MONIQUE TOUGERON-SABLE

Régularité microlocale pour des problèmes aux limites non linéaires

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 3
« Équations aux dérivées partielles », , p. 304-346
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985___3_304_0>

CHAPITRE X

REGULARITE MICROLOCALE POUR DES PROBLEMES AUX LIMITES NON LINEAIRES

TOUGERON-SABLE Monique

Université de Rennes I

UER Mathématiques & Informatique

Campus de Beaulieu

35 042 - RENNES CEDEX - FRANCE

Dans [2] Bony a étudié la régularité microlocale des solutions réelles d'une équation non linéaire générale au delà des chocs et en dessous de l'interaction. Dans ce travail on s'intéresse au problème analogue au voisinage d'un bord pour des solutions réelles de problèmes aux limites non linéaires non caractéristiques et dans la même zone que Bony, où le comportement est linéaire et gouverné par le symbole principal.

Un premier résultat de régularité locale, qui remplace le C^∞ à valeurs $\mathcal{D}'$ du cas linéaire, est que toute fonction réelle u de classe H^s solution dans un ouvert régulier Ω de $\mathbb{R}^n$ d'une équation aux dérivées partielles non linéaire non caractéristique :

$$(0.1) \qquad F(x,u(x),\ldots,\partial^\alpha u(x))_{|\alpha|\leqslant m} = 0 \ ,$$

où F est réelle et C^∞, est de classe $H^{s+\rho,-\rho}$ dans toute carte de bord si $\rho = s - m - \frac{n}{2} > 0$. Les espaces $H^{s,s'}$ sont définis par Hörmander [6] ; ce résultat se déduit des propriétés d'algèbre de ces espaces et de leur stabilité par composition avec une fonction C^∞.

Une étape essentielle est ensuite la paralinéarisation tangentielle de l'équation (0.1) dans une carte de bord ; cette opération, ρ-régularisante en direction tangentielle uniquement, permet grâce au fait que u est de classe $H^{s+\rho,-\rho}$, de remplacer l'équation (0.1) par une équation différentielle en variable normale à coefficients paradifférentiels tangentiels dont le second membre est de classe $H^{s-m+\rho}$ jusqu'au bord et en toutes les variables, c'est à dire de même régularité que dans le cas "intérieur" traité par Bony [2].

On est alors en mesure d'étudier la notion correspondant au wavefront au bord du cas linéaire non caractéristique [3], [8] : si $u \in H^{t,-\infty}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ un point (x_o,ξ'_o) de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{o\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ n'est pas dans $\partial WF_t u$ s'il existe un opérateur pseudodifférentiel tangentiel T d'ordre 0 elliptique en (x_o,ξ'_o) tel que Tu appartienne à $H^t(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Cette propriété tout à fait attachée à la carte, devient invariante pour une fonction réelle de classe H^s solution de l'équation non caractéristique (0.1) si $s - m - \frac{n}{2} = \rho > 0$ et $t < s + \rho$.

On aborde enfin dans un ouvert du demi-espace le problème de la régularité microlocale des solutions de (0.1) pour de bonnes conditions aux limites : un point (x_o,ξ_o') elliptique au sens de Melrose [7] pour le linéarisé de $F(x,u(x),\ldots,\partial^\alpha u(x))$ n'est pas dans $\partial WF_{s+\rho}u$ si u est de classe H^s avec $s - m - \frac{n}{2} = \rho > 0$ et vérifie $\frac{m}{2}$ conditions au bord régulières. Ce problème est traité par Godin [5] à l'ordre deux dans le cas de la dérivée oblique. On étudie aussi la réflexion des singularités $H^{s+\sigma}$ dans la zone $0 \leqslant \sigma \leqslant \rho-1$ pour $\rho > 2$, dans le cas transverse. Un corollaire immédiat du théorème principal 5.1, analogue du résultat de Nirenberg [12], est le :

<u>*THEOREME O2*</u>

Soit u une solution réelle de classe H^s de l'équation non caractéristique (O.1), avec $s > m + \frac{n}{2} + 2$. Soit $(x_o,\xi_o) \in \dot{T}^*\partial\Omega$ et soient $\gamma_1,\ldots,\gamma_p$, les arcs situés au dessus de Ω des bicaractéristiques de $\tilde{F}_o(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial}{\partial_{\partial^\alpha u}} F(x,u(x),\ldots,\partial^\beta u(x))(i\xi)^\alpha$ passant au dessus de (x_o,ξ_o) et supposés transverses à $\partial\Omega$.

Alors $u \in H^{s+\sigma}$ microlocalement sur $\gamma_1,\ldots,\gamma_{p_o}$, $p_o \geqslant 0$, entraîne $u \in H^{s+\sigma}$ microlocalement sur $\gamma_{p_o+1},\ldots,\gamma_p$ pourvu que $0 \leqslant \sigma \leqslant s-m-\frac{n}{2}-1$ et que u vérifie $(p-p_o) + \frac{m-p}{2}$ conditions régulières sur $\partial\Omega$.

Pour ce dernier point on utilise le calcul symbolique de Bony et Meyer en variable tangentielle, dépendant de la variable normale x_n, dans lequel on doit préciser la régularité en toutes les variables dans les espaces $H^{s,s'}$ pour réduire l'équation (0.1) à un système du premier ordre complètement découplé. Sur les équations hyperboliques ou elliptiques obtenues on peut propager ou gagner de la régularité microlocale tangentielle. L'étude des diverses actions microlocales dans $H^{s,s'}$, en cône ou en dièdre, des différents paraproduits, de Bony ou tangentiel, permet le transport de la régularité de u sur certaines bicaractéristiques sur les solutions des équations hyperboliques correspondantes, et permet aussi de remonter la régularité microlocale tangentielle obtenue en régularité en toutes variables.

Je tiens à remercier Guy Métivier dont la compétence et la gentillesse m'ont encouragée tout au long de ce travail.

1 - DOUBLE DECOMPOSITION DE LITTLEWOOD POUR LES ESPACES $H^{s,s'}$ DE HORMANDER.

Suivant Hörmander [6] , pour s et s' réels et n entier, $n \geq 2$, on désigne par $H^{s,s'}$ l'espace des distributions $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}u$ est une fonction qui vérifie :

$$\|u\|^2_{s,s'} = (2\Pi)^{-n} \int (1+|\xi|^2)^s \ (1+|\xi'|^2)^{s'} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 \, d\xi < +\infty ,$$

où $\xi = (\xi',\xi_n) = (\xi_1,\dots,\xi_{n-1},\xi_n)$ est la variable duale de $x = (x',x_n) = (x_1,\dots,x_{n-1},x_n)$, $|\xi| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}$, $\mathcal{F}u(\xi) = \int e^{-ix\xi} u(x)dx$. Si $s' = 0$, $H^{s,s'}$ est l'espace de Sobolev H^s de norme $\|.\|_s$.

Comme dans Meyer [10] , on fixe une fonction radiale positive $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ valant 1 dans $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et nulle pour $|\xi| \geq 1$. Pour p et p' dans $\mathbb{N}$ on note S_p et $S'_{p'}$ les opérateurs de sommes partielles définis par :

$$\mathcal{F}(S_p u)(\xi) = \varphi(2^{-p}\xi)\mathcal{F}u(\xi) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(S'_{p'}u)(\xi) = \varphi(2^{-p'}\xi;0)\mathcal{F}u(\xi),$$

et $S_{pp'} = S_p \circ S'_{p'}$. On note Δ_p et $\Delta'_{p'}$ les opérateurs de blocs dyadiques $\Delta_p = S_{p+1} - S_p$, $\Delta'_{p'} = S'_{p'+1} - S'_{p'}$ pour p et $p' \in \mathbb{N}$, $\Delta_{-1} = S_o$, $\Delta'_{-1} = S'_o$, et $\Delta_{pp'} = \Delta_p \Delta'_{p'}$. La double décomposition de Littleword de $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est alors $u = \sum_{p,p'\geq -1} \Delta_{pp'} u$, dans laquelle les termes d'indices (p,p') tels que $p' > p+1$ sont nuls.

Proposition 1.1. L'espace de Sobolev $H^{s,s'}$ est caractérisé par la condition

$$\Big(\sum_{p,p'\geq -1} 4^{ps+p's'} \|\Delta_{pp'}u\|_o^2 \Big)^{1/2} < +\infty$$

Ce qui résulte des deux lemmes suivants :

Lemme 1.2. Soit $(u_{pp'})_{p,p'\geq 0}$ une suite de fonctions de L^2 dont le spectre (support de $\mathcal{F}u_{pp'}$) est contenu dans une bicouronne $\{\frac{1}{\gamma}\, 2^{p+q} \leq |\xi| \leq \gamma\, 2^{p+q}$; $\frac{1}{\gamma}\, 2^{p'+q'} \leq |\xi'| \leq \gamma\, 2^{p'+q'}\}$ avec $\gamma > 1$, q et $q' \geq 0$, et telle que $\sum 4^{ps+p's'} \|u_{pp'}\|_o^2 < +\infty$; alors $u = \sum u_{pp'}$ appartient à $H^{s,s'}$ et $\|u\|_{s,s'} \leq$ $\leq C(\sum 4^{(p+q)s+(p'+q')s'} \|u_{pp'}\|_o^2)^{1/2}$, C ne dépendant que de γ, s et s'.

Lemme 1.3. Soit $(u_p)_{p\geq 0}$ une suite de fonctions de L^2 dont le spectre est contenu dans une couronne-boule $\{\frac{1}{\gamma}\, 2^p \leq |\xi| \leq \gamma\, 2^p$; $|\xi'| \leq \gamma'\}$, avec $\gamma > 1$, $\gamma' > 0$ et telle que $\sum 4^{ps} \|u_p\|_o^2 < +\infty$; alors $u = \sum u_p \in H^{s,\infty} = \bigcap_{s'\in \mathbb{R}} H^{s,s'}$ et $\|u\|_{s,s'} \leq$ $\leq C(\sum 4^{ps} \|u_p\|_o^2)^{1/2}$, C ne dépendant que de γ, γ', s et s'. De plus si $s > 0$ on peut remplacer la couronne-boule par une bi-boule $\{|\xi| \leq \gamma\, 2^p$; $|\xi'| \leq \gamma'\}$.

Pour $s > 0$ ou $s' > 0$ on utilisera souvent les trois lemmes suivants :

Lemme 1.4. Si $s > 0$ et si $(u_{pp'})_{p,p'\geq 0}$ est une suite de fonctions de L^2 dont le spectre est contenu dans la boule-couronne $\{|\xi| \leq \gamma\, 2^p$; $\frac{1}{\gamma}\, 2^{p'+q'} \leq |\xi'| \leq \gamma\, 2^{p'+q'}\}$ avec $\gamma > 1$, $q' \geq 0$, et telle $\sum 4^{ps+p's'} \|u_{pp'}\|_o^2 < +\infty$, alors $u = \sum u_{pp'} \in H^{s,s'}$ et $\|u\|_{s,s'} \leq C(\sum 4^{ps+(p'+q')s'} \|u_{pp'}\|_o^2)^{1/2}$ où C ne dépend que de γ, s et s'.

Lemme 1.5. Si $s' > 0$ et si $(u_{pp'})_{p,p'\geq 0}$ est une suite de fonctions de L^2 dont le spectre est contenu dans la couronne-boule $\{\frac{1}{\gamma}\, 2^{p+q} \leq |\xi| \leq \gamma\, 2^{p+q}$; $|\xi'| \leq \gamma\, 2^{p'}\}$ avec $\gamma > 1$, $q \geq 0$, et telle que $\sum 4^{ps+p's'} \|u_{pp'}\|_o^2 < +\infty$ alors $u = \sum u_{pp'} \in H^{s,s'}$ et, $u_{s,s'} \leq C(\sum 4^{(p+q)s+p's'} \|u_{pp'}\|_o^2)^{1/2}$, où de C ne dépend que de γ, s et s'.

Lemme 1.6. Si $s > 0$ et $s' > 0$ et si $(u_{p,p'})_{p,p'\geq 0}$ est une suite de fonctions de L^2 dont le spectre est contenu dans la bi-boule $\{|\xi| \leq \gamma\, 2^p$; $|\xi'| \leq \gamma\, 2^{p'}\}$ avec $\gamma > 1$ et telle que $\sum 4^{ps+p's'} \|u_{pp'}\|_o^2 < +\infty$, alors $u = \sum u_{pp'} \in H^{s,s'}$ et $\|u\|_{s,s'} \leq C(\sum 4^{ps+p's'} \|u_{pp'}\|_o^2)^{1/2}$, où C ne dépend que de γ, s et s'.

Proposition 1.7. Si $s > \frac{1}{2}$, $s + s' > \frac{n}{2}$ et $s + 2s' > \frac{1}{2}$ l'espace $H^{s,s'}$ est une algèbre multiplicative.

<u>Preuve</u>. Le produit des doubles décompositions de Littlewood de u et $v \in H^{s,s'}$ se décompose en

$$uv = \Pi''_u v + \Pi''_v u + \sum_{p\geq 2, p'\geq 0} (\Delta_p S'_{p'+3} u . S_{p-2}\Delta'_{p'} v + S_{p-2}\Delta'_{p'} u . \Delta_p S'_{p'+3} v)$$

$$+ \sum_{\substack{q-2\leq p\leq q+2 \\ p'\geq 2}} (\Delta_{pp'} u . \Delta_q S'_{p'-2} v + \Delta_q S'_{p'-2} u . \Delta_{pp'} v) + \sum_{\substack{q-2\leq p\leq q+2 \\ q'-2\leq p'\leq q'+2}} \Delta_{pp'} u . \Delta_{qq'} v,$$

où Π'' désigne le paraproduit à deux indices défini par :

$$\Pi''_u v = \sum_{p,p'\geq 2} S_{p-2,p'-2} u . \Delta_{pp'} v. \tag{1.1}$$

L'espace $H^{s,s'}$ s'injecte dans l'espace C^ρ des fonctions höldériennes si $\rho \notin \mathbb{N}$ et qui généralise la classe de Zygmund notée C^1_* dans Meyer [5] pour $\rho \in \mathbb{N}$, sous la condition

$$\rho = \min(s-1/2, s+s'-n/2) > 0 \text{ si } s' \neq (n-1)/2,\ 0 < \rho < s-1/2 \text{ si } s' = (n-1)/2. \tag{1.2}$$

Cet espace C^ρ est caractérisé par

$$\|\Delta_k u\|_{L^\infty} \leq C.2^{-k\rho} \quad , k \geq 1. \tag{1.3}$$

On utilisera aussi que pour $u \in C^\rho$, $\rho > 0$, on a $\|\Delta_{pp'} u\|_{L^\infty} \leq C.2^{-p\rho}$ et $\|\Delta_p S'_{p'} u\|_{L^\infty} \leq C.2^{-p\rho}$.

Le lemme 1.2 donne $w_1 = \Pi''_u v \in H^{s,s'}$, et du lemme 1.4 on déduit $w_2 = \sum_{q-2\leq p\leq q+2, p'\geq 2} \Delta_{pp'} u . \Delta_q S'_{p'-2} v \in H^{s+\rho,s'}$. En découpant $w_3 = \sum_{q-2\leq p\leq q+2, q'-2\leq p'\leq q'+2} \Delta_{pp'} u . \Delta_{qq'} v$ à l'aide des opérateurs Δ'_k, et en estimant la norme L^1 des morceaux obtenus on obtient $w_3 \in H^{s,s'+2s'-n/2}$ par les lemmes 1.2 et 1.3.

$w_4 = \sum_{p\geq 2, p'\geq 0} \Delta_p S'_{p'+3} u . S_{p-2}\Delta'_{p'} v$ est une somme de termes à spectre dans une couronne-boule $\{2^{p-2} \leq |\xi| \leq 9 \ .\ 2^{p-2},\ |\xi'| \leq 5 \ .\ 2^{p'+1}\}$ et on a, avec $(\varepsilon_{pp'}) \in \ell^2(\mathbb{N}^2)$, (ε_p) et $(\varepsilon_{p'}) \in \ell^2(\mathbb{N})$:

$$(1.4) \qquad \|\Delta_p S'_{p'+3} u\|_{L^2_{x_n}(L^\infty_{x'})} \le \begin{cases} 2^{-ps-p'(s'-\frac{n-1}{2})}\ \varepsilon_{pp'} & \text{si } s' < \frac{n-1}{2} \\ 2^{-ps+p'\varepsilon}\ \varepsilon_{pp'} & \text{si } s' = \frac{n-1}{2} \\ 2^{-ps}\ \varepsilon_p & \text{si } s' > \frac{n\ 1}{2} \end{cases}$$

$$(1.5) \qquad \|S_{p-2}\ \Delta'_{p'} v\|_{L^\infty_{x_n}(L^2_{x'})} \le 2^{-p'(s+s'-\frac{1}{2})}\ \varepsilon_{p'}\ , \text{ d'où}$$

$$(1.6) \qquad \|\Delta_p\ S'_{p'+3} u . S_{p-2}\ \Delta'_{p'} v\|_o \le 2^{-ps-p'(s'+\rho)}\ \varepsilon_{pp'} .$$

Le lemme 1.5 donne $w_4 \in H^{s,s'+\rho}$ seulement si $s'+\rho > 0$. Pour $s'+\rho < 0$, ce qui implique $s' < 0$, on découpe w_4 avec $\Delta'_{k'}$, on estime la norme des morceaux dans $L^2_{x_n}(L^1_{x'})$ et les lemmes 1.2 et 1.3 donnent $w_4 \in H^{s,s+2s'-n/2}$.

Si $u \in H^{s,s'}$, $s > \frac{1}{2}$, $s+s' > \frac{n}{2}$ et $v \in$ on peut définir leur paraproduit en toutes les variables et à un seul indice [2] : $\Pi_u\ v = \sum_{p\geq 2} S_{p-2}\ u\ .\ \Delta_p v$ et leur paraproduit tangentiel $\Pi'_u v = \sum_{p'\geq 2} S'_{p'-2}\ u\ .\ \Delta'_{p'} v$.

En comparant les opérateurs de paramultiplication Π_u et Π'_u à Π''_u défini en (1.2) on précise leur action dans les espaces $H^{t,t'}$:

<u>Proposition 1.8</u>. Soit $u \in H^{s,s'}$ avec (1.2) ; l'opérateur Π'_u est borné dans $H^{t,t'}$ pour $-s < t \le s$ avec une norme majorée par $C\ .\ \|u\|_{s,s'}$. De plus $\Pi'_u - \Pi''_u$ applique continument $H^{t,t'}$ dans $H^{t,t'+\rho}$ pour $-s < t \le s$, et sa norme est majorée par $C.\|u\|_{s,}$

<u>Preuve</u>. On décompose u et v par Δ_p dans $\Pi'_u v$ et on établit comme en (1.4) et (1.5) l'estimation :

$$(1.7) \qquad \|\Delta_p S'_{p'-2} u\ S_{p+3} \Delta'_{p'} v\|_o \le 2^{-p(s+(t-\frac{1}{2})^-)-p'(t'+(t-\frac{1}{2})^+)+(s'-\frac{n-1}{2})^-)}\ \varepsilon_{pp'}$$

avec $\|(\varepsilon_{pp'})\|_{\ell^2(\mathbb{N}^2)} \le C\ \|u\|_{s,s'} . \|v\|_{t,t'}$ pour $t \neq \frac{1}{2}$ et $s' \neq \frac{n-1}{2}$, les signes + ou - désignant les parties positives ou négatives. Les lemmes 1.2 et 1.4 permettent de conclure si $-s+1/2 < t \le s$.

Pour atteindre des valeurs de t inférieures on fait un découpage à l'aide des Δ_k et on estime $\Delta_k \sum_{p\geq 0} \Delta_p\, S'_{p'-2}u \cdot S_{p+3}\,\Delta'_{p'}v$ pour $t < 0$ dans $L^2_{x'}(L^1_{x_n})$; pour $t > -s$ on conclut par le lemme 1.2.

Proposition 1.9. Soit $u \in H^{s,s'}$ avec (1.2). L'opérateur Π_u est borné dans $H^{t,t'}$ pour $-(s+s'-\frac{1}{2}) < t' \leq s+s'-\frac{1}{2}$ avec une norme majorée par $C.\|u\|_{s,s'}$. De plus $\Pi_u - \Pi''_u$ applique continûment $H^{t,t'}$ dans $H^{t,t'+(s+s'-\frac{n}{2})}$ pour $-(s+s'-\frac{1}{2}) < t' < \frac{n-1}{2}$ et sa norme est majorée par $C\|u\|_{s,s'}$.

Preuve. On décompose u et v par $\Delta'_{p'}$ dans $\Pi_u v$, ce qui dégage dans $\Pi_u v - \Pi''_u v$ le terme w_4 de la proposition 1.7, le reste relevant du lemme 1.3.

Généralisant Bony [2], pour $m \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$, à une fonction $p(x,\xi)$ de classe C^ρ en x au sens de (1.3), C^∞ en ξ, qui vérifie :

(1.8) $\qquad |\partial^\alpha_\xi p(.,\xi)|_{C^\rho} \leq C_\alpha (1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

on associe l'opérateur paradifférentiel $\sigma_p(x,D_x)$, où $D_{x_i} = \frac{1}{i}\partial_{x_i}$, de symbole

(1.9) $\qquad \sigma_p(x,\xi) = (2\Pi)^{-n} \int e^{ix\eta}\, \chi(\eta,\xi)\, \hat{p}(\eta,\xi) d\eta,$

χ désignant une fonction C^∞ dans $\mathbb{R}^{2n}$ nulle pour $|\eta| \geq \varepsilon_1|\xi|$, égale à 1 pour $|\eta| \leq \varepsilon_2|\xi|$ et $|\xi| \geq R$ avec $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < 1$ et $R > 0$, et qui vérifie : pour tous $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{2n}$ il existe $C_{\alpha\beta}$ telle que :

$$|\partial^\alpha_\eta \partial^\beta_\xi \chi(\eta,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|-|\beta|} \quad \text{pour tous } \eta,\xi \in \mathbb{R}^n.$$

Un changement de fonction χ dans (1.9) modifie σ_p par un symbole de la classe $S^{m-\rho}_{1,1}$ c'est-à-dire un symbole $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ qui vérifie :

$$|\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{(m-\rho)+|\alpha|-|\beta|} .$$

On notera désormais $\sigma'_{p(x_n)}(x',D_{x'})$ les opérateurs paradifférentiels "tangentiels" c'est-à-dire les opérateurs dont le symbole, fonction de (x',ξ') et dépendant du paramètre x_n, est défini par (1.9).

Proposition 1.10. Soit $u \in H^{s,s'}$ avec (1.2). La différence de deux opérateurs paradifférentiels tangentiels associés à u est un opérateur borné de $H^{t,t'}$ dans $H^{t,t'+(s+s'-\frac{n}{2})}$ pour $-s < t \leq s$, et sa norme est majorée par $C.\|u\|_{s,s'}$.

Preuve. On considère une fonction $\chi'(\eta',\xi') \in C^\infty(\mathbb{R}^{2(n-1)})$ supportée dans $|\eta'| \leq \varepsilon_2|\xi'|$ si $|\xi'| < R$, où $0 < \varepsilon_2 < 1$ et $R > 0$, dans $\varepsilon_1|\xi'| \leq |\eta'| \leq \varepsilon_2|\xi'|$ si $|\xi'| \geq R$ avec $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, et qui vérifie

$$|\partial^{\alpha'}_{\eta'}\partial^{\beta'}_{\xi'}\chi'(\eta',\xi')| \leq C_{\alpha'\beta'}(1+|\xi'|)^{-|\alpha'|-|\beta'|}$$

On désigne par $H'(x',\xi')$ la transformée de Fourier inverse de $\chi'(\eta',\xi')$. La différence de deux opérateurs paradifférentiels tangentiels associés à $u \in H^{s,s'}$ a pour symbole $\tau'(x,\xi') = \int H'(y',\xi')\, u(x'-y',x_n)dy'$. Pour $v \in \mathcal{F}^{-1}(C_o^\infty(\mathbb{R}^n))$ on peut écrire

$$\tau'(x,D_{x'})v = \sum_{\substack{k\geq 2\\ k'\geq -1}} \tau^1_{kk'}(x,D_{x'})\Delta_k v + \sum_{k,k'\geq -1} \tau^2_{k,k'}(x,D_{x'})S_{k+3}v, \text{ où}$$

$$\tau^1_{k,k'}(x,\xi') = \int H'(y',\xi')S_{k-2}u(x'-y',x_n)dy' \ .\ \Psi(2^{-k'}\xi',0)$$

$$\tau^2_{k,k'}(x,\xi') = \int H'(y',\xi')\Delta_k u(x'-y',x_n)dy' \ .\ \Psi(2^{-k'}\xi',0),$$

$\Psi(\xi) = \varphi(\xi/2) - \varphi(\xi)$, et Ψ doit être remplacée par φ pour $k' = -1$. Le premier terme s'estime dans $H^{t,t'+(s+s'-n/2)}$ par le lemme 1.2 à l'aide du résultat suivant de [4] :

(1.10) Si un symbole $\sigma(x,\xi)$ $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ est supporté dans $|\xi| \leq R$ et vérifie $|\partial^\beta_\xi\sigma(x,\xi)| \leq M$ pour tous (x,ξ) et $|\beta| \leq [\frac{n}{2}] + 1$, l'opérateur $\sigma(x,D_x)$ associé est borné dans L^2 avec une norme majorée par C.M où C ne dépend que de n et de R. (On a noté $[\frac{n}{2}]$ la partie entière de $\frac{n}{2}$).

De même le second terme se traite par le lemme 1.4 pour $t > -s+1/2$; pour aller au-delà, on le découpe par Δ_p et on estime la norme des morceaux dans $L^1_{x_n}(L^2_{x'})$, puis on conclut par le lemme 1.2.

Proposition 1.11. Soient $b \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $u \in H^{s,s'}$ avec (1.2). Les opérateurs $b\Pi'_u - \Pi'_u b$ et $b\Pi''_u - \Pi''_u b$ appliquent continûment $H^{t,t'}$ dans $H^{t,t'+\rho}$ pour $-s < t \leq s$, et leur norme est majorée par $C\|u\|_{s,s'}$.

Preuve. D'après la proposition 1.8 il suffit d'étudier l'opérateur $b\Pi''_u - \Pi''_u b$. On montre d'abord que $b-\Pi''_b$ est infiniment régularisant tangentiel ce qui ramène l'étude à celle de $\Pi''_b\,\Pi''_u - \Pi''_u\,\Pi''_b$. On remarque :

(1.11) pour tout $N \geq 3$ l'opérateur $\Pi''_u - \sum_{p,p'\geq N} S_{p-N,p'-N}u \cdot \Delta_{pp'}$ applique continûment $H^{t,t'}$ dans $H^{t,t'+\rho}$ pour tous t et t' réels.

Enfin le lemme 1.2 montre la même propriété pour l'opérateur

$$\sum_{q,q'\geq 3} \Big(\sum_{p,p'\geq 3} S_{p-3,p'-3}u\ \Delta_{pp'}(S_{q-3,q'-3}b.\Delta_{qq'}) - S_{q-3,q'-3}u.S_{q-3,q'-3}b.\Delta_{qq'}\Big).$$

La dernière somme étant symétrique en u et b la proposition s'en déduit.

Proposition 1.12. Soit $u \in H^{s,s'}$ avec (1.2), $v \in H^{t,t'}$, $-s < t \leq s$, et soit $(x_o,\xi_o) \in \mathbb{R}^n \times \dot{\mathbb{R}}^n$. Si v est microlocalement de classe $H^{t,\tau'}$ en (x_o,ξ_o) alors $\sigma'_{u(x_n)}(x',D_{x'})v$ est microlocalement de classe $H^{t,\min(\tau',t'+\rho)}$ en (x_o,ξ_o).

Preuve. On se ramène à l'étude de $\Pi''_{u(x_n)}v$ par les propositions 1.10 et 1.8. Pour $b \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $b(x_o) \neq 0$ on a $(b\Pi''_u - \Pi''_u b)v \in H^{t,t'+\rho}$ par la proposition 1.11 et $\Pi''_u\, bv - \sum_{p,p'\geq N} S_{p-N,p'-N}\, u\ \Delta_{pp'}\, bv \in H^{t,t'+\rho}$ pour tout $N \geq 2$ par la remarque (1.11). Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ supportée dans un ouvert conique Γ, vérifiant $\chi(\xi_o) \neq 0$ et $\chi(\lambda\xi) = \chi(\xi)$ pour $\lambda \geq 1$ et $|\xi| \geq r$. Pour toute fonction $\Theta_N \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ égale à un dans un voisinage de $\{\xi \in \Gamma_N,\ |\xi| \geq 1$ où $\Gamma_N = \{\xi \in \mathbb{R}^n$, dist $(\frac{\xi}{|\xi|}, \Gamma \cap S_{n-1}) \leq 2^{-N+2}\}$ est le cône dispersé de Γ de 2^{-N+2}, on a

$$\chi(D_x) \sum_{p,p'\geq N} S_{p-N,p'-N}\, u.\Delta_{pp'}bv = \chi(D_x) \sum_{p,p'\geq N} S_{p-N,p'-N}\, u.\Delta_{pp'}(\Theta_N(D_x)bv).$$

Si le support de b et Γ sont assez petits on peut choisir N et Θ_N vérifiant $\Theta_N(\lambda\xi) = \Theta_N(\xi)$ pour $|\xi| \geq r$ et $\lambda \geq 1$ tels que $\Theta_N(D_x)bv \in H^{t,\tau'}$. Alors $\chi(D_x) \sum_{p,p'\geq N} S_{p-N,p'-N}\, u \cdot \Delta_{pp'}bv$ est aussi dans $H^{t,\tau'}$ et la proposition est démontrée.

Proposition 1.13. Soit $a(x,\xi')$ une fonction homogène en ξ' de degré m', de classe C^∞ en $\xi' \neq 0$ et dont les dérivées en ξ' appartiennent à $H^{s,s'}$ avec (1.2).
Soit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ égale à 1 hors d'un compact et nulle au voisinage de 0.
Si $v \in H^{t,t'}$, $-s < t \leq s$, est microlocalement de classe $H^{t,\tau'}$ en un point (x_o,ξ_o) de $\mathbb{R}^n \times \dot{\mathbb{R}}^n$ alors $\sigma'_{\phi a(x_n)}(x',D_{x'})v \in H^{t,t'-m'}$ et est microlocalement de classe $H^{t,\min(\tau'-m',t'-m'+\rho)}$ au point (x_o,ξ_o).

Cette proposition s'obtient après décomposition de $a(x,\xi')$ en harmoniques sphériques, en utilisant les mêmes arguments que pour la proposition 1.12.

On introduit maintenant la version microlocale tangentielle des espaces $H^{s,s'}$. Les opérateurs pseudodifférentiels utilisés sont définis par Sjostrand [13] dans le cas de $\mathbb{R}^n$; leurs classes sont notées T^m, $m \in \mathbb{R}$.

Définition 1.14. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\overline{\mathbb{R}^n_+}$) et soit $u \in H^{s,s'}_{loc}(\Omega)$. On dit que u est microlocalement de classe $\tilde{H}^{s,\sigma'}$ en un point $(x_o,\xi'_o) \in \mathbb{R}^n \times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}^n_+} \times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$), s'il existe un opérateur pseudodifférentiel tangentiel proprement supporté $T \in T^o(\mathbb{R}^n)$ (resp. $T^o(\overline{\mathbb{R}^n_+})$) elliptique en (x_o,ξ'_o) tel que $T u \in H^{s,\sigma'}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $H^{s,\sigma'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$).

Proposition 1.15. Soit $u \in H^{s,s'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ avec (1.2). Soit $v \in H^{t,t'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ avec $-s < t \leq s$ et soit $(x_o,\xi'_o) \in \overline{\mathbb{R}^n_+} \times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$. Si v est microlocalement de classe $\tilde{H}^{t,\tau'}$ en (x_o,ξ'_o) alors $\sigma'_{u(x_n)}(x',D_{x'})v$ est microlocalement de classe $\tilde{H}^{t,\min(\tau',t'+\rho)}$ en (x_o,ξ'_o).

Preuve. En corollaire des propositions 1.8 et 1.10 on obtient que les opérateurs paradifférentiels tangentiels $\sigma'_{u(x_n)}(x',D_{x'})$ définis sur $C^\infty_o(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ se prolongent en opérateurs bornés dans $H^{t,t'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ pour $-s < t \leq s$ et que la différence de deux d'entre eux applique continûment $H^{t,t'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ dans $H^{t,t'+\rho}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ pour $-s < t \leq s$.
Il suffit donc d'étudier $\Pi'_u v$ microlocalement au point (x_o,ξ'_o). Soient $b \in C^\infty_o(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ tel que $b(x_o) \neq 0$ et $\chi' \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ supportée dans un ouvert conique Γ', vérifiant

$\chi'(\xi'_o) \neq 0$ et $\chi'(\lambda\xi) = \chi'(\xi')$ pour $|\xi'| \geq r$ et $\lambda \geq 1$. De la proposition 1.11 on déduit par prolongement et restriction que $\chi'(D_{x'})(b\Pi'_u v - \Pi'_u bv) \in H^{t,t'+\rho}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. D'autre part la proposition 1.9 élargie aux opérateurs $\sum_{p'>N} S'_{p'-N}\, u\, \Delta'_{p'}$ et $\sum_{p,p'\geq N} S_{p-N,p'-N}\, u\, \Delta_{pp'}$ pour $N \geq 3$ et la remarque (1.11) montrent par prolongement et restriction que pour $N \geq 2$ l'opérateur $\Pi'_u - \sum_{p'\geq N} S'_{p'-N} u.\Delta'_{p'}$ applique continûment $H^{t,t'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ dans $H^{t,t'+\rho}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ pour $-s < t \leq s$. De plus pour $N \geq 2$ on a

$$\chi'(D_{x'})\Big(\sum_{p'\geq N} S'_{p'-N}\, u.\Delta'_{p'} bv\Big) = \chi'(D_{x'})\Big(\sum_{p'\geq N} S'_{p'-N} u.\Delta'_{p'}(\Theta'_N(D_{x'})bv)\Big)$$

pour toute fonction $\Theta'_N \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ égale à 1 dans un voisinage de $\{\xi' \in \Gamma'_N, |\xi| \geq 1\}$ où $\Gamma'_N = \{\xi' \in \dot{\mathbb{R}}^{n-1}, \operatorname{dist}(\frac{\xi'}{|\xi'|}, \Gamma' \cap S_{n-2}) \leq 2^{-N'+2}\}$. On voit donc que si le support de b et Γ' sont assez petits, en choisissant N assez grand et Θ'_N à support assez petit, vérifiant $\Theta'_N(\lambda\xi') = \Theta_N(\xi')$ pour $|\xi'| \geq r$ et $\lambda \geq 1$, on a $\Theta'_N(D_{x'})bv \in H^{t,\tau'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ et ainsi $\chi'(D_{x'}) \sum_{p'\geq N} S'_{p'-N}\, u\, .\, \Delta'_{p'}\, \Theta'_N(D_{x'})bv \in H^{t,\tau'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. D'où la proposition .

On insère encore dans ce paragraphe un résultat d'action microlocale tangentielle pour les opérateurs paradifférentiels généraux introduits par Meyer dans [10] :

Pour $\rho \geq 0$ et $m \in \mathbb{R}$ on note B^m_ρ l'espace des fonctions $\sigma(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telles que le spectre de $x \to \sigma(x,\xi)$ soit contenu dans une boule $|\eta| \leq \varepsilon\, |\xi|$ avec $0 < \varepsilon < 1$ et qui vérifient :

$$\|\partial^\alpha_\xi \sigma(.,\xi)\|_{L^\infty} \leq C_\alpha(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ si } \rho = 0$$

$$\|\partial^\alpha_\xi \sigma(.,\xi)\|_{C^\rho} \leq C_\alpha(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \quad \text{si } \rho > 0,$$

l'espace C^ρ étant toujours défini par (1.3). Les symboles $\sigma_p(x,\xi)$ définis en (1.9) sont dans la classe B^m_ρ.

<u>Proposition 1.16</u>. Soit $\sigma \in B^m_\rho$, $\rho > 0$; pour $-\rho < s' \leq \rho$ l'opérateur pseudodifférentiel $\sigma(x,D)$ se prolonge en un opérateur borné de $H^{s,s'}$ dans $H^{s-m,s'}$. De plus pour $-\rho < s' < 0$, si $u \in H^{s,s'}$ est microlocalement de classe $\tilde{H}^{s,\sigma'}$ en un point (x_o,ξ'_o) alors $\sigma(x,D)u$ est microlocalement de classe $\tilde{H}^{s-m,\min(\sigma',s'+\rho)}$ en (x_o,ξ'_o).

Preuve. Elle est assez semblable à celle de la proposition 1.10. On suppose d'abord que $m = 0$ et pour $u \in \mathcal{F}^{-1}(C_o^\infty(\mathbb{R}^n))$ on écrit

$$\sigma(x,D)u = v_1+v_2 = \sum_{k\geq -1, k'\geq 2} (S'_{k-2}\sigma_k)(x,D)\Delta'_{k'}u + \sum_{k,k'\geq 1} (\Delta'_{k'}\sigma_k)(x,D)S'_{k'+3}u,$$

avec $\sigma_{-1}(x,\xi) = \varphi(\xi)\sigma(x,\xi)$, $\sigma_k(x,\xi) = \Psi(2^{-k}\xi)\ \sigma(x,\xi)$ pour $k \geq 0$. Le lemme 1.2 avec (1.10) estime v_1 dans $H^{s,s'}$ et le lemme 1.5 estime v_2 dans $H^{s,s'+\rho}$ pour $s' > -\rho$. On en déduit l'action de $\sigma(x,D)$ dans $H^{s,s'}$ dans le cas $m = 0$. Le cas général s'y ramène en considérant le symbole $\sigma(x,\xi)(1+|\xi|^2)^{-m/2}$.

On suppose maintenant que $u \in H^{s,s'}$, avec $-\rho < s' < 0$, est microlocalement de classe $\tilde{H}^{s,\sigma'}$ en (x_o,ξ'_o). Soit $b \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $b(x_o) \neq 0$. D'après Bony [2] on a $(b-\sigma_b(x,D))\sigma(x,D)u \in H^\infty$. D'après Meyer [10] :

$$\sigma_b(x,D)\ \sigma(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq N} c_\alpha(\partial_\xi^\alpha\sigma)(x,D)(D_x^\alpha\sigma_b)(x,D) + \tau_N(x,D),$$

avec $\tau_N(x,\xi) \in S^{m-N}_{1,1}$ ce qui pour $s+s'-m+N > 0$, donne $\tau_N(x,D)u \in H^{s+s'-m+N}$ puisque $s' < 0$. Choisissant N assez grand on obtient que

$$b(x)\ \sigma(x,D)u - \sum_{|\alpha|\leq N} c_\alpha(\partial_\xi^\alpha\sigma)(x,D)(D_x^\alpha b)(x)u \in H^{s-m,s'+\rho}.$$

Soit maintenant $\chi' \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ vérifiant $\chi'(\xi'_o) \neq 0$ et $\chi'(\lambda\xi') = \chi'(\xi')$ pour $|\xi'| \geq r$ et $\lambda \geq 1$. Il reste à étudier les termes $\chi'(D_{x'})(\partial_\xi^\alpha\sigma)(x,D)(D_x^\alpha b)u$ c'est-à-dire des termes de la forme $\chi'(D_{x'})\ \tau(x,D)v$ avec $\tau \in B_\rho^o$ et $v = (I-\Delta_x)^{\frac{m-j}{2}}au$ où $a \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $j \geq 0$. Décomposant $\tau(x,D)v$ comme ci-dessus en $v_1 + v_2$, puisque $v_2 \in H^{s-m+j,s'+\rho}$ on est ramené à l'étude de $\chi'(D_{x'}) \sum_{k\geq 1,k'\geq 2} (S'_{k'-2}\tau_k)(x,D)\Delta'_{k'}v$ qui se réduit à celle de $\chi'(D_{x'}) \sum_{k\geq -1,k'\geq N'} (S'_{k'-N'}\tau_k)(x,D)\Delta'_{k'}v$, N' restant à choisir puisque par (1.10) la norme dans L^2 de l'opérateur $(S'_{k'-2}\tau_k)(x,D)-(S'_{k'-N'}\tau_k)(x,D)$ est majorée par $C_{N'}\ 2^{-k'\rho}$. On termine alors en introduisant la fonction $\Theta'_{N'}$, définie à la fin de la proposition 1.15 et en choisissant N' assez grand, les supports de b et de χ' étant supposés assez petits.

2 - PARALINEARISATIONS DANS LES ESPACES $H^{s,s'}$.

Proposition 2.1. Soit $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction réelle nulle en 0 et soit $u \in H^{s,s'}$ réelle avec (1.2) et $s+2s' > \frac{1}{2}$. Alors $F(u) - \Pi''_{F'(u)} u \in H^{s,s'+\rho}$.

Preuve. Comme dans Meyer [10] on écrit F(u) comme somme d'une série télescopique convergente dans L^∞ : $F(u) = \sum_{p\geq 0} F(S_{p+1}u) - F(S_p u) + F(S_o u)$, puis on applique le même procédé à chaque $S_p u$ avec S'_p ; on obtient :

$$\begin{aligned} F(u) = &\sum_{p,p'\geq 0} \Delta_{pp'}u \int_0^1 F'(S_{pp'}u+\Delta_p S'_{p'}u+S_p\Delta'_{p'}u+t\Delta_{pp'}u)\,dt \\ &+ \sum_{p,p'\geq 0} \Delta_p S'_{p'}u+S_p\Delta'_{p'}u \int_0^1\int_0^1 F''(S_{pp'}u+t\Delta_p S'_{p'}u+\Theta S_p\Delta'_{p'}u)\,d\Theta\, dt \\ &+ \sum_{p\geq 0} \Delta_p S'_o u \int_0^1 F'(S_{p,o}u + t\Delta_p S'_o u)dt + F(S_o u). \end{aligned}$$

Le terme $F(S_o u)$ appartient à H^∞ puisque $F(0) = 0$; le deuxième terme, de type produit, est voisin du terme w_4 de la proposition 1.7 ; le premier et le troisième terme sont de type linéaire puisqu'en posant $m_{pp'}(x) = \int_0^1 F'(S_{p+1,p'+1}u - (1-t)\Delta_{pp'}u)dt$, $m_p(x) = \int_0^1 F'(S_{p,o}u + t\,\Delta_p\, S'_o u)\,dt$, ils s'écrivent $\sigma_1(x,D)u = \sum_{p,p'\geq 0} m_{pp'}(x)\Delta_{pp'}u$ et $\sigma_2(x,D)u = \sum_{p\geq 0} m_p(x)\Delta_p S'_o u$.

La comparaison du premier terme et de $\Pi''_{F'(u)}u$ introduit alors

$$\sigma_3(x,D)u = \sum_{p,p'\geq 2} (m_{pp'}(x) - S_{p-2,p'-2}\,F'(u))\,\Delta_{pp'}u$$

$$\sigma_4(x,D)u = \sum_{p \text{ ou } p'\leq 1} m_{pp'}(x)\,\Delta_{pp'}u.$$

2.1.1 - Etude des symboles σ_2, σ_3 et σ_4. Pour $m, m' \in \mathbb{R}$ on note $S^{m,m'}_{1,1}$ la classe des symboles $\sigma(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ qui vérifient : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C > 0$ telle que pour tous $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ on ait :

$$|\partial_x^\alpha\, \partial_\xi^\beta\, \sigma(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{m+\alpha_n-\beta_n}(1+|\alpha'|)^{m'+|\alpha'|-|\beta'|}.$$

on démontre plus loin le lemme suivant :

Lemme 2.2. Soit σ un symbole de la classe $S^{m,m'}_{1,1}$. Pour $s-m > 0$ et $s'-m' > 0$ l'opérateur pseudodifférentiel $\sigma(x,D)$ se prolonge en un opérateur borné de $H^{s,s'}$ dans $H^{s-m,s'-m'}$.

Les lemmes 2 et 3 de [10] montrent que σ_2 et σ_4 sont dans $S^{0,-\infty}_{1,1}$ et ainsi $\sigma_2(x,D)u$ et $\sigma_4(x,D)u$ appartiennent à $H^{s,\infty}$. De plus, utilisant que $F'(u) \in C^{\rho}$, on obtient par interpolation comme dans [10] que $\sigma_3 \in S^{0,-\rho}_{1,1}$ et ainsi $\sigma_3(x,D)u \in H^{s,s'+\rho}$ si $s'+\rho > 0$.

2.1.2. Etude de $\sigma_3(x,D)u$ pour $s' \leq 0$. Dans ce cas on a $u \in H^{s+s'}$, avec $s+s' > \frac{n}{2}$ donc aussi $F'(u) \in H^{s+s'}$ si on suppose, ce qui n'est pas restrictif, que $F'(0) = 0$. S'inspirant de Meyer [11] on étudie d'abord les normes dans $L^{\infty}_{x_n}(L^2_{x'})$ des dérivées de la fonction $\ell_{pp'} = m_{pp'} - S_{p-2,p'-2}\, F'(u)$. On obtient :

$$(2.1) \qquad \| \partial_x^{\alpha} \ell_{pp'} \|_{L^{\infty}_{x_n}(L^2_{x'})} \leq C_{\alpha}\, 2^{p\alpha_n + p'|\alpha'| - p'(s+s'-1/2)} .$$

On décompose ensuite $\ell_{pp'}$ à l'aide de la partition de l'unité

$$(2.2) \qquad 1 = (\varphi(\delta^{-1}2^{-p}\xi) + \sum_{q\geq 0} \psi(\delta^{-1}2^{-(p+q)}\xi))(\varphi(\delta^{-1}2^{-p'}\xi';0) + \sum_{q'\geq 0} \Psi(\delta^{-1}2^{-(p'+q')}\xi';0)$$

en $\ell_{pp'} = \ell^{o}_{pp'} + \sum_{q\geq 0} \ell_{pp'q} + \sum_{q'\geq 0} \ell_{pp'q'} + \sum_{q,q'\geq 0} \ell_{pp'qq'}$, δ restant à choisir.

$\sigma_2(x,D)u$ est alors une somme de quatre termes que l'on analyse successivement :

$v^{o} = \sum_{p,p'\geq 2} \ell^{o}_{pp'}\, \Delta_{pp'}\, u \in H^{s,s'+\rho}$ si $s+2s' > 1/2$ par les lemmes 1.3 et 1. après découpage par Δ'_k, et estimation des morceaux dans $L^2_{x_n}(L^1_{x'})$

$v_q = \sum_{p,p'} \ell_{pp'q}\; \Delta_{pp'}\, u \in H^{s,s'+\rho}$ s'obtient de même, pour δ assez grand et (2.1) donne de plus $\|v_q\|_{s,s'+\rho} \leq C_N . 2^{-q(N-s)}$, pour tout N. Choisissant $N > s$, on obtient que $\sum_q v_q \in H^{s,s'+\rho}$.

On procède de même pour les deux derniers termes et on obtient ainsi $\sigma_3(x,D)\, u \in H^{s,s'+\rho}$.

2.1.3. Etude du terme produit. Pour $\ell_{pp'} = \int_0^1\int_0^1 F''(S_{pp'}u+t\Delta_p S'_{p'}u+\Theta S_p\Delta'_{p'}u)d\Theta\, dt$, on a

$$\|\partial_x^\alpha \ell_{pp'}\|_{L^\infty} \leq C_\alpha\ 2^{p\alpha_n+p'|\alpha'|}\ .$$

Décomposant $\ell_{pp'}$ à l'aide de la partition de l'unité (2.2), une étude assez semblable à celle de 2.1.2 montre que le terme $\sum_{p,p'} \ell_{pp'}\ \Delta_p\ S'_{p'}\ u\ S_p\ \Delta'_{p'}u$ appartient à $H^{s,s'+\rho}$.

Preuve du lemme 2.2. On établit d'abord le

Lemme 2.3. Soient s, s', t, t' des réels tels que $0 < s < t$ et $0 < s' < t$; soit $(u_{pp'})_{p,p'\geq 0}$ une suite double de fonctions de $H^{t,t'}$ qui vérifie

$$\sum 4^{ps+p's'}\|u_{pp'}\|_o^2 \leq M,\ \sum 4^{p(s-t)+p's'}\|u_{pp'}\|_{t,o}^2 \leq M$$

$$\sum 4^{ps+p'(s'-t')}\|u_{pp'}\|_{o,t'}^2 \leq M,\ \sum 4^{p(s-t)+p'(s'-t')}\|u_{pp'}\|_{t,t'}^2 \leq M.$$

Alors $u = \sum u_{pp'}$ appartient à $H^{s,s'}$ et $\|u\|_{s,s'} \leq C.\ M$ où C ne dépend que de n, s, t, s', t'.

Ensuite on décompose $\sigma(x,\xi) \in S^{o,o}_{1,1}$ en $\sum \sigma_{pp'}(x,\xi) =$ $\sum \Psi(2^{-p}\xi)\ \Psi(2^{-p'}\xi';0)\ \sigma(x,\xi)$ et on estime la norme d'opérateur dans L^2 des $\partial_x^\alpha\ \sigma_{p,p'}(x,D)$ pour $p,p' \geq -1$ à l'aide de (1.10). On en déduit que pour $u \in H^{s,s'}$ on a

$$\|\partial_x^\alpha\ \sigma_{p,-1}(x,D)\|_o \leq C_\alpha\ 2^{p(\alpha_n-s)}\ \varepsilon_p,\quad \text{pour } p \geq 0$$

$$\|\partial_x^\alpha\ \sigma_{pp'}(x,D)\|_o \leq C_\alpha\ 2^{p(\alpha_n-s)+p'(|\alpha'|-s')}\ \varepsilon_{pp'}\ ,\ \text{pour } p,p' \geq 0$$

avec $\sum \varepsilon_p^2 \leq C\ \|u\|^2_{s,s'}$ et $\sum \varepsilon^2_{pp'} \leq C\ \|u\|^2_{s,s'}$; ceci permet d'estimer la norme de $\sigma_{pp'}(x,D)u$ dans L^2, H^t, $H^{o,t'}$, $H^{t,t'}$ pour t et t' entiers. Choisissant $t > s$ et $t' > s'$ le lemme 2.3 achève alors la preuve du lemme 2.2.

La proposition 2.1 se généralise en

$$F(u_1,\ldots,u_N) - \sum_{i=1}^N \Pi''(\partial_{u_i}F)(u_1,\ldots,u_N)u_i \in H^{s,s'+\rho}$$

si $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ est réelle, nulle en 0, et les u_i réelles appartiennent à $H^{s,s'}(\mathbb{R}^n)$, avec (1.2) et $s+2s' > \frac{1}{2}$. Le même résultat est valable localement pour $F(x,u_1,\dots,u_N)$

Enfin d'après les propositions 1.8 et 1.9 on peut remplacer le paraproduit à deux indices Π'' par le paraproduit à un seul indice Π ou le paraproduit tangentiel Π'. Pour ce dernier on peut énoncer une version dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$:

<u>Proposition 2.4</u>. Soit $F \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+} \times \mathbb{R}^N)$ une fonction réelle à support compact en x et soient $u_1,\dots,u_N$ des fonctions réelles de $H^{s,s'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ avec (1.2) et $s+2s' > \frac{1}{2}$. Alors

$$F(x,u_1,\dots,u_N) - \sum_{i=1}^{N} \Pi'_{(\partial_{u_i} F)(x,u_1,\dots,u_N)} u_i \in H^{s,s'+\rho}(\overline{\mathbb{R}^n_+}).$$

3 - QUELQUES COMPLEMENTS AU CALCUL SYMBOLIQUE DE BONY.

Pour $m \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$ on note Σ^m_ρ (resp. $\tilde{\Sigma}^m_\rho$) la classe des fonctions $p(x,\xi)$ définies dans $\mathbb{R}^n \times \dot{\mathbb{R}}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$), de la forme $p = \sum_{j<\rho} p_{m-j}$ où $p_{m-j}(x,\xi)$ est C^∞ en ξ, de classe $C^{\rho-j}$ en x au sens de (1.3), et homogène en ξ de degré m-j (resp. vérifie (1.10) avec m-j).

Si $p \in \Sigma^m_\rho$ et $p' \in \Sigma^{m'}_\rho$ (resp. $p \in \tilde{\Sigma}^m_\rho$ et $p' \in \tilde{\Sigma}^{m'}_\rho$), on note

$$p \# p' = \sum_{j+k+|\alpha|<\rho} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi p_{m-j} D^\alpha_x p_{m'-k} .$$

Ce symbole est dans la classe $\Sigma^{m+m'}_\rho$ (resp. $\tilde{\Sigma}^{m+m'}_\rho$). Le symbole paradifférentiel associé à $p \in \tilde{\Sigma}^m_\rho$ par (1.11) est dans la classe B^m_ρ ; à $p \in \Sigma^m_\rho$ on associe alors $\sigma_{\phi p}$ avec $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ nulle au voisinage de 0 et égale à 1 hors d'un compact. On utilisera souvent l'inclusion $B^m_\rho \subset B^{m+r}_{\rho+r}$ pour r et $\rho \geq 0$.

<u>Proposition 3.1</u>. Si $p \in \tilde{\Sigma}^m_\rho$ et $p' \in \tilde{\Sigma}^{m'}_\rho$ on a

$$\sigma_p(x,D)\, \sigma_{p'}(x,D) = \sigma_{p\# p'}(x,D) + r(x,D),$$

avec $r \in S^{m+m'-\rho}_{1,1}$ si $\rho \notin \mathbb{N}$, $r \in S^{m+m'-\rho}_{1,1} + B^{m+m'-\rho+\varepsilon}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ si $\rho \in \mathbb{N}$.

Preuve. (Si $\rho \notin \mathbb{N}$ cette composition est traitée dans [9]). D'après [10],

$$\sigma_p(x,D)\ \sigma_{p'}(x,D) = \sum_{j+k+|\alpha|<\rho} \frac{1}{\alpha!}\ (\partial_\xi^\alpha\ \sigma_{p_{m-j}}\ \times\ \sigma_{D_x^\alpha p'_{m'-k}})\ (x,D) + r(x,D),$$

avec $r \in S_{1,1}^{m+m'-\rho}$ si $\rho \notin \mathbb{N}$, $r \in B_\varepsilon^{m+m'-\rho+\varepsilon} + S_{1,1}^{m+m'-\rho}$ si $\rho \in \mathbb{N}$, pour tout $\varepsilon > 0$.

On conclut avec les deux lemmes suivants dont la preuve est détaillée dans [9] :

Lemme 3.2. Soit $p(x,\xi)$ une fonction C^∞ en ξ, de classe C^ρ en x, qui vérifie (1.10). Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a $\partial_\xi^\alpha\ \sigma_p - \sigma_{\partial_\xi^\alpha p} \in S_{1,1}^{m-|\alpha|-\rho}$.

Lemme 3.3. Soient p et p' deux fonctions C^∞ en ξ, de classe C^ρ en x, qui vérifient (1.10) avec m et m'. Alors $\sigma_p\ \sigma_{p'} - \sigma_{pp'}$ appartient à $S_{1,1}^{m+m'-\rho}$.

Proposition 3.4. Soit $p(x,\xi)$ une fonction homogène en ξ de degré m, C^∞ en $\xi \neq 0$, dont les dérivées en ξ appartiennent à H^s.

Alors $\sigma_{\phi p} \in B_o^{m+\frac{n}{2}-s}$ si $s < \frac{n}{2}$, $\sigma_{\phi p} \in B_\varepsilon^{m+\varepsilon}$ si $s = \frac{n}{2}$, $\sigma_{\phi p} \in B^m_{s-\frac{n}{2}}$ si $s > \frac{n}{2}$.

Preuve. Le cas $s > \frac{n}{2}$ résulte de l'inclusion $H^s \subset C^{s-\frac{n}{2}}$. Ecrivant (1.10) sous la forme $\sigma_{\phi p}(.,\xi) = G(.,\xi) * (\phi p)(.,\xi)$; pour $s < \frac{n}{2}$ on utilise que :

$$\| \partial_\xi^\alpha\ G(.,\xi) \|_{H^{-s}} \leq C(1+|\xi|)^{-|\alpha|-s+\frac{n}{2}},$$

et pour $s = \frac{n}{2}$, que pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\| (1+|\eta|^\varepsilon) \mathcal{F} (\partial_\xi^\alpha\ G(.,\xi) * \partial_\xi^\beta (\phi p)(.,\xi))(\eta) \|_{L^1} \leq C(1+|\xi|)^{M-|\alpha|-|\beta|+\varepsilon}.$$

Proposition 3.5. Soit $\sigma \in B_\rho^m$, $\rho > 0$ et soit $u \in H^s$. Si u est microlocalement de classe H^σ dans un ouvert conique U alors $\sigma(x,D)u$ est microlocalement de classe $H^{\min(\sigma-m,s-m+\rho)}$ dans U.

Preuve. Soient $\ell(x,\xi)$ et $k(x,\xi)$ des fonctions C^∞ dans $\mathbb{R}^n \times \dot{\mathbb{R}}^n$ homogènes de degré 0 supportées dans U telles que $k = 1$ sur un voisinage du support de ℓ. On a $(\phi\ell)(x,D)\ \sigma(x,D)u - \sigma_{\phi\ell}(x,D)\ \sigma(x,D)\ \sigma_{\phi(1-k)}(x,D)u \in H^{\sigma-m}$, d'après Bony [2] et d'après Meyer [10] :

$$\sigma_{\phi\ell}(x,D)\sigma(x,D)\ \sigma_{\phi(1-k)}(x,D) = \Big(\sum_{|\beta|\le N} \frac{1}{\alpha!}\,\partial_\xi^\beta\Big(\sum_{|\alpha|\le\rho} \frac{1}{\alpha!}\ \partial_\xi^\alpha \sigma_{\phi\ell}\ D_x^\alpha\sigma\Big) D_x^\beta \sigma_{\phi(1-k)}\Big)(x,D)+r(x,D)$$

avec $r \in S^{m-\rho}_{1,1}$, si on choisit $N > \rho$. Enfin $\partial_\xi^{\alpha+\gamma}\ \sigma_{\phi\ell}\ D_x^\beta\ \sigma_{\phi(1-k)} - \sigma_{\partial_\xi^{\alpha+\gamma}\ \phi\ell\ D_x^\beta\ \phi(1-k)}$ appartient à $S^{-\infty}_{1,1}$ par les lemmes 3.2 et 3.3. On en déduit la proposition.

Proposition 3.6. Soit $p(x,\xi)$ une fonction homogène en ξ de degré m, de classe C^∞ en $\xi \neq 0$, de classe C^ρ en x, $\rho > 0$, à support compact en x et nulle dans un ouvert conique $\omega \times \Gamma$ de $\mathbb{R}^n \times \dot{\mathbb{R}}^n$; si $u \in H^s$, $\sigma_{\phi p}(x,D)u$ est microlocalement de classe H^{s-m+} dans $\omega \times \Gamma$.

Preuve. (Si $\rho \notin \mathbb{N}$ c'est le corollaire 3.5 de Bony [2]). Un changement d'opérateur paradifférentiel associé à p étant ρ-m régularisant il suffit d'étudier $\sigma_{\phi p}(x,D)u$ pour $\sigma^N_{\phi p}((x,\xi) = \sum_{k>N} S_{k-N}\ p(x,\xi)\ \Psi(2^{-k}\xi)\ \phi(\xi)$, N pouvant être choisi arbitrairement grand. Soit $p(x,\xi) = \sum_\nu p_\nu(x)h_\nu(\xi)$ la décomposition de p en harmoniques sphériques avec $p_\nu \in C^\rho$ à support compact et $\|p_\nu\|_{C^\rho} \le 1$, h_ν homogène de degré m, C^∞ en $\xi \neq 0$ et telle que la suite $\|h_\nu\|_{C^m(S^{n-1})}$ est à décroissance rapide quelque soit m. Soit $b \in C_0^\infty$; d'après Bony ([2] théorème 2.3) on a :

$$b \sum_{k\ge N} S_{k-N}\ p_\nu\ \Delta_k(\phi h_\nu)(D)u = \sum_{k\ge N} S_{k-N}(bp_\nu)\ \Delta_k(\phi h_\nu)(D)u + v_\nu^1\ , \text{ avec}$$

$$\|v_\nu^1\|_{s-m+\rho} \le C\ \|b\|_{C^\rho}\ \|p_\nu\|_{C^\rho} \|(\phi h_\nu)(D)u\|_{s-m}.$$

Soit $\chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ supportée dans un ouvert conique γ, vérifiant $\chi(\lambda\xi) = \chi(\xi)$ pour $|\xi| \ge r$ et $\lambda \ge 1$. Si le support de $b\chi$ est contenu dans $\omega \times \Gamma$, en choisissant N assez grand et $\Theta_N \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\Theta_N(\lambda\xi) = \Theta_N(\xi)$ pour $|\xi| \ge r$ et $\lambda \ge 1$, supportée dans Γ et égale à 1 sur le cône dispersé de γ de 2^{-N+2} on obtient :

$$\sum_\nu \chi(D_x) \sum_{k\ge N} S_{k-N}(bp_\nu)\ \Delta_k(\phi h_\nu)(D)u = \chi(D_x)\sigma^N_{\phi p b\Theta_N}(x,D_x)u = 0.$$

D'où la proposition.

Proposition 3.7. Soit $\sigma(t,x,\xi)$ une fonction bornée dans $t \in [0,T]$ à valeurs dans B_0^0 telle que $t^N\ \sigma(t,x,\xi)$ soit bornée dans $t \in [0,T]$ à valeurs dans B_0^{-N}

pour un $N > \frac{1}{2}$. Alors l'opérateur $\sigma(t,x,D_x)$ applique continûment H^s dans $L^2(0,T;H^{s+1/2})$.

Preuve. On note $\sigma_k(t,x,\xi) = \Psi(2^{-k}\xi)\ \sigma(t,x,\xi)$ et $\sigma_{-1}(t,x,\xi) = \varphi(\xi)\ \ \sigma(t,x,\xi)$. Les opérateurs $\sigma_k(t,x,D_x)$ sont bornés dans L^2 uniformément en $t \in [0,T]$ et $k \geq -1$ et de plus leur norme est majorée par $C\ t^{-N}\ 2^{-kN}$ d'après (1.10). Pour $u \in \mathcal{F}^{-1}(C_0^\infty)$, $\sigma_k(t,x,D_x)u$ est à spectre dans une couronne de taille 2^k et

$$\int_0^T \|\sigma_k(t,x,D_x)u\|_0^2\ dt \leq \int_0^{2^{-k}} C\ 4^{-ks}\ \varepsilon_k^2 dt + \int_{2^{-k}}^T C\ t^{-2N}\, 4^{-kN-ks}\ \varepsilon_k^2 dt \leq C\ 4^{-k(s+\frac{1}{2})}\ \varepsilon_k^2\ ,$$

avec $\sum \varepsilon_k^2 \leq C\ \|u\|_s^2$. On en déduit la proposition.

Proposition 3.8. Soit $\sigma(s,t,x,\xi)$ une fonction bornée en s, t dans $0 \leq s \leq t \leq T$ à valeurs dans B_0^0 telle que $(t-s)^N\ \sigma(s,t,x,\xi)$ soit bornée dans $0 \leq s \leq t \leq T$ à valeurs dans B_0^{-N} pour un $N > 1$. Alors l'opérateur $u \to \int_0^t \sigma(s,t,x,D_x)u(s)ds$ est borné de $L^2(0,T;H^s)$ dans $L^2(0,T;H^{s+1})$.

Preuve. On note encore $\sigma_k(s,t,x,\xi) = \Psi(2^{-k}\xi)\ \sigma(s,t,x,\xi)$ et $\sigma_{-1}(s,t,x,\xi) = \varphi(\xi)\ \sigma(s,t,x,\xi)$. Les opérateurs $\sigma_k(s,t,x,D_x)$ sont bornés dans L^2 uniformément en k et dans $0 \leq s \leq t \leq T$, et leur norme dans L^2 est majorée par $C(t-s)^N\ 2^{-kN}$ d'après (1.10). Pour $u \in \mathcal{F}^{-1}(C_0^\infty(]0,T[\times \mathbb{R}^{n-1}))$ la fonction $\int_0^t \sigma_k(s,t,x,D_x)u(s)ds$ est à spectre dans une couronne de taille 2^k et on a :

$$\int_0^T \left\|\int_0^t \sigma(s,t,x,D_x)u(s)ds\right\|_{s+1}^2 dt$$
$$\leq C \sum_{k\geq 1} 4^k \int_0^T \left|\int_0^{t-2^{-k}} \varepsilon_k(s)ds + \int_{t-2^{-k}}^t (t-s)^{-N}\, 2^{-kN}\ \varepsilon_k(s)ds\right|^2 dt$$

avec $\sum_k \|\varepsilon_k(s)\|^2_{L^2(0,T)} \leq C\ \|u\|^2_{L^2(0,T;H^s)}$. La proposition s'en déduit en utilisant l'inégalité de Young.

4 - PROBLEME D'EVOLUTION ELLIPTIQUE POUR DES OPERATEURS PARADIFFERENTIELS.

Dans $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,T]$ on considère l'opérateur d'évolution $\partial_{x_n} + \sigma'_{\phi A(x_n)}(x',D_{x'})$, où $\sigma'_{\phi A(x_n)}(x',D_{x'})$ est un opérateur paradifférentiel associé à un symbole matriciel $A(x_n)$ continu en $x_n \in [0,T]$ à valeurs dans $\sum^1_\rho$, $\rho > 0$, dont la partie principale $A_1(x,\xi')$ à des valeurs propres $\lambda_j(x,\xi')$ qui vérifient :

(4.1) $\exists\ C_o > 0 \quad \mathrm{Re}\ \lambda_j(x,\xi') \leq -C_o\ |\xi'|$

pour tous $x_n \in [0,T]$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi' \in \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$.

<u>Proposition 4.1</u>. Si $U \in L^2(0,T;H^s)$, $s \geq 0$, vérifie $(\partial_{x_n} - \sigma'_{\phi A_1(x_n)}(x',D_{x'}))U \in L^2(0,T;H^{s+t-1})$, $t \geq 0$, alors $U \in L^2(\varepsilon,T;H^{s+t})$ pour tout ε, $0 < \varepsilon < T$; si de plus $U(0) \in H^{s+t-1/2}$ alors $U \in L^2(0,T;H^{s+t})$.

<u>Preuve</u>. Pour $0 \leq y_n \leq T$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi' \in \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$, la solution $P(x,y_n,\xi')$ du problème de Cauchy :

$$(\partial_{x_n} - A_1(x,\xi'))\ P(x,y_n,\xi') = 0 \quad \text{dans } [0,T]$$

$$P(x',y_n,y_n,\xi') = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$$

vérifie : pour tout $\alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}$, il existe C et $\delta > 0$ tels que pour tous x_n, y_n, $0 \leq y_n \leq x_n \leq T$, $\xi' \in \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$

$$\| \partial^{\alpha'}_{\xi'}\ P(.,x_n,y_n,\xi')\|_{C^\rho(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\ |\xi'|^{-|\alpha'|}\ e^{-\delta(x_n-y_n)|\xi'|}\ .$$

Alors pour tout $N \geq 0$ le symbole matriciel $(x_n-y_n)^N\ \sigma'_{\phi P(x_n,y_n)}(x',\xi')$ est borné dans $0 \leq y_n \leq x_n \leq T$ à valeurs dans B^{-N}_ρ. L'intégration par parties de $<\int_0^{x_n} \sigma'_{\phi U(x_n,y_n)}(x',D_{x'})\ \partial_{y_n} U(y_n)dy_n,\varphi>$ pour $\varphi \in C^\infty_o(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{C}^m)$ donne la formule de représentation :

$$U(x_n) = \sigma'_{\phi P(x_n,0)}(x',D_{x'})U(0) - R_o\ U(x_n) + \int_0^{x_n} R(x_n,y_n)\ U(y_n)dy_n$$
$$+ \int_0^{x_n} \sigma'_{\phi P(x_n,y_n)}(x',D_{x'})(\partial_{y_n} - \sigma'_{\phi A_1(y_n)}(x',D_{x'}))U(y_n)dy_n$$

où $\quad R(x_n,y_n) = \sigma'_{\phi\partial_{y_n}P(x_n,y_n)}(x',D_{x'}) + \sigma'_{\phi P(x_n,y_n)}(x',D_{x'})\ \sigma'_{\phi A_1(y_n)}(x',D_{x'})$

$\quad R_o = \sigma'_{\phi I}(x',D_{x'}) - I.$

Il est clair que $\sigma'_{\phi P(x_n,0)}(x',D_{x'})U(0) \in L^2(\varepsilon,T;H^{s'})$ pour tous $\varepsilon > 0$ et s'.
De plus si $U(0) \in H^{s+t-1/2}$, la proposition 3.7 montre que $\sigma'_{\phi P(x_n,0)}(x',D_{x'})U(0)$ $\in L^2(0,T;H^{s+t})$; le terme $R_o\ U(x_n)$ appartient à $L^2(0,T;H^{s'})$ pour tous s' ; on a :

$$R(x_n,y_n) = \sigma'_{\phi P(x_n,y_n)}(x',D_{x'})\ \sigma'_{\phi A_1(y_n)}(x',D_{x'}) - \sigma'_{\phi P(x_n,y_n)A_1(y_n)}(x',D_{x'}),$$

et la proposition 3.1 montre que $(x_n-y_n)^N\ R(x_n,y_n)$ est à symbole borné dans $0 \leq y_n \leq x_n \leq T$ à valeurs dans $S^{-N+1-\min(1,\rho)+\varepsilon}_{1,1}$ pour tout $\varepsilon > 0$. Faisant $N < 1$ on en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_0^{x_n} R(x_n,y_n)\ U(y_n)dy_n$ appartient à $L^2(0,T;H^{s-\varepsilon+\min(1,\rho)})$. Enfin le dernier terme est dans $L^2(0,T;H^{s+t})$ par la proposition 3.8. Alors $U \in L^2(0,T;H^{s+\min(1-\varepsilon,\rho-\varepsilon,t)})$ ce qui réinjecte dans $\int_0^{x_n} R(x_n,y_n)\ U(y_n)dy_n$ et on obtient finalement $U \in L^2(0,T;H^{s+t})$.

<u>Corollaire 4.2</u>. On suppose (4.1) vérifiée seulement pour tout $x_n \in [0,T]$ et en un point (x'_o,ξ'_o) de $\mathbb{R}^{n-1} \times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$. Soit Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ contenant x_o et soit $U \in L^2(0,T;H^s)$, $s \geq 0$ vérifiant $(\partial_{x_n} - \sigma'_{\phi A(x_n)}(x',D_{x'}))U = G$ dans $\Omega' \times [0,T]$ avec $G \in L^2(0,T:H^{s'})$, $s' \in \mathbb{R}$. S'il existe un opérateur pseudo-différentiel B d'ordre 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$ elliptique en (x'_o,ξ'_o) tel que $BG \in L^2(0,T;H^{s+t-1})$, $t \geq 0$, alors il existe un opérateur pseudo-différentiel B' d'ordre 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$ elliptique en (x'_o,ξ'_o) tel que $B'U \in L^2(\varepsilon,T;H^{s+\min(t,\rho)})$ pour tout ε, $0 < \varepsilon < T$. Si de plus U(0) est microlocalement de classe $H^{s+t-1/2}$ en (x'_o,ξ'_o) alors $B'U \in L^2(0,T;H^{s+\min(t,\rho)})$.

Cette version microlocale de la proposition 4.1 s'obtient à l'aide du calcul symbolique décrit en 3.

5 - REGULARITE MICROLOCALE POUR DES PROBLEMES AUX LIMITES NON LINEAIRES

Soit $F(x,y_0,\dots,y_\alpha,\dots)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant m$, une fonction réelle de classe C^∞ de ses arguments ; x parcourt un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, séparé en deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, Ω_+^o et Ω_-^o par une hypersurface C^∞ Γ, $\Omega_\pm^o$ restant d'un seul côté de Γ, et les y_α parcourent $\mathbb{R}$.

Soit $u \in H^s_{loc}(\Omega_+)$, $s > \frac{n}{2} + m$, où $\Omega_+ = \Omega_+^o \cup \Gamma$, une fonction réelle solution de l'équation :

$$F[u] = F(x,u(x),\dots,\partial^\alpha u(x),\dots) = 0 \text{ dans } \Omega_+$$

où $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1},\dots,\partial_{x_n}^{\alpha_n}$. On fait les hypothèses :

H_1) En un point $x_o \in \Gamma$, Γ est non caractéristique pour l'opérateur différentiel linéarisé de $F(x,\partial^\alpha u)$:

$$\tilde{F}(x,D_x)v(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (\partial_{y_\alpha} F)(x,u(x),\dots,\partial^\beta u(x),\dots)\partial^\alpha v(x)$$

H_2) Pour un covecteur $\xi_o \in T^*_{x_o}\Gamma$, les $p \geqslant o$ racines réelles λ_j du polynôme en λ :

$$\tilde{F}_o(x_o,\xi_o+\lambda\eta_o) = i^m \sum_{|\alpha|=m} (\partial_{y_\alpha} F)(x_o,u(x_o),\dots,\partial^\beta u(x_o)\dots)(\xi_o+\lambda\eta_o)^\alpha ,$$

où $\eta_o \in \dot{N}^*_{x_o}\Gamma$, sont simples.

Si $p = 0$ l'hypothèse H_2) signifie que (x_o,ξ_o) est un point elliptique pour $\tilde{F}$ au sens de Melrose [7]. Si $p > 0$, on suppose que $\rho = s-m-\frac{n}{2} > 2$ et on note γ_j les bicaractéristiques de $\tilde{F}_o$ issues des points $(x_o,\xi_o + \lambda_j \eta_o)$; l'hypothèse H_2) signifie que les projections de ces courbes dans Ω_+ sont transverses à Γ.

On note $\mathring{\gamma}_j = \gamma_j \cap T^* \Omega_+^o$ et on suppose que u est microlocalement de classe $H^{s+\sigma}$, $\sigma \leqslant \rho-1$, sur $\mathring{\gamma}_1, \dots, \mathring{\gamma}_{p_o}$ avec $p_o \geqslant 0$. Soient alors $f_j(x,z_1,\dots,z_\alpha,\dots)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant m-1$, $(p-p_o) + \frac{m-p}{2}$ fonctions réelles de classe C^∞ dans $\Omega \times \mathbb{R}^N$ pour lesquelles on a :

$$f_j[u]\big|_\Gamma \equiv f_j(x,u(x),\dots,\partial^\alpha u(x),\dots)\big|_\Gamma = 0.$$

Sous certaines hypothèses sur ces conditions aux limites qui seront discutées en 5.4, on va démontrer le :

THEOREME 5.1

Au point (x_o,ξ_o) la fonction u est microlocalement de classe $\tilde{H}^{s+\rho}$ si $p = 0$, avec $\rho = s - m - \frac{n}{2}$, et de classe $\tilde{H}^{s+\sigma}$ si $p \geqslant 1$, c'est à dire que dans toute carte locale U assez petite basée en x_o, de coordonnées $y_1,\dots,y_n$ dans lesquelles $x_o = (y'_o,o)$ et Ω_+ s'identifie à $U_+ = \{y \in U,\ y_n \geqslant 0\}$, on a si $p = 0$ $u \in H^{s+\rho,-\infty}_{loc}(U_+)$ et $Au \in H^{s+\rho}_{loc}(U_+)$, si $p \geqslant 1$ $U \in H^{s+\sigma,-\infty}_{loc}(U_+)$ et $Au \in H^{s+\sigma}_{loc}(U_+)$, pour tout opérateur pseudo-différentiel $A \in T^o(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ proprement supporté, à micro-support contenu dans un voisinage conique assez petit de $((y'_o,o),\eta'_o)$, où $\xi_o = (\eta'_o,o)$ dans les coordonnées duales des y_i.

5.1 - LOCALISATION ET REGULARITE LOCALE

Par carte locale on se ramène à $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{o\}$ et $\Omega_+ \subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$; Γ étant non caractéristique pour F en x_o, le théorème des fonctions impicites montre que u est solution dans un ouvert Ω'_+ de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ contenant x_o d'une équation

$$\partial^m_{x_n} u + G(x,u(x),\dots,\partial^\alpha u(x),\dots) = 0 \ , \ \alpha \in \mathbb{N}^n \ , \ |\alpha| \leqslant m, \ \alpha_n \neq m \ ,$$

avec $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ à support compact. Tant que les dérivées d'ordre maximal de u appartiennent à une algèbre $H^{t,t'}_{loc}(\Omega'_+)$ c'est à dire tant que $t > \frac{1}{2}$, $t + t' > \frac{n}{2}$, $t + 2t' > \frac{1}{2}$, $G(x,u(x),\dots,\partial^\alpha u(x),\dots)$ appartiennent aussi à $H^{t,t'}_{loc}(\Omega'_+)$ d'après la proposition 2.4. Cette propriété montre que u a la régularité locale :

$$u \in H_{loc}^{s+(s-m)-\frac{1}{2}-\varepsilon,-(s-m)+\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega'_+) \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

5.2 - PARALINEARISATION TANGENTIELLE ET REDUCTION AU BORD

On fixe désormais une fonction $\varphi \in C_o^\infty(\Omega'_+)$ égale à 1 au voisinage de x_o ; $v = \varphi u$ est dans $H^{s+\rho,-\rho}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ pour $\rho = s - m - \frac{n}{2}$ et vérifie $\partial^m_{x_n} + G(.,\partial^\alpha v) = 0$ dans un ouvert $\omega_+ = \gamma \times [0,T[$ de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$. Pour toute paralinéarisation tangentielle on a alors (proposition 2.4) :

$$G(.,\partial^\alpha v) - \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\ \alpha_n\neq m}} \sigma'_{(\partial_{\partial^\alpha v} G)(x,\partial^\beta v)}(x',D_{x'})\partial^\alpha_x v \in H^{s+\rho-m}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$$

Pour les conditions aux limites, on peut aussi supposer que les fonctions f_j sont définies et C^∞ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$, à support compact et d'après Bony [2] (ou la proposition 2.4), on a :

$$f_j((x',o),\partial^\alpha v(x',o)) - \sum_{|\alpha|\leq m_j} \sigma'_{(\partial_{\partial^\alpha v} f_j)((x',o),\partial^\beta v(x',o))}(x',D_{x'})\partial^\alpha_x v(x',D)$$
$$\in H^{2(s-m_j-\frac{1}{2})-\frac{n-1}{2}}, \quad j = 1,\dots,\ell.$$

Le problème aux limites est ainsi paralinéarisé en

$$(5.1) \quad \begin{cases} D^m_{x_n} v + \sum_{j=1}^{m} \sigma'_{a_j(x_n)}(x',D_{x'})D^{m-j}_{x_n} v = g \quad \text{dans } \omega_+ \\ \sum_{k=o}^{m_j} \sigma'_{b_{jk}}(x',D_{x'})D^{m_j-k}_{x_n} v(x',o) = h_j \quad \text{dans } \gamma\ ,\ j = 1,\dots,\ell\ , \end{cases}$$

avec $g \in H^{s+\rho-m}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ et $h_j \in H^{2(s-m_j-1/2)-\frac{n-1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Λ_j désignant l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $\phi(\xi')|\xi'|^j$, on note

$$v_j = D^{j-1}_{x_n}\Lambda_{m-j} v\ ,\quad \mathcal{A}_j \equiv \mathcal{A}_j(x,D_{x'}) = -\sigma'_{a_{m-j+1}(x_n)}(x',D_{x'})\,\Lambda_{-m+j}\ ,$$
$$j = 1,\dots,m$$

$$\mathcal{B}_{jk} \equiv \mathcal{B}_{jk}(x',D_{x'}) = \Lambda_{m-m_j-1}\,\sigma'_{b_{j,m_j-k+1}}(x',D_{x'})\,\Lambda_{-m+k} \quad ,$$

$$j = 1,\dots,\ell \ , \ k = 1,\dots,m_j+1$$

$$V = (V_1,\dots,V_m) \ , \ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \ddots \quad \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots \quad \ddots & 0 \\ 0 \cdots\cdots & 0 & \Lambda \\ \mathcal{A}_1 & \cdots\cdots & \mathcal{A}_m \end{pmatrix} \ , \ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \cdots & \mathcal{B}_{1,m_1+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ \mathcal{B}_{\ell,1} & \cdots & \mathcal{B}_{\ell,m_\ell+1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On a $V \in H^{s+\rho-m+1,-\rho}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ et (5.1) équivaut à

$$(5.2) \qquad \begin{cases} D_{x_n} V - \mathcal{A} V = G \text{ dans } \omega_+ \\ \mathcal{B} V(x',0) = H \text{ dans } \gamma \end{cases}$$

avec $G \in H^{s+\rho-m}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ et $H \in \prod_{j=1}^{\ell} H^{s-m_j+\rho+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

On désigne par a_j^j la partie homogène en ξ' de degré j de a_j ; c'est une fonction réelle de classe C^∞ en $\xi' \neq 0$ et qui en x appartient à l'algèbre $H^{s-m+\mu,-\mu}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ d'après 5.1, avec $\mu = s - m - \frac{1}{2} - \varepsilon$ et $\varepsilon > 0$ assez petit. D'après H_2) pour $x \in \omega_+$ supposé petit et ξ' dans un voisinage conique Γ' de ξ'_o , le "symbole principal" de (5.1) $\lambda^m + \sum_{j=1}^{m} a_j^j(x,\xi')\lambda^{m-j}$ se factorise en

$$\prod_{j=1}^{p} (\lambda-\lambda_j(x,\xi'))\ E_+(x,\xi',\lambda)\ E_-(x,\xi',\lambda) \quad ,$$

où les $\lambda_j(x,\xi')$ sont réelles et distinctes, homogènes en ξ' de degré 1, C^∞ en $\xi' \neq 0$ et dans l'algèbre $H^{s-m+\mu,-\mu}_{loc}(\omega_+)$ en x, et où $E_\pm$ sont des polynômes en λ de degré $q = \frac{m-p}{2}$

$$E_\pm(x,\xi',\lambda) = \lambda^q + \sum_{j=1}^{q} \varepsilon_j^\pm(x,\xi')\lambda^{q-j} \ ,$$

à coefficients $\varepsilon_j^{\pm}$ homogènes en ξ' de degré j, C^∞ en $\xi' \neq 0$, dans l'algèbre $H^{s-m+\mu,-\mu}_{loc}(\omega_+)$ en x, et à racines à partie imaginaire positive pour E_+, négative pour E_-.

Le "symbole principal" de (5.1) est aussi le déterminant de $(\lambda I - A_1(x,\xi'))$ pour

$$A_1(x,\xi') = \begin{pmatrix} 0 & |\xi'| & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & |\xi'| \\ \dfrac{-a^m_m(x,\xi')}{|\xi'|^{m-1}}, & \cdots & \cdots & \cdots, & -a^1_1(x,\xi') \end{pmatrix}$$

ou encore le déterminant du "symbole principal" de (5.2). Pour chaque $(x,\xi') \in \omega_+ \times \Gamma'$, $\mathbb{C}^m$ est somme directe des noyaux $\ker(A_1(x,\xi') - \lambda_j(x,\xi'))$ et $\ker E_{\pm}(x,\xi',A_1(x,\xi'))$ et chacun de ces noyaux est stable par $A_1(x,\xi')$. Quitte à diminuer $\omega_+ \times \Gamma'$, on peut alors construire dans $\omega_+ \times \Gamma'$ une matrice $S_o(x,\xi')$ inversible, homogène en ξ' de degré 0, de classe C^∞ en $\xi' \neq 0$ et dans l'algèbre $H^{s-m+\mu,-\mu}_{loc}(\omega_+)$ en x telle que $S_o\, A_1\, S_o^{-1}$ soit de la forme

$$D_1(x,\xi') = \begin{pmatrix} \lambda_1(x,\xi') & & & \\ & \lambda_p(x,\xi') & & \\ & & E_+(x,\xi') & \\ & & & E_-(x,\xi') \end{pmatrix}$$

$E_{\pm}(x,\xi')$ étant des matrices carrées d'ordre $\frac{m-p}{2}$ qui vérifient $\det(\lambda I - E_{\pm}(x,\xi')) = E_{\pm}(x,\xi',\lambda)$.

La réduction du symbole principal $A_1(x,\xi')$ dans $\omega_+ \times \Gamma'$ permet en fait une réduction complète de la première équation de (5.2) par "changement d'inconnue". Formellement on cherche W sous la forme $W = \sigma'_{\phi\tilde{S}(x_n)}(x',D_{x'})V$ vérifiant une équation

(5.3) $$D_{x_n}W - \sigma'_{\phi\tilde{D}(x_n)}(x',D_{x'})W = G_1 \quad \text{dans } \omega_+$$

où le symbole complet $\tilde{D}$ est diagonal par blocs comme D_1 et G_1 est de classe $\tilde{H}^{o,s-m+\rho}$ en (x_o,ξ'_o) si $\rho \notin \mathbb{N}$. Afin de contrôler la régularité en x_n, pour $m' \in \mathbb{R}$, $-\frac{n-1}{2} \leqslant t' < \frac{n-1}{2}$, $t + t' > \frac{n}{2}$ on introduit les classes $\sum^{m'}_{t,t'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ des symboles $P(x,\xi')$ de la forme $P = \sum_{j<t+t'-\frac{n}{2}} P_{m'-j}$ où $P_{m'-j}$ est homogène en ξ' de degré $m'-j$, C^∞ en $\xi' \neq 0$ et dans l'algèbre $H^{t-j,t'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ en x. Un symbole paradifférentiel tangentiel $\sigma'_{\phi P(x_n)}(x',\xi')$ associé à $P \in \sum^{m'}_{t,t'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ est continu et borné en $x_n \geqslant 0$ à valeurs dans la classe $B^{m'}_{t+t'-\frac{n}{2}}$ de Meyer [10] ; de plus si $P \in \sum^{m'}_{t,t'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ et $Q \in \sum^{m''}_{t,t'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ la proposition 3.1 donne :

$$\sigma'_{\phi P(x_n)}(x',D_{x'})\sigma'_{\phi Q(x_n)}(x',D_{x'}) = \sigma'_{\phi(P\#Q)(x_n)}(x',D_{x'}) + r(x,D_{x'}) ,$$

où $$P \# Q = \sum_{j+k+|\alpha'|<t+t'-\frac{n}{2}} \frac{1}{\alpha'!} \partial^{\alpha'}_{\xi'} P_{m'-j} D^{\alpha'}_{x'} Q_{m''-k}$$

appartient de plus à $\sum^{m'+m''}_{t,t'}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, r est borné en $x_n \geqslant 0$ à valeurs dans $S_{1,1}^{m'+m''-(t+t'-\frac{n}{2})}$ si $(t+t'-\frac{n}{2}) \notin \mathbb{N}$ et $r = r_1 + r_2$ avec r_1 borné en $x_n \geqslant 0$ à valeurs $S_{1,1}^{m'+m''-(t+t'-\frac{n}{2})}$ et r_2 borné en $x_n \geqslant 0$ à valeurs $B_\varepsilon^{m'+m''-(t+t'-\frac{n}{2})+\varepsilon}$ si $t+t'-\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$.

Dans (5.2) $\mathcal{A}$ s'écrit $\sigma'_{\phi A(x_n)}(x',D_{x'})$ avec $A \in \sum^1_{\theta,s-m-\theta}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, où $\theta \in](s-m)-\frac{n-1}{2},(s-m)+\frac{n-1}{2}]$. L'équation en $\tilde{S} \in \sum^o_{\theta,s-m-\theta}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ et $\tilde{D} \in \sum^1_{\theta,s-m-\theta}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$

(5.4) $$\tilde{S} \# A - \tilde{D} \# \tilde{S} + D_{x_n}(\tilde{S} - \tilde{S}_{-\tilde{\rho}}) = 0 \quad \text{au voisinage de } (x_o,\xi'_o) ,$$

où $\tilde{\rho} = [\rho\ ]$ si $\rho \notin \mathbb{N}$ et $\rho = \rho-1$ si $\rho \in \mathbb{N}$, peut se résoudre à l'aide de $S_o(x,\xi')$ et $D_1(x,\xi')$ précédemment construites : pour $\ell > 1$ on choisit

$S_{-\ell}$ et $D_{1-\ell}$ de façon que

$$S_{-\ell}\,A_1 - D_1\,S_{-\ell}$$

$$+ \Big(\sum_{\substack{j+k+|\alpha'|=\ell \\ j\neq\ell}} \frac{1}{\alpha'!}\partial_{\xi'}^{\alpha'} S_{-j} D_{x'}^{\alpha'} A_{1-k} - \sum_{\substack{j+k+|\alpha'|=\ell \\ j\neq\ell,\, k\neq\ell}} \frac{1}{\alpha'!}\partial_{\xi'}^{\alpha'} D_{1-j} D_{x'}^{\alpha'} S_{-k} + D_{x_n} S_{-\ell+1} \Big)$$

$$= D_{1-\ell}\, S_o$$

soit diagonale par blocs, ce qui est possible dans $\omega_+ \times \Gamma'$ puisque les valeurs propres de deux blocs différents de D_1 sont disjointes. On obtient des matrices $S_{-\ell}(x,\xi')$ et $D_{1-\ell}(x,\xi')$ homogènes en $\xi' \neq 0$ dans Γ' et dans l'algèbre $H^{\theta-\ell,s-m-\theta}_{loc}(\omega_+)$ en x. On définit alors $\widetilde{S}$ et $\widetilde{D}$ par $\widetilde{S}(x,\xi') = \chi(x,\xi') \sum\limits_{j<\rho} S_{-j}(x,\xi')$, $\widetilde{D}(x,\xi') = \chi(x,\xi') \sum\limits_{j<\rho} D_{1-j}(x,\xi')$, χ étant une fonction C^∞ dans $\overline{\mathbb{R}^n_+} \times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$, homogène en ξ' de degré o, à valeurs dans $[0,1]$ égale à 1 dans un voisinage conique de (x_o,ξ'_o), $\omega^1_+ \times \Gamma^1 = \gamma^1 \times [0,T^1[\times \Gamma^1$ et supportée dans $\omega_+ \times \Gamma'$. La fonction $W = \sigma'_{\phi\widetilde{S}(x_n)}(x',D_{x'})V \in H^{o,s-m+1}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ vérifie l'équation (5.3) dans ω_+ avec :

(5.5) si $\rho \notin \mathbb{N}$, $G_1 \in H^{o,s-m}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap \widetilde{H}^{o,s-m+\rho}(\omega^1_+ \times \Gamma^1)$

si $\rho \in \mathbb{N}$, $G_1 = G'_1 + r(x,D_{x'})V$ où $G'_1 \in H^{o,s-m} \cap \widetilde{H}^{o,s-m+\rho}(\omega^1_+ \times \Gamma^1)$ et

$r(x,\xi')$ est borné en $x_n \geqslant 0$ à valeurs dans $B_\varepsilon^{-1-\rho+\varepsilon}$.

La régularité $\widetilde{H}^{o,s-m+\rho}(\omega^1_+ \times \Gamma^1)$ résulte de la proposition 3.5 et de (5.4). D'autre part G_1 contient le terme $\sigma'_{\phi(D_{x_n}\widetilde{S}_{-\widetilde{\rho}})(x_n)}(x',D_{x'})V$ dont la régularité est donnée par la proposition 3.4 à condition d'imposer $\theta > [\rho] + \frac{3}{2}$ si $\rho \notin \mathbb{N}$, ce qui est compatible avec $\theta \leqslant (s-m) + \frac{n-1}{2}$.

Pour transformer la condition aux limites dans (5.2) on considère $T = \sum\limits_{j<\rho} T_{-j}$ défini dans $\gamma \times \Gamma'$ par $T_o = S_o^{-1}(o)$, T_{-j} homogène en ξ' de degré $-j$ et :

$$\sum_{j+k+|\alpha'|=\ell} \frac{1}{\alpha'!} \partial_{\xi'}^{\alpha'} T_{-j} D_{x'}^{\alpha'} S_{-k}(o) = 0 \quad \text{pour } \ell < \rho$$

On note $\widetilde{T}(x',\xi') = \chi(x',o,\xi')\ T(x',\xi')$; la proposition 3.1 montre alors que

$$\sigma'_{\phi\widetilde{T}}(x',D_{x'})\sigma'_{\phi\widetilde{S}(o)}(x',D_{x'})V(o) - V(o) = X \quad , \text{ avec}$$

$X \in H^{s-m+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ microlocalement de classe $H^{s-m+\rho+\frac{1}{2}}$ dans $\gamma^1 \times \Gamma^1$ si $\rho \notin \mathbb{N}$, $X = X' + R(x',D_{x'})\ V(o)$, $X' \in H^{s-m+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap H^{s-m+\rho+\frac{1}{2}}(\gamma^1 \times \Gamma^1)$ et $R \in B_{\varepsilon}^{-\rho+\varepsilon}$ si $\rho \in \mathbb{N}$. La condition aux limites dans (5.2) peut ainsi s'exprimer par

(5.6) $\qquad \sigma'_{\phi B}(x',D_{x'})\ W(x',o) = H_1$ dans γ,

avec $B \in \sum_{\rho}^{o}$ et $H_1 \in H^{s-m+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap H^{s-m+\rho+\frac{1}{2}}(\gamma^1 \times \Gamma^1)$ si $\rho \notin \mathbb{N}$, $H_1 = H_1' + R_1(x',D_{x'})\ V(o)$ avec $H_1' \in H^{s-m+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap H^{s-m+\rho+\frac{1}{2}}(\gamma^1 \times \Gamma^1)$ et $R_1 \in B_{\varepsilon}^{-\rho+\varepsilon}$ si $\rho \in \mathbb{N}$.

5.3 - REGULARITE MICROLOCALE

On note $W = (W_1,\ldots,W_p,W_+,W_-)$ et

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} \widetilde{D}_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \widetilde{D}_p & & \\ & & & \widetilde{D}_+ & \\ & & & & \widetilde{D}_- \end{pmatrix}$$

5.3.1 - D'après (5.3) $W_- \in H^{o,s-m+1}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ vérifie

$$D_{x_n} W_- = \sigma'_{\phi\widetilde{D}_-(x_n)}(x',D_{x'})W_- + G_1^- \qquad \text{dans } \omega_+$$

avec $G_1^- \in H^{o,s-m}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap \tilde{H}^{o,s-m+\rho^*}(\omega^1_+ \times \Gamma^1)$ et où $\rho^* = \rho$ si $\rho \notin \mathbb{N}$, $\rho^* < \rho$ si $\rho \in \mathbb{N}$. Il résulte alors du corollaire 4.2 que $W_- \in \tilde{H}^{1,s-m+\rho^*}(x_o,\xi'_o)$.

5.3.2 - Pour $p_o \geqslant 1$, l'hypothèse de régularité microlocale $u \in H^{s+\sigma}(\mathring{\gamma}_j)$ pour $j = 1,\dots,p_o$ se transporte sur W d'après la proposition 1.13 en $W \in H^{o,s+\sigma-m+1}(\mathring{\gamma}_j)$. De même la régularité $u \in H^{s+\rho}(x_1,(o,\pm 1))$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}^n_+$ assez proche de x_o, qui résulte de Bony [1] d'après H_1) se transporte en $W \in H^{o,s+\rho-m+1}(x_1,(o,\pm 1))$. Enfin $W_j \in H^{o,s-m+1}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ vérifie

$$(D_{x_n} - \sigma'_{\phi\tilde{D}_j(x_n)}(x',D_{x'}))W_j = G_1^j \quad \text{dans } \omega_+$$

avec $G_1^j \in H^{o,s-m}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap \tilde{H}^{o,s-m+\rho^*}(\omega^1_+ \times \Gamma^1)$ donc pour $\zeta \neq \lambda_j(x_1,\xi'_1)$, avec $(x_1,\xi'_1) \in (\omega^1_+ \cap \mathbb{R}^n_+) \times \dot{\Gamma}^1$ on a $W_j \in H^{s-m+1+\rho^*}(x_1,(\xi'_1,\zeta))$: En effet soit $b \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ valant 1 au voisinage de x_1 et $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ supportée dans un ouvert conique ne contenant ni $(o,\pm 1)$ ni $(\xi'_1,\lambda_j(x_1,\xi'_1))$, vérifiant $\chi(\xi) = 1$ dans un voisinage de $\dfrac{(\xi'_1,\zeta)}{\|(\xi'_1,\zeta)\|}$ dans S^{n-1} et $\chi(\lambda\xi) = \chi(\xi)$ pour $|\xi| \geqslant r$ et $\lambda \geqslant 1$; puisque $\xi'_1 \neq 0$ et $(I-\chi(D_x)b(x))W_j \in H^{o,s-m+1}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap H^\infty(x_1,(\xi'_1,\zeta))$ la proposition 1.13 donne

$$\sigma'_{\phi\tilde{D}_j(x_n)}(x',D_{x'})\ (I - \chi(D_x)b(x))W_j \in H^{o,s-m}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap H^{s-m+\rho}(x_1,(\xi'_+,\zeta))$$

D'autre part si $c \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ est égale à 1 dans un voisinage de x_1 et $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vaut 1 sur un voisinage du support de χ, est nulle au voisinage de $(o,\pm 1)$, vérifie $\Psi(\lambda\xi) = \Psi(\xi)$ pour $|\xi| \geqslant r$ et $\lambda \geqslant 1$, par décomposition en harmoniques sphériques et d'après les propositions 1.8 et 1.9 on a

$$c(x)\sigma'_{\phi\tilde{D}_j(x_n)}(x',D_{x'})\ \chi(D_x)b(x)W_j - \sigma_{\phi\Psi c\tilde{D}_j(x_n)}(x,D_x)\ \chi(D_x)b(x)W_j$$

appartient à $H^{o,s-m+\rho}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, σ désignant un symbole paradifférentiel en toutes les variables (de Bony). Alors dans un petit voisinage de x_1 la fonction

$w = \chi(D_x)b(x)w_j \in H^{s-m+1}(\mathbb{R}^n)$ vérifie

$$(D_{x_n} - \sigma_{\phi\Psi c\hat{D}_j(x_n)}(x,D_x))w = g \text{ avec } g \in H^{s-m}(\mathbb{R}^n) \cap H^{s-m+\rho^*}(x_1,(\xi_1',\zeta))$$

D'après Bony, on déduit de l'ellipticité du symbole au point $(x_1,(\xi_1',\zeta))$ que $\chi(D_x)b(x)w_j$ et ainsi $w_j \in H^{s-m+\rho^*+1}(x_1,(\xi_1',\zeta))$.

Ces trois résultats de régularité microlocale entraînent que pour $j \leqslant p_o$ (puisque $\sigma \leqslant \rho -1$) $w_j \in \tilde{H}^{o,s+\sigma-m+1}(x_1,\xi_1')$ si $(x_1,\xi_1',\lambda_j(x_1,\xi_1')) \in \mathring{\gamma}_j$ et (x_1,ξ_1') est assez proche de (x_o,ξ_o'). Il résulte alors d'Alabidi [1] que, (pour $\rho > 2$), $w_j \in \tilde{H}^{o,s+\sigma^*-m+1}(x_o,\xi_o')$ et $w_j(o) \in H^{s+\sigma^*-m+1}(x_o,\xi_o')$ où $\sigma^* = \sigma$ si $\sigma < \rho -1$ ou $\rho \notin \mathbb{N}$ et $\sigma^* < \rho -1$ si $\rho \in \mathbb{N}$ et $\sigma = \rho - 1$.

<u>5.3.3</u> - (5.6) peut encore s'exprimer par

$$\mathcal{B}_o(w_{p_o+1}(o),\dots,w_p(o),w_+(o)) \equiv \sigma'_{\phi B}(x',D_{x'})(o,w_{p_o+1},\dots,w_p,w_+,o)(o)$$
$$= H^1 - \sigma'_{\phi B}(x',D_{x'})(w_1,\dots,w_{p_o},o,o,w_-)(o) \equiv H^2$$

5.3.1 et 5.3.2 donnent $w_-(o) \in H^{s-m+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap H^{s-m+\rho^*+\frac{1}{2}}(x_o,\xi_o')$ et $w_j(o) \in H^{s-m+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap H^{s+\sigma^*-m+1}(x_o,\xi_o')$ d'où l'on déduit que $H^2 \in H^{s-m+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap H^{s-m+\sigma^*+1}(x_o,\xi_o')$ si $p_o \geqslant 1$ et $H^2 \in H^{s-m+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap H^{s-m+\rho^*+\frac{1}{2}}(x_o,\xi_o')$ si $p_o = 0$.

On fait l'hypothèse que $\mathcal{B}_o$ est elliptique en (x_o,ξ_o') ; on déduit alors de Bony [2] que $(w_{p_o+1}(o),\dots,w_p(o),w_+(o))$ est microlocalement de classe $H^{s-m+\sigma^*+1}$ au point (x_o,ξ_o') si $p_o \geqslant 1$ et de classe $H^{s-m+\rho^*+\frac{1}{2}}$ si $p_o = 0$.

<u>5.3.4</u> - Si $p \geqslant 1$, pour $j \geqslant p_o + 1$, w_j vérifie

$$\begin{cases} (D_{x_n} - \sigma'_{\phi\tilde{D}_j(x_n)}(x',D_{x'}))W_j = G_1^j & \text{dans } \omega_+ \\ W_j(o) \in H^{s-m+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap H^{s-m+\sigma+1}(x_o,\xi'_o) \end{cases}$$

avec $G_1^j \in H^{o,s-m}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap \tilde{H}^{o,s-m+\rho^*}(\omega_+^1 \times \Gamma^1)$. Il résulte encore d'Alabidi [1] que $W_j \in H^{o,s-m+\sigma^*+1}(x_o,\xi'_o)$.

D'autre part W_+ vérifiant

$$\begin{cases} (D_{x_n} - \sigma'_{\phi\tilde{D}_+(x_n)}(x',D_{x'}))W_+ = G_1^+ & \text{dans } \omega_+ \\ W_+(o) \in H^{s-m+\rho^*+\frac{1}{2}}(x_o,\xi'_o) & \text{si } p_o = 0 \quad \text{et} \\ W_+(o) \in H^{s-m+\sigma^*+1}(x_o,\xi'_o) & \text{si } p_o \geqslant 1 \end{cases}$$

avec $G_1^+ \in H^{o,s-m}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap \tilde{H}^{o,s-m+\rho^*}(\omega_+^1 \times \Gamma^1)$, le corollaire 4.2 donne encore $W_+ \in \tilde{H}^{o,s-m+\rho^*+1}(x_o,\xi'_o)$ si $p_o = 0$ et $W_+ \in \tilde{H}^{o,s-m+\sigma^*+3/2}(x_o,\xi'_o)$ si $p_o \geqslant 1$.

<u>5.3.5</u> - On a ainsi obtenu que

$$W \in \tilde{H}^{o,s-m+\rho^*+1}(x_o,\xi'_o) \text{ si } p = 0 \text{ , avec } \rho > 0$$

$$W \in \tilde{H}^{o,s-m+\sigma^*+1}(x_o,\xi'_o) \text{ si } p \geqslant 1 \text{ , avec } \rho > 2 \text{ et } \sigma \leqslant \rho - 1.$$

On a alors la même régularité pour V ; si ρ est entier cette régularité se réinjecte dans G_1 et H_1 par la proposition 3.3 et on obtient finalement qu'au point (x_o,ξ'_o) v est microlocalement de classe $\tilde{H}^{m-1,s-m+\rho+1}$ si $p = 0$ et $\tilde{H}^{m-1,s-m+\sigma+1}$ si $p \geqslant 1$. L'équation (5.1), avec la proposition 1.15 permet enfin d'obtenir qu'au point (x_o,ξ'_o) u est microlocalement de classe $\tilde{H}^{s+\rho}$ si $p = o$ et $\tilde{H}^{s+\sigma}$ si $p \geqslant 1$.

5.4 - EXEMPLES DE CONDITIONS AUX LIMITES ADMISSIBLES

Ce sont les conditions pour lesquelles l'opérateur $\mathcal{B}_o$ défini en (5.7) est elliptique en (x_o,ξ_o'). Elles ne font intervenir que le symbole principal de $\mathcal{B}$ et S_o au point (x_o,ξ_o'). Dans le cas "elliptique" $p = 0$, est admissible la condition de Shapiro-Lopatinski, ou de recouvrement, usuelle : les polynômes en λ :

$$\tilde{f}_{j,o}(x_o,\xi_o+\lambda\eta_o) \equiv i^{m_j} \sum_{|\alpha|=m_j} (\partial_{y_\alpha} f_j)(x_o,u(x_o),\dots,\partial^\beta u(x_o)\dots)(\xi_o+\lambda\eta_o)^\alpha,\ j=1,\dots,\frac{m}{2}$$

sont indépendants modulo le facteur $\tilde{F}_o^+(x_o,\xi_o+\lambda\eta_o)$ de $\tilde{F}_o(x_o,\xi_o+\lambda\eta_o)$ à racines dans $\operatorname{Im}\lambda > 0$.

Dans le cas général les conditions de Dirichlet $\nu^j u\big|_\Gamma = 0$, $j = 0,\dots,\frac{m-p}{2} + (p-p_o)$ où ν est un champ de vecteurs transverse à Γ, conviennent.

Enfin si on remplace Ω par $\Omega \times I$ décrit par (x,t), I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, avec l'hypothèse supplémentaire :

$H_3)$ τ_o est racine simple des polynômes en τ, $\tilde{F}_o(x_o,t_o,\xi_o+\lambda_j^o\eta_o+\tau\,\zeta_o)$, où $\zeta_o \in \dot{N}^*_{(x_o,t_o)}(\Omega \times \{t=t_o\})$ et les λ_j^o sont les racines réelles (simples) de $\tilde{F}_o(x_o,t_o,\xi_o+\lambda\eta_o+\tau_o\zeta_o)$, une version microlocale de la condition de Lopatinski uniforme équivaut à l'ellipticité de $\mathcal{B}$ au point $(x_o,t_o,\xi_o + \tau_o\zeta_o)$ si $\lambda_1^o,\dots,\lambda_{p_o}^o$ correspondent aux bicaractéristiques qui "arrivent" en $(x_o,t_o,\xi_o + \tau_o\zeta_o)$ c'est à dire dont le point courant se rapproche de Γ quand t croît. Cette condition est que les polynômes en λ, $\tilde{f}_{j,o}(x,t,\xi+\lambda\eta_o+\tau\zeta_o)$ soient indépendants modulo le facteur de $\tilde{F}_o(x,t,\xi+\lambda\eta_o+\tau\zeta_o)$ dont les racines en λ sont dans $\operatorname{Im}\lambda > 0$ ou égales à $\lambda_{p_o+1},\dots,\lambda_p$ au point $(x_o,t_o,\xi_o+\tau_o\zeta_o)$, pour (x,t,ξ) voisin de (x_o,t_o,ξ_o) et τ voisin de τ_o dans $\operatorname{Im}\tau \leqslant 0$.

REMARQUE 5.2

Il est clair qu'on peut travailler avec un opérateur $\mathcal{B}_o$ sous-elliptique. En particulier pour p = O, on améliore le résultat de Godin [5].

5.5 - FRONT D'ONDE H^t AU BORD : INVARIANCE PAR CHANGEMENT DE COORDONNEES.

La preuve du théorème 5.1 s'est effectuée dans une carte de bord quelconque. On va démontrer qu'en fait la notion microlocale "tangentielle" $u \in \tilde{H}^{s+\sigma}$ en un point $(x_o,\xi_o) \in \dot{T}^* \Gamma$ est bien définie pour une fonction $u \in H^s_{loc}(\Omega_+)$, $s > \frac{n}{2} + m$, $\sigma \leqslant \rho = s - m - \frac{n}{2}$, solution de l'équation $F[u] = 0$ sous la seule hypothèse H_1), c'est à dire qu'elle est invariante par changement de carte de bord:

On considère deux cartes de bord basées en x_o, de coordonnées $y_1,\dots,y_n$ et $z_1,\dots,z_n$ et on note $\eta_1,\dots,\eta_n$ et $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ les coordonnées duales. Pour $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support assez petit et égale à 1 au voisinage de x_o on note v_+ et w_+ l'image de φu dans ces deux cartes. D'après 5.1, v_+ et w_+ appartiennent à $H^{s+\mu,-\mu}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ avec $\mu = (s-m) - \frac{1}{2} - \varepsilon$ et $\varepsilon > 0$ quelconque. En particulier les traces $\partial^j_{y_n} v_+(o)$ et $\partial^j_{z_n} w_+(o)$ sont définies pour j entier, $j < 2s - m - 1$ et appartiennent à $H^{s-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. On suppose qu'au point $(y_o,\eta_o') \in \overline{\mathbb{R}^n_+} \times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$ image de (x_o,ξ_o), v_+ est de classe $\tilde{H}^{s+\sigma}$. Alors pour $j < 2s - m + 1$ les traces $\partial^j_{y_n} v_+(o)$ et donc aussi $\partial^j_{z_n} w_+(o)$ sont microlocalement de classe $H^{s+\sigma-j-1/2}$ aux points (y_o,η_o') et (z_o, ζ_o') images de (x_o,ξ_o).

Soit $w_- \in H^{s+\mu,-\mu}(\overline{\mathbb{R}^n_-})$ le relèvement habituel dans $\overline{\mathbb{R}^n_-}$ des traces de w_+ en $z_n = 0$:

$$w_- = \sum_{j<2s-m-1} k_j(z,D_{z'})\, \partial^j_{z_n} w_+(o)$$

avec $k_j(z,\zeta') = \Psi(z_n(1+|\zeta'|^2)^{1/2})\frac{z_n^j}{j!}$ et $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 au voisinage de

0. L'image v_- de w_- dans l'autre carte appartient aussi à $H^{s+\mu,-\mu}(\overline{\mathbb{R}^n_-})$, (en fait v_- et w_- appartiennent à $H^{s+k,-k}(\overline{\mathbb{R}^n_-})$ pour tout k) et la régularité microlocale de leurs traces entraîne que v_- et w_- sont microlocalement de classe $\tilde{H}^{s+\sigma}$ aux points (y_o,η'_o) et (z_o,ζ'_o). Les fonctions v et w égales à v_+ et w_+ pour $y_n > 0$ et $z_n > 0$, et à v_- et w_- pour $y_n < 0$ et $z_n < 0$ appartiennent à $H^{s+\mu,-\mu}(\mathbb{R}^n)$. De plus v est microlocalement de classe $\tilde{H}^{s+\sigma}$ au point (y_o,η'_o) ce qui entraîne que v est microlocalement de classe $H^{s+\sigma}$ aux points $(y_o,(\eta'_o,\eta_n))$ pour tout $\eta_n \in \mathbb{R}$. Cette dernière notion étant invariante par changement de coordonnées, on en déduit que w est microlocalement de classe $H^{s+\sigma}$ aux points $(z_o,(\zeta'_o,\zeta_n))$ pour tout $\zeta_n \in \mathbb{R}$.

Soit $\tilde{w} \in H^{s+\mu,-\mu}(\mathbb{R}^n)$ un prolongement quelconque de w_+ (qui pourrait être w). Une paralinéarisation tangentielle comme en 5.3 donne

$$(5.8) \qquad A'w_+ \equiv \partial^m_{x_n} w_+ + \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\ \alpha_n\neq m}} \sigma'_{(\partial_{\partial^\alpha\tilde{w}} G)(\tilde{x},\partial^\beta\tilde{w})}(x',D_{x'})\, \partial^\alpha_x w_+ = g_+$$

au voisinage de z_o dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, avec $g_+ \in H^{s-m+\mu,-\mu+\rho}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$.

D'autre part la proposition 1.15 donne

$$A'\, w_- \in H^{s-m+\mu,-\mu}(\overline{\mathbb{R}^n_-}) \cap \tilde{H}^{s+\sigma-m}(z_o,\, \zeta'_o).$$

Alors A'w qui prolonge $A'\, w_+$ et $A'\, w_-$ dans $H^{s-m+\mu,-\mu}(\mathbb{R}^n)$ est microlocalement de classe $\tilde{H}^{s+\sigma-m}$ au point $(z_o,\, \zeta'_o)$.

Remplaçant la paralinéarisation tangentielle dans A' w par une paralinéarisation (de Bony) en toutes variables on obtient

$$A\, w = \partial^m_{x_n} w + \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\ \alpha_n\neq m}} \sigma_{(\partial_{\partial^\alpha\tilde{w}} G)(x,\partial^\beta\tilde{w})}(x,D_x)\, \partial^\alpha_x w\, .$$

Les propositions 1.8 et 1.9 montrent que $(A-A')w \in H^{s-m+\mu,-\mu+\rho}(\mathbb{R}^n)$, alors on a $A\,w = g$ au voisinage de z_o dans $\mathbb{R}^n$ avec $g \in H^{s-m+\mu,-\mu}(\mathbb{R}^n) \cap \tilde{H}^{s+\sigma-m}(z_o,\xi_o')$.

D'après Meyer [10] il existe $b \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 près de z_o, $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 près de $(0,..,0,\pm\lambda_o),\lambda_o > 0$, vérifiant $\chi(\lambda\xi) = \chi(\xi)$ pour $|\xi| \geqslant r$ et $\lambda \geqslant 1$ et un symbole $\tau \in B_\rho^o$ tels que

$$\tau(x,D)Aw = b(x)\;\chi(D)(I-\Delta)^{\frac{m}{2}}w - r_1(x,D)(I-\Delta)^{\frac{m}{2}}w - r_2(x,D)Aw$$

avec r_1 et $r_2 \in S^{-\rho}_{1,1}$. Alors on a

$$w = (I-\Delta)^{-\frac{m}{2}}(I-b(x)\chi(D))(I-\Delta)^{\frac{m}{2}}w + (I-\Delta)^{-\frac{m}{2}}\tau(x,D)Aw$$

$$+ (I-\Delta)^{\frac{m}{2}}\, r_1(x,D)(I-\Delta)^{\frac{m}{2}}\, w + (I-\Delta)^{-\frac{m}{2}}\, r_2(x,D)Aw.$$

Le premier terme est de classe $H^{s+\sigma}$ en $(z_o,(\zeta_o',\zeta_n))$ pour tout $\zeta_n \in \mathbb{R}$ et de classe H^t pour tout t en $(z_o,(0,\pm1))$. Ceci entraîne qu'il est microlocalement de classe $\tilde{H}^{s+\sigma}$ au point (z_o,ζ_o'). Le second terme est microlocalement de classe $\tilde{H}^{s-m+\sigma}$ en (z_o,ζ_o') si $\sigma < \rho$ et $\tilde{H}^{s-m+\rho-\varepsilon,\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ petit si $\sigma = \rho$ d'après la proposition 1.16. Enfin les troisième et quatrième terme sont dans $H^{s+\rho}$. On a donc $w_+ \in \tilde{H}^{s-m+\sigma}(z_o,\zeta_o')$ si $\sigma < \rho$. Pour $\sigma = \rho$ on peut réinjecter la régularité microlocale $w_+ \in \tilde{H}^{s-m+\rho-\varepsilon,\varepsilon}(z_o,\zeta_o')$ dans l'équation (5.8) à l'aide de la proposition 1.15 et on obtient aussi $w_+ \in \tilde{H}^{s-m+\rho}(z_o,\zeta_o')$.

APPENDICE : PROBLEME D'EVOLUTION HYPERBOLIQUE POUR DES OPERATEURS PARADIFFERENTIELS.

On résume ici les résultats d'Alabidi annoncés dans [1] et utilisés en 5.3.2 et 5.3.4. Ils sont l'adaptation du théorème de propagation de Bony [2] aux fronts d'ondes "tangentiels" pour des fonctions continues en x_n à valeurs dans des espaces de Sobolev en x'.

Dans $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,T]$ on considère l'opérateur d'évolution $L(x,D_x) = D_{x_n} - A(x_n)$ où $A(x_n) = \sigma'_{\phi a(x_n)}(x',D_{x'})$ est un opérateur paradifférentiel associé à un symbole $a(x_n)$ continu en $x_n \in [0,T]$ à valeurs dans $\sum^1_\rho$, $\rho > 2$, et à symbole principal $a_1(x,\xi')$ réel et de classe C^2.

Un point (x_o,ξ'_o) étant fixé dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$ on note $\tilde{\gamma}$ la projection sur $\xi_n = 0$ de la bicaractéristique de $\ell(x,\xi) = \xi_n - a_1(x,\xi')$ issue de $(x_o,\xi'_o,a_1(x_o,\xi'_o))$. On suppose T assez petit pour que $\tilde{\gamma}$, paramétrée par x_n, soit définie pour $x_n \in [0,T]$.

Proposition A.1. Soient s et σ deux réels tels que $s > \rho - 2$ et $0 \leq \sigma \leq \rho-1$ et soit $u \in H^{1,s}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. On suppose que Lu est microlocalement de classe $\tilde{H}^{o,s+\sigma+1}$ sur $\tilde{\gamma}$ et que u est microlocalement de classe $\tilde{H}^{1,s+\sigma}$ en un point $\tilde{\gamma}(x^1_n)$ tel que $0 < x^1_n < T$. Alors u est microlocalement de classe $\tilde{H}^{1,s+\sigma}$ sur $\tilde{\gamma}$ et pour tout $x_n \in [0,T]$ la trace $u(.,x_n)$ est microlocalement de classe $H^{s+\sigma+1}$ au point (x',ξ') tel que $(x',x_n,\xi') \in \tilde{\gamma}$.

Preuve. On démontre d'abord des inégalités d'énergie L^2 et H^τ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ pour un opérateur pseudo-différentiel tangentiel adapté à la géométrie du problème. Ensuite on les appliquera à des régularisées tangentielles de la fonction u.

Lemme A.2. Il existe $T_1 \in]0,T[$ tel que pour tout $x^1_n \in]0,T_1[$, pour tout ouvert conique V de $\mathbb{R}^{n-1} \times]0,T[\times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$ voisinage de $\tilde{\gamma}(x^1_n)$ pour tout ouvert conique W de $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,T[\times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$ voisinage de $\tilde{\gamma}([0,x^1_n])$ il existe une fonction $c(x,\xi')$ $\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+} \times \dot{\mathbb{R}}^{n-1})$, positive, homogène en ξ' de degré 0, à support dans W, telle que l'on ait $c(x,\xi') > 0$ sur $\tilde{\gamma}([0,x^1_n])$ et $\{\ell,c\} = \partial_{x_n} c - \{a_1,c\} \geq 0$ dans $W \setminus V$.

<u>Preuve</u>. Pour T_1 assez petit on peut supposer que $\tilde{\gamma}([0,T_1])$ et V sont contenus dans $\xi_{n-1} > 0$. Soit $\tilde{W}$ un ouvert conique de $\mathbb{R}^n \times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$ de trace W dans $x_n \geq 0$ et contenu dans $\xi_{n-1} > 0$. Les images $\hat{W}$ et $\hat{V}$ de $\tilde{W}$ et V par l'application $\chi : (x,\xi') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^{n-1} \to (x, \frac{\xi_1}{\xi_{n-1}}, \ldots, \frac{\xi_{n-2}}{\xi_{n-1}}) = (x,\alpha)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^{2n-2}$ voisinages de $\hat{\gamma} = \chi(\tilde{\gamma}[0,x_n^1])$ et de $z_o = \chi(\tilde{\gamma}(x_n^1))$ respectivement. La courbe $\tilde{\gamma}$ est courbe intégrale du champ de vecteurs de classe C^1 dans $\hat{W}$:

$$H(x,\alpha) = \partial_{x_n} - \sum_{j=1}^{n-1} (\partial_{\xi_j} a_1)(x,\alpha,1)\partial_{x_j} + \sum_{j=1}^{n-2} (\partial_{x_j} a_1(x,\alpha,1) - \alpha_j \partial_{x_{n-1}} a_1(x,\alpha,1))$$

D'après la preuve du lemme 6.4 de Bony [2] il existe une fonction $\varphi(x,\alpha)$, C^∞ à support compact dans $\hat{W}$, positive, strictement positive sur $\hat{\gamma}$ et telle que $H\varphi \geq 0$ sur $\hat{W} \setminus \hat{V}$. Alors la restriction $c(x,\xi')$ de $\varphi(\lambda(x,\xi'))$ à $x_n \geq 0$ a les propriétés voulues.

<u>Lemme A.3</u>. Il existe $K > 0$ telle que pour tout $v \in C_o^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,T[)$ on ait pour tout $x_n \in [0,T]$, $<,>$ désignant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$:

$$\|v(x_n)\|_o^2 \leq 2\,\mathrm{Im} \int_{x_n}^{T} \langle Lv(t),v(t)\rangle dt + K \int_{x_n}^{T} \|v(t)\|_o^2\, dt.$$

<u>Preuve</u>. On intègre entre x_n et T l'égalité

$$\partial_{x_n} \|v(x_n)\|_o^2 = -2\mathrm{Im}\langle Lv(x_n),v(x_n)\rangle - \langle (A(x_n)-A(x_n)^*)v(x_n),v(x_n)\rangle,$$

et on utilise la continuité de $A(x_n) - A(x_n)^*$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, le symbole principal $a_1(x,\xi')$ de $A(x_n)$ étant réel (théorème 3.3 de [2]).

Soient V et W deux ouverts comme au lemme A.2, bornés en x, et $C = C(x,D_{x'})$ l'opérateur pseudo-différentiel tangentiel de symbole $\phi(\xi')c(x,\xi')$, la fonction c étant donnée par le lemme A.2. L'application du lemme A.3 à Cv pour $v \in C_o^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,T[)$ conduit au :

<u>Lemme A.4</u>. Soit V_1 un ouvert conique de $\mathbb{R}^{n-1} \times]0,T[\times \mathbb{R}^{n-1}$ borné en x et contenant $\bar{V}$. Il existe $\varepsilon \in]0,1[$, $K > 0$ et un symbole $\Psi(x,\xi') \in S_{1,o}^o(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1})$

supporté dans V_1 tels que pour tout $v \in C_o^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,T[)$ on ait :

$$\|Cv(x_n)\|_o^2 \leq K \int_{x_n}^T (\|CLv(t)\|_o^2 + \|v(t)\|_{-\varepsilon}^2 + \|\Psi(x,D_{x'})v(t)\|_o^2)dt.$$

Preuve. Le terme $\int_{x_n}^T \|Cv(t)\|_o^2 \, dt$ sera absorbé par le lemme de Gronwall. Pour l'autre terme on décompose LC en CL + [L,C] ; on majore $|\mathrm{Im} < CLv(t),Cv(t) > |$ puis, utilisant le calcul de [2] on écrit $\mathrm{Im} <[L,C] v(t),Cv(t)>$ sous la forme $-\mathrm{Re}<(B-R_1)v(t),v(t)>$ avec B borné en $x_n \in [0,T]$ à valeurs dans $\sum^o_{\rho^*-1}$ et R_1 ρ^*-régularisant dans $\mathbb{R}^{n-1}$ uniformément en x_n, $\rho^* \in]2,\rho]$ étant non entier. On majore $\mathrm{Re} <R_1 v(t),v(t)>$ et on introduit une fonction $r(x,\xi') \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \dot{\mathbb{R}}^{n-1})$, homogène en ξ' de degré 0, positive, supportée dans V_1 et telle que $r + c\{\ell,c\}$ soit positive sur V. L'opérateur $B + R = B + \sigma_{\phi r(x_n)}(x',D_{x'})$ est borné en $x_n \in [0,T]$ à valeurs dans $\sum^o_{\rho^*-1}$ et son symbole principal est positif dans $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,T] \times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$; on peut donc appliquer l'inégalité de Garding (6.31) du théorème 6.8 de Bony [2] ; on obtient que pour un $\varepsilon \in]0,1[$ on a :

$$-\mathrm{Re} <(B+R)v(t),v(t)> \leq K \|v(t)\|_{-\varepsilon}^2.$$

Enfin si $\Psi(x,\xi') \in S^o_{1,o}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1})$ est supportée dans V_1 et égale 1 sur un voisinage du support de ϕr, on conclut la preuve du lemme avec :

$$\mathrm{Re}<Rv(t),v(t)> \leq K(\|\Psi(x,D_{x'})v(t)\|_o^2 + \|v(t)\|_{-\varepsilon}^2) .$$

Utilisant le calcul de [2], [10] et du paragraphe 3, on déduit du lemme A.4 les inégalités d'énergie H^τ. Dans leur énoncé on désigne par $\Psi_U = \Psi_U(x,D_{x'})$ divers opérateurs pseudo-différentiels tangentiels de degré 0, à symbole $\Psi_U(x,\xi') \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+} \times \mathbb{R}^{n-1})$ supporté dans un ouvert conique U de $\overline{\mathbb{R}^n_+} \times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$.

Lemme A.5. Soit $\tau > \rho-1$. Pour tout $M \geq \rho-\tau-1$ il existe $K > 0$ et des opérateurs Ψ_{V_1} et Ψ_W tels que pour tout $v \in C_o^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,T[)$ on ait

$$\|Cv(x_n)\|_\tau^2 \leq K(\|\Psi_W v(x_n)\|_{\tau-1}^2 + \|v(x_n)\|_{-M}^2 + \int_{x_n}^T (\|CLv(t)\|_\tau^2 + \|\Psi_W v(t)\|_{\tau-\varepsilon}^2$$
$$+ \|Lv(t)\|_{-M}^2 + \|\Psi_{V_1} v(t)\|_\tau^2 + \|\Psi_W Lv(t)\|_{\tau-1}^2 + \|v(t)\|_{\tau-\rho+1}^2)dt).$$

Il est clair que l'inégalité du lemme 6.5 est vérifiée aussi, pour $M = \rho-\tau$, par toute fonction $v \in H^{1,\tau-\rho}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ microlocalement de classe $\tilde{H}^{1,\tau}$ dans W. On l'applique à la famille de fonctions $u_\alpha = (I-\alpha\Delta_{x'})^{-1}u$, où $\alpha \in]0,1[$, avec $\tau = s+\sigma+1$, puisqu'on peut supposer que $x_n^1 \leq T_1$, (cas auquel on se ramène en coupant $\tilde{\gamma}$ en un nombre fini de morceaux), et aussi que u est microlocalement de classe $\tilde{H}^{1,s+\sigma-\varepsilon}$ dans W avec $\varepsilon \in]0,1/2]$. Par calcul symbolique on obtient que la famille $(C\, u_\alpha(x_n))_\alpha$ est bornée dans $H^{s+\sigma+1}(\mathbb{R}^{n-1})$ uniformément en $x_n \in [0,T]$ et la proposition s'en déduit.

Suivant une démarche analogue, on obtient pour le problème de Cauchy la :

<u>Proposition A.6</u>. Soient s et σ deux réels tels que $s > \rho-2$ et $0 \leq \sigma \leq \rho-1$ et soit $u \in H^{1,s}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. On suppose que Lu est microlocalement de classe $\tilde{H}^{0,s+\sigma+1}$ sur $\tilde{\gamma}$ et que u(.,0) est microlocalement de classe $H^{s+\sigma+1}$ au point (x'_0,ξ'_0). Alors u est microlocalement de classe $\tilde{H}^{1,s+\sigma}$ sur $\tilde{\gamma}$ et pour tout $x_n \in [0,T]$ la trace $u(.,x_n)$ est microlocalement de classe $H^{s+\sigma+1}$ au point (x',ξ') tel que $(x',x_n,\xi') \in \tilde{\gamma}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - **A. ALABIDI** : "Réflexion transverse des singularités pour un problème aux limites non linéaire d'ordre 2". Thèse de 3ème Cycle, Rennes 1984. A paraîtrè aux C.R.A.S.

[2] - **J.M. BONY** : "Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires". Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 14 (1981) p. 209-246.

[3] - **J. CHAZARAIN** : "Reflection of C^{∞} singularities for a class of operators with multiple characteristics". Publ. Rims Kyoto Univ., 12, suppl (1977), 39-52.

[4] - **R. COIFMAN - Y. MEYER** : "Au delà des opérateurs pseudo-différentiels". Astérisque 5 (1978).

[5] - **P. GODIN** : "Subelliptic non linear oblique derivative problems". Amer. Journal of Math. A paraître.

[6] - **L. HORMANDER** : "Linear partial differential operators". Springer Verlag 1969.

[7] - **R. MELROSE** : "Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems". Duke Math. J. 42, 4 (1975), p. 605-635.

[8] - **R. MELROSE - J. SJOSTRAND** : "Singularities of boundary value problems I". Comm. on pure and applied mathematics, Vol. XXXI, p. 593-617 (1978).

[9] - **G. METIVIER** : "Intégrales singulières". Cours Univ. Rennes (1982).

[10]- **Y. MEYER** : "Remarques sur un théorème de J.M. Bony". Supplemento al rendiconti del circolo matematico di palermo atti del seminario di analisi armonica. Pisa April, (1980), série II, n° 1 (1981).

[11]- **Y. MEYER** : "Nouvelles estimations pour les solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires". Séminaire Goulaouic-Schwartz (1981-82). Ecole Polytechnique n° VI.

[12] - **L. NIRENBERG** : "Lectures on linear partial differential equations". Regional conf. series in Math., N° 17, AMS (1973).

[13] - **J. SJOSTRAND** : "Operators of principal type with interior boundary conditions". Acta Mathematatica, 130, 1-2, (1973).