JEAN MÉMIN

# Théorèmes limite fonctionnels pour les processus de vraisemblance (cadre asymptotiquement non gaussien)

*Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, 1985, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 78-111
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985___1_78_0>

Publications de l'I.R.M.A.R. - RENNES 1985

# Théorèmes limite fonctionnels pour les processus de vraisemblance (cadre asymptotiquement non gaussien)

**Jean MEMIN**

**RESUME**

Des résultats de convergence fonctionnelle d'une suite de lois de semimartingales vers une loi de martingale à accroissements indépendants sont utilisés pour montrer la convergence en loi des processus de vraisemblance associés, ces résultats sont illustrés par différents exemples.

La situation traitée est différente du cadre classique où la loi limite est celle d'un processus gaussien continu.

Une condition de convergence des processus de Hellinger joue ici aussi un rôle important.

**mots clés** : Processus de vraisemblance, théorème limite fonctionnel, processus de Hellinger, processus à accroissements indépendants.

MR codification 60 F 17, 60 G, 60 H 05, 62 MXX.

# Théorèmes limite fonctionnels pour les processus de vraisemblance (cadre asymptotiquement non gaussien)

**Jean MEMIN**

## 1. Introduction :

La situation étudiée est la suivante :

On considère pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un objet :

$$(\Omega^n, F^n, (F^n)_t, P^n, \widetilde{P}^n)$$

où $(F^n)_t$ est une filtration continue à droite de $F^n$, avec $\bigvee_t (F^n)_t = F^n$ ; on note $Q^n$ la probabilité $Q^n = (P^n + \widetilde{P}^n) / 2$ ; et on note $z^n$, (resp : $\widetilde{z}^n$) le processus densité de Radon-Nikodym de $P^n$ relativement à $Q^n$ (resp : de $\widetilde{P}^n$ relativement à $Q^n$) ; c'est-à-dire que pour tout T temps d'arrêt relativement à $(F^n)_t$ on a :

$$z^n(T) \text{ (resp : } \widetilde{z}^n(T)\text{) égal à } (d\,P^n)_T/(d\,Q^n)_T \text{ (resp : } (d\,\widetilde{P}^n)_T/(d\,Q^n)_T$$

$(P^n)_T$, $(\widetilde{P}^n)_T$, $(Q^n)_T$ étant les restrictions de $P^n$, $\widetilde{P}^n$, $Q^n$ respectivement à $(\Omega^n, (F^n)_T)$. Le processus de vraisemblance de $P^n$ relativement à $P^n$ est le processus $Z^n = z^n / z^n$ ; $Z^n$ est défini sans ambiguité et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, en remarquant que $z^n(T) + \widetilde{z}^n(T) = 2$ pour tout temps d'arrêt T ; on suppose aussi que pour tout n, $(P^n)_0 = (\hat{P}^n)_0$. Il est facile de vérifier (voir par exemple [4] chap. 7 pour toutes ces questions) que $Z^n$ est une $P^n$-surmartingale ; c'est une martingale lorsque $\widetilde{P}^n$ est absolument continu par rapport à $P^n$.

On se propose de donner des conditions qui assurent la convergence étroite des lois de $Z^n$ sous $P^n$, (resp : sous $\tilde{P}^n$) ce que l'on notera :

$$\text{loi}\,(Z^n \mid P^n) \to (\text{resp : loi}\,(Z^n \mid \tilde{P}^n) \to)$$

au sens de la convergence étroite des probabilités sur l'espace $D_{[0,\infty[}(\mathbb{R})$ de Skorokhod, muni de sa tribu F des boreliens.

Quel type de limite peut on obtenir ? La réponse est simple ; grâce à une extension facile du 3ème lemme de LE CAM (voir pour le résultat de LE CAM par exemple [3], et pour l'extension [9] chap 10).

**1.1. Proposition :**

Soit $F_{0,t}$ la tribu sur D engendrée par les applications $x \to x(t)$ de D dans $\mathbb{R}$, et soit $F_t = \wedge_{\varepsilon \searrow 0} F_{0,t+\varepsilon}$. Soit $Z^n$ le processus de vraisemblance de $P^n$ relativement à $P^n$, on suppose que $\text{loi}(Z^n|P^n)$ converge vers $\mu$ loi sur (D,F) et que $\text{loi}(Z^n|\tilde{P}^n)$ converge vers $\tilde{\mu}$, alors $\mu$ est une loi de martingale sur $(D, F, F_t)$, positive et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ $E\mu\,[x(t)] = 1$.

Le cas étudié le plus fréquent est celui où la suite $\text{loi}(\log Z^n\, \mathbf{1}\, (\{Z^n > 0\}) \mid P^n)$, est asymptotiquement gaussienne, plus précisement celui ou relativement à une loi $\mathbb{P}$ de processus gaussien continu à accroissements indépendants, la loi de $\mu$ est celle du processus $Z^\infty$ où $Z^\infty(t) = \exp(x(t) - 1/2\, C(t))$, C étant le processus des variances de x. Ce cas fut initialement traité par L. LE CAM (voir par exemple [16] ), dans un cadre non fonctionnel, puis par de nombreux statisticiens. Récemment des résultats fonctionnels ont été obtenus, utilisant des méthodes basées sur la théorie générale des processus ; on peut citer les travaux de GREENWOOD-SHIRYAYEV (1983) [2], les filtrations $(F^n)_t$ considérées sont alors discrètes, ceux de KORDZAKHIA (1984) [19] et VOSTRIKOVA (1985) [15], puis celui de JACOD-SHIRYAYEV [9] en 1986.

Lorsque l'on veut généraliser ces études on est conduit à considérer un processus limite $Z^{\infty}$ pouvant être représenté sous la forme d'une exponentielle (de Doléans) de x, où x est un processus à accroissements indépendants (et pas nécessairement gaussien) c'est ce cas que nous allons aborder. Ce cadre est aussi étudié dans [9], à la fin du chapitre 10, les résultats étant de même nature.

Les techniques utilisées sont comme pour [2], [15], [19], [9] basées sur des notions de théorie générale des processus que l'on peut trouver par exemple dans [4], et sur des résultats de "statistique de processus" figurant dans [2], [5], [1], [8], [10], [13] et surtout dans le livre à paraitre [9]. En particulier le processus de Hellinger d'indice 1/2 associé aux probabilités $P^n$ et $\tilde{P}^n$ (exhibé et étudié notamment dans [5], [10], [13], [17] joue un grand rôle ; ce qui n'est pas surprenant étant donné la place qu'il occupe déjà pour les questions d'absolue continuité, contiguité, ou distance en variation.

Les hypothèses et résultats essentiels sont donnés aux paragraphes 3 et 4 respectivement ; les démonstrations sont faites au cours des paragraphes 5, 6, 7 ; on donne notamment dans 6 une propriété de continuité (pour la topologie de Skorokhod) de certaines exponentielles de Doléans ; ce résultat a un intérêt en soi.

Dans le dernier paragraphe on considère divers exemples correspondant à différents types de lois de Probabilité $P^n$(resp : $\tilde{P}^n$) : cas de filtrations discrètes, lois dominées par des lois de processus à accroissements indépendants, loi correspondant à des processus ponctuels simples.

## 2. Notations et rappels :

Soit $(\Omega, F, F_t)$ une base stochastique et P, $\tilde{P}$ des probabilités définies sur $(\Omega, F)$, Q une probabilité dominant P et $\tilde{P}$ ; on suppose que chaque $F_t$ contient les ensembles de Q-probabilité nulle de F, et que $(F_t)$ est continue à droite avec $F = V_t F_t$ ; on va donner quelques propriétés reliant le processus de vraisemblance Z de $\tilde{P}$ relativement à P, au processus de Hellinger d'indice 1/2 associé à P et $\tilde{P}$.

On note Rp, $\tilde{R}p$, Tp les temps d'arrêts :

$Rp = \inf\{t : z(t) \leqslant 1/p\}$, $\tilde{R}p = \inf\{t : \tilde{z}(t) \leqslant 1/p\}$, $Tp = \inf\{t : Z(t) \leqslant 1/p\}$

$\Gamma$ et $\tilde{\Gamma}$ désignant les ensembles $U_p\,[0, Rp]$, et $U_p\,[0, \tilde{R}p]$

on sait que ( [4] , chap 7) :

$$\Gamma = \{(t,\omega) : z(t-)(\omega) > 0\} = \{(t,\omega) : Z(t-) < \infty\}$$

$$\tilde{\Gamma} = \{(t,\omega) : \tilde{z}(t-)(\omega) > 0\} = \{(t,\omega) : Z(t-) > 0\}$$

on notera $\Gamma' = \Gamma \cap \tilde{\Gamma}$ ; et $\Gamma' = \{(t,\omega) : 0 < Z(t-)(\omega) < \infty\}$

On note h le processus de Hellinger d'indice 1/2 (écrit h(1/2) ou h(1/2, P, $\tilde{P}$) dans [5] , [10] , [13] ) ; h est l'unique (sur $\Gamma'$ à une Q-indistinguabilité près) processus croissant prévisible tel que l'on ait :

(1) $(z\tilde{z})^{1/2} - 1 + (z_-\tilde{z}_-)^{1/2} \,.\, h$ est une Q-martingale uniformément intégrable ; (la notation . désigne l'intégration stochastique) ; de plus h admet une version qui possède la propriété $h = \mathbf{1}(\Gamma') \,.\, h$ ( [5] ) ; de ce qui précède on déduit que pour deux versions différentes h et h' du processus de Hellinger on a :

$$h^{Rp\wedge\tilde{R}p} = h'^{Rp\wedge\tilde{R}p} \quad \text{à une Q-indistinguabilité près.}$$

Du fait que $\int (Z)^{1/2} dP = \int (z\tilde{z})^{1/2} dQ$ et que si X est une P-martingale uniformément intégrable Xz est une Q-martingale uniformément intégrable, on peut obtenir (1) et l'existence de h par la caractérisation suivante : h est l'unique (sur $\Gamma'$ à une P-indistinguabilité près) processus croissant prévisible tel que l'on ait :

(1') $Z^{1/2} - 1 + (Z_-)^{1/2} . h$ est une P-martingale uniformément intégrable. La démonstration de l'existence de (1') se conduit exactement de la même façon que celle de (1) ; la seule remarque à faire est que l'on obtient ici la P-indistinguabilité sur $\tilde{\Gamma}$ puisque $P[z = 0] = 0$ ; et l'on a pour deux versions différentes h et h' l'égalité pour tout p, $h^{Tp} = h'^{Tp}$ à une P-indistinguabilité près.

Notons $Z^c$ la partie P-martingale continue de Z, $\nu_Z$ la troisième caractéristique locale de Z ; h admet sur $\tilde{\Gamma}$ la représentation :

(2) $h = 1/8\,(1/Z^2) . [Z^c, Z^c] + 1/2\,(1 - (1 + y/Z_-)^{1/2})^2 * \nu_Z + (1/2Z_-) . A$

( $[Z^c, Z^c]$ ) désigne la variation quadratique de $Z^c$ et $*$ l'intégration par rapport à la mesure aléatoire $\nu_Z(dy, dt)$, A est le processus croissant prévisible figurant dans la décomposition de Doob-Meyer de Z comme P-surmartingale.)

Cette formule (2) figure dans le chapitre 3 de [9] lorsque Z est densité de Radon-Nikodym (avec donc A = 0) ; utilisant la formule de Ito pour une fonction de classe $c^2$ coincidant avec $x \to x^{1/2}$ sur $[1/p, p]$, on obtient (2) sur $[0, Tp]$, donc par recollement sur $\tilde{\Gamma}$ ; voir la démonstration du lemme suivant 2.1.

Le lemme 2.1 montre comment $Z^{1/2}$ peut s'exprimer comme exponentielle de Doléans à l'aide de h ; on notera dol(X) l'exponentielle de Doléans de X pour X semi-martingale; dol(X) est la solution de l'équation différentielle stochastique $U = 1 + U_- . X$ , $U_0 = 1$

dont l'expression explicite est :

(3) $U(t) = \exp\left(X(t) - 1/2\,[X^c, X^c](t)\right) \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X(s)) \exp(-\Delta X(s))$

$\Delta X(s)$ désignant le saut de X en s, $\Delta X(s) = X(s) - X(s-)$.

(3) a encore un sens si X n'est pas une semi-martingale, mais un processus cadlag admettant une variation quadratique, $[X^c, X^c]$ désignant alors la partie continue de cette variation quadratique.

**2.1 Lemme :**

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a :

(4) $(Z^{Tp})^{1/2} = \mathrm{dol}(N^p - h^{Tp}) = \mathrm{dol}(X^p)$

où $X^p$ est une semi-martingale localement de carré intégrable s'exprimant par :

(5) $X^p = (1/2Z\_) \cdot Z^{Tp} - (1/8(Z\_)^2) \cdot [Z^c, Z^c]^{Tp} + ((1 + y/Z\_)^{1/2} - 1 - y/2Z\_) * (\mu_Z)^{Tp}.$

$N^p$ est une P-martingale locale localement de carré intégrable de partie continue $(1/2Z\_) \cdot Z^{c,Tp}$, et d'amplitude de saut en un temps d'arrêt S donnée par :

(5') $\Delta N^p(S) = \Delta\left[((1 + y/Z(S-))^{1/2} - 1) * (\mu_Z - \nu_Z)^{Tp}\right](S) - (\Delta A^{Tp}(S)/2Z(S-))$

$-1/(2\, Z(S-)) * (\nu_Z)^{Tp}\{S\}$

$\mu_Z$ désignant la mesure des sauts de Z, $f * \nu(t)$ désignant l'intégrale $(f\,\mathbf{1}([0,t])) * \nu$ et $f * \nu_Z\{s\}$ le saut $\Delta(f * \nu_Z(s))$.

Notant $\langle X^p, X^p\rangle$ le processus croissant compensateur prévisible de la variation quadratique $[X^p, X^p]$ de $X^p$ on a :

(6) $\langle X^p, X^p\rangle = \langle N^p, N^p\rangle + \sum_s (\Delta h^{Tp}(s))^2$

(6') $\langle N^p, N^p\rangle = 2h^{Tp} - \sum_s (\Delta h^{Tp}(s))^2 - (1/Z\_) \cdot A^{Tp}$

Démonstration :

Utilisant la représentation $(Z^{Tp})^{1/2} = 1 + L - (Z\_)^{1/2} \cdot h^{Tp}$ et

définissant $N^p$ par $N^p = ((1/Z^{Tp})\_)^{1/2} \cdot L$, on obtient :

$(Z^{Tp})^{1/2} = 1 + ((Z^{Tp})\_)^{1/2} \cdot (N^p - h^{Tp})$ d'où la formule (4).

Appliquant la formule de Ito pour $F(x) = x^{1/2}$ on a alors :

$$(Z^{Tp})^{1/2} = 1 + (1/2)((Z^{Tp})\_)^{1/2}(1/Z\_) \cdot Z^{Tp} - (1/8)((Z^{Tp})\_)^{1/2}\, 1/Z^2 \cdot [Z^c, Z^c]^{Tp}$$

$$+ \sum_s (Z^{Tp}(s-))^{1/2} [((1+(\Delta Z^{Tp}(s)/Z^{Tp}(s-)))^{1/2} - 1) - (1/2Z^{Tp}(s-))\, \Delta Z^{Tp}(s)]$$

$$= 1 + ((Z^{Tp})\_)^{1/2} \cdot X^p$$ d'où la formule (5).

On montre que $X^p$ est localement de carré intégrable, en calculant sa variation quadratique $[X^p, X^p]$ et en montrant que celle ci est localement intégrable et admet donc un compensateur prévisible :

D'après (5) il est clair que :

$$[X^p, X^p] = (1/4Z^2\_) \cdot [Z^c, Z^c]^{Tp} + ((1 + y/(Z^{Tp})\_)^{1/2} - 1)^2 * (\mu_Z)^{Tp}$$

et $(\Delta X^p(s))^2$ se comporte comme $\Delta Z^{Tp}(s)/Z^{Tp}(s-)$ pour $\Delta X^p(s)$ grand, or $\Delta Z^{Tp}(s)/Z^{Tp}(s-)$ est majoré par $p|\Delta Z^{Tp}(s)|$ et $|\Delta Z^{Tp}(s)|$ est majoré par $p + |Z^{Tp}(s)|$ qui est intégrable ; on a donc bien la locale intégrabilité de $[X^p, X^p]$ d'où l'existence de $< X^p, X^p>$.

Maintenant $[X^p, X^p] = [N^p, N^p] - 2\,[N^p, h^{Tp}] + [h^{Tp}, h^{Tp}]$ comme $[N^p, h^{Tp}]$ est une P-martingale locale et que $[h^{Tp}, h^{Tp}]$ s'écrit $\sum_s (\Delta h^{Tp}(s))^2$ (qui est localement intégrable) on a l'égalité (6), et le caractère localement de carré intégrable de $N^p$, écrivant alors :

$$< X^p, X^p> = 1/4(Z\_)^2 \cdot [Z^c, Z^c]^{Tp} + ((1 + y/Z\_)^{1/2} - 1)^2 * (\nu_Z)^{Tp}$$

on obtient $< X^p, X^p> = 2\,h^{Tp} - (1/Z\_) \cdot A^{Tp}$

Compte tenu de (6) on en déduit (6').

**2.2 Remarque :**

Notons $N'^p$ la P-martingale locale.

$$N'^p = (1/2Z_-) \cdot Z^{c,Tp} + ((y/Z_- + 1)^{1/2} - 1) * (\mu_Z - \nu_Z)^{Tp}$$

lorsque $\tilde{P} \ll P$, Z est une P-martingale locale et donc A = 0 et

$y/Z_- \cdot \nu_Z\{s\} = 0$, de sorte que N = N'.

D'autre part lorsque Z est quasicontinue à gauche, $t \to A(t)$ est continue, et $\nu_Z\{s\} = 0$ pour tout temps d'arrêt S, on a encore $N^p = N'^p$, puisque $N^p$ et $N'^p$ ont la même partie continue et les mêmes sauts.

Il serait agréable de prolonger les formules (4), (5), (6) à l'ensemble $\tilde{\Gamma}$ ou à $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ tout entier ; malheureusement si le processus $N^p$ peut se prolonger en un processus N sur $\tilde{\Gamma}$ et donc également sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, ce processus est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ (et non dans $\mathbb{R}$) et n'a aucune raison d'être une P-martingale locale en général ; on verra par la suite comment on peut en fait (avec les hypothèses faites) se contenter de l'étude de Z et h sur les intervalles $[0, Tp]$

## 3. Données et hypothèses :

On considère sur (D, F, $(F_t)$) une loi $\mathbb{P}$ de martingale M, processus à accroissements indépendants (p. a. i.) de caractéristiques $(b,c,\nu)$ ; on suppose que M est un p. a. i. sans discontinuités fixes, ce qui au niveau des caractéristiques se traduit par le fait que $t \to b(t)$ est continu, et que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\nu(\{t\} \times \mathbb{R} - \{0\}) = 0$ ; on suppose en outre que $\Delta M > -1$ et notant H le processus croissant défini par :

$$H(t) = 1/8\, c(t) + 1/2\, ((y+1)^{1/2} - 1)^2 * \nu(t)$$

on suppose que : $H(\infty) < \infty$.

on note enfin : $Z^{\infty} = \text{dol}(M)$.

Avec ces données on a le résultat suivant :

## 3.1 Lemme :

$Z^{\infty}(\infty)$ définit une densité de probabilité ; la probabilité :

$\tilde{\mathbb{P}} = Z^{\infty}(\infty) \,.\, \mathbb{P}$ est équivalente à $\mathbb{P}$.

Démonstration :

En notant $N = 1/2\, M^c + ((y+1)^{1/2} - 1) * (\mu_M - \nu)$, N s'écrit :

$$N = 1/2 Z_- \,.\, Z^{\infty,c} + ((y/Z_-)^{1/2} - 1) * (\mu_Z - \nu_Z)$$

et $H_t = 1/8\,(1/Z)^2 \,.\, [Z^{\infty,c}, Z^{\infty,c}](t) + 1/2\,(1 + (1 + y/Z_-)^{1/2})^2 * \nu_Z(t)$

on a d'après le lemme 2.1 $(Z^{\infty})^{1/2} = \text{dol}(N)\exp(-H)$ car $t \to H(t)$ est continue ; comme $\langle N,N \rangle(\infty) = 2H(\infty)$, l'hypothèse $2H(\infty) < \infty$ implique (voir par exemple : lemme v-2 a) de [11] ) que dol(N) est de carré intégrable ; H étant croissant on a :

$$E_{\mathbb{P}}[\sup_t Z^{\infty}(t)] \leqslant E_{\mathbb{P}}[\sup_t (\text{dol}(N)(t))^2]$$
$$\leqslant 4\,E_{\mathbb{P}}[(\text{dol}(N)(\infty))^2] < \infty$$

(d'après l'inégalité de Doob).

$Z^{\infty}$ est donc une martingale locale positive de classe $\mathbf{H}^1$, comme $Z^{\infty}(o) = 1$ on a $E_{\mathbb{P}}[Z^{\infty}(\infty)] = 1$, d'où la première assertion ; on montre alors que $Z^{\infty}(\infty) > 0$ $\mathbb{P}$. p. s. : $H(\infty) < \infty$ implique $\exp(-H(\infty)) > 0$, et (N(t)) converge $\mathbb{P}$. p. s. vers une v. a. $N(\infty)$ $\mathbb{P}$. p. s. finie ; comme on en déduit également que $\sum_s (\text{Log}\,(1 + \Delta N(s)) - \Delta N(s)) > -\infty$ on a le résultat désiré, d'où l'équivalence de $\tilde{\mathbb{P}}$ et de $\mathbb{P}$.

Pour chaque n on note $h^n$ une version quelconque du processus de

Hellinger relatif à $P^n$ et $\tilde{P}^n$; Tn désigne le temps d'arêt $\inf \{t : Z^n(t) \leq 1/n\}$ et $Sn = (Tn) \wedge \inf \{t: h^n(t) > H(\infty) + 1\}$.

On considère alors les hypothèses suivantes :

$H_1$: pour tout $t < \infty$ $\quad h^n(t) \xrightarrow{P^n} H(t)$

$H_2$ : pour tout $t < \infty$ $\quad$ tout $\eta > 0$

$$\lim_{a \uparrow \infty} \limsup_n P^n \Big[ \big((y/(Z^n)_- + 1)^{1/2} - 1\big)^2 \, 1\big(\{|(y/(Z^n)_- + 1)^{1/2} - 1| > a\}\big) * (\nu_Z n)^{Sn}(t) + 1/(Z^n)_- \,.\, A^{n,Sn}(t) > \eta \Big] = 0$$

$H_3$ : pour tout $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, bornée, continue, admettant une limite à l'infini, nulle dans un voisinage de 0 (on notera cet ensemble de fonctions $C_0$, pour tout $t < \infty$:

$$g(y/(Z^n)_-) * (\nu_Z n)(t) \xrightarrow{P^n} g(y) * \nu_M(t)$$

## 4. Enoncé des résultats :

### 4.1 Théorème :

Sous les hypothèses $H_1$, $H_2$, $H_3$ la suite $(\mathrm{loi}(Z^n | P^n))$ converge vers $\mathrm{loi}(Z^\infty | \mathbb{P})$.

### 4.2 Théorème :

Sous les hypothèses $H_1$, $H_2$, $H_3$ la suite $(\mathrm{loi}(Z^n | \tilde{P}^n))$ converge vers $\mathrm{loi}(Z^\infty | \tilde{\mathbb{P}})$.

**4.3 Corollaire (Normalité asymptotique) :**

On suppose que M admet (0,c,0) comme caractéristiques (c'est-à-dire que M est une martingale gaussienne continue de variance c) alors sous $H_1$ et sous l'hypothèse $H'_2$ suivante :

$H'_2$ : pour tout $t < \infty$, tout $a > 0$, tout $\eta > 0$

$$\limsup_n P^n\Big[((y/(Z^n)_- + 1)^{1/2} - 1)^2 1(\{|(y/(Z^n)_- + 1)^{1/2} - 1| > a\}) * (\nu_Z n)^{Sn}(t) > \eta\Big] = 0$$

(loi $(Z^n|P^n)$) converge vers loi$(Z|\mathbb{P})$ où $Z = \exp(M - 1/2\, c)$ ; et loi$(Z^n|P^n)$ converge vers loi$(Z|\mathbb{P})$ avec $Z = \exp(M + 1/2\, c)$).

**4.4 Corollaire (caractère poissonnien asymptotique)**

On suppose que M admet pour caractéristiques $(0,0,\nu)$ où $\nu(ds,dy) = ds\, \varepsilon_1(dy)$, alors sous $H_1$ et sous la condition $H_4$ suivante, on a les résultats de convergence des théorèmes 4.1 et 4.2.

$H_4$ : pour tout $\varepsilon > 0$, tout $\eta > 0$, tout $t < \infty$

$$\limsup_n P^n[|(y/(Z^n)_- + 1)^{1/2} - 1| 1(\{|(y/(Z^n)_- + 1)^{1/2} - \sqrt{2}| > \varepsilon\}) * (\nu_Z n)^{Sn}(t) > \eta] = 0$$

et $\left|(y/(Z^n)_- + 1)^{1/2} - 1\right| 1(\{\left|(y/(Z^n)_- + 1)^{1/2} - \sqrt{2}\right| \leq \varepsilon\}) * (\nu_Z n)^{Sn}(t) \xrightarrow{P^n} (\sqrt{2} - 1)t.$

## 5. Début de la démonstration du théorème 4.1 :

**5.1 Lemme :**

Sous les hypothèses $H_1$ et $H_3$ on a la relation de contiguité pour tout $t < \infty$ :
$$((P^n)_t) \lhd ((\widetilde{P}^n)_t)$$

Pour montrer ce lemme, on utilise le résultat suivant de contiguité.

## 5.2 Proposition :

Soit $t < \infty$ , on a la propriété de contiguité $((P^n)_t) \lhd ((\tilde{P}^n)_t)$ lorsque les conditions suivantes $CT_1$ et $CT_2$ sont satisfaites :

$(CT_1)$ : $\lim_{N\uparrow\infty} \limsup_n P^n [h^{n,Tn}(t) > N] = 0$

pour tout $\eta > 0$

$(CT_2)$ : $\lim_{N\uparrow\infty} \limsup_n P^n [\mathbf{1}(\{1 + y/(Z^n)_- < 1/N\}) * (\nu_Z n)(t) > \eta] = 0$

Démonstration de la proposition 5.2 :

Ce résultat est une variante des conditions suffisantes (et aussi nécessaires) figurant dans [5] (théorème 5.1) et dans [17] (théorème 1). Cependant comme la transcription de ces résultats en $(CT_1)$ et $(CT_2)$ n'est pas complètement évidente, il est préférable d'esquisser une démonstration directe.

En premier rappelons que la condition de contiguité $((P^n)_t) \lhd ((\tilde{P}^n)_t)$ est équivalente (voir par exemple [3]) à la condition de tension suivante :

(CT) : $\lim_{a\downarrow 0} \liminf_n P^n [ Z^n(t) \leq a ] = 0$

impliquée évidemment par :

$$\lim_{a\downarrow 0} \liminf_n P^n [\inf_{s\leq t} Z^n(s) \leq a ] = 0$$

et donc par :

$$\lim_{a\downarrow 0} \liminf_n P^n [\inf_{s\leq t} \mathrm{dol}(N^n - h^{n,Tn})(s) \leq a] = 0$$

Cette dernière condition est réalisée lorsque l'on a la conjonction (a) et (b) suivante :

(a) $\lim_{a\downarrow 0} \liminf_n P^n [\inf_{s\leq t} \exp(N^n - h^{n,Tn})(s) \leq a ] = 0$

(b) $\lim_{a\downarrow 0} \liminf_n P^n[\inf_{s\leq t} \prod_{u\leq s}(1 + \Delta X^n(u))\exp(-\Delta X^n(u)) \leq a ] = 0$

Utilisant l'inégalité de Lenglart [18], on obtient facilement (voir par exemple les lemmes 2.5 et 2.6 de [14]).

"$\lim_{a \searrow 0} \liminf_n P^n [\inf_{s \leq t} (N^n - h^{n,Tn})(s) \leq \log a] = 0$"

impliquée par :

"$\lim_{N \nearrow \infty} \limsup_n P^n [< N^n, N^n > (t) + h^{n,Tn}(t) \geq N] = 0$"

et donc, en utilisant l'égalité (6'), par :

"$\lim_{N \nearrow \infty} \limsup_n P^n [ h^{n,Tn}(t) \geq N ] = 0$"

ce qui est ($CT_1$).

Pour obtenir (b), on remarque que ($CT_2$) est équivalente (voir aussi l'inégalité de Lenglart version Rebolledo [18]) à :

$$(CT'_2) : \begin{cases} \text{pour tout } \eta > 0 \\ \text{"}\lim_{N \nearrow \infty} \limsup_n P^n \Big[ \sum_{s \leq t} \mathbf{1}(\{\Delta Z^n(s) \neq 0\}) \\ \qquad \mathbf{1}(\{Z^n(s) / Z^n(s\_) < 1/n\} \cap \{Z^n(s\_) > 0\}) > \eta \Big] = 0. \end{cases}$$

Soit donc N fixé ; soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0$ tel que $n \geq n_0$ implique $\inf_{s \leq t \wedge Tn} (Z^n(s) / Z^n(s\_))^{1/2} \geq 1/N$ avec une probabilité supérieure à $1 - \varepsilon$.

Ce qui se traduit par :

$\inf_{s \leq t \wedge Tn} \Delta X^n(s,\omega) \geq -1 + 1/N$ pour $\omega \in \Omega^{n,\varepsilon}$

avec $P^n[\Omega^{n,\varepsilon}] \geq 1 - \varepsilon$ ; pour $\omega \in \Omega^{n,\varepsilon}$, il existe k avec :

$\prod_{u \leq s} (1 + \Delta X^n(u)) \exp(-\Delta X^n(u)) \geq \exp(-k \sum_{s \leq t} (\Delta X^n(s))^2)$

de sorte que sur $\Omega^{n,\varepsilon}$ on a :

"$\lim_{a \searrow 0} \liminf_n P^n [\inf_{s \leq t} \prod_{u \leq s} (1 + \Delta X^n(u)) \exp(-\Delta X^n(u)) \leq a] = 0$"

est impliquée par :

"$\lim_{a \searrow 0} \limsup_n P^n [k \sum_{s \leq t} (\Delta X^n(s))^2 \geq -\log a] = 0$"

encore impliquée par ([14] lemme 2.5)

" $\lim_{a \downarrow 0} \limsup_n P^n[k < X^n, X^n > (t) \geq -\log a] = 0$"

et donc d'après l'égalité (6), par

"$\lim_{a \downarrow 0} \limsup_n P^n[3k\, h^{n,Tn}(t) \geq -\log a] = 0$"

donc par ($CT_1$) ; ce qui termine la démonstration □.

Démonstration du lemme 5.1 :

La condition ($CT_1$) découle évidemment de la condition $H_1$. Prenons maintenant $g^N$ satisfaisant aux données de $H_3$ et tel que

$g_N(y) = \mathbf{1}([y \leq -1 + 1/N])$ pour $y \leq -1 + 1/N$ ou pour $y > -1 + 2/N$

on peut étant donné $\varepsilon > 0$, trouver N tel que d'après $H_3$ on ait pour tout $\eta > 0$

$\limsup_n P^n[\mathbf{1}([1+(y/(Z^n)_-) \leq 1/N]) * (\nu_Z n)(t) > \eta] \leq \varepsilon$

d'où le résultat □.

**5.3 Remarque :**

Ce résultat de contiguité montre que pour tout $t < \infty$ on a $P^n[Tn \leq t] \to 0$ et que pour toute autre version $h'^n$ du processus de Hellinger relatif à $P^n$ et $\tilde{P}^n$ on a à partir de $H_1$ la convergence : "pour tout $t < \infty$, $h'^n(t) \xrightarrow{P^n} H(t)$".

En effet, utilisant la décomposition de Lebesgue de $\tilde{P}^n$ par rapport à $P^n$ et avec $Z^n(\infty)$ on a :

$$\tilde{P}^n[[(Tn) \leq t] \cap [Z^n(\infty) < \infty]] = \int_{[(Tn) \leq t]} Z^n(\infty)\, d P^n$$

$$\leq \int_{[(Tn) \leq t]} Z^n(Tn)\, dP^n \leq 1/n$$

de sorte que $\tilde{P}^n\ [\{(Tn)\leqslant t\} \cap \{\ Z^n(\infty) < \infty\ \}] \to 0$ ; par contiguité on en déduit que $P^n\ [\{\ Tn\leqslant t\} \cap \{\ Z^n(\infty) < \infty\ \}] \to 0$, et comme $P^n\ [Z^n(\infty) < \infty] = 1$ on a donc $P^n\ [(Tn)\leqslant t] \to 0$ et donc aussi $P^n\ [h'^n(t) \neq h^n(t)\ ] \to 0$.

**5.4 Proposition :**

Soit sur $(D, F, F_t, \mathbb{P})$ la martingale N définie par :

$$N = 1/2\, M^c + ((y+1)^{1/2} - 1\ ) * (\mu_M - \nu)\ ;$$

et pour chaque n on considère sur $(\Omega^n, F^n, (F^n)_t, P^n)$ la semi martingale $X^n$ définie par :

$$X^n = 1/((2Z^{Sn})\_)\ .\ Z^{n,Sn} - (1/8)(1/((Z^{n,Sn})\_)^2\ .\ [Z^{n,c}, Z^{n,c}]$$

$$+ [((1 + y/(Z^{n,Sn})\_)^{1/2} - 1) - y/((2Z^{n,Sn})\_)] * (\mu_{Z^n})$$

et notons $N^n - h^{n,Sn}$ la décomposition de $X^n$.

Sous $H_1$, $H_2$, $H_3$ on a les convergences :

(C1) : loi $(X^n \mid P^n) \to$ loi $(N - H \mid \mathbb{P})$

(C2) : loi $((X^n, [X^n, X^n]) \mid P^n) \to$ loi $((N - H, [N\text{-}H, N - H]) \mid \mathbb{P})$

<u>Démonstration :</u>

Le premier point que l'on peut signaler est que compte tenu de la remarque précédente 5.3, on a pour tout $t < \infty$ d'après $H_1$ non seulement $h^n(t)$ --$P^n$--> $H(t)$ mais aussi $h^{n,Sn}(t)$ --$P^n$--> $H(t)$.

On va alors appliquer un théorème de convergence fonctionnel pour des semimartingales, localement de carré intégrable, la loi limite étant celle d'une semimartingale p.a.i. sans discontinuité fixes ; la version qui convient ici et qui est un corollaire des résultats de [8] figure dans Jacod ([6], chapitre 3, prop 2.15) ; La condition (i) de cette proposition est impliquée par $H_2$ ; $H_1$ et la convergence signalée $h^{n,Tn}(t) \text{ --}P^n\text{--> } H(t)$ impliquent compte tenu de l'égalité (6) du lemme 2.1 la convergence :

pour tout $t < \infty$, $< N^n, N^n >(t) \text{ --}P^n\text{--> } < N , N >(t)$.

En effet, la croissance de $h^n$ (resp : H) en t, et la convergence pour chaque t de $h^n(t)$ vers H(t) montre que l'on a une convergence uniforme (en t) en probabilité de $h^n$ vers H : $(\sup_{s\leqslant t} |h^n(s) - H(s)| \text{ --}P^n\text{--> } 0)$ ; Donc $\sum_{s\leqslant t} (\Delta\ h^n(s))^2 \to 0$ puisque $t \to H(t)$ est continue. Enfin $H_2$ implique en particulier que $1/(Z^n)_- \cdot A^n(Sn) \text{ --}P^n\text{--> } 0$ ; d'où cette convergence $< N^n, N^n >(t) \text{ --}P^n\text{--> } < N , N >(t)$, ce qui donne la condition (j') de l'énoncé de la proposition 2.15 de [6] ; La condition (sup $\beta$') de 2.15 de [6] est avec $H_1$ satisfaite car $X^n$ et N - H ont pour dérives les processus croissants $h^{n,Sn}$ et H ; enfin la condition ($\delta$) sur les sauts de $X^n$ et de N - H n'est pas autre chose que $H_3$ ; ceci nous donne donc le résultat (C 1) de convergence annoncé.

Venons-en à la dernière convergence (C 2) ; pour la montrer nous allons encore utiliser le cours [6], plus précisément appliquer le théorème 1.1 et la remarque 1.6 : 1) du chapitre 5 ; ce théorème (et cette remarque) donne des conditions qui assurent l'implication :

$$\left(\text{loi}\,(X^n \,|\, P^n) \to \text{loi}\,(X \,|\, \mathbb{P})\right) \quad \Rightarrow$$
$$\left(\text{loi}\,((X^n, [X^n, X^n]) \,|\, P^n) \to \text{loi}\,((X, [X, X]) \,|\, \mathbb{P})\right)$$

lorsque $X^n$ et $X$ sont des processus cadlag admettant une variation quadratique $[X^n, X^n]$, et $[X, X]$ respectivement.

Soit la fonction de troncation k, où $k(y) = y\, \mathbf{1}(\{\, |y| \leqslant a\,\})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, où a est choisi tel que $a > 1$.

Posons :

$X^{n,a} = \sum_s \Delta X^n(s) \mathbf{1}(\{|\Delta X^n(s)| > a\})$ ; alors on peut écrire la décomposition $X^n - X^{n,a} = L^n + V^n$ où $L^n$ est une $P^n$ martingale locale et $V^n$ un processus à variation finie prévisible.

La condition donnée dans l'énoncé du théorème 1.1 du chapitre 5 de [6] est la suivante :

pour tout $t < \infty$, $\lim_{b \nearrow \infty} \sup_n P^n [\text{ variation } (V^n)(t) > b\,] = 0$.

On va montrer que cette condition est satisfaite ; compte tenu du lemme 2.1 le processus $X^n$ peut s'écrire : (en omettant Tn) :

$$X^n = 1/(2(Z^n)_-) \,.\, Z^n - 1/(8((Z^n)_-)^2) \,.\, [Z^{n,c}, Z^{n,c}]$$
$$- 1/2 \sum_s ((1 + (\Delta Z^n(s) / Z^n(s_-)))^{1/2} - 1)^2$$

et donc $\Delta X^n = ((1 + y/(Z^n)_-)^{1/2} - 1) * \mu_{Z^n}$ ;

on a alors :

$$X^{n,a} = ((1 + y/(Z^n)_-)^{1/2} - 1)\, \mathbf{1}(\{\, |(1 + y/(Z^n)_-)^{1/2} - 1\,| > a\,\}) * (\mu_{Z^n})$$

et $X^n - X^{n,a} = N^n - h^n - ((1 + y/(Z^n)_-)^{1/2} - 1)\, \mathbf{1}\{\, |(1 + y/(Zn)-)^{1/2}$

$- 1\,| > a\,\} * (\mu_{Z^n})$

L'arrêt en Sn montre que :

$((1 + y/(Z^n)_-)^{1/2} - 1)\, \mathbf{1}\{\, |(1 + y/(Z^n)_-)^{1/2} - 1\,| > a\,\} * (\mu_{Z^n})$

est de carré intégrable car :

$$E[(((1+y/(Z^n)_-)^{1/2}-1)\,\mathbf{1}\{|(1+y/(Z^n)_-)^{1/2}-1|>a\} * (\nu_Z n)^{Sn}(\infty))^2]$$

$$\leqslant E[((1+y/(Z^n)_-)^{1/2}-1)^2 * (\nu_Z n, Sn)(\infty)] \leqslant 2E[h^{n,Sn}(\infty)]$$

$$\leqslant 2H(\infty)+2$$

d'où :

$$V^n = -h^n - ((1+y/(Z^n)_-)^{1/2}-1)\,\mathbf{1}(\{|(1+y/(Z^n)-)^{1/2}-1|>a\}) * (\nu_Z n)$$

et la variation de $V^n$ notée Var $(V^n)$ est majorée par :

$$\mathrm{Var}(V^n)(t) \leqslant 3\,h^{n,Sn}(t).$$

La convergence $h^{n,Tn}(t) \xrightarrow{P^n} H(t)$ implique évidemment que pour tout t $\lim_{b\nearrow\infty} \sup_n P^n[h^{n,Tn}(t)>b]=0$, on a donc la condition voulue, et la convergence (C 2) découle de (C 1).

## 6. Continuïté des exponentielles de Doleans et fin de la démonstration du théorème 4.1 :

Le résultat suivant de convergence des exponentielles de Doleans, qui étend les résultats connus jusqu'à présent (voir [7]), nous permettra d'en terminer avec la démonstration du théorème 4.1.

### 6.1 Proposition :

Soit $(X^n)$ défini pour chaque n sur $(\Omega^n, F^n, P^n)$, X sur (D, F, $\mathbb{P}$) tels que $X^n$ et X soient respectivement des $P^n$ et $\mathbb{P}$ semimartingales à valeurs réelles ; ( ou plus généralement des processus admettant $P^n$ - p.s. et $\mathbb{P}$-p.s une variation quadratique) ; on suppose que $P^n$-p.s $\Delta X^n \geqslant -1$ et $\Delta X > -1$ $\mathbb{P}$ p.s.

Sous l'hypothèse : loi $((X^n, [X^n, X^n]) \mid P^n) \to$ loi $(X, [X, X]) \mid \mathbb{P})$

on a la convergence :

(7) loi $((X^n, \text{dol}\,(X^n), [X^n, X^n]) \mid P^n) \to$ loi $(X, \text{dol}\,(X), [X, X]) \mid \mathbb{P})$.

Démonstration :

On commence par choisir $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ avec

$\mathbb{P}[\exists t, \Delta X(t) = \varepsilon] = 0$ ;

on note $X^{n,\varepsilon}(t) = X^n(t) - \sum_{s \leqslant t} \Delta X^n(s)\, \mathbf{1}(\{|\Delta X^n(s)| > \varepsilon\})$

et on pose

$$Y^n(t) = X^n(t) - 1/2\, [X^{n,\varepsilon}, X^{n,\varepsilon}]\,(t) - \sum_{s \leqslant t} (\Delta X^{n,\varepsilon}(s) - \log(1 + \Delta X^{n,\varepsilon}(s))$$

$$- 1/2\, (\Delta X^{n,\varepsilon}(s))^2) - \sum_{s \leqslant t} (\Delta X^n(s) - \log(1 + \Delta X^n(s)))$$

$$\mathbf{1}(\{|\Delta X^n(s)| > \varepsilon\} \cap \{\Delta X^n(s) > -1\}).$$

Avec le $\varepsilon$ choisi, on peut remarquer (voir par exemple [6] chap. 1) que les applications de D dans D suivantes sont $\mathbb{P}$ p.s. continues :

$\alpha \to \alpha^\varepsilon$ où $\alpha^\varepsilon(t) = \alpha(t) - \sum_{s \leqslant t} \Delta\alpha(s)\, \mathbf{1}(\{|\Delta\alpha(s)| > \varepsilon\})$

$\alpha \to \sum_s \Delta\alpha(s) - \log(1 + \Delta\alpha(s)))\, \mathbf{1}(\{|\Delta\alpha(s)| > \varepsilon\} \cap \{\Delta\alpha(s) > -1\})$

$\alpha \to \sum_s (\Delta\alpha(s))^2\, \mathbf{1}(\{|\Delta\alpha(s)| > \varepsilon\})$

posons $Z^{n,\varepsilon} = Y^n + W^{n,\varepsilon}$

où $W^{n,\varepsilon} = \sum_s (\Delta X^{n,\varepsilon}(s) - \log(1 + \Delta X^{n,\varepsilon}(s)) - 1/2\, (\Delta X^{n,\varepsilon}(s))^2)$ ;

d'après ce qui précède, et en utilisant l'hypothèse de la proposition on a la convergence :

(8) loi $((X^n, Z^{n,\varepsilon}, [X^n, X^n]) \mid P^n) \to$ loi $((X, Z^\varepsilon, [X, X]) \mid \mathbb{P})$

où on a posé $Z^\varepsilon = Y + W^\varepsilon$

avec de même $\quad W^{\varepsilon} = \sum_s (\Delta X^{\varepsilon}(s) - \log(1 + \Delta X^{\varepsilon}(s)) - 1/2 (\Delta X^{\varepsilon}(s))^2)$.

Il existe $k > 0$ tel que $|x - \log(1 + x) - 1/2\, x^2| \leqslant k\,|x|^3$ si $|x| \leqslant \varepsilon$, de sorte que :

$$P^n[\,|W^{n,\varepsilon}(t)| > \sqrt{\varepsilon}\,] \leqslant P^n[\,k \sum_{s\leqslant t} |\Delta X^{n,\varepsilon}(s)|^3 > \sqrt{\varepsilon}\,]$$
$$\leqslant P^n[\,\sum_{s\leqslant t} (\Delta X^{n,\varepsilon}(s))^2 > 1/(k\sqrt{\varepsilon})\,]$$
$$\leqslant P^n[\,[X^{n,\varepsilon}, X^{n,\varepsilon}](t) > 1/(k\sqrt{\varepsilon})].$$

Soit $\alpha > 0$, pour $\varepsilon$ assez petit on a :

$$\limsup_n P^n[\,[X^{n,\varepsilon}, X^{n,\varepsilon}](t) > 1/(k\sqrt{\varepsilon})] \leqslant \alpha$$

car d'après la convergence en loi de $[X^{n,\varepsilon}, X^{n,\varepsilon}]$ vers $[X^{\varepsilon}, X^{\varepsilon}]$ la suite $([X^{n,\varepsilon}, X^{n,\varepsilon}])$ est tendue. On peut alors trouver une suite $(\varepsilon(p))$, $p \in \mathbb{N}$, décroissant vers 0, avec pour tout $p \in \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{P}[\,\exists\, t\,;\, \Delta X(t) = \varepsilon(p)\,] = 0$ ;

pour chaque $p$ $\quad \mathrm{loi}\,(Z^{n,\varepsilon(p)} \mid P^n) \to \mathrm{loi}\,(Z^{\varepsilon(p)} \mid \mathbb{P})$ (quand $n \to \infty$) ;

comme $|Z^{\varepsilon(p)} - Y| \leqslant W^{\varepsilon(p)}$ et que $W^{\varepsilon(p)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ quand $p \to \infty$ on a $Z^{\varepsilon(p)} \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ (quand $p \nearrow \infty$).

Soit $t$ fixé ; d'après ce qui précède, pour tout $\eta > 0$, on a :

(9) $\quad \lim_{p\nearrow\infty} \limsup_{n\nearrow\infty} P^n[\,\sup_{s\leqslant t} |Z^{n,\varepsilon(p)}(s) - Y^n(s)| > \eta\,] = 0$

utilisant le théorème 4.2 p.25 de Billingsley [1] compte tenu de (8) et de (9) on obtient la convergence :

(10) $\mathrm{loi}\,((X^n, Y^n, [X^n, X^n]) \mid P^n) \to \mathrm{loi}\,((X, Y, [X, X]) \mid \mathbb{P})$.

Enfin comme $\quad \mathrm{loi}(\sum \Delta X^n(s)\, \mathbf{1}(\{\Delta X^n(s) \leqslant -1\} \mid P^n) \to \mathrm{loi}(0 \mid \mathbb{P})$

on a (d'après les propriétés de continuité dans D et les hypothèses faites) :

(11) $\mathbf{1}(\{\Delta X^n = -1\}) \xrightarrow{P^n} 0$.

De (10) et de (11) on déduit la convergence désirée (7) en notant que :

$\mathrm{dol}(X^n) = \exp(Y^n)\, \mathbf{1}(\{\Delta X^n \neq -1\})$ □.

fin de la démonstration du théorème 4.1 :

Utilisant les propositions 5.4 et 6.1 et le lemme 2.1, on obtient la convergence :

$$\text{loi}(\sqrt{Z}^{n,Sn} \mid P^n) \to \text{loi}(\sqrt{Z}^{\infty} \mid \mathbb{P}).$$

Pour tout $t < \infty$ :

$$\limsup_n P^n [\sup_{s \leq t} |Z^{n,Sn}(s) - Z^n(s)| > \eta] \leq \limsup_n P^n [\, Sn \leq t] = 0$$

d'après la remarque 5.3 on a aussi la convergence :

$$\text{loi}(\sqrt{Z}^n \mid P^n) \to \text{loi}(\sqrt{Z}^{\infty} \mid \mathbb{P})$$

et donc $\text{loi}(Z^n \mid P^n) \to \text{loi}(Z^{\infty} \mid \mathbb{P})$.

**6.2 Remarque :**

Utilisant la proposition 3.2 de [20], $Z^n$ étant une $P^n$ -surmartingale positive on a l'implication :

$$\text{loi}(Z^n \mid P^n) \to \text{loi}(Z^{\infty} \mid \mathbb{P})$$

$$\Rightarrow \quad \text{loi}((Z^n, [Z^n, Z^n]) \mid P^n) \to \text{loi}((Z^{\infty}, [Z^{\infty}, Z^{\infty}]) \mid \mathbb{P}).$$

D'autre part, il est intéressant de poser le problème d'une réciproque du théorème 4.1. On a alors les résultats suivants : sous les hypothèses :

$$\text{loi}(Z^n \mid P^n) \to \text{loi}(Z^{\infty} \mid \mathbb{P})$$

$$\text{loi}(Z^n \mid \tilde{P}^n) \to \text{loi}(Z^{\infty} \mid \tilde{\mathbb{P}})$$

on a : contiguité mutuelle $(P^n) \lhd \rhd (\tilde{P}^n)$ et les convergences :

$$\text{loi}(\sqrt{Z}^n \mid P^n) \to \text{loi}(\sqrt{Z}^{\infty} \mid \mathbb{P})$$

$$\text{loi}((\sqrt{Z}^n, [\sqrt{Z}^n, \sqrt{Z}^n]) \mid P^n) \to \text{loi}((\sqrt{Z}^{\infty}, [\sqrt{Z}^{\infty}, \sqrt{Z}^{\infty}]) \mid \mathbb{P})$$

$$\text{loi}((\sqrt{Z}^{n,Sn}, [\sqrt{Z}^n, \sqrt{Z}^n]^{Sn}) \mid P^n) \to \text{loi}((\sqrt{Z}^{\infty}, [\sqrt{Z}^{\infty}, \sqrt{Z}^{\infty}]) \mid \mathbb{P})$$

puis en utilisant le corollaire 4.4 de [20]

$$\text{loi}((X^n, [X^n, X^n] \mid P^n) \to \text{loi}((N - H, [N,N]) \mid \mathbb{P}).$$

Dans le cadre du corollaire 4.3, lorsque N est une martingale gaussienne continue, on a $[N, N] = \langle N, N \rangle$ et on en déduit la convergence $h^n(t) \xrightarrow{P^n} H(t)$ pour tout $t < \infty$ (voir [6] chap. 5), ce résultat réciproque est connu [2] et [15]. Lorsque N est plus générale on ne peut déduire de ce qui précède la convergence de $h^n$ vers H.

## 7. Démonstration du théorème 4.2 :

On suivra ici la méthode très simple utilisée dans [2] pour le résultat analogue (cas asymptotiquement Gaussien).

### 7.1 Lemme :

Sous les hypothèses $H_1$ à $H_3$, pour tout $t < \infty$ les suites $(P^n)_t$ et $(\tilde{P}^n)_t$ sont mutuellement contigües.

Démonstration :

D'après le lemme 2.1 on a seulement à montrer la contiguité $(\tilde{P}^n)_t \lhd (P^n)_t$ ; $E_{\mathbb{P}}[Z^\infty(\infty)] = 1$ implique $E_{\mathbb{P}}[Z^\infty(t)] = 1$ pour tout $t < \infty$, et comme on a la convergence $\text{loi}\,(Z^n \mid P^n) \to \text{loi}\,(Z^\infty \mid \mathbb{P})$, on peut trouver $N > t$ tel que l'on ait $\text{loi}\,(Z^n(N) \mid P^n) \to \text{loi}\,(Z^\infty(N) \mid \mathbb{P})$ ; cette convergence et l'égalité $E_{\mathbb{P}}[Z^\infty(N)] = 1$ implique la contiguité $((\tilde{P}^n)_N) \lhd ((P^n)_N)$ (voir par ex. [2], [3] ou [12] pour ce résultat classique sur la contiguité).

## 7.2 Démonstration du théorème 4.2 :

Du critère de tension dans D et de la contiguité pour tout $t < \infty$ de $((\tilde{P}^n)_t)$ relativement à $((P^n)_t)$, on déduit que $(Z^n)$ étant tendue pour $(P^n)$ l'est aussi pour $(\tilde{P}^n)$. Prenons donc une sous suite $(n')$ de $\mathbb{N}$ telle que loi $(Z^{n'} \mid \tilde{P}^{n'})$ converge et notons Q' la loi limite dans D.

On considère E un ensemble dense de $\mathbb{R}^+$ tel que l'on ait pour tout $t \in E$ :

$$\text{loi}\,(Z^{n'}(t) \mid P^{n'}) \to \text{loi}\,(Z^{\infty}(t) \mid \mathbb{P})$$

$$\text{loi}\,(Z^{n'}(t) \mid \tilde{P}^{n'}) \to \text{loi}\,(x(t) \mid Q')$$

x(t) étant la valeur en t de la trajectoire canonique x).

et E étant aussi tel que $x \to x^t$ soit continue $\mathbb{P}$ p.s. et Q' p.s.

Soit f continue bornée de D dans $\mathbb{R}^+$, on a (en s'inspirant de la méthode de [2], pour la démonstration du théorème 5).

$$\int_D f(x^t)\, Q'_t(dx) = \lim_{n'} \int_{(\Omega^{n'})} f(Z^{n',t})\, (\tilde{P}^{n'})_t(d\omega)$$

$$= \lim_{n'} \int_{(\Omega^{n'})} f(Z^{n',t})\, Z^{n'}(t)\, (P^{n'})_t(d\omega)$$

$$+ \lim_{n'} \int_{((\Omega^{n'}) \cap \{Z^{n'}(t) = \infty\})} f(Z^{n',t})\, (\tilde{P}^{n'})_t(d\omega)$$

$$= \lim_{n'} \int_D f(x^t)\ x(t)\ (P^{n'})_{(Z^{n',t})}(dx)$$

$$= \int_D f(x^t)\ x(t)\ \mathbb{P}_{(Z^t)}(dx)$$

(où $\mathbb{P}_{(Z^t)}$, $(P^{n'})_{(Z^{n',t})}$ sont les lois de $Z^t$ et de $Z^{n',t}$ dans D).

Ces égalités successives viennent du choix de t, et de la contiguité $((\tilde{P}^n)_t) \lhd ((P^n)_t)$ impliquant l'uniforme $P^{n'}$ intégrabilité de $(Z^{n',t})$, et la convergence vers 0 de $(\tilde{P}^{n'})_t\,[\,(Z^{n'})_t = \infty\,]$.

On a donc pour tout $t \in E$ $Q'_t = x(t)\, P_{(Z^t)}(dx)$ comme $Q'_t$ se prolonge en Q' sur (D, E) et que $x(t)\, P_{(Z^t)}(dx)$ se prolonge en $x(\infty)\, P_{(Z)}(dx)$ et ceci de manière unique, Q' est nécessairement $x(\infty)\, P_{(Z)}(dx)$ c'est-à-dire loi $(Z^\infty \mid \tilde{\mathbb{P}})$.

L'identification de Q' montre donc la convergence annoncée.

**7.3 Remarque :**

Rappelons que la loi $\mathbb{P}$ sur (D, F) est la loi du processus à accroissements indépendants de caractéristiques $(b, c, \nu)$, d'après le théorème de Girsanov (version [4] théorème) la loi $\mathbb{P}$ est la loi de p.a.i. de caractéristiques $(\tilde{b}, c, \tilde{\nu})$ où $\tilde{b} = b + c + y^2\, \mathbf{1}(\{|y| \leqslant 1\} * \nu)$ et $\tilde{\nu} = (1 + y) * \nu$, le théorème 4.2 dit alors que loi $(Z^n \mid \tilde{P}^n)$ converge vers loi $(\mathrm{dol}(x) \mid \tilde{\mathbb{P}})$.

**7.4 Remarque :**

Les corollaires 4.3 et 4.4 sont uniquement des versions de 4.1 et 4.2, les hypothèses faites assurent les convergences fonctionnelles correspondantes des martingales $N^n$. (Voir par exemple [6] et [9] pour ces versions du théorème central limite fonctionnel).

## 8. Expression des hypothèses dans quelques cas particuliers :

### 8.1 Cas des filtrations discrètes : [2]

Pour chaque n, on considère une filtration discrète $(G^n)_k$, $k \in \mathbb{N}$ de $F^n$. On note $z^n(k)$, $\tilde{z}^n(k)$ les densités $(d(P^n)(k)) / (d(Q^n)(k))$, $(d(\tilde{P}^n)(k))/(d(Q^n)(k))$ où $Q^n = (P^n + \tilde{P}^n) / 2$ ; $\zeta^n(k) = (\tilde{z}^n(k)) / (z^n(k))$ et on pose $\alpha^n(k) = (\zeta^n(k)) / (\zeta^n(k-1))$ si $\zeta^n(k-1) > 0$

$= 0$ si $\zeta^n(k-1) = 0$

$= \infty$ si $\zeta^n(k-1) = \infty$

On posera alors $Z^n(t) = \prod_{(l=0...[nt])} \alpha^n(l)$ (avec donc pour $k \in \mathbb{N}$ $Z^n(k) = \zeta^n(kn)$ et $(F^n)_t = \bigvee_{k \leqslant [n,t]} (G^n)_k$, soit $Tn = \inf\{t : Z^n(t) \leqslant 1/n\}$ et $Sn = Tn \wedge \inf\{t : h^n(t) \geqslant H(\infty) + 1\}$.

Avec les mêmes données concernant le processus limite les hypothèses $H_1$, $H_2$, $H_3$ s'écrivent :

$H_1$ : pour tout $t < \infty$,

$$\sum_{(k=0...[nt])} (1/2)\, E_{P^n} [((\alpha^n(k))^{1/2} - 1)^2 | (F^n)_{k-1}] + P^n[Z^n(k) = \infty | (F^n)_{k-1}] \xrightarrow{P^n} H(t) .$$

$H_2$ : pour tout $t < \infty$, pour tout $\eta > 0$,

$$\limsup_n P^n [\textstyle\sum_{(k=1... [nt] \wedge Sn)} P^n [Z^n(k) = \infty \,|\, (F^n)_{k-1}] > \eta ] = 0 \quad \text{et}$$

$$\lim_{a \uparrow \infty} (\limsup_n P^n [\textstyle\sum_{(k=0... [nt] \wedge Sn)} E_{P^n} [((\alpha^n(k))^{1/2} - 1)^2 \, \mathbf{1}(\{|(\alpha^n(k))^{1/2} - 1| > a\}) \,|\, (F^n)_{k-1}] > \eta ]) = 0 .$$

$H_3$ : pour tout $t < \infty$, pour tout $g \in C_0$,

$$\sum_{(k=0.. [nt])} E [ g((\alpha^n(k))^{1/2} - 1) \,|\, (F^n)_{k-1}] \xrightarrow{P^n} g((x+1)^{1/2} - 1) * \nu_t .$$

Il est en effet facile de montrer directement que l'on a :

$$h^n(t) = 1/2 \sum_{(k=0... [nt])} E_{P^n} [((\alpha^n(k))^{1/2} - 1)^2 | (F^n)_{k-1}] + \tilde{P}^n [Z^n(k) = \infty \,|\, (F^n)_{k-1}]$$

le processus $1/2(Z^n)_- \cdot A^n$ étant alors $\sum \tilde{P}^n [Z^n(k) = \infty \,|\, (F^n)_{k-1}]$.

## 8.2 Cas de lois dominées par une loi de processus à accroissements indépendants :

On suppose que pour chaque n, $P^n, \widetilde{P}^n$ sont des lois sur $(D, F, (F)_t)$ de semi martingale de caractéristiques locales respectives $(B^n, C^n, \nu^n)$ et $(\widetilde{B}^n, C^n, \widetilde{\nu}^n)$ ; on suppose qu'il existe $Q^n$ probabilité dominant $P^n$ et $\widetilde{P}^n$ tel que x soit pour $Q^n$ un processus à accroissements indépendants de caractéristiques locales $(\overline{B}^n, C^n, \overline{\nu}^n)$, on suppose que x n'admet pas pour $Q^n$ de discontinuité fixe.

On peut alors trouver $\lambda^n$ (resp. : $\widetilde{\lambda}^n$) tel que pour tout $t < \infty$ on ait $\nu^n = \lambda^n * \overline{\nu}^n$, $\widetilde{\nu}^n = \widetilde{\lambda}^n * \overline{\nu}^n$ en restriction à $[0,t] \times \mathbb{R} - \{0\}$, $Q^n$ p.s. sur $\{\omega ; (\omega,t) \in \Gamma'^n\}$.

Enfin on peut trouver deux processus prévisibles $\beta^n$, $\widetilde{\beta}^n$ tels que $(\beta^n)^2 \, . \, C^n$ (resp : $(\widetilde{\beta}^n)^2 \, . \, C^n$) soit $\widetilde{P}^n$ (resp : $P^n$) localement intégrables et tels que :

$$B^n(t) = \overline{B}^n(t) + \beta^n \, . \, C^n(t) + y \, 1(\{|y| \leq 1\}) (\lambda^n - 1) * \overline{\nu}^n(t)$$

$$\widetilde{B}^n(t) = \overline{B}^n(t) + \widetilde{\beta}^n \, . \, C^n(t) + y \, 1(\{|y| \leq 1\}) (\widetilde{\lambda}^n - 1) * \overline{\nu}^n(t)$$

sur $\{\omega : (\omega,t) \in \Gamma'^n\}$ $Q^n$ presque surement.

Il est facile de déduire de [13] qu'une version (1) du processus de Hellinger $h^n$ relatif à $P^n$ et $\widetilde{P}^n$ s'écrit :

(12) $$h^n(t) = 1/8 \, (\beta^n - \widetilde{\beta}^n)^2 \, . \, C^n(t) + 1/2 \, (\sqrt{\lambda^n} - \sqrt{\widetilde{\lambda}^n})^2 * \overline{\nu}^n(t)$$

et on a alors une version (1') avec la formule :

(13) $$h^n(t) = 1/8 \, (\beta^n - \widetilde{\beta}^n)^2 \, . \, C^n(t) + 1/2 \, (\sqrt{y^n} - 1)^2 * \nu^n(t) + 1/2 \, 1(\{y^n = \infty\}) * \widetilde{\nu}^n(t) \qquad \text{où } y^n = \widetilde{\lambda}^n / \lambda^n.$$

On suppose que la loi $\mathbb{P}$ considérée est comme précédemment celle d'une martingale à accroissements indépendants de caractéristiques $(b, C, \nu)$ ; l'hypothèse $H_1$ se traduit alors de la façon suivante :

$H_1$ : pour tout $t < \infty$ :

$$1/8\,(\beta^n - \tilde{\beta}^n)^2 \,.\, C^n(t) + 1/2\,(\sqrt{y^n} - 1)^2 * \nu^n(t) + 1/2\; \mathbf{1}(\{y^n = \infty\}) * \tilde{\nu}^n(t)$$

$$\text{--}P^n\text{-->}\; 1/8\, C(t) + 1/2\,((y+1)^{1/2} - 1)^2 * \nu(t).$$

Ecrivons maintenant l'expression des processus $N^n$ et $A^n$ du lemme 5.1, en terme des caractéristiques de $P^n, \tilde{P}^n$ ; on va calculer $\Delta Z^n$ ; utilisant le représentation intégrale des processus $z^n$ et $\tilde{z}^n$ (voir par ex. [4]) on a :

$\Delta z^n = (z^n)_-\,(\lambda^n - 1)\,\Delta x$ , $\quad \Delta\tilde{z}^n = (\tilde{z}^n)_-\,(\tilde{\lambda}^n - 1)\,\Delta x$ et

$\Delta Z^n = ((\tilde{z}^n) / (z^n)) - ((\tilde{z}^n)_- / (z^n)_-)$ si $(z^n)_- \neq 0$ avec $\Delta Z^n = 0$

si $(z^n)_- = 0$

on en déduit :

$$\Delta Z^n = \mathbf{1}(\{(z^n)_- > 0\})\,(\,(\Delta\tilde{z}^n / z^n) - (Z^n)_-\,(\Delta z^n / z^n)),$$

et comme $P^n$ p.s. $(z^n)_- > 0$

$$\Delta Z^n = (Z^n)_-\,(1/(1 + (\lambda^n - 1)\,\Delta x))\,((\tilde{\lambda}^n - 1) - (\lambda^n - 1)\,)\,\Delta x$$

$$= (Z^n)_-\,(y^n - 1)\,\Delta x.$$

Comme d'autre part il est facile de voir que $1/[((Z^n)_-)^2]\,.\,[Z^{n,c}, Z^{n,c}]$ s'écrit $(\beta^n - \tilde{\beta}^n)^2 \cdot C^n$, reprenant la formule (5) du lemme 2.1 on obtient l'expression de $X^n$.

$$X^n = 1/2\,(1/(Z^n)_-)\,.\,Z^{n,Tn} - 1/8\,(\beta^n - \tilde{\beta}^n)^2 \cdot C^{n,Tn}$$

$$+\,(\sqrt{y^n} - 1 - 1/2(y^n - 1))\,.\,x^{Tn}$$

compte tenu de l'expression de $h^n$ on a :

$$N^n = X^n + h^{n,Tn} = 1/2\,(1/(Z^n)_-)\,.\,Z^n - 1/2(\sqrt{y}^n - 1) * (\mu_X - \nu^n)^{Tn}$$

$$+ 1/2\ \mathbf{1}\,(\{y^n = \infty\}) * \tilde{\nu}^{n,Tn}$$

on en déduit : $\quad 1/2(Z^n)_-\,.\,A^{n,Tn} = 1/2\ \mathbf{1}\,(\{y^n = \infty\}) * \tilde{\nu}^{n,Tn}$

on obtient donc :

(14) $\quad N^n = 1/2\,(\beta^n - \tilde{\beta}^n)\,.\,x^{c,Tn} + 1/2\,(\sqrt{y}^n - 1) * (\mu_X - \nu^n)^{Tn}$

(15) $\quad \Delta N^n = (\sqrt{y}^n - 1)\,\Delta x^{Tn}$

Ceci permet d'écrire les conditions $H_2$ et $H_3$.

$H_2$ : pour tout $t < \infty$, tout $\eta > 0$ :

$$\lim_{a\uparrow\infty} \limsup_n P^n[\,(\sqrt{y}^n - 1)^2\ \mathbf{1}\,(\{|\sqrt{y}^n - 1| > a\}) * \nu^{n,Sn}(t) +$$

$$\mathbf{1}\,(\{y^n = \infty\}) * \tilde{\nu}^{n,Sn}(t) > \eta\,] = 0$$

$H_3$ : pour tout $t < \infty$, tout $g \in C_0$ :

$$g\,(y^n - 1) * \nu^n(t) \xrightarrow{P^n} g(y) * \nu(t)$$

## <u>8.3 Cas des processus ponctuels simples admettant des compensateurs continus :</u>

On suppose que pour chaque n, $P^n$ et $\tilde{P}^n$ sont des lois de processus ponctuels simples de compensateurs respectifs $\Lambda^n$ et $\tilde{\Lambda}^n$ ; tels que $P^n + \tilde{P}^n$ p.s. $t \to \Lambda^n(t)$ et $t \to \tilde{\Lambda}^n(t)$ sont continus avec $\Lambda^n(\infty) < \infty$ et $\tilde{\Lambda}^n(\infty) < \infty$ ; notant $\bar{P}^n$ la loi du processus ponctuel de compensateur $\bar{\Lambda}^n = (\Lambda^n + \tilde{\Lambda}^n) / 2$, et $\lambda^n, \tilde{\lambda}^n$ les densités $d\,\Lambda^n / d\,\bar{\Lambda}^n$, $d\,\tilde{\Lambda}^n / d\,\bar{\Lambda}^n$, on déduit de [10] qu'une version (1) du processus de Hellinger $h^n$ relatif à $P^n$ et $\tilde{P}^n$ est donnée par la formule :

(16) $\quad 1/2\,(\sqrt{\lambda}^n - \sqrt{\tilde{\lambda}}^n)^2 \;.\; \overline{\Lambda}^n = h^n$

Une version correspondante de (1') s'écrira donc :

(17) $\quad 1/2\,(\sqrt{y}^n - 1)^2 \;.\; \Lambda^n + 1/2\; \mathbf{1}(\{y^n = \infty\}) \;.\; \tilde{\Lambda}^n = h^n$

Conduisant des calculs analogues à ceux du paragraphe précédent, et supposant que la loi limite considérée $\mathbb{P}$ est celle d'une martingale à accroissements indépendants de caractéristiques $(b,0,\nu)$ les hypothèses $H_1$, $H_2$, $H_3$ s'écrivant de la façon suivante :

$H_1$ : pour tout $t < \infty$,

$(\sqrt{y}^n - 1) \,.\, \Lambda^n(t) + \mathbf{1}(\{y^n = \infty\}) \,.\, \tilde{\Lambda}^n(t) \text{ --}P^n\text{--> } 1/2\,((y+1)^{1/2} - 1)^2 * \nu(t)$

$H_2$ : pour tout $t < \infty$, tout $\eta > 0$ :

$$\lim_{a \uparrow \infty} \limsup_n P^n[\, (\sqrt{y}^n - 1)^2 \;\mathbf{1}(\{ |\sqrt{y}^n - 1| > a \}) \,.\, \Lambda^{n,Sn}(t)$$

$$+ \;\mathbf{1}\,(\{y^n = \infty\}) \,.\, \tilde{\Lambda}^n(t) > \eta\,] = 0$$

$H_3$ : pour tout $t < \infty$, tout $g \in C_0$ :

$$g\,(y^n - 1) \;.\; \Lambda^n(t) \text{ --}P^n\text{--> } g(y) * \nu(t).$$

## 8.4 Cas des processus ponctuels simples (sans condition de continuité des compensateurs).

On reprend ici les hypothèses de 8.3, à l'exception de celle qui concerne la continuité $t \to \Lambda^n(t)$, $t \to \tilde{\Lambda}^n(t)$, toujours d'après [10] on aura une version (1) de $h^n$ par :

(18) : $h^n = 1/2\,(\sqrt{\lambda}^n - \sqrt{\tilde{\lambda}}^n)^2 \,.\, \overline{\Lambda}^n + 1/2 \sum_{s.} ((1 - \Delta\Lambda^n(s))^{1/2} - ((1 - \Delta\tilde{\Lambda}^n(s))^{1/2})^2$

d'où la version (1') suivante :

(19) : $h^n = 1/2\,(\sqrt{y^n} - 1)^2 \,.\, \Lambda^n + 1/2\; \mathbf{1}(\{y^n = \infty\}) \,.\, \tilde{\Lambda}^n$

$+ 1/2 \sum_{s.} (((1 - y^n(s)\, \Delta\Lambda^n(s)) \,/\, (1 - \Delta\Lambda^n(s))^{1/2} - 1)^2 (1 - \Delta\Lambda^n(s)\; \mathbf{1}(\{\Delta\Lambda^n(s) \neq 1\})$

$+ 1/2 \sum_{s.} [((1 - \Delta\tilde{\Lambda}^n(s))^{1/2} - 1)^2\; \mathbf{1}(\{\Delta\Lambda^n(s) = 0\}) + (1 - \Delta\tilde{\Lambda}^n(s))\; \mathbf{1}(\{\Delta\Lambda^n(s) = 1\})\,]$

Pour simplifier on supposera que pour tout n, $\tilde{P}^n$ est absolument continu par rapport à $P^n$ ; on a alors $\Delta\Lambda^n = 0 \Rightarrow \Delta\tilde{\Lambda}^n = 0$ et $\Delta\Lambda^n = 1 \Rightarrow \Delta\tilde{\Lambda}^n = 1$, $P^n$ p.s. de sorte que la version (1') de $h^n$ s'écrit :

(19') : $h^n = 1/2\,(\sqrt{y^n} - 1)^2 \,.\, \Lambda^n$

$+ \sum_{s.} (((1 - y^n(s)\, \Delta\Lambda^n(s)) \,/\, (1 - \Delta\Lambda^n(s)))^{1/2} - 1)^2\, (1 - \Delta\Lambda^n(s))$

On va déterminer la martingale locale $N^n$ définie par :

$$N^n = ((1 + y/(Z^n)_-)^{1/2} - 1) * (\mu_{(Z^n)} - \nu_{(Z^n)})^{Sn}$$

Pour cela on utilise la représentation de $Z^{n,Sn}$ comme intégrale stochastique par rapport à $(x - \Lambda^n)$ (voir [4]). et on a :

$$\Delta Z^n/(Z^n)_- = (Y^n - 1)\,[1 + \Delta\Lambda^n/(1 - \Delta\Lambda^n)\; \mathbf{1}(\{\Delta\Lambda^n \neq 1\})]\,(\Delta x - \Delta\Lambda^n)$$

on en déduit :

$$1 + \Delta Z^n/(Z^n)_- = y^n\, \Delta x + (1 - \Delta x)\,(1 - y^n \Delta\Lambda^n)/(1 - \Delta\Lambda^n)\; \mathbf{1}(\{\Delta\Lambda^n \neq 1\})$$

et $(1 + \Delta Z^n/(Z^n)_-)^{1/2} - 1 = (\sqrt{y^n} - 1)\, \Delta x$

$+ (1 - \Delta x)(-1 + ((1 - y^n \Delta\Lambda^n)/(1 - \Delta\Lambda^n))^{1/2}\, \mathbf{1}(\{\Delta\Lambda^n \neq 1\}))$

$= (\sqrt{y^n} - ((1 - y^n \Delta\Lambda^n)/(1 - \Delta\Lambda^n))^{1/2}\, \mathbf{1}(\{\Delta\Lambda^n \neq 1\}))\, \Delta x$

$+ (\,((1 - y^n \Delta\Lambda^n) \,/\, (1 - \Delta\Lambda^n))^{1/2}\; \mathbf{1}(\{\Delta\Lambda^n \neq 1\}) - 1)$

on obtient alors :

$$N^n = \left(\sqrt{y}^n - \sum_s \left((1-y^n(s)\Delta\Lambda^n(s))/(1-\Delta\Lambda^n(s))\right)^{1/2} 1(\{\Delta\Lambda^n(s) \neq 1\})\right) . (x^{Sn} - \Lambda^{n,Sn})$$

d'où la version suivante des hypothèses $H_1$, $H_2$, $H_3$.

$H_1$ : pour tout $t < \infty$ :

$$1/2\,(\sqrt{y}^n-1)^2.\Lambda^n(t) + 1/2 \sum_{s\leq t}\left((1-y^n(s)\Delta\Lambda^n(s)) / (1-\Delta\Lambda^n(s))^{1/2}-1\right)^2 (1-\Delta\Lambda^n(s))$$

$$\text{--}P^n\text{-->}\ 1/2\left((y+1)^{1/2}-1\right)^2 * \nu(t)\,.$$

$H_2$ : pour tout $t < \infty$, tout $\eta > 0$

$$\lim_{a\uparrow\infty} \limsup_n P^n \left[\left(\sqrt{y}^n - ((1-y^n\Delta\Lambda^n) / (1-\Delta\Lambda^n))^{1/2}\, 1(\{\Delta\Lambda^n \neq 1\})\right)^2\right.$$

$$\left. 1\left(\{|\sqrt{y}^n - ((1-y^n\Delta\Lambda^n) / (1-\Delta\Lambda^n))^{1/2}| > a\}\right) . \Lambda^n(t) > \eta\right] = 0\,.$$

$H_3$ : pour tout $t < \infty$, $g \in C_0$ :

$$g\left(\sqrt{y}^n - ((1-y^n\Delta\Lambda^n)/(1-\Delta\Lambda^n))^{1/2}\, 1(\{\Delta\Lambda^n \neq 1\})\right).\Lambda^n(t)\ \text{--}P^n\text{-->}\ g(y) * \nu(t).$$

**Références :**

[1] P. BILLINGSLEY : Convergence of Probability measures. John Wiley and Sons, New York, 1968.

[2] P. GREENWOOD, A.N SHIRYAYEV : On the concept of contiguity and functional limit theorems under contiguous alternatives. Preprint 1983.

[3] W.J. HALL, R.M. LOYNES : On the concept of contiguity. Annals of Probability 5, n°2, p.278-288, 1977.

[4] J. JACOD : Calcul stochastique et problèmes de Martingales ; Lectures Notes in Mathematics, n°714, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[5] J. JACOD : Processus de Hellinger, absolue continuité et singularité. Séminaire de Probabilité de Rennes, 1983.

[6] J. JACOD : Théorèmes limites : cours de l'école d'été de St Flour. Lecture Notes in Mathématics n°1117, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[7] J. JACOD - J. MEMIN : Sur la convergence des semi martingales vers un p.a.i. Séminaires de Probabilité XIV, Lecture Notes in Mathématics n°784, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[8] J. JACOD - A. KLOPOTOWSKI - J. MEMIN : Théorème de la limite centrale et convergence fonctionnelle vers un p.a.i. : la méthode des martingales. Annales de l'Institut Henri Poincaré XVIII, 1, p. 1-45, 1982.

[9] J. JACOD - A.N. SHIRYAYEV : Livre à paraitre. 1986.

[10] Y. KABANOV - R.C.H. LIPTSER A.N SHIRYAYEV : On the distance in variation ; à paraitre aux Z. für W.

[11] D. LEPINGLE - J. MEMIN : Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles. Z. für W.

[12] J. MEMIN : Contiguité et complète séparabilité (décompositions de Raoult, comportement asymptotique sous hypothèse de contiguité. Séminaires de Probabilité de Rennes, 1982.

[13] J. MEMIN - A.N. SHIRYAYEV : Distance de Hellinger-Kakutani des lois correspondant à deux p.a.i. Z. für W. n°70, p. 67-89, 1985.

[14] G.K. EAGLESON - J. MEMIN : Sur la contiguité de deux suites de mesures : généralisation d'un théorème de Kabanov-Liptser-Shiryayev. Séminaires de Probabilité XVI, Lecture Notes in Mathematics n°920, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

[15] L. VOSTRIKOVA : Functional limit theorems for Likelyhood ratio processes. Preprint 1985.

[16] L. LE CAM : Théorie asymptotique de la décision statistique. Presses de l'Université de Montréal, 1969.

[17] R.C.H. LIPTSER - A.N. SHIRYAYEV : On the problem of "predictable" criteria of contiguity. Japon, USSR, symposium p.386-418, Lecture Notes in Mathematics n°1021, Springer-Verlag, 1983.

[18] R. REBOLLEDO : La méthode des martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi de processus. Mem. Soc. Math., France, 62, p.1-125, 1979.

[19] N.E. KORDZAKHIA : Convergence faible du processus de vraisemblance. Uspeki, Mat. Nauk 39, 4, p.167-168, 1984.

[20] A. JAKUBOWSKI, J. MEMIN, G. PAGES : Convergence étroite sur D des lois d'intégrales stochastiques. Preprint - Université de RENNES 1986.