|_{M+1,0}$ et $|\nabla P|_{M+1,1}$, nous avons besoin de

$$|P|_{M+2,0}, \quad |P|_{M+2,1} \quad \text{et} \quad |P|_{M+2,2}.$$

On utilise le lemme 3.6 en effectuant une récurrence descendante sur le multi-indice β , ainsi que 3.5, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sup(\tilde{T}_{M+1,0}(\nabla P), \tilde{T}_{M+1,1}(\nabla P)) \\ \leq C(\tilde{S}_{M,0}(g) + \sup(\tilde{T}_M(h), \tilde{T}_{M+1}(h)) + (M+1)\tilde{T}_M(h) + \varepsilon_1^{1-M} m_M T_M(\nabla P)) \end{aligned}$$

En regroupant toutes ces inégalités, on démontre que :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{M+1,q}(\nabla P) &\leq \alpha_{0M,q}^{H_{M,q}} + \alpha_{1M,q-1}^{H_{M,q-1}} + \dots + \alpha_{kM,q-k}^{H_{M,q-k}} + \dots + \alpha_{q-2M,2}^{H_{M,2}} \\ &\quad + \alpha_{q-1M,1}^{H_{M,1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad H_{M,k} &= \varepsilon_2^{-k+1} \tilde{S}_M(g) + \sup(\tilde{T}_M(h), \tilde{T}_{M+1}(h)) + \varepsilon_1^{1-M} m_M \varepsilon_2^{-k+2} T_M(\nabla P) \\ &\quad + (M+1)\tilde{T}_M(h) \end{aligned}$$

et où α_k est une suite de terme général majoré par R^{k+1} , R étant une constante assez grande par rapport à C . En multipliant ε_2^{-q+1} et en choisissant $\varepsilon_2 = \frac{1}{2R}$, on obtient le lemme 3.3.

4 - NORMES FORMELLES

L'objet de ce paragraphe est d'estimer les dérivées de g et de h (voir 3.1) en fonction de celles de U et d'en déduire les lemmes 2.10 et 2.8. S'agissant de dérivées de fonctions composées, nous utilisons la méthode des séries majorantes (Lax [11], Friedman [8], Wagschal [14]).

Dans le lemme qui suit, nous oublions de noter t et δ qui apparaissent comme paramètres. En particulier ω désigne ω_δ^+ . Introduisons les notations suivantes :

$$S_{M,q} = \varepsilon_1^{-M+1} \varepsilon_2^{-q+1} m_{(M-1)_+} \quad \text{et} \quad S_\alpha = S_{|\alpha|, \alpha_n}$$

$$\text{Pour } w \in C^\infty(\bar{\omega}) : |w|_{M,q} = \sup_{\substack{|\alpha|=M \\ \alpha_n=q}} \|\partial^\alpha w\|_{H^\mu(\omega)}$$

$$[w]_N = \sup_{\substack{0 \leq M \leq N \\ 0 \leq q \leq N}} \frac{|w|_{M,q}}{S_{M,q}}$$

LEMME 4.1

Soit $w \in C^\infty(\bar{\omega})$ une fonction réelle, ϕ une fonction analytique au voisinage du compact $w(\bar{\omega})$. Il existe C et $L > 0$ (ne dépendant que de ϕ et de $\|w\|_{\mu+1}$) tels que pour tous p, N , entiers positifs, tous $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, la condition $\varepsilon_1 [w]_N \leq C$ implique :

$$\text{i) } [\phi(w)]_N \leq L [w]_N$$

$$\text{ii) } |\phi(w)|_{N+1,p} \leq L (|w|_{N+1,p} + S_{N+1,p} [w]_N) \quad (0 \leq p \leq N+1)$$

$$\text{iii) Pour } |\alpha| = N+1, \alpha_n = p, \text{ pour } j = 1, \dots, n :$$

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha (\phi(w) \partial_{Y_j} w) - \phi(w) \partial^\alpha \partial_{Y_j} w\|_\mu &\leq L(N+1) \{ S_{N+1, \inf(p+1, N+1)} (1 + [w]_N)^2 \\ &+ \sup(|w|_{N+1, \inf(p+1, N+1)}, |w|_{N+1, p}, |w|_{N+1, \sup(0, p-1)}) \} \end{aligned}$$

Comme nous l'avons déjà dit, la démonstration utilise la méthode des séries majorantes. Nous pouvons adapter la preuve du lemme 3.3.1 de [1] moyennant le résultat suivant :

$$\text{si } \theta(x) = \sum_{\alpha > 0} \frac{S_\alpha}{\alpha!} X^\alpha \quad \text{alors } \theta(x) \cdot \theta(x) \ll \varepsilon_1 \theta(x)$$

Ce dernier résultat de (2.5) et de l'inégalité :

$$(\beta_n - 1)_+ + (\alpha_n - \beta_n - 1)_+ \leq (\alpha_n - 1)_+$$

les i) et ii) en découlent immédiatement. Pour iii), on utilise le fait que si $|\alpha| = M+1$, $\alpha_n = q$, si $|\gamma| = 1$:

$$\sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ 2 \leq |\beta| \leq M}} \binom{\alpha}{\beta} S_{|\beta|, \beta_n} S_{|\alpha| - |\beta| + |\gamma|, \alpha_n - \beta_n + \gamma_n} \leq (M+1) S_{M+1, \inf(q+1, M+1)}$$

Ce lemme s'étend au cas où w est à valeurs dans \mathbb{R}^V et aux fonctions $\phi(x, w)$,

$$\text{en prenant } |w|_{M, q} = \sup_{\substack{|\alpha| = M \\ \alpha_n = q}} \sup_{j=1, \dots, V} \left\| \partial^{\alpha} w_j \right\|_{H^{\mu}(w)}$$

LEMME 4.2

Soit $w = (w_1, \dots, w_V)$ une fonction C^∞ sur $\bar{\omega}$ à valeurs dans \mathbb{R}^V .

Soit $\phi(x, w)$ une fonction analytique au voisinage de $\bar{\omega} \times w(\bar{\omega})$, il existe ε_1^* , C et $L > 0$ tels que pour $N, p \geq 0$ et $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$ la condition $\varepsilon_1 [w]_N \leq C$

implique :

i) $[\phi(\cdot, w(\cdot))]_N \leq L(1 + [w]_N)$

ii) $|\phi(\cdot, w(\cdot))|_{N+1, p} \leq L\{|w|_{N+1, p} + S_{N+1, p}^{(1 + [w]_N)}\}$

iii) pour $|\alpha| = N+1$, $\alpha_n = p$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, V$

$$\left\| \partial^{\alpha} (\phi(x, w) \partial_{y_j} w_k) - \phi(x, w) \partial_{y_j}^{\alpha} w_k \right\|_{\mu} \leq (N+1)L \{ S_{N+1, \inf(p+1, N+1)}^{(1 + [w]_N)^2} + \sup(|w|_{N+1, \inf(p+1, N+1)}, |w|_{N+1, p}, |w|_{N+1, \sup(0, p-1)}) \}$$

Donnons un dernier lemme qui nous permettra d'aboutir aux estimations de g et h.

LEMME 4.3

Soient v et $w \in C^\infty(\bar{\omega})$ des fonctions réelles, ϕ une fonction analytique au voisinage du compact $v(\bar{\omega})$. Il existe C et $L > 0$ (ne dépendant que de ϕ et de $\|v\|_{\mu+1}$) tels que pour $M \geq 1$, $q \geq 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ la condition $\varepsilon_1 [v]_M \leq C$ implique, pour $|\alpha| = M$, $\alpha_n = q$:

$$\begin{aligned} \text{i) } \|\partial^\alpha(\phi(v)\partial v\partial w)\|_\mu &\leq L([v]_1^2 \|\nabla w\|_{M,q} + [v]_0 [w]_1 \|\nabla v\|_{M,q} \\ &\quad + \varepsilon_1^{-M} \varepsilon_2^{-q} m_M [v]_{M-1} [v]_M [w]_M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \|\partial^\alpha(\phi(v)\partial v\partial w)\|_\mu &\leq L([v]_1^2 \|\nabla w\|_{M,q} + [v]_0 [\nabla w]_0 \|\nabla v\|_{M,q} \\ &\quad + \varepsilon_1^{1-M} \varepsilon_2^{-q} m_M [v]_{M-1} [v]_M [\nabla w]_{M-1}) \end{aligned}$$

Démontrons le i). On a :

$$\begin{aligned} \partial^\alpha(\phi(v)\partial v\partial w) &= \phi(v)\partial v\partial^\alpha\partial w + \partial w\phi(v)\partial^\alpha\partial v + \partial w \sum_{0 < \gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma \phi(v) \partial^{\alpha-\gamma} \partial v \\ &\quad + \sum_{0 < \beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[\sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\gamma \phi(v) \partial^{\beta-\gamma} \partial v \right] \partial^{\alpha-\beta} \partial w \end{aligned}$$

Le terme $\phi(v)\partial v\partial^\alpha\partial w$ se majore par $L[v]_1^2 \|\nabla w\|_{M,q}$ compte tenu du lemme 4.1.

Etudions le troisième terme et plus précisément $\sum_{0 < \gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma \phi(v) \partial^{\alpha-\gamma} \partial v$. Il se majore en norme H^μ par $C \sum_{0 < \gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} |\phi(v)|_{|\gamma|, \gamma_n} \|\nabla v\|_{|\alpha|-|\gamma|, \alpha_n - \gamma_n}$ soit par $C \sum_{0 < \gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} s_{|\gamma|, \gamma_n} [\phi(v)]_{|\alpha|} \sup\{s_{|\alpha|-|\gamma|+1, \alpha_n - \gamma_n}, s_{|\alpha|-|\gamma|+1, \alpha_n - \gamma_n + 1}\} [v]_{|\alpha|}$.

Les $S_{M,q}$ sont croissants en M et en q , et puisque

$\sum_{0 < \gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} S_{\gamma} S_{|\alpha| - |\gamma| + 1, \alpha_n - \gamma_n + 1} \leq \epsilon_1^{1 - |\alpha|} \epsilon_2^{-\alpha_n} m_{|\alpha|}$, on obtient en utilisant le lemme 4.1 un majorant en $L \epsilon_1^{1 - |\alpha|} \epsilon_2^{-\alpha_n} m_{|\alpha|} [v]_{|\alpha|}^2$.

Le dernier terme se majore par :

$$\sum_{0 < \beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[\sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} S_{\gamma} [\phi(v)]_{|\beta|} S_{|\beta| - |\gamma| + 1, \beta_n - \gamma_n + 1} [v]_{|\beta| + 1} \right] \bar{x} S_{|\alpha| - |\beta| + 1, \alpha_n - \beta_n + 1} [w]_{|\alpha|}$$

En utilisant $\sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} S_{\gamma} S_{|\beta| - |\gamma| + 1, \beta_n - \gamma_n + 1} \leq \epsilon_1^{-|\beta|} \epsilon_2^{-\beta_n} m_{|\beta|}$ puis

$$\sum_{0 < \beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \epsilon_1^{-|\beta|} \epsilon_2^{-\beta_n} m_{|\beta|} S_{|\alpha| - |\beta| + 1, \alpha_n - \beta_n + 1} \leq \epsilon_1^{-|\alpha|} \epsilon_2^{-\alpha_n} m_{|\alpha|}$$
, on trouve

$L \epsilon_1^{-|\alpha|} \epsilon_2^{-\alpha_n} m_{|\alpha|} [v]_{|\alpha|}^2 [w]_{|\alpha|}$. Le ii) se démontre de la même façon, en conservant la forme ∇w .

Remarque

Le lemme 4.3 se généralise au cas des fonctions $\phi(x, w)$ et au cas où w est à valeurs dans \mathbb{R}^V .

Avant de démontrer le lemme 2.10, rappelons (3.1) que

$$g = \rho \left\{ \sum_{j, k, r, l} a_{rj} a_{lk} \frac{\partial u_k}{\partial y_r} \frac{\partial u_j}{\partial y_l} - \sum_{j, r, l} a_{rj} a_{lj} \frac{\partial p}{\partial y_l} \frac{\partial \sigma}{\partial y_r} - \sum_{j, r} a_{rj} f_j \frac{\partial \sigma}{\partial y_r} \right\} - \sum_{j, l} a_{lj} \frac{\partial f_j}{\partial y_l}$$

et
$$h = -\rho \sum_{j, k} u_j u_k \phi_{jk} - f.n$$

Nous pouvons donc nous ramener au cas où g et h s'écrivent :

$$g = \phi_1(U) \partial U \partial U + \phi_2(U) \partial U \partial P + \phi_3(U, f) \partial U + \phi_4(f)$$

$$h = \phi_5(U) - f.n$$

les fonctions ϕ_i étant analytiques de leurs arguments puisque $\rho(t, y) = \rho_o(t, \phi_{o,t}(y))$ (équation 1.1) est toujours strictement positive.

4.4 - DEMONSTRATION DU LEMME 2.10

D'après le lemme 3.3, il existe $C, \epsilon_1^*, \epsilon_2 > 0$ tels que pour $M \geq 1$ pour $\epsilon_1 < \epsilon_1^*$:

$$\tilde{T}_{M+1}(\nabla P) \leq C(\tilde{S}_M(g) + (M+1)\tilde{T}_M(h) + \sup(\tilde{T}_M(h), \tilde{T}_{M+1}(h)) + \epsilon_1^{1-M} m_M T_M(\nabla P))$$

Evaluons $\tilde{S}_M(g)$, grâce au ii) du lemme 4.3 pour le terme $\phi_2(U)\partial U\partial P$, et aux lemmes 4.2 et 4.3 pour le reste.

De par l'analyticité de f , il existe ϵ et $K > 0$ tels que

$$(4.5) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad ||\partial^\alpha f||_{\mu, t, \delta} \leq K(\epsilon \delta e^{-\lambda t})^{-(|\alpha|-1)_+} m_{(|\alpha|-1)_+}$$

On en déduit, si $\epsilon_1 < \epsilon$ et si ϵ_1 vérifie les conditions imposées par les lemmes 4.2 et 4.3, pour $|\alpha| = M$ et $\alpha_n = q$

$$||\partial^\alpha g||_{\mu, \delta} \leq C(|\nabla P|_{M, q, \delta} + |\nabla u|_{M, q, \delta} + (\epsilon_1 \delta)^{-M} \epsilon_2^{-q} m_M F(T_M(U), \epsilon_1 T_{M-1}(\nabla P)))$$

ce qui donne : $\tilde{S}_M(g) \leq C(\tilde{T}_{M+1}(U) + \epsilon_1^{-M} m_M F(T_M(U), \epsilon_1 T_M(\nabla P)))$ avec une nouvelle fonction polynôme F .

De la même façon, en utilisant l'analyticité de f et du bord de Ω , on trouve que, pour ϵ_1 assez petit :

$$\tilde{T}_M(h) \leq C(\tilde{T}_M(U) + \epsilon_1^{-(M-1)_+} m_{(M-1)_+} J(T_{M-1}(U)))$$

où J est un polynôme. Le lemme 2.10 s'en déduit immédiatement.

4.6 - DEMONSTRATION DU LEMME 2.8

La fonction G du lemme 2.8 s'écrit, avec $|\alpha| = M$, $\alpha_n = q$, et les notations du paragraphe 2.d

$$\partial^{\alpha+\beta}(\sigma \mathcal{F} + \sigma \text{B.grad } P) + \sum_{j,k} a_{jk} u_j \frac{\partial v}{\partial y_k} - \sum_{j,k} \partial^{\alpha+\beta}(a_{jk} u_j \frac{\partial U}{\partial y_k})$$

Le commutateur est une somme de termes de la forme

$$\partial^{\alpha+\beta}(a.u \partial U) - a.u \partial \partial^{\alpha+\beta} U \quad \text{qu'on écrit}$$

$$\partial^{\alpha+\beta}(a.u \partial U) - \partial^\beta(a.u \partial^\alpha \partial U) + \partial^\beta(a.u \partial^\alpha \partial U) - a.u \partial^{\alpha+\beta} \partial U$$

La première différence, majorée en norme $L^2(\omega_{t,\delta}^+)$ par

$\|\partial^\alpha(a.u \partial U) - a.u \partial^\alpha \partial U\|_{\mu,t,\delta}$ s'étudie grâce au lemme 4.2 et donne un majorant de la forme :

$$C \{M \sup(|U|_{M,\inf(q+1,M),t,\delta}, |U|_{M,q,t,\delta}, |U|_{M,\sup(0,q-1),t,\delta}) + (\varepsilon_1 \delta e^{-\lambda t})^{1-M} \varepsilon_2^{-q} m_M (1+T_{M-1}(U))^2\}.$$

La seconde se majore par $C \|a.u\|_{\mu+1,t,\delta} \|\partial^\alpha \partial U\|_{\mu-1,t,\delta}$ c'est-à-dire un terme inférieur au précédent.

Le terme $\partial^{\alpha+\beta}(\sigma \text{B.grad } P)$ s'étudie en utilisant le lemme 4.3 et donne un majorant :

$$C(|U|_{M,q,t,\delta} + |\nabla P|_{M,q,t,\delta} + (\varepsilon_1 \delta e^{-\lambda t})^{1-M} \varepsilon_2^{-q} m_M T_{M-1}(U) T_{M-1}(\nabla P))$$

Enfin $\|\partial^\alpha(\sigma \mathcal{F})\|_{\mu,t,\delta}$ se majore grâce à (4.5) et au lemme 4.3 lorsque $\varepsilon_1 < \varepsilon$ par :

$$C(|U|_{M,q,t,\delta} + (\varepsilon_1 \delta e^{-\lambda t})^{1-M} \varepsilon_2^{-q} m_M T_{M-1}(U))$$

On en déduit le lemme 2.8.

5 - ETUDE DE LA REGULARITE C^∞

Commençons par étudier le problème de la régularité C^∞ globale, on notera $\|U\|_S = \sup_{t \in [0, T]} \|U(t)\|_{H^S(\Omega)}$ et $\|U(t)\|_{H^S(\Omega)} = \|U(t)\|_S$.

PROPOSITION 5.1

Si U_0 est C^∞ jusqu'au bord sur $\bar{\Omega}$

Si f est $C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$

Si $U \in C^0([0, T], (H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1})$ est solution de (1.1) alors

$U \in C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$.

Il est important de noter que le résultat est établi jusqu'au temps T .

Ce résultat est mentionné dans J.E. Marsden [16] et probablement classique.

Pour la commodité du lecteur nous en donnons une preuve. La démonstration se fait par récurrence sur l'ordre de régularité de U . Soit k un entier fixé et supposons $U \in C^0([0, T], (H^{\mu+k+1}(\Omega))^{n+1})$ nous avons alors le

LEMME 5.2

Il existe une constante C ne dépendant que de $\|U\|_{\mu+k+1}$ telle que pour tout $T' \leq T$, si $U \in C^0([0, T'], (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1})$ alors

$$\|U(T')\|_{\mu+k+2} \leq C(\|U(0)\|_{\mu+k+2} + \sup_{s \in [0, T']} \|f(s)\|_{\mu+k+2})$$

Admettons-le provisoirement et démontrons la proposition 5.1. Le fait que $f \in C^0([0, T], (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1})$ et $U_0 \in (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1}$ assure, en utilisant un théorème d'existence et d'unicité [16], qu'il existe un temps maximal $0 < T^* \leq T$ pour lequel $U \in C^0([0, T^*[, (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1})$.

D'après le lemme 5.2, il existe $C = C(\|U\|_{\mu+k+1})$ telle que :

$$\forall t \in [0, T^*[\quad \|U(t)\|_{\mu+k+2} \leq C(\|U(0)\|_{\mu+k+2} + \sup_{s \in [0, t]} \|f(s)\|_{\mu+k+2})$$

Il en résulte en utilisant $U \in C^0([0, T], (H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1})$ que $U(T^*) \in (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1}$ et vérifie cette inégalité. Si $T^* < T$, on applique le théorème d'existence et d'unicité dans $C^0([T^*, T], (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1})$. On a donc nécessairement $T^* = T$ et $U \in C^0([0, T], (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1})$. On en déduit la régularité C^∞ en x . La régularité en (t, x) s'obtient ensuite de façon classique en revenant à l'équation.

Remarque 5.3

On a aussi démontré le résultat suivant :

Si U_0 est C^∞ jusqu'au bord sur $\bar{\Omega}$

si $f \in C^0([0, T], C^\infty(\bar{\Omega}))$

si $U \in C^0([0, T], (H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1})$ est solution de (1.1) alors

$U \in C^0([0, T], C^\infty(\bar{\Omega}))$.

Il reste à établir le lemme 5.2. Il va résulter des assertions suivantes :

LEMME 5.4

Soient $g_1 \in C^0([0, T], (L^2(\Omega))^{n+1})$ et $V_0 \in (L^2(\Omega))^{n+1}$. Si $v \in C^0([0, T], (L^2(\Omega))^{n+1})$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (u \cdot \nabla)v = g_1 \\ v|_{t=0} = V_0 \end{cases}$$

alors $\forall t \in [0, T]$

$$\|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2T \|V_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|g_1(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$$

Il suffit d'écrire $v(t,y) = v(o,\phi_{o,t}(y)) + \int_0^t g_1(s,\phi_{s,t}(y))ds$
 et de majorer $\|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$.

LEMME 5.5

Il existe une constante C ne dépendant que de $\|U\|_{\mu+k+1}$ telle que pour tout $T' \leq T$, si $f_1 \in C^0([0,T'], (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1})$, si $U \in C^0([0,T'], (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1})$ est solution de

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + (u \cdot \nabla)U = f_1 \\ U|_{t=0} = U(o) \end{array} \right. \quad \text{alors}$$

$$\|U(T')\|_{\mu+k+2}^2 \leq C(\|U(o)\|_{\mu+k+2}^2 + \int_0^{T'} \|f_1(s)\|_{\mu+k+2}^2 ds)$$

En effet si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| = \mu+k+2$, on a

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \partial^\alpha U + (u \cdot \nabla) \partial^\alpha U = \partial^\alpha f_1 + (u \cdot \nabla) \partial^\alpha U - \partial^\alpha (u \cdot \nabla)U \\ \text{et } \partial^\alpha U|_{t=0} = \partial^\alpha U(o) \end{array} \right.$$

il suffit alors de montrer que, pour $t \in [0,T']$,

$$\|(u \cdot \nabla) \partial^\alpha U(t) - \partial^\alpha (u \cdot \nabla)U(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|U\|_{\mu+k+1} \|U(t)\|_{\mu+k+2}$$

d'utiliser le lemme 5.4 et de conclure par le lemme de Gronwall.

LEMME 5.6

Soient $\epsilon > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $m \geq \frac{n}{2} + \epsilon$. Il existe C telle que, si u et v sont dans $H^m(\Omega)$ alors

$$\|u \cdot v\|_m \leq \|u\|_m \|v\|_{\frac{n}{2}+\epsilon} + \|v\|_m \|u\|_{\frac{n}{2}+\epsilon}$$

En appliquant ce lemme à $\frac{1}{\rho}$ (grad P + f), on obtient le lemme 5.2.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le lemme 2.1.

5.7 - DEMONSTRATION DU LEMME 2.1

Rappelons son énoncé :

si U_0 est C^∞ jusqu'au bord sur un voisinage de x_0

si f est C^∞ jusqu'au bord sur un voisinage de $\gamma_T(x_0)$

alors la solution U (vérifiant 1.2) est C^∞ jusqu'au bord sur un voisinage de $\gamma_T(x_0)$.

Comme dans 2.a. on se place dans une carte locale (ω_1, θ) et quitte à découper $\gamma_T(x_0)$, on peut supposer qu'il existe un voisinage ω de x_0 tel que $\forall t \in [0, T]$, $\phi_{t,0}(\omega \cap \bar{\Omega}) \subset \subset \omega_1$. On peut donc prendre comme hypothèses que $U_0 \in C^\infty(\bar{\omega} \cap \bar{\Omega})$ et que $f \in C^\infty(\mathcal{E}(\omega))$. On notera ω_t l'ensemble $\phi_{t,0}(\omega \cap \bar{\Omega})$. La démonstration se fait par régularisation. Pour tout $\omega' \subset \subset \omega$ on construit deux suites $U_{0,\epsilon}$ et f_ϵ telles que :

(5.8) $U_{0,\epsilon} \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $U_{0,\epsilon}$ converge vers U_0 dans $H^{\mu+1}(\Omega)$ et il existe $C > 0$ telle que : $\forall \epsilon > 0, \forall k \geq 0$

$$\|U_{0,\epsilon}\|_{H^{\mu+k+1}(\omega' \cap \bar{\Omega})} \leq C \|U_0\|_{H^{\mu+k+1}(\omega \cap \bar{\Omega})}$$

(5.9) $f_\epsilon \in C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$, f_ϵ converge vers f dans $C^0([0, T], (H^{\mu+1}(\Omega))^n)$ et il existe $C > 0$ t.q : $\forall \epsilon > 0, \forall k \geq 0, \forall t \in [0, T]$

$$\|f_\epsilon(t, \cdot)\|_{H^{\mu+k+1}(\omega'_t)} \leq C \|f(t, \cdot)\|_{H^{\mu+k+1}(\omega_t)}$$

Considérons alors l'équation d'Euler associée à ces conditions

$U_{0,\epsilon}$ et f_ϵ .

D'après [16] et [13], il existe un temps T_ϵ^* et une unique solution $U_\epsilon \in C^0([0, T_\epsilon^*[, (H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1})$.

Le temps T_ϵ^* dépend uniquement d'un majorant de $\|U_{0,\epsilon}\|_{H^{\mu+1}(\Omega)}$ et de $\sup_{t \in [0, T]} \|f_\epsilon(t)\|_{H^{\mu+1}(\Omega)}$ donc les solutions U_ϵ existent sur un même intervalle $[0, T^*[$. D'autre part, $U_{0,\epsilon}$ et f_ϵ sont C^∞ donc d'après la proposition 5.1, les $U_\epsilon \in C^\infty([0, T^*[\times \bar{\Omega})$.

Nous pouvons alors utiliser les majorations démontrées dans le lemme 2.11 et reprendre la méthode du paragraphe 2.g, ce qui donne, pour des semi-normes $T_{N,t,\omega'}$ avec $t < T^*$: il existe un polynôme F tel que $\forall N \geq 1, \forall t < T^*$

$$T_{N,t}(U_\epsilon) \leq H \quad \text{et} \quad T_{N,t}(\nabla P_\epsilon) \leq K$$

avec $H = \max(T_1(U_\epsilon), 2 \sup_{k \geq 0} \|U_{0,\epsilon}\|_{H^{\mu+k+1}(\omega' \cap \bar{\Omega})})$

et $K = \max(T_1(\nabla P_\epsilon), F(\sup_{\substack{k \geq 0 \\ s \in [0, T]}} \|f_\epsilon(s)\|_{H^{\mu+k+1}(\omega'_s)}))$

Comme les normes $\|U_\epsilon(t)\|_{H^{\mu+1}(\Omega)}$ sont majorées indépendamment de ϵ sur $[0, T]$, on a, en utilisant (5.8) et (5.9) : il existe H et $K > 0$ t.q $\forall \epsilon > 0, \forall N \geq 1, \forall t < T^*, T_{N,t}(U_\epsilon) \leq H$ et $T_{N,t}(\nabla P_\epsilon) \leq K$. Maintenant la condition $\exists C > 0, \forall t \in [0, T^*[, \|U_\epsilon(t)\|_{H^{\mu+1}(\Omega)} \leq C$ implique, par le théorème d'unicité dans $C^0([0, T^*[, (H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1})$ que $\forall t < T^*, U_\epsilon(t)$ converge faiblement vers $U(t)$ dans $(H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1}$. On en déduit que

$$\forall N \geq 1, \forall t < T^*, T_{N,t}(U) \leq H \quad \text{et} \quad T_{N,t}(\nabla P) \leq K$$

Ainsi $\forall t < T^*$, $U(t) \in C^\infty(\omega'_t)$. Ceci étant vrai pour tout $\omega' \subset\subset \omega$, les constantes H et K ne dépendant que de ω (5.8 et 5.9) on en déduit : $\forall t < T^*$, $U(t) \in C^\infty(\omega_t)$, et $\forall N \geq 1$, $T_{N,t,\omega}(U) \leq H$.

Si l'on considère maintenant une suite $t_n \rightarrow T^*$, la condition $U(t_n) \rightarrow U(T^*)$ dans $H^{\mu+1}(\Omega)$ implique que $U(t_n, \phi_{t_n,0}(\cdot)) \rightarrow U(T^*, \phi_{T^*,0}(\cdot))$ dans $H^{\mu+1}(\omega_\delta)$ pour tout $\delta < \delta_0$. On déduit alors de la majoration $T_{N,t}(U) \leq H$ la convergence faible de $U(t_n, \phi_{t_n,0}(\cdot))$ vers $U(T^*, \phi_{T^*,0}(\cdot))$ dans $H^{\mu+k}(\omega_\delta)$ pour tout k et tout δ , si bien que : $\forall N \geq 1$, $T_{N,T^*}(U) \leq H$ et $U(T^*) \in C^\infty(\omega_{T^*})$.

Ensuite, comme dans la démonstration de 5.1, $T^* = T$ et $\forall t \in [0, T]$, $U(t) \in C^\infty(\omega_t)$.

La régularité locale en toutes les variables, c'est à dire $U \in C^\infty(\mathcal{C}_T(\omega))$ s'obtient alors de façon classique. On raisonne de même pour la pression.

R E F E R E N C E S

- [1] : S. ALINHAC - G. METIVIER : "Propagation de l'analyticité des solutions de systèmes hyperboliques non linéaires". Invent. Math 75 (1984) 189-204
- [2] : S. ALINHAC - G. METIVIER : "Propagation de l'analyticité locale pour les solutions de l'équation d'Euler". Arch. for Rational Mechanics and Analysis (à paraître).
- [3] : C. BARDOS : "Analyticité de la solution de l'équation d'Euler dans un ouvert de \mathbb{R}^n ". C.R.A.S. Paris, t 283 (1976), 255-258
- [4] : C. BARDOS - S. BENACHOUR - M. ZERNER : "Analyticité des solutions périodiques de l'équation d'Euler en dimension deux". C.R.A.S. Paris, t 282 (1976), 995-998.
- [5] : S. BENACHOUR : "Analyticité des solutions périodiques de l'équation d'Euler en dimension trois". C.R.A.S. Paris (1976), t 283, 107-110
- [6] : J.P. BOURGUIGNON - H. BREZIS : "Remarks on the Euler equation". J. Functional Analysis, 15 (1974) 341-363.
- [7] : D.G. EBIN - J. MARSDEN : "Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid". Ann. of Math. 92 (1976) 102-163.
- [8] : A. FRIEDMAN : "On the regularity of the solutions of non linear elliptic and parabolic systems of partial differential equations". J. Math. Mech. 7 (1958) 43-60.
- [9] : L. HÖRMANDER : "Linear partial differential operators". Springer Verlag (1969).
- [10] : T. KATO : "Non stationary flows of viscous and ideal fluids in \mathbb{R}^3 ". J. Functional Analysis 9 (1972) 296-305.

- [11] : P.D. LAX : "Non linear hyperbolic equations". Comm. on Pure Appl. Math. ; 6 (1953), 231-258.
- [12] : C.B. MORREY - L. NIRENBERG : "On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of P.D.E.". C.P.A.M., Vol X, (1957), 271-290.
- [13] : R. TEMAM : "On the Euler equations of incompressible perfect fluids". J. Functional Analysis 20 (1975), 32-43.
- [14] : C. WAGSCHALL : "Le problème de Goursat non linéaire". Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1978-79, Ecole Polytechnique.
- [15] : A. VALLI - H.B. DAVEIGA : "On the motion of a non homogeneous ideal incompressible fluid in an external force field". Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol 59 (1978).
- [16] : J.E. MARSDEN : "Well-Posedness of the equations of a non-homogeneous perfect fluid". Comm. Part. Dif. equ. vol 1, (1976), 215-230.
- [17] : R. TEMAM : "Local existence of C^∞ solutions of the Euler equations of incompressible perfect fluids". Lect. Notes in Math., vol 565, Springer Verlag, p. 184.