FRANCHI

Solutions faibles des équations elliptiques du deuxième ordre

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 3
« Équations aux dérivées partielles », , p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985___3_1_0>

CHAPITRE I

SOLUTIONS FAIBLES DES EQUATIONS ELLIPTIQUES DU DEUXIEME ORDRE

FRANCHI

Istituto Matematico "S. Pincherle"

Piazza di Porta S. Donato, 5

40 127 - BOLOGNA - ITALY

Le but de cet exposé est de montrer que la méthode de Moser ([8]) pour prouver la régularité höldérienne des solutions faibles des équations elliptiques du deuxième ordre sous forme de divergence à coefficients mesurables peut être utilisée aussi pour le cas elliptique dégénéré si l'on peut substituer les boules de la métrique euclidienne par les boules d'une métrique de type homogène qui est "naturellement" associée à l'opérateur.

On va préciser tout d'abord le significat du mot "naturellement" ; bien que une part des considérations suivantes puisse être développée dans des situations beaucoup plus générales (voir [3], [5], [6]), on va se borner dès maintenant à la situation où l'on a obtenu les résultats les plus complets.

Dans la suite, L désignera l'opérateur différentiel $\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\, \partial_j)$, où $a_{ij} = a_{ji}$ sont des fonctions réelles bornées et mesurables. Nous supposerons aussi qu'il existe $m \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$m^{-1} \sum_{j=1}^{n} d_j^2(x)\xi_j^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant m \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\xi_j^2$$

$\forall(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, où $\lambda_j(x) = \lambda_j^{(1)}(x_1)\dots\lambda_j^{(n)}(x_n)$ et les fonctions $\lambda_j^{(k)}$ sont des fonctions réelles non négatives de classe C^1 hors de l'origine telles que :

i) $\lambda_j^{(j)}$ est lipschitzienne ;

ii) $0 \leqslant t(\lambda_j^{(k)})'(t) \leqslant \rho_{j,k}\, \lambda_j^{(k)}(t)$ $\forall t \neq 0$ et pour des constantes convenables $\rho_{j,k} \geqslant 0$, $j,k = 1,\dots,n$, $j \neq k$;

iii) $\lambda_j^{(k)}(t) = \lambda_j^{(t)}(|t|)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $j,k = 1,\dots,n$, $j \neq k$.

Soit maintenant Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$; si, pour tout couple de points $x,y \in \Omega$, il est possible de joindre x et y par une courbe continue qui est par morceaux une courbe intégrale des champs de vecteurs $\lambda_1\partial_1,\dots,\lambda_n\partial_n$ (on dira alors que Ω est $(\lambda_1\partial_1,\dots,\lambda_n\partial_n)$-connexe), nous appellerons distance $d(x,y)$ des points x et y le plus petit temps qui est nécessaire pour aller de x à y le long de courbes de ce type. Il est alors facile de prouver que, quitte à renuméroter les variables on peut toujours supposer localement $\lambda_j^{(j)} =$

$\lambda_j^{(j+i)} = \ldots = \lambda_j^{(n)} = 1$, $j = 1,\ldots,n$. Dans ce cas, on connaît très bien ([3]) la métrique d et la structure des boules B_d de cette métrique. En particulier, si μ est la mesure de Lebesgue, on a l'inégalité de duplication suivante :

$$\mu(B_d(\bar{x},2r) \leqslant A\mu(B_d(\bar{x},r))$$

$\forall\bar{x} \in \Omega, \forall r > 0$, ce qui implique que (Ω,d) est un espace de type homogène au sens de [2].

Pour prouver la régularité höldérienne des solutions faibles de $Lu = 0$ et l'inégalité de Harnack, suivant la méthode de De Giorgi-Moser (voir [7], section 8,9) il suffit de prouver que :

Si $u \in W_\lambda^{loc}(\Omega)$, $u \geqslant 0$, $Lu = 0$, alors il existe C_1, M'_ρ, $M''_\rho \in \mathbb{R}_+$, $\sigma > 1$ tels que, $\forall\bar{x} \in \Omega$, $\forall R > 0$ tel que $B_d(\bar{x},C_1R) \subseteq \Omega$, on a

(1.a) $\forall\rho > 1$ $\sup\limits_{B_d(\bar{x},R|2)} u \leqslant M'_\rho(\mu(B_d(\bar{x},R)))^{-1|\rho}.||u;L^\rho(B_d(\bar{x},R))||$;

(1.b) $\forall\rho \in [1,\sigma[$

$$\inf_{B_d(\bar{x},R|2)} u \geqslant M''_\rho(\mu(B_d(\bar{x},R)))^{-1|\rho}||u;L^\rho(B_d(\bar{x},R))||.$$

Ici $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ et $W_\lambda(\Omega)(\overset{o}{W}_\lambda(\Omega))$ est la fermeture de $C^\infty(\Omega)$ $(C_o^\infty(\Omega))$ relativement à la norme

$$(||u;L^2(\Omega)||^2 + \sum_{j=1}^{n} ||\lambda_j\partial_j u;L^2(\Omega)||^2)^{1/2} ;$$

$W_\lambda^{loc}(\Omega)$ a le significat usuel. Dans la suite on écrivera $\nabla_\lambda u$ pour le vecteur $(\lambda_1\partial_1 u,\ldots,\lambda_n\partial_n u)$.

Pour prouver (1.a) et (1.b), on prouve un couple d'inégalités analogues pour des boules de rayon fixé $R = 1$ et on utilise une famille convenable $\{T_\alpha, 0 < \alpha\}$ de transformations homothétiques qui sont, pour le cas dégénéré, analogues aux transformations $x \to \alpha x$ du cas elliptique. Nous remarquons que T_α transforme l'opérateur L dans un nouveau opérateur $L^{(\alpha)}$ qui définit donc une nouvelle métrique $d^{(\alpha)}$; il faut alors estimer très soigneusement les constantes de nos inégalités et vérifier qu'elles ne dépendent pas de α mais seulement des constantes m et $\rho_{j,k}$ de nos hypothèses qui - comme on peut le vérifier - ne changent pas quand on passe de L à $L^{(\alpha)}$. Nous remarquons aussi que le choix de T_α est lié à la connaissance très précise de la géométrie des boules $B_d(\alpha)$ et donc ne peut être adapté tout simplement à des situations plus générales.

Le premier point pour prouver (1.a) et ((1.b) est prouver que les solutions faibles sont localement bornées ; en effet, on prouve le résultat suivant.

Théorème 1:

Soit $u \in W_\lambda^{loc}(\Omega)$ telle que $Lu \geqslant 0$. Alors, $\forall x \in \Omega$ $\exists$ R_o tel que, $\forall R \leqslant R_o$ $\exists$ $C_r > 0$ (indépendant de u) telle que :

$$\sup_{|x-\bar{x}|<R} u \leqslant C_r ||u^+ \ ; \ L^2(\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ |x-\bar{x}| < 2R\})||,$$

où $u^+ = \max \{0,u\}$.

Pour prouver ce résultat, il est nécessaire d'utiliser un théorème de plongement pour les espaces $\overset{\circ}{W}_\lambda(\Omega)$ qui a été prouvé en [5] (voir aussi [3], [4] et [6]) : à savoir le fait que $\overset{\circ}{W}_\lambda(\Omega)$ est plongé continuement dans $L^q(\Omega)$, pour un q convenable, $q > 2$. On peut alors procéder de la façon suivante : supposons d'bord $u \geqslant 0$. Soit $\mathcal{L}(u,v)$ est la forme bilinéaire associée à L, et soient $\beta \geqslant 1$, $N > 0$; nous posons $H(t) = t^\beta$ pour $t \in [0,N]$ et $H(t) = N^\beta + (t-N)\,\beta\, N^{\beta-1}$ pour $t \geqslant N$ et, finalement, $G(t) = \int_0^t |H'(s)|^2 ds$. Si $\Psi \in C_0^\infty(\{x;|x-\bar{x}| < R\})$ et si nous posons $v = \Psi\, G(u)$, on a $v \in \overset{\circ}{W}_\lambda(\Omega)$ et donc $\mathcal{L}(u,v) \leqslant 0$. De là

$$\int_\Omega |\nabla_\lambda(\Psi\, H(u))|^2\, dx \leqslant C_1 \int_\Omega |H'(u)u|^2 |\nabla_\lambda \Psi|^2\, dx ,$$

où C_1 est indépendant de u,β,N. Alors

$$(\int_{\mathbb{R}^n} |\Psi H(u)\ ^q dx)^{1/q} \leqslant C_2(||\Psi H(u) \ ; \ L^2(\mathbb{R}^n)||^2 +$$

$$+ ||H'(u)u|\nabla_\lambda \Psi| \ ; \ L^2(\mathbb{R}^n)||^2)^{1/2} .$$

Si on choisit maintenant $\Psi \equiv 1$ sur une boule (euclidienne) de rayon $r < R$ et telle que $|\nabla_\lambda \Psi| \leqslant 2(R-r)^{-1}$, pour $N \to +\infty$ on a

$$||u \ ; \ L^{\beta q}(\{x;|x-\bar{x}| < r\})|| \leqslant (C_3\ \beta/(R-r))^{1/\beta} ||u \ ; \ L^{2\beta}(\{x;|x-\bar{x}| < R)||,$$

où C_4 ne dépend ni de u ni de β. On peut maintenant itérer cette inégalité et obtenir d'obrd que $u \in \bigcap_{1 \leqslant p < +\infty} L^p(\{x \ ; \ |x-\bar{x}| < R\})$ et, sucessivement l'estimation de l'énoncé. Nous remarquons que, quitte à subsituer le gradient euclidien par le "gradient dégénéré" ∇_λ et le théorème de plongement classique de Sobolev par notre théorème de plongement, la méthode suivie est identique à celle de Moser [8] (voir aussi [7], section 8,5). Toujours comme en [8], on peut successivement éliminer l'hypothèse $u \geq 0$.

Soit donc $u \in W_\lambda^{loc}(\Omega)$ telle que $Lu = 0$; le résultat du théorème 1 nous assure que (si on suppose, comme on peut le faire toujours, que $u \geq k > 0$) ηu^β appartient à $\overset{\circ}{W}_\lambda(\Omega)$ $\forall \eta \in C_o^\infty(\Omega)$, et donc $(u,v) = 0$. Par des considérations analogues à celles de la démonstration du théorème 1, on a alors ($\beta \neq 0$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\eta \nabla_\lambda w|^2 dx \leq \begin{cases} c_1((\beta+1)/\beta)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_\lambda \eta|^2 w^2 dx & \text{si } \beta \neq -1 \\ c_1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_\lambda \eta|^2 dx, & \text{si } \beta = -1 , \end{cases} \tag{1.c}$$

où

$$w = \begin{cases} u^{(\beta+1)/2} & , \text{ si } \beta \neq -1 \\ \log u & , \text{ si } \beta = -1. \end{cases}$$

Si $0 < r_1 < r_2$, on peut choisir maintenant $\eta \in C_o^\infty(B_d(\bar{x},r_2))$ telle que $\eta \equiv 1$ dans $B_d(\bar{x},r_1)$ et telle que $|\nabla_\lambda \eta| \leq 2(r_2-r_1)^{-1}$. Pour $\beta > 0$ on peut alors répéter la méthode de la démonstration du théorème 1 et obtenir (1.a) (avec $R = 1$), tandis que la même technique pour $\beta \in]-1,0[$ et $\beta \in]-\infty,-1[$ nous donne que $\forall p,p_o$, $0 < p_o < p < \sigma$

$$\left(\int_{B_d(\bar{x},1)} u^p \, dx\right)^{1/p} \leq c_2 \left(\int_{B_d(\bar{x},c_3)} u^{p_o} dx\right)^{1/p_o} \quad \text{et}$$

$$\inf_{B_d(\bar{x},1/2)} u \geq c_4 \left(\int_{B_d(\bar{x},c_3)} u^{-p_o} dx\right)^{-1/p_o} ,$$

où c_2, c_3, c_4 dépendent seulement de p, p_o et de certaines quantités qui sont invariantes quand on passe de L à $L^{(\alpha)}$. Pour achever la démonstration de (1.b) il suffira alors de prouver qu'il existe $p_o \in]0,1[$ tel que

$$I = \left(\int_{B_d(\bar{x},c_3)} u^{p_o} dx\right) \left(\int_{B_d(\bar{x},c_3)} u^{-p_o} dx\right) \leq c_5.$$

D'autre part :

$$I \leqslant \int_{B_d(\bar{x},C_3)} \exp(p_o|w-w_{C_3}|)dx = p_o\int_o^{+\infty} \nu(s)\exp(p_o s)ds+\mu(B_d(x,C_3))$$

où w_{C_3} est la valeur moyenne de w en $B_d(\bar{x},C_3)$ et $\nu(s) = \mu(\{x\in B_d(\bar{x},C_3)$; $|w(x) - w_{C_3}| > s\})$. Pour prouver que $I \leqslant C_5$, il suffit, comme dans le cas non dégénéré, de prouver que $\nu(s) \leqslant C_6 \exp(-C_7 s)\ \mu(B_d(x,C_3))$ pour des constantes C_6 et C_7 convenables. Dans le cas non dégénéré on obtient cette estimation du théorème de John-Niremberg qui est balable aussi dans un espace de type homogène ([2] ,p. 594 ; voir aussi [1]). Pour appliquer ce théorème, il suffit de prouver que la fonction log u est à oscillation moyenne bornée relativement aux boules B_d ; cela est une conséquence de l'inégalité de Poincaré suivante

$$\int_{B_d(\bar{x},r)} |\log u - (\log u)_r|dx)^2$$

$$\leqslant C\, r^2\ \mu(B_d(\bar{x},r)) \int_{B_d(\bar{x},C_r)} |\nabla_\lambda(\log u)|^2\, dx$$

et de (1.c) avec $\beta = -1$.

L'inégalité de Poincaré, d'autre part, peut être prouvée par une méthode analogue à celle de la démonstration du théorème de plongement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - **N. BURGER** : "Espace des fonctions à variation moyenne bornée sur un espace de nature homogène". C.R. Acad. Sc. , Paris, Sér. A, 236 (1978), 139-142.

[2] - **R.R. COIFMAN - G. WEISS** : "Extensions of Hardy spaces and their use in analysis". Bull. Amer. Math. Soc., 83 (1077), 569-645.

[3] - **B. FRANCHI - E. LANCONELLI** : "Une métrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés". Actes du Colloque "Linear Partial and Pseudo Differential Operators". Torino 1982, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, à paraître.

[4] - **B. FRANCHI - E. LANCONELLI** : "Hölder regularity thoerem for a class of linear non uniformly elliptic operators with measurable coefficients". Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, à paraître.

[5] - **B. FRANCHI - E. LANCONELLI** : "An embedding theorem for Sobolev spaces related to non-smooth vector fields and Harnack inequality", à paraître.

[6] - **B. FRANCHI** : "Propriétés des courbes intégrales de champs de vecteurs et estimations ponctuelles d'équations elliptiques dégénérées". Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, à paraître.

[7] - **D. GILBARG - N.S. TRUDINGER** : "Elliptic partial differential equations of second order". Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, 1977.

[8] - **J. MOSER** : "A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations". Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), 457-468.