Y. GUIVARCH'H

Processus de branchement en environnement aléatoire (P.b.e.a)

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 54-61
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985___1_54_0>

Publications de l'I.R.M.A.R. - RENNES 1985

PROCESSUS DE BRANCHEMENT EN ENVIRONNEMENT ALEATOIRE (P.b.e.a)

Y. GUIVARC'H
I.R.M.A.R.
Université de RENNES I
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX

RESUME

On considère un processus de branchement en environnement aléatoire sous-critique.

On étudie la loi de la population totale produite et on montre qu'elle est dans le domaine d'attraction d'une loi stable. Les techniques utilisées reprennent en les simplifient celles de H. KESTEN, M. V. KOZLOV et F. SPITZER. (cf. référence ci dessous).

mots clés :

Loi stable, processus de branchement, environnement aléatoire.

MR codification 60 G

PROCESSUS DE BRANCHEMENT EN ENVIRONNEMENT ALEATOIRE (P.b.e.a)

NOTATIONS

On considère une famille, indexée par $\omega \in \Omega$, de processus de branchement inhomogènes dont les lois de reproduction sont notées $\lambda_n(\omega)$. ici Ω est un espace de probabilité et les $\lambda_n(\omega)$ sont supposées être des variables aléatoires i.i.d. Cette famille de processus est alors appelée processus de branchement en environnement aléatoire (P.b.e.a).

On note Z_n la population à l'instant n et l'on pose $w_n = \sum_{j \geq n} Z_n$.

La moyenne conditionnelle de w_n à ω et Z_n fixés sera notée

$$\mu_n = E(w_n/Z_n) = m_n Z_n \text{ où } m_n = E(w_n/Z_n = 1).$$

En général les espérances conditionnelles à ω fixé seront notées par E tandis que les espérances seront notées $\bar{E}$.

On a ici, avec $a_n = E(Z_n/Z_{n-1}=1)$, $m_0 = 1 + \sum a_1 a_2 \ldots a_k$ et on suppose $E(\log a) < 0$, ce qui assure $m_0 < +\infty$, $w_0 < +\infty$. Enfin χ est le réel positif défini par $\bar{E}(a^\chi) = 1$. On suppose donc que le support de a_n n'est pas contenu dans $]0,1]$. Pour simplifier on supposera que les supports des $\lambda_n(\omega)$ sont contenus dans un intervalle fixe ; on donnera certaines preuves avec l'hypothèse $\chi \leq 1$, ce qui est le cas le plus délicat. Le but de cet exposé est de donner une preuve courte du théorème suivant dû à H. KESTEN, M. V. KOZLOV et F. SPITZER (1).

---

1) H. KESTEN, M.V. KOZLOV, F.SPITZER. Alimit law for a random walk in a random environment composition Math 30 (1975) p. 145-168.

Théorème

Supposons que le support de a_k engendre un sous-groupe multiplicatif dense dans $\mathbb{R}^+$. Alors la limite de $t^\chi \overline{P}(w_0 > t)$ quand t tend vers l'infini existe et est positive.

Pour démontrer ce théorème on observe que
$w = \lim_n E(w/Z_k \; ; k \leqslant n) = \lim(Z_1 + \ldots + Z_n + Z_n m_n)$. Comme $Z_1 + \ldots + Z_n$ est ici bornée de même que Z_k, il suffit de montrer la convergence, en un sens convenable, de $Z_n m_n$ d'une part et d'estimer, d'autre part, la différence $w - E(w/Z_k \; ; k \leqslant n)$. Il est en particulier nécessaire de préciser la loi de $m_0 = E(w/Z_0 = 1)$. Ces estimations font l'objet de la proposition et des lemmes suivants.

Proposition

Considérons des variables aléatoires a_k positives i.i.d, non concentrées sur $]0,1]$. Supposons $\overline{E}(\log a) < 0$, et soit $\chi > 0$ défini par $\overline{E}(a_k^\chi) = 1$ que l'on suppose vérifier $\overline{E}(a_k^\chi \log^+ a_k) < +\infty$. Alors la variable aléatoire m définie par $m = 1 + \sum_1^\infty a_1 \ldots a_k$ satisfait : $\lim_{t\to\infty} t^\chi \overline{P}(m > t) = A > 0$ dès que la loi de a_k engendre un sous-groupe dense de $\mathbb{R}^+$.

Preuve

Posons $\varphi(t) = \overline{P}(m > t)$, $\psi(t) = \overline{P}(]t, t+1]) = \varphi(t+1)$ et observons que la loi de m n'a pas d'atomes, ce qui implique la continuité de φ et de ψ.

Si l'on désigne par θ la translation sur l'espace où les a_k sont définies, on a : $m = 1 + a_1(m \circ \theta)$ et $P\{m - 1 > t\} = P\{a_1 m \circ \theta > t\}$

$$= \int P\{m > (t/a)\}\, dp(a) \text{ où p désigne la loi de } a_1.$$

Notant $*$ la convolution sur le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^+$, on a donc :

$$\varphi - \psi = p * \varphi$$

Pour simplifier, supposons les a_k bornées inférieurement par $\varepsilon > 0$ et donc $\varphi = 1$ sur $]0,1+\varepsilon]$, $\psi(t) = 0$ sur $]0,\varepsilon]$.

Notons d'autre part que m^λ est intégrable pour $\lambda < x$ car

$$m^\lambda \leqslant 1 + \sum_1^\infty (a_1 \dots a_k)^\lambda \qquad (\lambda < 1)$$

$$E(m^\lambda) \leqslant 1 + \sum_1^\infty \bar{E}(a^\lambda)^k < +\infty$$

puisque $\bar{E}(a_1^\lambda) < \bar{E}(a_1^\chi) = 1$.

Il en découle simplement que $t^{\chi-1}\ \psi(t)$ est directement Riemann-intégrable [cf 1] et donc que $t^\chi\psi(t)$ l'est aussi pour la mesure de Haar $(dt)/t$ sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $\varphi = \sum_0^\infty p^n * \psi$ et le théorème de renouvellement nous donne le comportement de $\varphi(t)$ pour $t \to +\infty$ et $t \to 0$. En particulier, puisque $\bar{E}(a^\chi \log a)$ existe et est positive on a

$$\lim_{t \to +\infty} t^\chi \varphi(t) = A > 0.$$

Lemme 1

Avec les notations de l'introduction, posons $y_k = Z_k - E(Z_k/Z_{k-1})$.

Alors $w_0 - \mu_0 = \sum_1^\infty m_k y_k$.

Preuve

$$Z_k = w_k - w_{k+1} = E(w_k - w_{k+1}/Z_k)$$

$$\sum_0^\infty Z_k = E(w_0/Z_0) + \sum_1^\infty E(w_k/Z_k) - E(w_k/Z_{k-1})$$

$$w_0 = \mu_0 + \sum_1^\infty m_k[Z_k - E(Z_k/Z_{k-1})].$$

(1) W. FELLER in introduction to probability theory and its applications. Vol II, 2ème éd. Wiley NEW YORK 1971.

Ainsi $w_0 - \mu_0$ est présentée comme la somme, pondérée par les m_k, des fluctuations y_k. On va voir que ces fluctuations tendent vers 0 rapidement en un sens que l'on précisera. Pour une variable aléatoire x, on définit les "queues d'indice χ" T, T et T par :

$$\hat{T}(x) = \limsup_{|t| \to \infty} t^{\chi}\bar{P}[|x| > t]$$
$$\tilde{T}(x) = \liminf t^{\chi}\bar{P}[|x| > t]$$
$$\text{si } \hat{T}(x) = \tilde{T}(x) : T(x) = \tilde{T}(x) = \hat{T}(x)$$

et l'on a les deux lemmes immédiats suivants.

Lemme 2

Soit $\varepsilon > 0$ et A, B deux variables aléatoires. Alors :

$\hat{T}(A+B) \leq (1+\varepsilon)\hat{T}(A) + 1/\varepsilon\hat{T}(B)$

$\tilde{T}(A+B) \leq (1+\varepsilon)\tilde{T}(A) + 1/\varepsilon\hat{T}(B)$.

Lemme 3

Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes. On a alors, si $T(B)$ et $E(|A|^{\chi})$ existent :

$$T(AB) = E(|A|^{\chi})\, T(B).$$

Lemme 4

Soient u_k et v_k une suite de variables aléatoires positives telles que u_k et v_k soient indépendantes pour tout k et posons $x = \sum_1^{\infty} u_k v_k$.

Alors $\hat{T}(x) \leq 2^{\chi} \sum_1^{\infty} k^{2\chi} E(v^{\chi})\, \hat{T}(U_k)$.

Preuve

$P\{x \geq t\} \leq \sum_1^\infty P\{u_k v_k \geq t/2k^2\}$ car $\sum_1^\infty 1/K^2 = \pi^2/6 < 2$

L'indépendance de u_k et v_k donne comme au lemme 3 :

$P\{u_k v_k \geq t\} \leq 1/t^\chi E(v^\chi) T(u_k)$ d'où le lemme.

On note σ_n^2 la variance conditionnelle, à ω et Z_{n-1} fixés, de Z_n sachant $Z_{n-1} = 1$: $\sigma_n^2 = E[(Z_n - m_n Z_{n-1})^2]$.

Lemme 5

Posons $C = \sup_n 2^\chi \bar{E}(\sigma^\chi)$ on a :

$\hat{T}(w_0 - \mu_0) \leq C\, \hat{T}(m_0) \sum n^{2\chi} E(Z_{n-1}^{\chi/2})$.

Preuve

Les lemmes 1 et 4 donnent, avec $u_k = m_k$, $x = w_0 - y_0$, $v_k = y_k$:

$\hat{T}(w_0 - \mu_0) \leq C\, \hat{T}(m_0) \sum_1^\infty n^{2\chi} \bar{E}(|y_n|^\chi)$. Mais, par définition d'un processus de branchement : $E(y_n^2 | Z_{n-1}) = \sigma_n^2 Z_{n-1}$ d'où

$$E(|y_n|^\chi / Z_{n-1}) \leq \sigma_n^\chi Z_{n-1}^{\chi/2}$$

$$\bar{E}(|y_n|^\chi) \leq \bar{E}(\sigma_n^\chi)\, E(Z_{n-1}^{\chi/2})$$

ce qui donne l'énoncé.

Lemme 6

Avec les notations précédentes et une constante K dépendant du P.b.e.a seul, on a $\hat{T}(w_0 - \mu_0) \leq K \bar{E}(Z_0^{\chi/2})$.

Preuve

$$E(Z_{n-1}^{X/2}) \leqslant (a_1 \dots a_{n-1})^{X/2} E(Z_0^{X/2})$$

$$\bar{E}(Z_{n-1}^{X/2}) \leqslant \rho^{n-1} E(Z_0^{X/2}) \text{ avec } \rho = \bar{E}(a_1^{X/2}) < 1.$$

La série $\sum_1^{\infty} n^{2X} \rho^{n-1}$ converge et on prend donc $K = 2^X C \sum_1^{\infty} n^{2X} \rho^{n-1}$.

Lemme 7

La chaîne de Markov sur N associée au P.b.e.a donné possède une harmonique positive équivalente à t^X pour $t \to +\infty$.

Preuve

On écrit ici $Z_{n+1} \geqslant a_{n+1} Z_n - |y_{n+1}|$

$$Z_{n+1}^X \geqslant a_{n+1}^X Z_n^X - |y_{n+1}|^X$$

$$\bar{E}(Z_{n+1}^X | Z_n) \geqslant Z_n^X - \bar{E}(|y_{n+1}|^X / Z_n$$

or on a vu que $\bar{E}(|y_{n+1}|^X / Z_n) \leqslant \bar{E}(\sigma_n^X) Z_n^{X/2})$.

Si Q désigne le noyau de la chaîne associée au P.b.e.a cette relation s'écrit, avec $h(t) = t$: $Qh^X \geqslant h^X - ch^{X/2}$, où c est une constante.

On a d'autre part vu que $Qh^X \leqslant h^X$; la suite $Q^n h^X$ converge donc vers une fonction k(x) vérifiant Qk = k.

L'inégalité $Qh^{X/2} \leqslant \rho h^{X/2}$ conduit à $Q^n h^X \geqslant h^X - c(1+\rho+\dots+\rho^{n-1}) h^{X/2}$ donc à : $h^X \geqslant k \geqslant h^X - ch^{X/2}$.

D'où $k(t) \sim t^X$ pour $X \to +\infty$.

La relation Qk = k implique, puisque $k \geqslant 0$ et $k(y) > 0$ pour y grand $h(t) > 0$ $t \neq 0$. En particulier $\bar{E}(Z_n^X| = Q^n h^X(1)$ converge un nombre positif.

Preuve du théorème

D'après le lemme 6, les fluctuations y_n interviennent dans $T(w_0-\mu_0)$ seulement par un terme de l'ordre de $\bar{E}(Z_0^{1/2})$. En particulier, puisque $\bar{E}(Z_n^{\gamma/2})$ tend vers zéro, il en est de même de $T(w_n-\mu_n)$ lorsqu'on remplace Z_0 par Z_n. Or $T(w_0-w_n) = 0$ et $T(\mu_n) = \bar{E}(Z_n^{\gamma})\,T(m_0)$ par indépendance de Z_n et m_n. Comme $\bar{E}(Z_n^{\gamma})$ est décroissante elle converge et sa limite est non nulle d'après la fin de la preuve précédente.

On en conclut que $T(w_0)$ existe comme $T(\mu_n)$ et vaut

$$\lim_{n\to\infty} T(\mu_n) = \lim_{n} \bar{E}(Z_n^{\gamma})\,T(m_0).$$