Parenti

Paramétrixe et propagation des singularités pour des opérateurs à caractéristiques non involutives

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 3
« Équations aux dérivées partielles », , p. 7-56
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985___3_7_0>

CHAPITRE II

PARAMETRIXE ET PROPAGATION DES SINGULARITES

POUR DES OPERATEURS A CARACTERISTIQUES NON INVOLUTIVES

PARENTI

Istituto Matematico "S. Pincherle"

Piazza di Porta S. Donato, 5

40 127 - BOLOGNA - ITALY

(Chapitre I)

Etude des singularités pour les solutions distributions d'un système :

(1) $\quad (I_n\ t\ \partial_t - A(t,x,D_t,D_x))u = f$,

où A est une matrice N x N d'o.p.d. classiques et propres d'ordre $\underline{0}$.

Précisément on s'intéresse à décrire $WF(u) \setminus WF(f)$ au voisinage de la variété double $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$:

$$\Sigma_1 = \{t = 0\} \subset T^*\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$$

$$\Sigma_2 = \{\tau = 0\} \subset T^*\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$$

(On pose $\Sigma_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$). En effet près de $\Sigma_1 \setminus \Sigma$ ou $\Sigma_2 \setminus \Sigma$ la description est classique tandis qu'on s'attend à des phénomènes de bifurcation des singularités près de Σ (phénomènes que l'on va décrire avec soin).

Je vais diviser mon exposé en trois ou quatre parties :

1)- Construction de microparamétrixes pour le système (1) près de Σ quand A ne dépend pas de t et D_t, et résultats de propagation (j'expose ici la méthode de N. Hanges).

2) Réduction microlocale près de Σ d'un système $I_n\ t\ \partial_t - A(t,x,D_t,D_x)$ à un système $I_M\ t\ \partial_t - \tilde{A}(x,D_x)$ $(M \geqslant N)$. C'est facile si $N = 1$, il y a des obstructions non-triviales si $N > 1$.

3) Applications : j'ai déjà parlé l'année dernière à St Jean de Monts de certaines applications de 1) et 2) à des opérateurs p.d.o. à caractéristiques multiples de multiplicité variable avec intersection symplectique.

Ici je veux considérer le problème de Cauchy pour un système hyperbolique symétrique du 1er ordre.

$$\begin{cases} (I_N D_t - A(x,D_x))u = f \\ u\big|_{t=o} = g(x) \end{cases}$$

où A est une matrice N x N elliptique du 1er ordre autoadjointe positive sur une variété compacte sans bord X.

Je vais traiter le cas où :

$$\det (I_n \tau - A_1(x,\xi)) = \prod_{j=1} (\tau - \lambda_j(x,\xi))^{r_j}$$

avec $\lambda_j \in C^\infty(T^*X\setminus 0)$ (réelles) $r_j \geqslant 1$ constant en supposant que si pour deux indices $i,j \in \{1,\ldots,\nu\}$, $i \neq j$, l'ensemble

$$\Sigma_{i,j} = \{(x,\xi) \in T^*X\setminus 0 \mid \lambda_i(x,\xi) = \lambda_j(x,\xi)\}$$

est non vide, alors :

1)- $\{\lambda_i, \lambda_j\} \neq 0$ sur $\Sigma_{i,j}$

2)- pour chaque $k \in \{1,\ldots,\nu\}$, $k \neq i$, $k \neq j$ on a $\lambda_k \neq \lambda_i$, $\lambda_k \neq \lambda_j$ en tout point de $T^*X\setminus 0$.

Dans ce cas, si $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots$ sont les valeurs propres de l'opérateur A, on considère la fonction trace :

$$S(t) = \sum_{j\geqslant 1} e^{-it\mu_j} = \mathcal{F}\Big(\sum_{j\geqslant 1} \delta(\mu - \mu_j)\Big)$$

et l'on donnera une estimation de WF(S(t)) (relation de Poisson).

1) - CONSTRUCTION DE MICROPARAMETRIXES : LE MODELE -

Pour comprendre les idées, je vais traiter un peu en détail le cas simple d'un opérateur scalaire sur $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$:

(2) $$P_\lambda = t\,\partial_t - \lambda\,, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{C}.$$

En effet, ce que je vais énoncer s'étend au cas $P_\Lambda = I_N\, t\,\partial_t - \Lambda$ où Λ est une matrice carrée N x N à termes complexes.

Dans le cas (2) on construit explicitement des solutions fondamentales ayant certaines relations de propagation.

Considérons les distributions :

$$K^\lambda_{\pm}(t,s) = (t \pm io)^\lambda\ (s \pm io)^{-\lambda-1} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_s)$$

On a :

$$\begin{aligned} WF(K^\lambda_{\pm}) \subset\ & \{(t = 0,\ s = 0\ ;\ \pm\tau > 0,\ \pm\sigma > 0)\} \\ & \cup \{(t = 0, s\ ;\ \pm\tau > 0,\ \sigma = 0)\} \\ & \cup \{(t, s = 0\ ;\ \tau = 0,\ \pm\sigma > 0\} \end{aligned}$$

Puisque $WF(K^\lambda_{\pm})$ est disjoint du fibré conormal à $t = s$ on peut considérer les quatre distributions suivantes :

$H(t-s)\, K^\lambda_{\pm}(t,s)$, $H(s-t)\, K^\lambda_{\pm}(t,s)$ (H(z) étant la fonction de Heavyside)

$$WF'(H(t-s)K^\lambda_{\pm}) \subset \Delta(T^*\mathbb{R}^2\backslash 0) \cup \{(t=o,\ s=o\ ;\tau,\sigma) \left\{\begin{matrix} \tau \geqslant \sigma \\ \tau \leqslant \sigma \end{matrix}\right\}$$

$$\cup \{(t,0;0,\sigma) \mid t \geqslant 0, \pm \sigma < 0\}$$

$$\cup \{(0s;\tau,0) \mid s \leqslant 0, \pm \tau > 0\}$$

$WF(H(s-t)K_{\pm}^{\lambda})$ contenu dans un ensemble du même type que le précédent en remplaçant par t positif par t négatif et s négatif par s positif.

Maintenant :

$$t\, \partial_t\, H(t-s)K_+^{\lambda} = t\, \delta(t-s)K_+^{\lambda} + \lambda\, t\, H(t-s)\ (t+io)^{\lambda-1}(s+io)^{-\lambda-1}$$

$$= \lambda\, H(t-s)K_+^{\lambda} + \delta(t-s)\ (t+io)^{\lambda+1}(s+io)^{-\lambda-1},$$

donc :

$$P_{\lambda}[H(t-s)K_+^{\lambda}] = \delta(t-s).$$

De la même manière on trouve que :

$$P_{\lambda}[H(t-s)K_-^{\lambda}] = \delta(t-s)$$

et

$$P_{\lambda}[-H(s-t)K_{\pm}^{\lambda}] = \delta(t-s)$$

Utilisant les noyaux $H(t-s)K_{\pm}^{\lambda}$ et $-H(s-t)K_{\pm}^{\lambda}$ on définit quatre opérateurs : $\varepsilon_{\pm}^{\lambda}$, $\mathcal{F}_{\pm}^{\lambda} : C_o^{\infty} \to \mathcal{D}'$ tels que $P_{\lambda}\, \varepsilon_{\pm}^{\lambda} = I$ et $P_{\lambda}\mathcal{F}_{\pm}^{\lambda} = I$.

Pour construire des inverses à gauche on remarque que :

$$P_{\lambda}^{*} = (t\, \partial_t - \lambda)^{*} = -(t\, \partial_t + (\bar{\lambda}+1))$$

$$= -\, P_{-(\bar{\lambda}+1)}$$

Si je prends $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu = -(\bar{\lambda}+1)$, alors :

$$(-\varepsilon_{\pm}^{\mu})^{*} P_{\lambda} = I \text{ et } (-\mathcal{F}_{\pm}^{\mu})^{*} P_{\lambda} = I$$

A ce moment on définit les opérateurs dans $C_o^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$:

$$E_{\pm}^{\lambda} = -(\varepsilon_{\pm}^{\mu})^{*} \otimes I_x \ , \ F_{\pm}^{\lambda} = -(\mathcal{F}_{\pm}^{\mu})^{*} \otimes I_x$$

$$\mu = -(\bar{\lambda} + 1)$$

C'est un exercice de vérifier que :

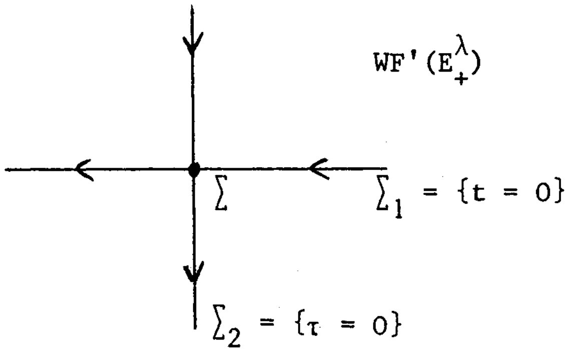
$$\begin{aligned}
WF'(E_{\pm}^{\lambda}) &\subset \Delta(T^{*}\,\mathbb{R}^{2n+2}\backslash 0) \cup \\
&\cup \left\{(s,x,\sigma,\xi),(t,y;\tau,\eta) \mid s = t = 0,\ x = y\ ,\ \xi = \eta,\ \begin{Bmatrix} \sigma \leqslant \tau \\ \sigma \geqslant \tau \end{Bmatrix}\right. \\
&\cup \{(s,x,\sigma,\xi),(t,y;\tau,\eta) \mid x = y,\ \xi = \eta,\ s = o,\ \tau = o, \\
&\qquad t \geqslant o,\ \pm\sigma < o\} \\
&\cup \{(s,x,\sigma,\xi),(t,y;\tau,\eta) \mid x = y,\ \xi = \eta,\ t = o,\ \sigma = o, \\
&\qquad s \leqslant o,\ \pm\tau > o\} \\
&\cup \{(s,x,\sigma,\xi),(t,y;\tau,\eta) \mid x = y,\ \xi = \eta \neq o,\ \sigma = \tau = o\ ,\ s \leqslant t\} \\
&= \Delta(T^{*}\,\mathbb{R}^{2n+2}\backslash 0) \cup A_1^{\pm} \cup A_2^{\pm} \cup A_3^{\pm} \cup B \subset \Delta(T^{*}\,\mathbb{R}^{2n+2}\backslash 0) \cup (\textstyle\sum_o \times \sum_o)
\end{aligned}$$

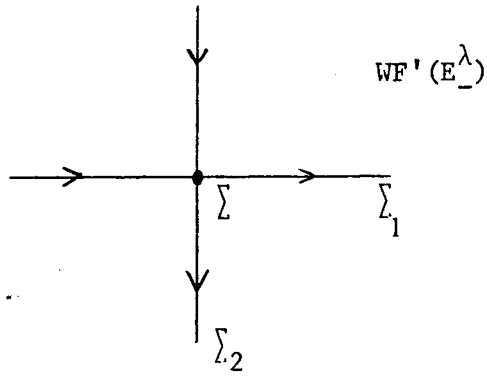
Pour :

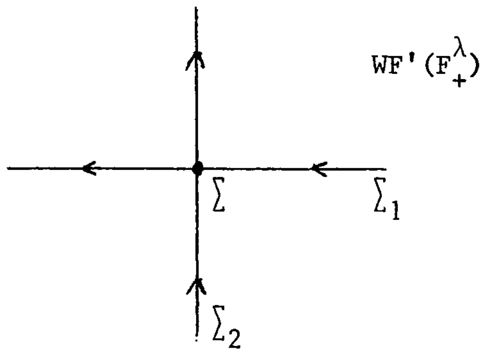
$$\begin{aligned}
WF'(F_{\pm}) &\subset \Delta(T^{*}\,R^{2n+2}) \cup A_1 \cup \underset{(t\leqslant o)}{A_2'} \cup \underset{(s\geqslant o)}{A_3'} \cup \underset{(s\geqslant t)}{B'} \\
&\subset \Delta(T^{*}\,\mathbb{R}^{2n+2}\backslash 0) \cup (\textstyle\sum_o \times \sum_o).
\end{aligned}$$

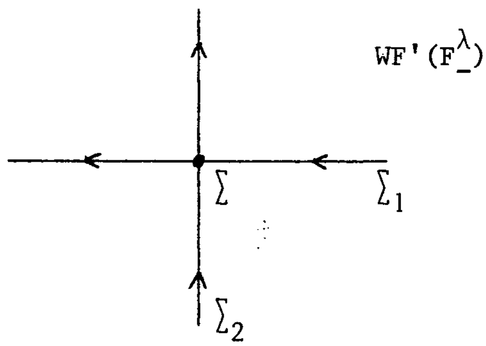
Donnons une interprétation géométrique :

Sur $(T^{*}\,\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0) \cup \sum_o$ on définit quatre relations d'indice, en considérant l'identité sur $T^{*}\,\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$ et en orientant les bicaractéristiques de $\sum_o$:









On définit $N^{\pm}_{\Sigma_1} = \{(t,y;\tau,\eta) \mid t = 0,\ \eta = 0,\ \pm\,\tau > 0\}$ et $N_{\Sigma_1} = N^{+}_{\Sigma_1} \cup \Sigma^{-}_{\Sigma_1}$ (c'est le fibré conormal à hyperplan t = 0 de $\mathbb{R}^{n+1}$). Les opérateurs $E^{\lambda}_{\pm}$, $F^{\lambda}_{\pm}$ se prolongent aux distributions $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ telles que

$$WF(f) \cap N^{\pm}_{\Sigma_1} = \emptyset \qquad \text{et on trouve que :}$$

$$WF\left(\left\{\begin{matrix} E^{\lambda}_{\pm} \\ F^{\lambda}_{\pm} \end{matrix}\right. f\right\}\right) \subset WF' \left\{\begin{matrix} E^{\lambda}_{\pm} \\ F^{\lambda}_{\pm} \end{matrix}\right\} \circ WF(f) \cup N^{\mp}_{\Sigma_1}$$

<u>1er Théorème de propagation</u> :

Etant donné $\rho_0 = (0,\ x = x_0\ ;\ 0,\ \xi = \xi_0 \neq 0) \in \Sigma$

on pose :

$$\gamma_1^{\pm}(\rho_o) = \{(0, x = x_o ; \pm s > 0, \xi^{(o)}) \mid s > 0\} \subset \Sigma_1 \setminus \Sigma_o$$

$$\gamma_2^{\pm}(\rho_o) = \{(\pm s, x = x_o ; 0, \xi^{(o)}) \mid s > 0\} \subset \Sigma_2 \setminus \Sigma_o$$

$\gamma_1^{\pm}(\rho_o) \cup \{\rho_o\}$ sont les deux demi bicaractéristiques $\subset \Sigma_1$ sortantes de ρ_o.

$\gamma_2^{\pm}(\rho_o) \cup \{\rho_o\}$ sont les deux demi bicaractéristiques $\subset \Sigma_2$ sortantes de ρ_o.

Alors soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ avec $\rho_o \notin WF(P_\lambda u)$.

Si pour chaque $j \in \{1,2\}$ et pour un choix des signes + ou - on a :

$$\gamma_j^{\pm}(\rho_o) \cap WF(u) = \emptyset ,$$

alors :

$$\rho_o \notin WF(u).$$

Preuve :

Soit par exemple :

$$(\gamma_1^{+}(\rho_o) \cup \gamma_2^{-}(\rho_o)) \cap WF(u) = \emptyset.$$

alors :

$$\overline{(\gamma_1^{+}(\rho_o) \cup \gamma_2^{-}(\rho_o))} \cap WF(P_\lambda u) = \emptyset.$$

On peut supposer $WF(u) \cap N_{\Sigma_1} = \emptyset$, si bien que $F_\lambda^{+} P_\lambda u = u$.

Or $\rho_o \in WF(u) \Rightarrow \rho_o \in WF(F_\lambda^+ P_\lambda u)$ i.e. $\rho_o \in WF'(F_+^\lambda) \circ WF(P_\lambda u)$; mais ceci est possible seulement si $\exists \rho'$ t.q. $(\rho_o,\rho') \in WF'(F_+^\lambda)$ et $\rho' \in WF(P_\lambda u)$ (i.e. $\rho' \in \overline{\gamma_1^+(\rho_o) \cup \gamma_2^-(\rho_o)}$) ce qui n'est pas vrai.

Les trois autres possibilités se traitent en utilisant les paramétrixes adaptées.

Il convient de remarquer qu'en choisissant $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ avec $(x_o,\xi_o) \in WF(\varphi)$ et considérant les distributions $(t \pm io)^\lambda \otimes \varphi(x)$ ou $(t_\pm^\lambda \otimes \varphi(x))$ on peut construire des solutions de $P_\lambda u = 0$ telles que $\rho_o \in WF(u)$ et $WF(u)$ contiennent au moins trois demi bicaractéristiques.

Remarquons maintenant que $(t\,\partial_t - k)t^k = 0$ et $(t\,\partial_t + (k+1))\delta_t^{(k)} = 0$ pour $k = 0,1,\ldots$

Etant donné φ comme plus haut on voit que $WF(t^k \otimes \varphi(x))$ contient seulement $\overline{\gamma_2^+(\rho_o) \cup \gamma_2^-(\rho_o)}$, tandis que $WF(\delta_t^{(k)} \otimes \varphi(x))$ contient seulement $\overline{\gamma_1^+(\rho_o) \cup \gamma_1^-(\rho_o)}$.

On soupçonne alors que si $\lambda \notin \mathbb{Z}$ les hypothèses :

1)- $\rho_o \notin WF(P_\lambda u)$

2)- Pour un $j \in \{1,2\}$, $WF(u) \cap [\gamma_j^+(\rho_o) \cup \gamma_j^-(\rho_o)] = \emptyset$, impliquent que $\rho_o \notin WF(u)$.

Ceci est vrai on va le démontrer :

Soit $\mu \in \mathbb{C}$, Re $\mu > -1$, et considérons l'opérateur :

$$\Phi^{\mu} : C_o^{\infty}(\mathbb{R}) \ni f \to \int_o^1 \rho^{\mu} f(\rho\, t) d\, \rho \in C^{\infty}(\mathbb{R}).$$

On a :

$$t\, \partial_t\, \Phi^{\mu} f = \int_o^1 \rho^{\mu+1}\, t\, f'(\rho\, t) d\, \rho = \int_o^1 \rho^{\mu+1} \frac{d}{d\rho}[f(\rho\, t)]\, d\, \rho$$

$$= f - (\mu+1)\, \Phi^{\mu} f$$

i.e. $\qquad P_{-(\mu+1)}\, \Phi^{\mu} f = f.$

De même : $\qquad \Phi^{\mu}\, P_{-(\mu+1)} f = f.$

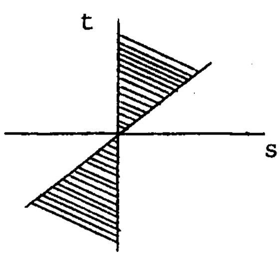
On va estimer $WF'(\Phi^{\mu})$, c'est à dire on étudie l'asymptotique en $|\tau| + |\sigma| \to +\infty$ de :

$$<\Phi^{\mu}(e^{is\sigma} f(s)),\ g(t) e^{-it\tau}> =$$

$$= \int \int_o^1 \rho^{\mu}\, e^{-it(\tau-\rho\sigma)}\, f(\rho t)\, f(t)\, d\rho dt \qquad (*)$$

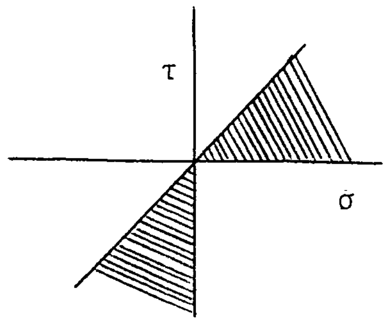
avec $f, g \in C_o^{\infty}(\mathbb{R})$.

Naturellement le noyau de Φ^{μ} un support sur $\frac{s}{t} \in [0,1]$.



De plus on voit que :

$$WF'(\Phi^{\mu}) \subset \{(t,\tau),\ (s,\sigma)\ |\ \tau/\sigma \in [0,1]\}$$



En effet, si $(\tau_o,\sigma_o) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$ et $\tau_o/\sigma_o \notin [0,1]$, alors il existe un voisinage conique Γ de (τ_o,σ_o) tel que :

$$\inf_{\rho \in [0,1]} |\tau - \rho\sigma| \geqslant C\ (|\tau| + |\sigma|)\ ,\ (\tau,\sigma) \in \Gamma.$$

En integ. par parties en t dans (✱) on trouve que :

$$(t_o,\tau_o,s_o,\sigma_o) \notin WF'(\Phi^{\mu}) \text{ q.q. soient } (t_o,s_o).$$

Maintenant si je prends le point $(t_o,\tau_o\ ;\ s_o,\sigma_o)$ avec

$s_o/t_o \in [0,1]$ et $\tau_o/\sigma_o \in [0,1]$, on voit que :

1) Si $s_o = t_o \neq 0$, on doit avoir $\rho \sim 1$ et donc si $\tau_o \neq \sigma_o$, on peut supposer $\tau_o - \rho\ \sigma_o \neq 0\ \ \forall\rho$ en prenant les supports de f et g assez petits. On intègre en t et le point $\notin WF'(\Phi^{\mu})$.

2) Si $s_o/t_o \in]0,1[$, alors ρ est loin de 0 et 1 si bien qu'on peut intégrer par parties en ρ utilisant $\frac{d}{d\rho}\ (e^{-it(\tau-\rho\sigma)}) = it\sigma\ e^{-it(\tau-\rho\sigma)}$, et comme $\sigma_o \neq 0$, on aura que le point $\notin WF'(\Phi^{\mu})$.

3) Finalement, si $s_o = 0$, $t_o \neq 0$; alors ρ est près de 0, si bien que si $\tau_o \neq 0$ on aura $\tau_o - \rho\,\sigma_o \neq 0$ et par intégrations par parties en t on déduit encore que le point $\notin WF'(\Phi^\mu)$.

En conclusion :

$$WF'(\Phi^\mu) \subset \Delta(T^* \mathbb{R}^2\backslash 0)$$

$$\cup \{(t = o, \tau ; s = o, \sigma) \mid \tau/\sigma \in [0,1]\}$$

$$\cup \{(t, o ; s = o, \sigma) \mid \sigma \neq 0\}$$

On voit donc que Φ^μ peut-être prolongé à tout $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ qui soit C^∞ à l'origine et $P_{-(\mu+1)}\Phi^\mu f = f$; $\Phi^\mu\, P_{-(\mu+1)} f = f$, $WF'(\Phi^\mu f) \subset WF'(\Phi^\mu) \circ WF(f)$.

On peut alors définir l'opérateur :

$$G^\mu = \Phi^\mu \otimes I_x .$$

On aura :

$$WF'(G^\mu) \subset \Delta(T^* \mathbb{R}^{2n+2}\backslash 0)$$

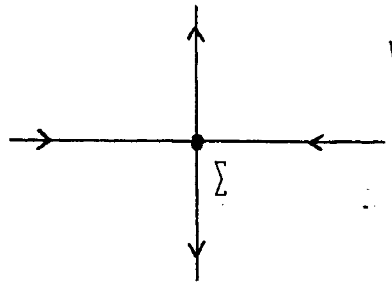
$$\cup \{(t,x,\tau,\xi) , (s,y,\sigma,\eta) \mid t=s=0 , x=y, \xi=\eta, \tau/\sigma \in [0,1]\}$$

$$\cup \{(t,x,\tau,\xi) , (s,y,\sigma,\eta) \mid x=y , \xi=\eta, \tau=o, s=o, \sigma\neq o\}$$

$$\cup \{(t,x,\tau,\xi) , (s,y,\sigma,\eta) \mid \tau=\sigma=o, x=y, \xi=\eta\neq o, s/t \in [0,1]\}$$

$$\subset \Delta(T^* \mathbb{R}^{2n+2}\backslash 0) \cup (\textstyle\sum_o \times \sum_o).$$

Interprétation géométrique :



$WF'(G^{\mu})$

$\Sigma_1 = \{t = 0\}$

$\Sigma_2 = \{\tau = 0\}$

Noter que G^{μ} se prolonge aux distributions $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$ telles que $WF(f) \cap N_{\Sigma_1} = \emptyset$.

Conséquence :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ tel que :

1) $\rho_o = (o, x_o; o, \xi_o) \in \Sigma \backslash WF(P_\lambda u)$

2) $(\gamma_1^+(\rho_o) \cup \gamma_1^-(\rho_o)) \cap WF(u) = \emptyset$,

alors $\rho_o \notin WF(u)$.

Preuve :

On peut supposer que $WF(u) \cap N_{\Sigma} = \emptyset$ et alors

$\rho_o \in WF(u) \Rightarrow \rho_o \in WF(G^{-\lambda-1} P_\lambda u)$ i.e.

$\exists \rho' \in WF(P_\lambda u)\ (\rho_o, \rho') \in WF'(G^{-\lambda-1}) \Rightarrow \rho' \in \overline{\gamma_1^+(\rho_o) \cup \gamma_1^-(\rho_o)}$,

c'est absurde.

2ème théorème de propagation :

Si $\lambda \notin \{0,1,2,\dots\}$ on a les mêmes résultats.

Preuve :

Si $u(t,x)$ est C^∞ on écrit pour tout k :

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}\gamma_j(u)\, t^j + t^k R_k(u)$$

avec

$$\gamma_j(u) = \partial_t^j u\Big|_{t=0}, \quad R_k(u) = \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-\rho)^{k-1}(\partial_t^k u)(\rho t,x)\,d\rho.$$

la même formule s'étend à toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ telle que $WF(u) \cap N_{\Sigma_1} = \emptyset$ et l'on remarque que :

$$WF'(R_k) \subset \dots \text{ même ensemble de } WF'(G^\lambda)$$

Or si $(t\,\partial_t - \lambda)u = f$, on trouve que :

$$(j-\lambda)\,\gamma_j(u) - \gamma_j(f) \quad \forall_j = 0,1,\dots$$

Donc, puisque $\lambda \notin \{0,1,\dots\}$, $\gamma_j(u) = \frac{1}{j-\lambda}\gamma_j(f)$.

On choisit $k \geqslant 0$ tel que $\mathrm{Re}\,\lambda - k < 0$ et l'on définit l'opérateur :

$$H f = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!(j-\lambda)}\gamma_j(f)\, t^j + t^k G^{k-\lambda-1}(R_k f),$$

$$f \in \mathcal{E}' \quad WF(f) \cap N_{\Sigma_1} = \emptyset.$$

On a :

$$H\, P_\lambda f = \sum_{j=o}^{k-1} \frac{1}{j!}\, \gamma_j(f) t^j + t^k\, G^{k-\lambda-1}\, [\, R_k(P_\lambda f)] \, .$$

Or :

$$R_k(P_\lambda f) = -\lambda\; R_k(f) + \frac{1}{k!} \int_o^1 (1-\rho)^{k-1} (\partial_t^k [\, t\; \partial_t f]\,)(\rho t) d\rho .$$

Puisque :

$$\partial_t^k\; t\; \partial_t = k\; \partial_t^k + t\; \partial_t^{k+1}$$, il vient :

$$R_k(P_\lambda f) = (k - \lambda)\; R_k(f) + t\; \partial_t\; R_k(f)$$

Donc :

$$G^{k-\lambda-1}\; R_k(P_\lambda f) = G^{k-\lambda-1}\; P_{\lambda-k}(R_k f) = R_k f$$

donc $H\, P_\lambda f = f$ et de la même manière $P_\lambda\, Hf = f$.

On note que :

$WF'(G^{k-\lambda-1}\; R_k) \subset$ même relation que pour $WF'(G^\lambda)$.

En outre :

$WF'(t^j \otimes \gamma_j) \subset \{(t,x;o,\xi)\;,\; (s=o,x;\sigma,\xi)\} \subset$ même relation que pour $WF'(G^\lambda)$.

En conclusion :

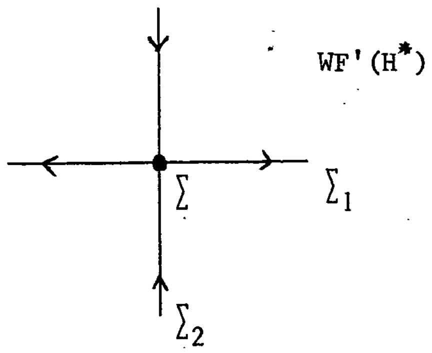
$WF'(H) \subset$ même relation que pour $WF'(G^\lambda)$.

<u>3ème théorème de propagation</u> :

Si $\lambda \notin \{-1,-2,\ldots\}$ et si $\rho_o \in \sum\backslash WF(P_\lambda u)$ et si $(\gamma_2^+(\rho_o) \cup \gamma_2^-(\rho_o)) \cap WF(u) = \emptyset$, alors $\rho_o \notin WF(u)$.

<u>Preuve</u> :

On considère $P_\lambda^* = -P_{-(\bar\lambda+1)}$ donc $-(\bar\lambda+1) \notin \{0,1,\dots\}$. On prend H tel que $P_{-(\bar\lambda+1)} H = I$. On déduit que $(-H)^* P_\lambda = I$.



La conclusion s'ensuit

<u>N.B.</u> : Dans le cas où $P_\Lambda = I_N t\, \partial_t - \Lambda$, Λ matrice N x N complexes les hypothèses sont :

spectre $(\Lambda) \cap \{0,1,2,\dots\} = \emptyset$ et resp.

spectre $(\Lambda) \cap \{-1,-2,\dots\} = \emptyset$.

Passons maintenant au cas où

$P_\lambda = t\, \partial_t - \lambda(x,D_x-)$,

avec $\lambda \in OPS^o(\mathbb{R}^n)$ classique et propre de symbole $\lambda(x,\xi) \sim \lambda_o(x,\xi) + \lambda_{-1}(x,\xi)+\dots$ on essaie de "répêter" les arguments faits dans le cas $\lambda \in \mathbb{C}$. Tout ce que je dirais s'étend au cas $P = I_N\, t\, \partial_t - \Lambda(x,D_x)$ où Λ est une matrice N x N d'O.P.D. classiques et propres d'ordre 0.

L'idée naturelle est d'essayer de trouver des noyaux du type :

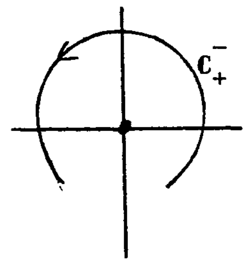
$$\begin{matrix} H(t-s) \\ \\ -H(s-t) \end{matrix} \times [\, (t \pm io)^{\lambda_o(x,\theta)} (s \pm io)^{-\lambda_o(x,\theta)-1} + \text{termes convenables}]$$

On suppose (ce qui n'est pas restrictif) que :

$$|\lambda_o(x,\theta)| \leqslant C < +\infty \quad \forall (x,\theta) \in T^* \mathbb{R}^n\backslash 0.$$

Définition :

On pose $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C}\backslash\{\zeta \in \mathbb{C} \mid R\,\zeta = 0,\ \mathrm{Im}\,\zeta \leqslant 0\}$.



On définit $B_m^N = \{a(z,w;x,\theta) \mid (z,w) \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{C}_+,\ (x,\theta) \in T^* \mathbb{R}^n$, qui sont holomorphes en z,w et telles que :

$$|\partial_z^j\, \partial_w^k\, \partial_x^\alpha\, \partial_\theta^\beta\, a| \leqslant C\ |z|^{N-j}\ |w|^{N-k}(1+|\theta|)^{m-|\beta|} ,$$

pour $(z,w) \in$ borné de $\mathbb{C}_+ \times \mathbb{C}_+$, $x \in$ compact de $\mathbb{R}^n$, $\theta \in \mathbb{R}^n\}$. C'est un espace de Fréchet.

L'exemple typique est donné par le symbole :

$$w^{\lambda_o(x,\theta)}\ z^{-\lambda_o(x,\theta)-1} \in B_o^{C+1+\varepsilon} \quad \forall\ \varepsilon > 0 (e\ \theta \neq 0).$$

Les deux lemmes suivants se démontrent par des arguments stantards:

1) Soient $a_k \in B_{m_k}^N$, $m_o \geqslant m_1 \geqslant \to -\infty$; il existe $a \in B_{m_o}^N$ tel que :

$$a - \sum_{k<j} a_k \in B_{m_j}^N \quad \forall_j .$$

2) Si $Q \in OPS^m(\mathbb{R}^n)$ est propre et $a \in B^N_{m'}$, alors :

$$e^{-i<x,\theta>} P(e^{i<.,\theta>}a(z,w;.,\theta)) \in B^N_{m+m'} ,$$

avec développement asymptotique :

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha_\theta q(x,\theta) \ \partial^\alpha_x a(z,w;x,\theta).$$

On va définir les noyaux qui nous intéressent.

Etant donné $a \in B^N_m$, on pose, pour tout $\varepsilon, \varepsilon' > 0$:

$$E^a_{\varepsilon,\varepsilon'}(x,t;y,s) = \int e^{i<x-y,\theta>} a(s+i\varepsilon, t+i\varepsilon' ; x,\theta)d\theta ,$$

c'est à dire la distribution :

$$<E^a_{\varepsilon,\varepsilon'} , \chi(x,t;y,s)> =$$

$$= \int e^{i<x-y,\theta>} a(s+i\varepsilon, t+i\varepsilon' ; x,\theta) \chi(x,t;y,s)$$

$$d\theta \ dx \ dy \ dt \ ds \ , \ \chi \in C^\infty_o(\mathbb{R}^{2n+2})$$

(comme intégrale oscillante).

Or je dis qu'il existe la limite :

$$\lim_{\varepsilon \to o+ , \varepsilon' \to o+} E^a_{\varepsilon,\varepsilon'} \overset{def}{=} E^+_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n+2}).$$

On peut le voir facilement en considérant des fonctions test :

$\psi(x,y) \ \phi_1(t) \ \phi_2(s)$. Si $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\zeta(\sigma) = \begin{cases} 1, & |\sigma| < 1 \\ o, & |\sigma| > 2 \end{cases}$, et si $T_k(\phi_j)$, $j = 1,2$, et le polynôme de Taylor de ϕ_j d'ordre k, on peut écrire :

$$\phi_1(t)\ \phi_2(s) = [\phi_1 - T_k(\phi_1)\ \zeta(t)]\ \phi_2(s) + (1-\zeta(t))\ T_k(\phi_1)\ \phi_2(s) =$$

$$= [\phi_1 - T_k(\phi_1)\ \zeta(t)][\phi_2 - T_k(\phi_2)\ \zeta(s)] +$$

$$+ [\phi_1 - T_k(\phi_1)\ \zeta(t)]\,(1-\zeta(s))\ T_k(\phi_2) +$$

$$[\phi_2 - T_k(\phi_2)\ \zeta(t)]\,(1-\zeta(t))\ T_k(\phi_1) +$$

$$+ (1-\zeta(t))(1-\zeta(s))\ T_k(\phi_1)\ T_k(\phi_2)$$

Or si K est grand $<E^a_{\varepsilon,\varepsilon'}\ ,\ \psi(x,y)\ [\phi_1 - T_k(\phi_1)\zeta(t)]\ [\phi_2 - T_k(\phi_2)\zeta(s)]>$ a évidemment une limite finie pour ε, $\varepsilon' \to o+$, ainsi que :

$$<E^a_{\varepsilon,\varepsilon'}\psi(x,y)[\phi_1 - T_k(\phi_1)\zeta(t)]\,(1-\zeta(s))T_k(\phi_2)> \quad \text{et}$$

$$<E^a_{\varepsilon,\varepsilon'}\psi(x,y)[\phi_2 - T_k(\phi_2)\zeta(s)]\,(1-\zeta(t))T_k(\phi_1)>.$$

Le dernier terme étant supporté pour $|t| \geqslant 1$ et $|s| \geqslant 1$, l'existence de la limite est évidente. On estime maintenant le $WF(E_a^+)$. On trouve que :

$$WF(E_a^+) \subset \{(x,t,\xi,\tau;x,s,-\xi,\sigma)\mid\ t\tau = s\sigma = 0,\ \tau \geqslant 0,\ \sigma \geqslant 0\}$$

$$\cup\ \{(x,t,\theta,\tau;y,s,o,\sigma)\mid\ t\tau = s\sigma = o,\ \tau \geqslant 0,\ \sigma \geqslant 0\} = \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$$

En plus, si $a \in S^{-\infty}$, on a $WF'(E_a^+) \subset \mathcal{M}$.

Pour le démontrer on considère :

$$<E_a^+\ ,\ e^{-i[<x,\xi>+<y,\eta>+t\tau+s\sigma]}\,\psi(x,y)\phi_1(t)\phi_2(s)>$$

avec ψ, ϕ_1, ϕ_2 à support compact.

Soit $\rho = (x_o,t_o,\xi_o,\tau_o;y_o,s_o,\eta_o,\sigma_o) \in T^*\mathbb{R}^{2n+2}\backslash 0$.

On voit que :

1) Si $\xi_o \neq -\eta_o$, on peut intégrer par parties en x et y, et déduire que $\rho \notin WF(E_a^+)$.

2) Si $x_o \neq y_o$ et $(\xi_o,\eta_o) \neq (0,0)$ on intègre par parties en θ et puis en x et y (utilisant spectre) et $\rho \notin WF(E_a^+)$.

3) Si $\sigma_o < 0$ ou $\tau_o < 0$, alors $\rho \notin WF(E_a^+)$.

En effet si g(z) est holomorphe sur $\mathbb{C}_+$ et si pour un N on a $|\partial_z^j g(z)| \leqslant C\,|z|^{N-j}$ sur les bornés de $\mathbb{C}_+$, en définissant la distribution $g(s+io) = \lim\limits_{\varepsilon\to o_+} g(s+i\varepsilon)$, on trouve que $\int e^{-is\sigma} g(s+io)ds$ est nulle pour $\sigma < 0$.

4) Si $s_o\,\sigma_o \neq 0$ ou $t_o\,\tau_o \neq 0$ alors $\rho \notin WF(E_a^+)$.

Par exemple si $s_o\,\sigma_o \neq 0$, on intègre par parties en s en notant que près de $s_o \neq 0$, $\partial_1^\ell E_a^+$ est une distribution d'ordre fini indépendant de ℓ!.

<u>N.B.</u> : hors de $\{t = 0\} \cup \{s = 0\}$ E_a^+ est la distribution de Fourier :

$$\int e^{i<x-y,\theta>} a(s,t,x,\theta)d\theta.$$

On définit alors le noyau :

$H(t-s)\ E_a^+$

On vérifie facilement, grâce au théorème d'Hörmander que :

$$WF'(H(t-s)E_a^+) \subset A_1 \cup A_2 \subset T^*(\mathbb{R}^{2n+2}\setminus 0) \ ;$$

où :

$$A_1 = \{(x,t,\xi,\tau;x,s,\xi,\sigma) \mid t \geqslant s,\ t\tau = s\sigma = 0,\ \tau \geqslant 0,\ \sigma \leqslant 0\}$$

$$\cup \ \{(x,o,\xi,\tau;x,o,\xi,\sigma) \mid \tau \geqslant \sigma\} \cup \Delta(T^*\mathbb{R}^{2n+2}\setminus 0),$$

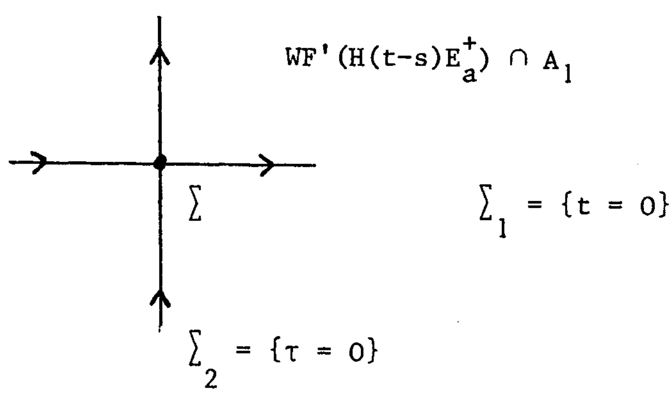
$$A_2 = \{(x,t,o;\tau;y,s,o,\sigma) \mid t \geqslant s,\ t\tau = s\sigma = 0,\ \tau \geqslant 0,\ \sigma \leqslant 0\}$$

$$\cup \ \{(x,o,o,\tau;y,o,o,\sigma) \mid \tau \geqslant \sigma\}$$

$$\cup \ \{(x,t,o,\tau;y,t,o,\tau) \mid \tau \neq 0\}.$$

Il convient de noter que si $a \in S^{-\infty}$, alors $WF'(H(t-s)E_a^+) \subset A_2$.

On a l'interprétation géométrique de A_1 (cf. le cas modèle):



On a le lemme fondamental :

Lemme :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\ a \in B_o^{c+1+\varepsilon} \text{ t.q. :}$$

$$(t\,\partial_t - \lambda(x,D_x))(H(t-s)E_a^+) = \delta(t-s) \otimes \delta(x-y) + R(x,t;y,s)$$

avec $WF'(R) \subset A_2$.

Preuve :

Quelque soit $a \in B_m^N$ on trouve :

$$t\,\partial_t\, H(t-s)E_a^+ = t\,\delta(t-s)E_a^+ + H(t-s)(t\,\partial_t - \lambda(x,D_x))E_a^+.$$

Maintenant :

$$(t\,\partial_t - \lambda(x,D_x))E_a^+ = E_b^+ \text{ , avec}$$

$$b(z,w;x,\theta) = w\,\frac{\partial}{\partial w}\,a - e^{i<x,\theta>}\,\lambda(x,D_x)\,[\,e^{i<.,\theta>}\,a(z,w;x,\theta)]\,.$$

L'idée est de chercher $a \in B_o^N$ de façon que $b \in B_{-\infty}^N$.

Si $a \sim \sum_{j\leqslant o} a_j$ on est conduit aux équations de transport suivantes :

$$w\,\frac{\partial}{\partial w}\,a_o - \lambda_o(x,\theta)a_o = 0$$

$$w\,\frac{\partial}{\partial w}\,a_{-1} - \lambda_o(x,\theta)a_{-1} = \lambda_{-1}(x,\theta)a_o + \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{n} \partial_{\theta_j}\,\lambda_o\,\partial_{x_j}\,a_o$$

D'autre part il faut considérer le terme :

$$t\,\delta(t-s)E_a^+ = \delta(t-s)E_{wa}^+ = E_{wa|z,w|_{z=w}}^+$$

Si l'on veut que $E^+_{wa} = (x-y)$ on est conduit à imposer les conditions initiales :

$$wa\Big|_{z=w} = 1 \quad , \quad a\Big|_{z=w} = 1/w \ ,$$

i.e. $$a_o\Big|_{z=w} = 1/w \quad , \quad a_{-j}\Big|_{z=w} = 0 \quad , \quad j \geqslant 1.$$

Si bien qu'on trouve :

$$a_o(z,w;x,\theta) = z^{-\lambda_o(x,\theta)-1}\, w^{\lambda_o(x,\theta)} \in B_o^{C+1+\varepsilon}.$$

Alors :

$$(w\frac{\partial}{\partial w} - \lambda_o)a_{-1} = z^{-\lambda_o-1}\, w^{\lambda_o}\,\{\lambda_{-1} + \phi_{-1}(x,\theta)\log w - \phi_{-1}(x,\theta)\log z\}$$

avec un symbole ϕ_{-1} homogène de degré -1 en θ.

Il suffit alors de prendre :

$$\begin{aligned} a_{-1} = z^{-\lambda_o-1}\, w^{\lambda_o}\,\{&\lambda_{-1}(\log w - \log z) + \\ &+ \frac{1}{2}\,\phi_{-1}(x,\theta)\ (\log w)^2 - \phi_{-1}(x,\theta)\ \log z \log w \\ &+ \frac{1}{2}\,\phi_{-1}(x,\theta)\ (\log z)^2\} \in B_o^{C+1+\varepsilon} \end{aligned}$$

Noter que $a_{-1}\Big|_{z=w} = 0.$

Les autres équations de transport se traitent de la même manière en obtenant a_{-j}, $j \geqslant 1$, comme une combinaison de termes du type $(\log w)^{\ell}\ (\log z)^n$ x fonctions homogènes de degré $-j$ en θ.

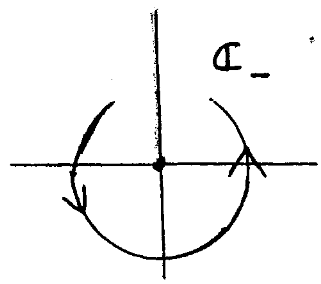
De façon analogue on trouve :

$$(t\, \partial_t - \lambda(x,D_x))(-H(s-t)E_a^+) = I + R.$$

Avec $WF'(H(s-t)E_a^+) \subset A_1' \cup A_2'$ et $WF'(R) \subset A_2'$, (A_1' et A_2' sont définis comme A_1 et A_2 en changeant $t \geqslant s$ en $t \leqslant s$). De la même manière on considère :

$$a(z,w;x,\theta) \qquad (z,w) \in \mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus i\,\mathbb{R}_+,$$

vérifiant des conditions analogues au cas $\mathbb{C}_+$ et, l'on définit :



$$E_a^- = \int e^{i<x-y,\theta>}\, a(s-io,\ t-io;x,\theta)d\theta.$$

Ensuite on définit les noyaux $H(t-s)E_a^-$, $-H(s-t)E_a^-$.

On laisse maintenant au lecteur de continuer jusqu'à obtenir le 1er théorème de propagation des singularités comme dans le cas $\lambda \in \mathbb{C}$.

Pour donner des résultats analogues sur ces modèles quand λ_o évite les entiers, on définit :

<u>Définition</u> :

$$\hat{S}^m = \{\ a(\rho,y,\theta) \in C^\infty(]0,1]\ \times \mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\theta)\ \Big|\ \forall\, \varepsilon > o\ ,\ \forall_{j,\alpha,\beta}$$

$$\left|\rho^\varepsilon(\rho\, \partial_\rho)^j\, \partial_y^\alpha\, \partial_\theta^\beta\, a(\rho,y,\theta)\right| \leqslant C(1+|\theta|)^{m-|\beta|}$$

$$\forall\, \rho \in]0,1\ ,\ \forall\, y \in \text{compact},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R}^n\}.$$

C'est un espace de Fréchet et on a les lemmes suivants :

1) Soient $a_j \in \hat{S}^{m_j}$, $m_j \downarrow -\infty$; alors il existe $a \in \hat{S}^{m_o}$ tel que $a - \sum_{j<k} a_j \in \hat{S}^{m_k}$ $\forall k$.

2) Soit $Q \in L^m(\mathbb{R}^n)$, propre et $a \in \hat{S}^{m'}$, alors :

$$e^{-i<y,\theta>} Q[e^{i<.,\theta>} a(\rho,.,\theta)] \in \hat{S}^{m+m'} ,$$

avec le développement asymptotique :

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_{\theta}^{\alpha} q(y,\theta) \partial_y^{\alpha} a(\rho,y,\theta).$$

Exemple :

Si Re $\lambda_o(y,\theta) \geqslant 0$, alors $\rho^{\lambda_o(y,\theta)} \in \hat{S}^o$.

On construit maintenant un certain noyau.

Etant donné $a \in \hat{S}^m$ on définit $T_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n+2})$ par :

$$<T_a, \phi(x,t;y,s)> \overset{\text{def}}{=}$$

$$\int_o^1 \int e^{i<x-y,\theta>} a(\rho,y,\theta)\ \phi(x,t;y,\rho t) d\rho\ d\theta\ dx\ dy\ dt$$

Il convient de noter que l'opérateur associé :

$$T_a : C_o^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1}) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

On estime :

$$WF'(T_a) \subset g \cup \mathcal{F} \subset T^*(\mathbb{R}^{2n+2}) \setminus 0$$

$$\mathcal{G} = \{(x,t,\xi,\tau;x,s,\xi,\sigma) \mid \tfrac{s}{t} \in [0,1],\ \tfrac{\tau}{\sigma} \in [0,1],\ t\,\tau = s\,\sigma = 0\}$$

$$\cup\ \Delta(T^*\mathbb{R}^{2n+2} \backslash 0).$$

$$\mathcal{F} = \{(x,t,o,\tau;y,o,o,\sigma) \mid t\,\tau = 0,\ \tau/\sigma \in [0,1]\}$$

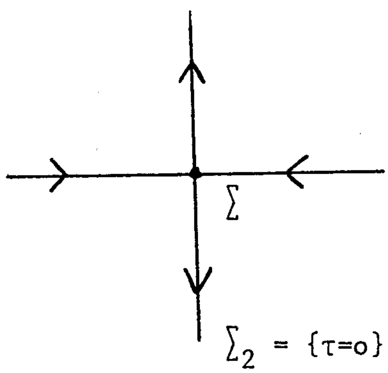
$$\cup\ \{(x,t,o,\tau;y,t,o,\tau) \mid \tau \neq 0\}.$$

Noter que si $a \in \hat{S}^{-\infty}$, alors $WF'(T_a) \subset \mathcal{F}$

<u>Démonstration</u> :

On procède comme dans le cas modèle :

<u>Interprétation géométrique de g</u> :



On a maintenant le théorème :

<u>Théorème</u> :

Soit $Re\ \lambda_o(x,\xi) \leqslant -1 \quad \forall (x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n \backslash 0$. *Alors il existe* $a \in \hat{S}^o$ *tel que*

$$WF'(T_a\,P - I) \subset \mathcal{F}, \quad P = t\,\partial_t - \lambda(x,D_x).$$

Preuve :

$$(T_a\, P\, f)(x,t) = \int_0^1 \int e^{i<x-y,\theta>} a(\rho,y,\theta)[\,\rho t(\partial_t f)(\rho t,y)$$

$$- \lambda(y,D_y) f(\rho t,y)]\, d\rho\, d\theta\, dy$$

$$= \int_0^1 \int e^{i<x-y,\theta>} \{\rho a(\rho,y,\theta) \frac{\partial}{\partial\rho}[\,f(\rho t,y)]$$

$$- e^{i<y,\theta>}{}^T\lambda(y,D_y)(e^{-i<.,\theta>} a(\rho,.,\theta)) f(\rho t,y)\}$$

$$= \int e^{i<x-y,\theta>}\, a(1,y,\theta)\; f(t,y) d\theta\, dy$$

$$- \int_0^1 \int e^{i<x-y,\theta>} \{\rho \frac{\partial}{\partial\rho} a + a + e^{i<y,\theta>}$$

$$[\,{}^T\lambda(y,D_y)(e^{-i<.,\theta>} a)]\,\} f(\rho t,y) d\theta d\rho dy$$

On est conduit aux conditions :

$$\begin{cases} a(1,y,\theta) \sim 1 \\ \rho \frac{\partial}{\partial\rho} a + a + e^{i<y,\theta>}[\,{}^T\lambda(y,D_y)(e^{-i<.,\theta>} a)] \in \hat{S}^{-\infty} \end{cases}$$

En écrivant $a \sim \sum_{j>o} a_{-j}$, $a_{-j} \in S^{-j}$, on trouve les équations de transport suivantes :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial}{\partial\rho} a_o + a_o + \lambda_o(y,\theta) a_o = 0 \\ a_o(1,y,\theta) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial}{\partial\rho} a_{-1} + a_{-1} + \lambda_o(y,\theta) a_{-1} = \text{termes d'erreurs} \in \hat{S}^{-1} \\ a_{-1}(1,y,\theta) = 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$a_o = \rho^{-\lambda_o(y,\theta)-1}$$

et ensuite :

$$a_{-j}(\rho,y,\theta) = \rho^{-\lambda_o(y,\theta)-1} \sum_{\ell\in \text{fini}} (\log \rho)^{\ell}\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{homogène de degré } -j \text{ en } \theta}}{h_{\ell,-j}(y,\theta)}$$

On laisse au lecteur de démontrer le 2ème et 3ème théorème de propagation des singularités comme dans le cas modèle $\lambda \in C$, (supposant, respectivement, $\lambda_o(y,\theta) \notin \{0,+1,+2,\ldots\}$ ou $\lambda_o(y,\theta) \notin \{-1,-2,\ldots\}$).

Références :

N. HANGES : "Parametrics and propagation of singularities for operators with non-involutive characteristics". Ind. Math. J., 28 (1979), 87-97.

PARAMETRIXES POUR DES SYSTEMES FUCHSIENS

PARENTI

Istituto Matematico "S. Pincherle"

Piazza di Porta S. Donato, 5

40 127 - BOLOGNA - ITALY

(Chapitre II)

On considère maintenant un système Fuchsien général :

(1) $$P\,u = (I_N\, t\, \partial_t - A(t,x,D_t,D_x))u = f\ ,$$

où A est une matrice N x N d'o.p.d. classiques (et propre) d'ordre 0 définis sur $\mathbb{R}^{n+1}$; on note par $a(t,x,\tau,\xi) \sim a_o(t,x,\tau,\xi) + a_{-1}(t,x,\tau,\xi) + \dots$ le symbole de A($a_o(t,x,\tau,\xi)$ est le symbole principal de A).On s'intéresse à étudier $WF(u)\setminus WF(Pu)$ au voisinage d'un point $\rho_o = (0,x_o,0,\xi_o) \in \Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

L'idée naturelle est de chercher un o.p.d. Q d'ordre 0, elliptique au point ρ_o, t.q. , $PQ \equiv Q(I_N\, t\, \partial_t - B(x,D_x))$ (près de ρ_o) avec une nouvelle matrice d'ordre 0, B qui ne dépends pas de t et de D_t. Si cela est possible on peut alors appliquer les résultats précédents.

On va montrer qu'une telle matrice Q existe si une certaine condition est satisfaite. Précisément, considérons le <u>polynôme (indiciel)</u> :

(2) $$I^P_{\rho_o}(\zeta) = \det(\zeta\, I_N - a_o(\rho_o)),\ \zeta \in \mathbb{C}.$$

<u>Définition</u> :

On dit que P satisfait la <u>condition de Fuchs</u> en ρ_o si pour les racines $\zeta_1(\rho_o),\dots,\zeta_N(\rho_o)$ de $I^P_{\rho_o}(\zeta) = 0$ on a $\zeta_i(\rho_o) - \zeta_j(\rho_o) \notin \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $i,j = 1,\dots,N$.

On a le théorème suivant :

<u>*Théorème 1*</u> :

Si P satisfait la condition de Fuchs au point ρ_o, il existe deux matrices $N \times N$, Q_1, Q_2, d'o.p.d. d'ordre 0, elliptiques près de ρ_o, *telles que :*

$$(I_N\ t\ \partial_t - A(t,x,D_t,D_x))Q_1 \equiv Q_2(I_N\ t\ \partial_t - B(x,D_x))\ \text{(près de } \rho_o\text{)},$$

où B est une matrice N x N d'o.p.d. d'ordre 0 ; à noter que :

$$I^P_{\rho_o}(\zeta) = I^{P'}_{\rho_o}(\zeta)\ ,\ P' = I_N\ t\ \partial_t - B(x,D_x)).$$

Preuve :

Supposons qu'on ait déjà trouvée une matrice Q elliptique près de ρ_o et telle que :

$$(I_N\ t\ \partial_t - A)Q \equiv Q(I_N\ t\ \partial_t - \tilde{A}),\quad \text{près de } \rho_o\ ,$$

où $\tilde{A}$ est une matrice N x N dont le symbole dépend seulement de x,ξ et de $t\tau$ dans un voisinage conique de ρ_o (naturellement $\tilde{a}_o(\rho_o) = a_o(\rho_o)$). On va montrer qu'il existe une matrice N x N d'odre 0 , F elliptique près de ρ_o, avec symbole dépendant seulement de x,ξ et de $t\tau$, t.q. $(I_N\ t\ \partial_t - \tilde{A})F = (I_N\ t\ \partial_t - B(x,D_x))$, avec B indépendante de t et de τ. Ceci est classique (astuce de Chazarain). On pose $F \sim I_N + F_{-1} + \ldots$ et $B \sim B_o + B_{-1} + \ldots$ et on commence par chercher F_{-1} et B_o , t.q. $(I_N\ t\ \partial_t - \tilde{A})(I + F_{-1}) = I_N\ t\ \partial_t - B_o$ modulo OPS^{-1}.

En égalant les symboles principaux, on trouve :

$$it\tau\ f_{-1}(t,x,\tau,\xi) - \tilde{a}_o(x,\xi,t\tau) = -\ b_o(x,\xi)$$

posons : $\qquad b_o(x,\xi) = \tilde{a}_o(x,\xi,o)$ et

$$f_{-1}(t,x,\tau,\xi) = \frac{1}{i}\,\frac{\tilde{a}_o(x,\xi,o) - \tilde{a}_o(x,\xi,t\tau)}{t\tau}$$

Il vient que f_{-1} est bien défini et C^∞ (et dépends seulement de $x,\xi,t\tau$). En procédant de cette manière, on arrive à la conclusion. On pose alors $Q_1 = QF$, $Q_2 = Q$.

Donc tout le problème revient à montrer l'existence d'une matrice d'ordre 0, Q elliptique près de ρ_o, et telle que $IQ = Q(I_N\, t\, \partial_t - \tilde{A})$ avec le symbole de $\tilde{A}$ dépendant seulement de x,ξ et $t\tau$ dans un voisinage conique de ρ_o.

Commençons par un cas particulier. Supposons qu'au point ρ_o $a_o(\rho_o)$ soit triangulaire supérieur de la forme :

$$(3) \qquad a_o(\rho_o) = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Admettons pour un instant le lemme suivant.

<u>Lemme 1</u> :

Soit M une variété C^∞ et soit $a(z;t,\tau) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^2)$ une matrice $N \times N$. Soit $z_o \in M$ et supposons que :

$$a(z_o;0,0) = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Alors il existe deux matrices $N \times N$, $q(z;t,\tau) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^2)$ et

$\tilde{a}(z;s) \in C^{\infty}(M \times \mathbb{R})$ avec :

i) $q(z_o;0,0) = I_N$

ii) $\tilde{a}(z;0) = a(z_o;0,0)$

telles que :

$$Lq \overset{\text{def}}{=} (t\,\partial_t - \tau\,\partial_t)q(z;t,\tau) - [\,a(z;t,\tau)q(z;t,\tau)-q(z;t,\tau)\tilde{a}(z;t\tau)]$$

$$= 0 \text{ au voisinage } W \times [-T,T] \times [-T,T] \text{ de } (z_o;0,0).$$

Supposons $|\xi_o| = 1$ et considérons les ensembles :

$$\Lambda^{\varepsilon}(\rho_o) = \{(t,x;\tau,\xi') \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}_{\tau} \times S^{n-1} \;\Big|\; |\xi'-\xi_o| < \varepsilon,$$

$$|x-x_o| < \varepsilon,\ |t|,\ |\tau| < \varepsilon\},$$

$$V^{\varepsilon}(\rho_o) = \{(t,x;\tau,\xi) \in T^*\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0 \;\Big|\; \xi \neq 0,\ (t,x,\tfrac{\tau}{|\xi|},\tfrac{\xi}{|\xi|})$$

$$\in \Lambda^{\varepsilon}(\rho_o)\},\ \varepsilon > 0.$$

On cherche Q, $\tilde{A} \in OPS^o$ avec symboles $\sum\limits_{j\geqslant o} q_{-j}$, $\sum\limits_{j\geqslant o} \tilde{a}_{-j}$.

Imposant que $(I_N\ t\ \partial_t - A)Q = Q(I_N\ t\ \partial_t - \tilde{A})$ on obtient des équations de transport. La première est :

$$(t\ \partial_t - \tau\ \partial_{\tau})q_o - \{a_o q_o - q_o\tilde{a}_o\} = 0$$

On utilise le lemme 1 avec $M = \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$, $z = (x,\xi')$, si bien qu'il existe deux matrices $\hat{q}_o(t,x;\tau,\xi')$, $\tilde{a}_o(x,\xi';t\tau)$ (définies sur $M \times \mathbb{R}^2_{(t,\tau)}$) telles que :

$$\hat{q}_o(0,x_o;0,\xi_o) = I_N,\ \tilde{a}_o(x,\xi_o;0) = a_o(\rho_o) \text{ et}$$

$$(t\,\partial_t - \tau\,\partial_\tau)\hat{q}_o = a_o\hat{q}_o - \hat{q}_o\tilde{a}_o \text{ sur } \Lambda^\varepsilon(\rho_o) \text{ (pour quelque } \varepsilon > 0).$$

On définit alors :

$$\begin{cases} q_o(t,x;\tau,\xi) = \hat{q}_o(t,x,\tau/|\xi|,\xi/|\xi|) \\ \tilde{a}_o(t,x,\tau,\xi) = \tilde{a}_o(x,\xi/|\xi|;t\tau/|\xi|) \end{cases} \quad (\text{sur } V^\varepsilon(\rho_o))$$

On peut bien supposer que q_o et $\tilde{a}_o$ soient définies sur $T^*\mathbb{R}^{n+1}\setminus 0$. Donc, si Q_o et $\tilde{A}_o$ sont des o.p.d. de symbole q_o et $\tilde{a}_o$, on trouve déjà $I_N(t\,\partial_t - A)Q_o = Q_o(I_N\, t\,\partial_t - \tilde{A})$ modulo OPS^{-1} dans un voisinage conique de ρ_o. En continuant (et utilisant une variante du lemme 1 avec second membre) on conclut.

Montrons maintenant le lemme 1. Avant tout, on prouve le lemme au niveau de séries formelles, i.e. étant données $a(z;t,s) \sim \sum a^{rs}(z)t^r t^s$, on cherche $q(z;t,s) \sim \sum q^{rs}(z)t^r t^s$ et $\tilde{a}(z;t\tau) \sim \sum \tilde{a}^\ell(z)(t\tau)^\ell$ telles que $(Lq)^{rs}(z) = 0$, $\forall r,s \geqslant 0$. Or $(Lq)^{oo}(z) = -\left[a^{oo}(z)q^{oo}(z) - q^{oo}(z)\tilde{a}^{o}(z)\right] = 0$. Cette relation est satisfaite au point z_o si $q^{oo}(z_o) = I_N$ et $\tilde{a}^{o}(z_o) = a^{oo}(z_o)$.

L'application :

$$(q,\tilde{a}) \longmapsto F(z;q,\tilde{a}) = a^{oo}(z)q - q\tilde{a}$$

est telle que l'application linéaire dérivée partielle :

$$dF_{(q,\tilde{a})}(z_o; q = I_N, \tilde{a} = a^{oo}(z_o))$$

$$: (\Delta q, \Delta\tilde{a}) \longmapsto a^{oo}(z_o)\Delta q - \Delta q\, a^{oo}(z_o) - \Delta\tilde{a}$$

est surjective. Utilisant le théorème des fonctions implicites il y a donc un voisinage $V \ni z_o$ et deux matrices C^∞ sur V, $q^{oo}(z)$, $\tilde{a}^o(z)$, avec $q^{oo}(z_o) = I_N$, $\tilde{a}^o(z_o) = a^{oo}(z_o)$ t.q. : $F(z, q^{oo}(z), \tilde{a}^o(z)) = 0$, $\forall z \in V$.

En imposant $(Lq)^{10}(z) = 0$ on trouve :

$$q^{10}(z) - a^{10}(z)q^{oo}(z) - a^{oo}(z)q^{10}(z) + q^{10}(z)\tilde{a}^o(z) = 0$$

i.e. :

$$q^{10}(z)(I_N + \tilde{a}^o(z)) - a^{oo}(z)q^{10}(z) = a^{10}(z)q^{oo}(z). \tag{4}$$

Dès que le spectre de $I_N + \tilde{a}^o(z_o)$ et celui de $a^{oo}(z_o)$ sont disjoints, on peut résoudre (4) (en C^∞ !) dans un voisinage $V' \subset V$ de z_o. De la même manière on résoud $(Lq)^{01}(z) = 0$ sur V'. Pour résoudre $(Lq)''(z) = 0$, on observe que $(t\,\partial_t\, q - \tau\,\partial_\tau\, q)^{11} = 0$ et on est conduit à résoudre : $a^{oo}(z)q''(z) - q^{oo}(z)\tilde{a}'(z) =$ matrice connue. On pose $q''(z) = I_N$ et puisque $q^{oo}(z_o) = I_N$, on détermine $\tilde{a}'(z)$ sur un voisinage $V'' \subset V'$ de z_o.

Ensuite, on résoud $(Lq)^{20} = 0$, $(Lq)^{02} = 0$ et ainsi de suite. Il faut remarquer qu'il existe un voisinage $W \ni z_o$ sur lequel on peut construire toutes les matrices $q^{rs}(z)$, $\tilde{a}^{k\ell}(z) \in C^\infty(W)$ d'une façon que $(Lq)^{rs}(z) = 0$, $\forall z \in W$ et $\forall r,s$. Pour s'en convaincre il suffit de tenir compte du fait que les équations linéaires $\alpha(K\, I_N + \tilde{a}^o(z)) - a^{oo}(z)\beta =$ donné, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, sont toutes résolubles (en C^∞) sur un même voisinage de z_o.

En conclusion, utilisant le lemme de Borel on construit deux matrices : $\hat{q}(z;t,\tau)$, $a(z,t\tau) \in C^{\infty}(M \times \mathbb{R}^2)$ telles que $L\hat{q} = (t\,\partial_t - \tau\,\partial_\tau)\hat{q} - [a\,\hat{q} - \hat{q}\,\tilde{a}] = g$ est C^{∞} et plate pour $t = 0$, $\tau = 0$ sur un voisinage $W \ni z_o$. Il est alors facile de trouver $\hat{\hat{q}}(z;t,\tau) \in C^{\infty}(W \times \mathbb{R}^2)$, plate sur $t = 0$, $\tau = 0$ et telle que $(\hat{\hat{q}} = -g$ sur $W \times [-T,T] \times [-T,T]$ pour quelque $T > 0$.

En posant $q = \hat{q} + \hat{\hat{q}}$ on conclut la démonstration du lemme 1. Il faut passer maintenant du cas simple où $a_o(\rho_o)$ a la forme (3) au cas général (supposant toujours la condition de Fuchs satisfaite). On se rend alors facilement compte qu'on peut supposer $a_o(\rho_o)$ triangulaire supérieure par Blocs, de la manière suivante :

$$(5) \qquad a_o(\rho_o) = \begin{pmatrix} a_{11}(\rho_o) & & & 0 \\ & a_{22}(\rho_o) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{kk}(\rho_o) \end{pmatrix}, \quad k \geqslant 2$$

avec :

$$\text{i)} \quad a_{jj}(\rho_o) = \begin{pmatrix} \lambda_j & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{pmatrix} \qquad \lambda_j \in \mathbb{C}$$

ii) Spectre $(a_{jj}(\rho_o) + r\, I_{N_j}) \cap$ spectre $(a_{ii}(\rho_o)) = \emptyset$, $i,j = 1,\ldots,k$, $i \neq j$, $r \in \mathbb{Z}$.

On va montrer qu'on peut découper le système (1) en k blocs correspondants aux $a_{jj}(\rho_o)$, $j = 1,\ldots,k$.

Pour simplifier un peu je supposerai que $k = 2$. Admettons pour un instant le lemme suivant :

Lemme 2 :

Soit M une variété C^∞ et soit $a(z;t,\tau) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^2)$ une matrice $N \times N$. Soit $z_o \in M$ et supposons que :

$$a(z_o;0,0) = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}(z_o;0,0) & 0 \\ \hline 0 & a_{22}(z_o;0,0) \end{array}\right)$$

$a_{jj}(z_o;0,0)$ étant deux blocs de dimension N_j, $j = 1,2$, $N_1 + N_2 = N$. On fait l'hypothèse que spectre $(a_{11}(z_o) + r\, I_{N_1}) \cap$ spectre $(a_{22}(z_o)) = \emptyset$ pour chaque $r \in \mathbb{Z}$.

Alors il existe deux matrices $N \times N$, $q(z;t,\tau)$, $\tilde{a}(z;t,\tau) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^2)$ avec :

i) $q(z_o;0,0) = I_N$

$$\text{ii)}\ \tilde{a}(z;t,\tau) = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{a}_{11}(z;t,\tau) & 0 \\ \hline 0 & \tilde{a}_{22}(z;t,\tau) \end{array}\right), \quad \tilde{a}_{jj}(z_o;0,0) = a_{jj}(z_o;0,0)\ ,\ j=1,2,$$

telles que :

$$Lq = (t\ \partial_t - \tau\ \partial_\tau)q - [aq - q\tilde{a}] = 0$$

sur un voisinage $W \times [-T,T] \times [-T,T]$ de $(z_o;0,0)$.

Le lemme étant admis on cherche Q, $\tilde{A} \in OPS^o$ avec symboles $\sum_{j\geq o} q_{-j}$, $\sum_{j\geq o} \tilde{a}_{-j}$ de façon que $(I_N\ t\ \partial_t - A)Q \equiv Q(I_N\ t\ \partial_t - \tilde{A})$ près de ρ_o. La première équation de transport qu'on obtient est toujours :

$$(t\ \partial_t - \tau\ \partial_\tau)q_o - [a_o q_o - q_o\tilde{a}_o] = 0$$

On utilise le lemme 2 avec $M = \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$, $z = (x,\xi')$, si bien qu'il existe deux matrices $\hat{q}_o(t,x;\tau,\xi)$, $a_o(t,x;\tau,\xi)$ t.q. : $\hat{q}_o(0,x_o;0,\xi_o) = I_N$, $a_o(\rho_o) = a_o(\rho_o)$ et $(t\ \partial_t - \tau\ \partial_\tau)\hat{q}_o = a_o\hat{q}_o - \hat{q}_o\tilde{a}_o$ sur $\Lambda^\varepsilon(\rho_o)$, pour quelque $\varepsilon > 0$. On définit alors :

$$\left\{\begin{array}{l} q_o(t,x;\tau,\xi) = \hat{q}_o(t,x,\tau/|\xi|,\ \xi/|\xi|) \\ \\ \tilde{a}_o(t,x;\tau,\xi) = \tilde{a}_o(t,x,\ \tau/|\xi|,\ \xi/|\xi|) \end{array}\right. \qquad (\text{sur } V^\varepsilon(\rho_o))$$

On prolonge q_o et $\tilde{a}_o$ sur $T^*\mathbb{R}^{n+1}\setminus 0(\xi \neq 0)$ et si Q_o et $\tilde{A}_o$ sont des o.p.d. dans OPS^o avec symbole q_o et $\tilde{a}_o$ on trouve que $(I_N\ t\ \partial_t - A)Q_o - Q_o(I_N\ t\ \partial_t - \tilde{A}) \in OPS^{-1}$ (dans un voisinage unique de ρ_o). En continuant (et utilisant encore une variante du lemme 2 avec second membre) on conclut.

Pour démontrer le lemme 2 on se limite au cas formel (on ajoutera ensuite un terme plat à $t = 0$, $\tau = 0$ exactement comme dans le lemme 1). Posons : $a(z;t,\tau) \sim \sum a^{rs}(z)t^r\tau^s$ et cherchons $q(z;t,\tau) \sim \sum q^{rs}(z)t^r\tau^s$, $\tilde{a}(z;t,\tau) \sim \sum a^{rs}(z)t^r\tau^s$ de façon que $(Lq)^{rs}(z) = 0\ \forall r,s \geqslant 0$. On a :

$$(Lq)^{oo}(z) = -[a^{oo}(z)q^{oo}(z) - q^{oo}(z)\tilde{a}^{oo}(z)]$$

Pour :

$$(\hat{q},\tilde{a}) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & q_{12} \\ q_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix},\quad (\hat{q},I_N) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} I_{N_1} & q_{12} \\ q_{21} & I_{N_2} \end{pmatrix},\quad (0,\tilde{a}) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 \\ 0 & a_{12} \end{pmatrix}$$

on considère la fonction (quadratique !) :

$$(\hat{q},\tilde{a}) \to F(z;\hat{q},\tilde{a}) = a^{oo}(z)(\hat{q},I_N) - (\hat{q},I_N)(0,\tilde{a}).$$

On a :

$$F(z_o\ ;\ \hat{q} = 0,\ \tilde{a} = a(z_o;0,0)) = 0.$$

D'autre part la différentielle par rapport à $(\hat{q},\tilde{a})$ est donnée par :

$$(\Delta\hat{q},\Delta\tilde{a}) \mapsto dF^{(z_o)}_{(\hat{q},\tilde{a})}(\Delta\hat{q},\Delta\tilde{a}) = \begin{pmatrix} -\Delta\tilde{a}_{11} & a_{11}(z_o)\Delta q_{12}-\Delta q_{12}a_{22}(z_o) \\ \\ \\ a_{22}(z_o)\Delta q_{21}-\Delta q_{21}a_{11}(z_o) & -\Delta\tilde{a}_{22} \end{pmatrix}$$

qui est surjective dès que $a_{11}(z_o)$ et $a_{22}(z_o)$ n'ont pas de valeurs propres communes. On utilise le théorème de Dini pour conclure qu'il existe deux fonctions C^∞, $z \to (\hat{q}(z),\tilde{a}(z))$ sur un voisinage $V \ni z_o$, telles que : $F(z;\hat{q}(z),\tilde{a}(z)) = 0$ sur V et $\hat{q}(z_o) = 0$, $\tilde{a}(z_o) = a^{oo}(z_o)$.

On pose alors :

$$q^{oo}(z) = \begin{pmatrix} I_{N_1} & \hat{q}_{12}(z) \\ \\ \hat{q}_{21}(z) & I_{N_2} \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{a}^{oo}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}(z) & 0 \\ \\ 0 & \tilde{a}_{22}(z) \end{pmatrix}$$

Pour construire $q^{rs}(z)$ on observe que :

$$(Lq)^{rs}(z) = 0 \iff (r-s)q^{rs}(z) - [\, a^{oo}(z)q^{rs}(z) - q^{rs}(z)\tilde{a}^{oo}(z)]$$
$$+ q^{oo}(z)\tilde{a}^{rs}(z) = \text{matrice donnée.}$$

Avec les mêmes notations qu'avant on considère l'application (linéaire !) :

$$(\hat{q},\tilde{a}) \quad \to F_{r-s}(z;\hat{q},\tilde{a}) = (r-s)(\hat{q},0)$$
$$- [\, a^{oo}(z)(\hat{q},0) - (\hat{q},0)\tilde{a}^{oo}(z)] + q^{oo}(z)(0,\tilde{a})$$

En $z = z_o$ on trouve :

$$F_{r-s}(z;\hat{q},\tilde{a}) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & q_{12}a_{22}(z_o) - [a_{11}(z_o) - (r-s)I_{N_1}]q_{12} \\ & \\ q_{21}a_{11}(z_o) - [a_{22}(z_o) - (r-s)I_{N_2}]q_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}$$

Grâce à l'hypothèse du lemme 2 on reconnaît facilement que les applications F_{r-s} sont inversibles (en C^∞) sur un même voisinage de z_o, ce qui permet de construire les $q^{rs}(z)$, $\tilde{a}^{rs}(z) \in C^\infty$ sur un même voisinage W de z_o. Le théorème 1 est ainsi démontré.

Si la condition de Fuchs n'est pas satisfaite les constructions précédentes tombent en défaut. On a toutefois le théorème suivant :

Théorème 2 :

Etant donné le système Fuchsien :

$$P = I_N\, t\, \partial_t - A(t,x;D_t,D_x) ,$$

supposons qu'au point $\rho_o \in \Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, *P ne vérifie pas la condition de Fuchs. Il existe alors un système Fuchsien :*

$$\tilde{P} = I_{\tilde{N}}\, t\, \partial_t - B(x,D_x) ,$$

où B est une matrice $\tilde{N} \times \tilde{N}$ *d'o.p.d. classiques d'ordre 0 ne dépendant pes de t et de* D_t, *avec :*

i) $I^{\tilde{P}}_{\rho_o}(\zeta) = I^{P}_{\rho_o}(\zeta)$

ii) $\tilde{N} > N$, $\tilde{N}$ *dépendant seulement de* $a_o(\rho_o)$, *tel que, quelles que soient* $u, f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})^N$ *avec*

$$\rho_o \notin WF(f) \quad , \quad \rho_o \notin WF(P\,u - f),$$

il existe U, $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})^{\tilde{N}}$ *avec*

i) $WF(F) = WF(f)$ *et* $WF(u) = WF(U)$ *dans un voisinage conique de* ρ_o ,

ii) $\rho_o \notin WF(\tilde{P}\,U - F)$.

Il est alors évident que l'étude de $WF(u)\setminus WF(f)$ près de ρ_o se ramène à l'étude de $WF(U)\setminus WF(F)$ (près de ρ_o).

On démontre le théorème 2 en utilisant une astuce de Kashiwara-Oshima. On va donner dans la suite une démonstration du théorème 2 dans le cas particulier, mais significatif où $a_o(\rho_o)$ est formée par deux blocs triangulaires supérieurs du type suivant :

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & a_o(\rho_o) = \begin{array}{c} \\ N_1\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \overbrace{a_{11}(\rho_o)}^{N_1} & \vline & 0 \\ \hline 0 & \vline & \underbrace{a_{22}(\rho_o)}_{N_2} \end{pmatrix} \left.\begin{array}{c}\\ \end{array}\right\} N_2 \quad , \; N_1+N_2 = N \; , \\ & a_{11}(\rho_o) = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \lambda & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \; , \; a_{22}(\rho_o) = \begin{pmatrix} \lambda-1 & & * \\ & \lambda-1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda-1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned} \right.$$

On a alors le lemme :

<u>Lemme 3</u> :

Supposons que $a_o(\rho_o)$ ait la forme (6). Alors il existe :

1) Deux matrices $N \times N$, Q_1, $Q_2 \in OPS^o$, elliptiques près de ρ_o

2) Une matrice $N \times N$, $\mathcal{A}(t,x;D_t,D_x) \in OPS^o$ de la forme :

$$\mathcal{A} = \begin{array}{c} \\ N_1\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{B_{11}(x,D_x)}^{N_1} & D_1(x,D_x)t \\ \hline E_1(x,D_x)\partial_t & \underbrace{B_{22}(x,D_x)}_{N_2} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\right\} N_2 \end{array},$$

avec $E_1 \in OPS^{-1}$ (de dimension $N_2 \times N_1$), $D_1 \in OPS^o$ (de dimension $N_1 \times N_2$), telles que :

i) $\mathcal{A}_o(\rho_o) = a_o(\rho_o)$

ii) $(I_N\ t\ \partial_t - A)Q_1 = Q_2(I_N\ t\ \partial_t - \mathcal{A})$, près de ρ_o

En plus, si $a_o(t,x;\tau,\zeta)$ est triangulaire inférieure (par blocs) dans un voisinage conique de ρ_o, on peut prendre $D_1(x,D_x) = 0$. On va montrer comment déduire le théorème 2 du lemme 3.

Si $Pu = f$, $u,f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})^N$, $\rho_o \notin WF(f)$, posons $V = Q_1^{-1}\ u$,

$g = Q_2^{-1} f$. On aura $\mathcal{P} v = g$ (près de ρ_o), où $\mathcal{P} = I_N\, t\, \partial_t - \mathcal{A}$. Ecrivons $v = (v_1, v_2)$, $g = (g_1, g_2)$, si bien que :

$$\begin{cases} t\, \partial_t\, v_1 = B_{11}\, v_1 + D_1\, t\, v_2 + g_1 \\ t\, \partial_t\, v_2 = E_1\, \partial_t\, v_1 + B_{22}\, v_2 + g_2 \end{cases}$$

Posons : $w_1 = v_1$, $w_2 = t\, v_2$, $w_3 = v_2$. Alors :

$$t\, \partial_t\, w_1 = t\, \partial_t\, v_1 = B_{11}\, w_1 + D_1\, w_2 + g_1 \;;$$

$$t\, \partial_t\, w_2 = t\, \partial_t (t\, v_2) = t\, v_2 + t(t\, \partial_t\, v_2) = w_2 + t\, E_1\, \partial_t\, w_1 +$$

$$+ B_{22}\, w_2 + t\, g_2 \;;\; t\, \partial_t\, w_3 = t\, \partial_t\, v_2 = E_1\, \partial_t\, w_1 + B_{22}\, w_3 + g_2.$$

Donc :

$$t\, \partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}(x,D_x) & D_1(x,D_x) & 0 \\ t\, E_1(x,D_x)\partial_t & I_{N_2} + B_{22}(x,D_x) & 0 \\ E_1(x,D_x)\partial_t & 0 & B_{22}(x,D_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ tg_2 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

En posant $\phi_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, $\phi_2 = w_3$, on trouve que :

$$(7) \qquad t\, \partial_t \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t,x;D_t,D_x) & 0 \\ \Phi_{21}(t,x;D_t,D_x) & \Phi_{22}(t,x;D_t,D_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$$

où :

$$\Phi_{11} = \begin{pmatrix} B_{11} & D_1 \\ \\ {}^t E_1\, \partial_t & I_{N_2} + B_{22} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{21} = (E_1 \partial_t \;\; 0), \quad \Phi_{22} = B_{22} \quad \text{et}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} g_1 \\ \\ {}^t g_2 \end{pmatrix}, \quad G_2 = g_2.$$

On remarquera que :

1°) $WF(\phi) = WF(u)$, $WF(G) = WF(f)$ près de ρ_o

2°) La matrice $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & 0 \\ \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure

3°) Le symbole principal $\Phi_o(\rho_o)$ est encore de la forme

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad}^{N_1 + N_2} & \overbrace{\qquad\qquad}^{N_2} \end{array} \\
\begin{array}{c} N_1+N_2 \left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}} \right. \\ N_2 \left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}} \right. \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix} & \\ \hline & \begin{matrix} \lambda^{-1} & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{-1} \end{matrix} \end{array} \right)
\end{array}$$

On peut alors appliquer encore une fois le lemme 3, si bien que le système (7) se traduit (dans un voisinage conique de ρ_o) dans un système:

$$(8) \qquad t\partial_t \begin{pmatrix}\psi_1\\ \\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{array}{r} N_1+N_2\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}}\right. \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \overbrace{C_{11}(x,D_x)}^{N_1+N_2} & 0 \\ & \\ C_{21}(x,D_x)\partial_t & \underbrace{C_{22}(x,D_x)}_{N_2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \left.\vphantom{a}\right\} N_2 \end{array} \begin{pmatrix}\psi_1\\ \\ \psi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}H_1\\ \\ H_2\end{pmatrix}$$

ayant même polynôme indiciel à ρ_o ($C_{21} \in OPS^{-1}$) et avec ψ, $H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})^{N_1+2N_2}$ t.q. $WF(\psi) = WF(u)$, $WF(H) = WF(f)$ près de ρ_o. Définissons maintenant : $U_1 = \psi_1$, $U_2 = \partial_t \psi_1$, $U_3 = \psi_2$.

Alors on vérifie que :

$$t\partial_t \begin{pmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}(x,D_x) & 0 & 0 \\ 0 & C_{11}(x,D_x)-I_{N_1+N_2} & 0 \\ 0 & C_{21}(x,D_x) & C_{22}(x,D_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}H_1\\ \partial_t H_1\\ H_2\end{pmatrix}$$

Le théorème 3 s'en suit en posant :

$$B(x,D_x) = \begin{pmatrix} C_{11}(x,D_x) & & 0 \\ 0 & C_{11}(x,D_x)-I_{N_1+N} & 0 \\ 0 & C_{21}(x,D_x) & C_{22}(x,D_x) \end{pmatrix},$$

qui a dimension $2N_1+3N_2$ et $B_o(\rho_o) = a_o(\rho_o)$. Noter que $WF(U) = WF(u)$,

$$WF\begin{pmatrix}H_1\\ \partial_t H_1\\ H_2\end{pmatrix} = WF(f) \text{ près de } \rho_o.$$

Il reste donc à montrer le lemme 3. Un argument du type de ce que l'on a utilisé au début de la démonstration du théorème 1 montre qu'il suffit de construire une matrice $Q \in OPS^o$, elliptique en ρ_o, telle que :

$$PQ = Q(I_N\, t\, \partial_t - \tilde{\mathcal{A}}(t,x;D_t,D_x)) \quad \text{(près de } \rho_o)$$

avec :

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{matrix} N_1\{ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \overbrace{B_{11}(t,x;D_t,D_x)}^{N_1} & D_1(t,x;D_t,D_x)t \\ & \\ E_1(t,x;D_t,D_x)\partial_t & \underbrace{B_{22}(t,x;D_t,D_x)}_{N_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \}\, N_2 \end{matrix}$$

où B_{11}, B_{22}, $D_1 \in OPS^o$, $E_1 \in OPS^{-1}$ mais avec symboles dépendant seulement de x,ξ et de $t\tau$ dans un voisinage conique de ρ_o (et, bien sûr, avec $\tilde{\mathcal{A}}_o(\rho_o) = a_o(\rho_o)$).

Exactement comme dans la démonstration du théorème 1, l'existence de Q et de $\tilde{\mathcal{A}}$ se déduit du lemme suivant.

Lemme 4 :

Soit M une variété C^∞ et soit $a(z;t,\tau) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^2)$ une matrice $N \times N$. Soit $z_o \in M$ et supposons que :

$$a(z_o;0,0) = \begin{matrix} N_1\{ \\ \\ \end{matrix} \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{a_{11}(z_o)}^{N_1} & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{a_{22}(z_o)}_{N_2} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \}\, N_2 \end{matrix} \qquad \text{avec}$$

$$a_{11}(z_o) = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}, \quad a_{22}(z_o) = \begin{pmatrix} \lambda-1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda-1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Il existe alors :

i) Une matrice N x N $q(z;t,\tau) \in C^{\infty}$, avec $q(z_o;0,0) = I_N$

ii) Une matrice $\in C^{\infty}(M \times \mathbb{R})$ de la forme :

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\phantom{C_{11}(z;s)}}^{N_1} \\ N_1 \Big\{ & \left(\begin{array}{c|c} C_{11}(z;s) & d(z;s) \\ \hline e(z;s) & C_{22}(z;s) \end{array}\right) \Big\} N_2 \\ & \qquad\qquad\qquad \underbrace{\phantom{C_{22}(z;s)}}_{N_2} \end{array}$$

avec $c_{jj}(z_o;0) = a_{jj}(z_o)$, $j = 1,2$,

telle que en posant :

$$\tilde{a}(z;t,\tau) = \left(\begin{array}{c|c} C_{11}(z;t\tau) & d(z;t\tau)t \\ \hline e(z;t\tau)\tau & C_{22}(z;t\tau) \end{array}\right)$$

on a :

$$Lq = (t\,\partial_t - \tau\,\partial_\tau)q - [aq - q\tilde{a}] = 0$$

sur un voisinage $W \times [-T,T] \times [-T,T]$ de $(z_o;0,0)$.

Il suffit de démontrer le lemme 4 au niveau des séries formelles. On se donne $a(z;t,\tau) \sim \sum a^{rs}(z)t^r\tau^s$ et l'on cherchera : $\sum q^{rs}(z)t^r\tau^s$, $\sum c^{\ell}_{jj}(z)(t\tau)^{\ell}, j = 1,2$, $d(z;t\tau) \sim \sum d^{\ell}(z)(t\tau)^{\ell}$, $e(z;t\tau) \sim \sum e^{\ell}(z)(t\tau)^{\ell}$ de façon à obtenir $(Lq)^{rs}(z) = 0$, $\forall r,s$. $(Lq)^{oo} = 0$ équivaut à $a^{oo}(z)q^{oo}(z)-q^{oo}(z)c^{o}(z)=0$ où :

$$c^{\ell}(z) = \left(\begin{array}{c|c} c^{\ell}_{11}(z) & \\ \hline & c^{\ell}_{22}(z) \end{array}\right) \qquad , \ell \geqslant 0$$

On résoud cette équation comme dans le lemme 2 (on utilise seulement le fait que $a_{11}(z_o)$ et $a_{22}(z_o)$ ont un spectre disjoint !).

La nécessité d'introduire les termes d et e se manifestent quand l'on veut résoudre $(Lq)^{10} = 0$ et $(Lq)^{01} = 0$.

En effet :

$$(Lq)^{10} = q^{10} - (a^{oo}\, q^{10} + a^{10}\, q^{oo}) + q^{10}\, C^{o} + q^{oo}\, d_o.$$

Pour avoir $(Lq)^{10} = 0$ on doit résoudre :

$$q^{10}(I + C^{o}) - a^{oo}\, q^{10} + q^{oo}\, d_o = a^{10}\, q^{oo}$$

On cherche q^{10} sous la forme $\left(\begin{array}{c|c} \hat{q}_{11} & 0 \\ \hline \hat{q}_{21} & \hat{q}_{22} \end{array}\right)$. En tenant compte que $C^{o}(z_o) = a^{oo}(z_o)$, on trouve, au point z_o, l'équation :

$$\begin{pmatrix} -C^1_{11} & a_{11}(z_o)\hat{q}_{12}-\hat{q}_{12}a_{22}(z_o) \\ a_{22}(z_o)\hat{q}_{21}-\hat{q}_{21}a_{11}(z_o) & -C^1_{22} \end{pmatrix}$$

= matrice donnée

Ce système est résoluble en C^∞ et après on trouve toutes les q^{r1} et q^{1s} et les d^ℓ et e^ℓ en résolvant des système linéaires. En procédant de cette manière on achève la preuve du lemme.

Références :

1 - M. KASHIWARA - I. OSHIMA : "Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems". Ann. of Math., 106 (1977), 145-200.

2 - A. BOVE - J.E. LEWIS - C. PARENTI : "To appear in Lecture Notes in Math". Springer Verlag, 1983.