ABDUL RAOUF DARWICH

Sur l’orthogonalité de deux lois de probabilités correspondant à deux processus de Markov

Publications de l’Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985___1_1_0>

Publications de l'I.R.M.A.R. - RENNES 1985

"SUR L'ORTHOGONALITE DE DEUX LOIS DE PROBABILITES CORRESPONDANT A DEUX PROCESSUS DE MARKOV

Abdul Raouf DARWICH
U.E.R. de Mathématiques
Université de RENNES I
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX

RESUME

Dans ce travail on donne une condition nécessaire et suffisante pour que deux lois de probabilités P et Q correspondant à deux processus de Markov soient orthogonales. Ce résultat est indépendant de l'hypothèse $P \overset{Loc}{<<} Q$ qui a été exigée dans [5], [8], [11].

mots clés

Chaîne de Markov, matrice markovienne, matrice sous-markovienne, intégrale d'Hellinger.

MR codification 60 G 30, 62 E

INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit $(\Omega, \mathcal{a})$ un espace mesurable, P et Q deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{a})$ l'intégrale d'Hellinger d'ordre α $0 < \alpha < 1$ de P et Q est défini par :

$H_\alpha(P,Q) = \int_\Omega p^\alpha q^{1-\alpha} d\mu$, où μ est une mesure σ-finie, dominant P et Q et p, q sont les densités de P et Q par rapport à μ resp.

On a : $P \perp Q \Longleftrightarrow H_\alpha(P,Q) = 0$

voir par exemple [2], [4], [5], [6], [7], [9], [10].

a) Si $(\mathcal{a}_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite croissante de sous σ-algèbre de $\mathcal{a}$ qui engendre a (i.e $\mathcal{a} = \sigma\{\bigcup_1^\infty \mathcal{a}_n\}$ alors on a :

$$H_\alpha(P,Q) = \lim_{n \to +\infty} H_\alpha(P^n, Q^n)$$

P^n, Q^n sont les restrictions de P et Q à la tribu $\mathcal{a}_n$ resp.

b) soient $(X_n)_{n \geqslant 1}$, $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ deux suites de v.a définies sur $(\Omega, \mathcal{a})$ à valeurs dans un espace discret E : on suppose que $(\Omega, \mathcal{a}, P, (X_n)_{n \geqslant 1})$, $(\Omega, \mathcal{a}, Q, (Y_n)_{n \geqslant 1})$ sont deux processus de Markov.

Notations

1°) On note par :

$p_i = P(X_1 = i)$; $q_i = Q(Y_1 = i)$ et pour tout $n \geqslant 2$:

$P^n = P_{(X_1, \ldots, X_n)}$, $Q^n = Q_{(Y_1, \ldots, Y_n)}$

$p_{i,j}(n) = P(X_n = j / X_{n-1} = i)$; $q_{i,j}(n) = Q(Y_n = j / Y_{n-1} = i)$

$r_i = p_i^\alpha q_i^{1-\alpha}$; $r_{i,j}(n) = [p_{i,j}(n)]^\alpha [q_{i,j}(n)]^{1-\alpha}$.

Soit $\mathbb{R}(n)$ une matrice définie par :

$$n \geqslant 2 \; ; \mathbb{R}(n) = (r_{i,j}(n))_{i,j \in E} \text{ et } \mathbb{R}^{(n)} = \mathbb{R}(2) \times \ldots \times \mathbb{R}(n)$$

$$(R^{(n)})_{i,j} = r_{i,j}^{(n)}.$$

2°) Pour tout $n \geq 2$, soit g_n une fonction définie sur E comme suit :

pour tout $i \in E$, $g_n(i) = \sum_{j \in E} r_{i,j}^{(n)}$

on suppose que : $P_i > 0, q_i > 0$ pour tout $i \in E$.

I – Proposition 1

Pour que $P \perp Q$, il est nécessaire et suffisante que pour tout $i \in E$ on a : $g_n(i) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Démonstration :

On a : $P \perp Q \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} H_\alpha(P^n, Q^n) = 0 \; ; 0 < \alpha < 1.$

$$H_\alpha(P^n, Q^n) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in E^{(n)}} [P^n(i, \dots, i_n)]^\alpha \; [Q^n(i_1, \dots, i_n)]^{1-\alpha}$$

$$= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in E^{(n)}} (P_{i_1}^\alpha q_{i_1}^{1-\alpha}) \times \dots \times [P(n)]^\alpha_{i_{n-1}, i_n} \; [q(n)]^{1-\alpha}_{i_{n-1}, i_n}.$$

"Car les suites $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ sont deux chaînes de Markov".

On a :

$$H_\alpha(P^n, Q^n) = \sum_{i,j \in E} r_i r_{i,j}^{(n)} = \sum_{i \in E} r_i g_n(i)$$

comme pour tout $i \in E$; $r_i g_n(i) \leq r_i$ et $\sum_{i \in E} r_i \leq 1$, alors

on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i \in E} r_i g_n(i) = \sum_{i \in E} r_i \{\lim_{n \to +\infty} g_n(i)\}$$

"Th de convergence dominée".

En remarquant que $0 \leq g_n(i) \leq 1$, $\forall i \in E$, $\forall n \geq 2$ et $g_n(i) \searrow$ lorsque $n \nearrow$ pour tout $i \in E$.

Par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} H_\alpha(P^n, Q^n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} g_n(i) = 0 \quad \text{pour tout } i \in E.$$

Remarque (1)

Dans le cas où p_i et q_i peuvent être nuls, alors on a:

$P \perp Q \Leftrightarrow g_n(i) \to 0$, lorsque $n \to +\infty$, pour tout $i \notin A$.

$$A = \{i \in E \mid p_i = 0 \quad \text{ou } q_i = 0\}.$$

Remarque (2)

S'il existe un nombre $0 < \delta < 1$, tel que, pour n assez grand on a :

$g_n(i) \leqslant \delta g_{n-1}(i)$ pour tout $i \in E$, alors $P \perp Q$.

Remarque (3)

S'il existe un nombre $0 < \delta < 1$, tel que, pour n assez grand on a :

$\sum_{k\in E} [R(n) \times R(n+1)]_{i,k} \leqslant \delta \sum_{k\in E} [R(n)]_{i,k}$ pour tout $i \in E$, alors $P \perp Q$.

Remarque (4)

Si pour n assez grand on a :

$\sum_{J\in E} [R(n)]_{i,j} \leqslant \delta$, pour tout $i \in E$, où $0 < \delta < 1$, alors $P \perp Q$.

Cas fini :

Corollaire 1 :

$$P \perp Q \Leftrightarrow R^{(n)} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

Corollaire 2 :

Si : 1) $M[R(k)] \geqslant \delta > 0$, pour tout $k = 2,3,4,\ldots.$

2) Il existe un nombre $0 < \gamma < 1$, tel que, pour tout $k \geqslant 2$, il existe $i(k) \in E$ tel que :

$$\sum_{j\in E} [R(k)]_{i(k),j} \leqslant \gamma, \text{ alors } P \perp Q.$$

où $M[R(k)] = \min_{\substack{C\subset E\\ F\subset E}} \max_{\substack{i\in C\\ J\in F}} [R(k)]_{i,j}$, et $|C| + |F| = |E|$, ($|F|$ et $|C|$, $|E|$ sont les cardinaux de F, C, et R resp.

Démonstration :

En appliquant le corollaire (1) et le th(1) de [3]

II - LE CAS où les DEUX CHAINES SONT HOMOGENES

Dans ce cas, on a :

$R^{(n)} = [R(2)]^{n-1}$, on note par $R(2) = R$, et $(R)_{i,j} = r_{i,j}$. Si f est une fonction bornée sur E, alors Rf est une fonction sur E définie par :

$$(Rf)(i) = \sum_{J \in E} r_{i,j} f(j)$$

On a :

$g_n = R^{(n-1)} \quad 1$ (ici $f \equiv 1$), en remarquant que :

$R(R1) = R1, \ldots\ldots, R(R^{(n-1)} \quad 1) = R^{(n)} \quad 1.$

Théorème 1 :

Les trois propostions suivantes sont équivalentes :

1) $P \perp Q$

2) Pour toute fonction g sur E telle que :

$0 \leqslant g \leqslant 1$, et $Rg = g$, on a : $g \equiv 0$

3) Pour toute fonction g bornée sur E telle que :

$Rg = g$, on a, $g \equiv 0$.'

Démonstration :

1) $\Leftrightarrow$ 2) :

d'après la proposition (1) on a :

$$\lim_{n \to +\infty} H_\alpha(P^n, Q^n) = 0 \Leftrightarrow (g_n(i) \to 0 \quad \text{pour tout } i \in E$$

mais $\quad g_n(i) = \sum_{J \in E} r^{(n)}_{i,j} = (\mathbb{R}^{(n-1)} \quad 1)(i)$

donc $\quad \lim_{n \to +\infty} H_\alpha(P^n, Q^n) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{R}^{(n-1)} \quad 1 \to 0.$

Il est clair que $\mathbb{R}^{(n-1)} \quad 1 \to 0$ est équivalent à 2) d'où 1) $\Leftrightarrow$ 2.

$1) \Rightarrow 3)$

Puisque g est une fonction bornée sur E, alors il existe $B > 0$ tel que :

$$-B \leq g \leq B \quad \text{et} \quad B(\mathbb{R}^{(n)}\ 1) \leq \mathbb{R}^{(n)} g \leq B(\mathbb{R}^{(n)}\ 1)$$

donc $\quad -B \lim_{n\to+\infty} R^{(n)}\ 1 \leq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{R}^{(n)}\ g \leq B \lim_{n\to+\infty} \mathbb{R}^{(n)}\ 1$

ce qui implique $g \equiv 0$.

$3) \Rightarrow 1)$

La fonction F définie sur E par :

$F = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{R}^{(n)}\ 1$ vérifie :

$0 \leq F \leq 1$ et $\mathbb{R}F = F$, donc cette fonction vérifie 3) par conséquent $F \equiv 0$, d'où le résultat.

<u>Cas fini</u> :

<u>Théorème 2</u> :

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1) $P \perp Q$

2) $R^{(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

3) $\mathrm{Det}(I - R) \neq 0$

où I est la matrice unité d'ordre $|E|$.

<u>Démonstration</u> :

En appliquant le corollaire (1) et le th. (1).

<u>Critère simple de dichotomie dans le cas fini</u> :

Avec les hypothèses de (8), on a :

<u>Corollaire 3</u> :

Si, le σ-algèbre $\mathcal{F}$ est P-triviale (Th (1) de (8)), alors on a :

$$P \perp Q \iff \mathrm{Det}(I - R) \neq 0$$

$$P << 0 \iff \mathrm{Det}(I - R) = 0$$

où $\mathcal{F} = \bigcap \sigma \{\log S_{k+1} - \log S_k \,/\, k \geqslant n\}$ et $S_n = (dQ/a_n) \,/\, (dP/a_n)$

Exemples :

Ex (1) :

Soient $P^* = \begin{matrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{matrix}$; $Q^* = \begin{matrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$

On a $\mathrm{Det}\,(I - R) \neq 0$ donc $P \perp Q$.

Ex (2) :

Soient $P^* = \begin{matrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{matrix}$; $Q^* = \begin{matrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{matrix}$

On a $\mathrm{Det}\,(I - R) = 0$, donc P et Q ne sont pas orthogonales.

P^*, Q^* sont les matrices de transition associés à P et Q resp.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. R. DARWICH : La séparation asymptotique dans les shaînes de Markov. Colloque sur la séparation asymptotique et l'estimation, CHAMBERY 1984 FRANCE.

[2] A. HILLION : Sur l'intégrale de Hellinger et la séparation asymptotique C.R.A.S., 283, série A 1976.

[3] D. J. HARTIFIEL : On infinite products of non-negative matrices. STAM. J.APPL. MATH. VOL. 26, n° 2 (1974) p. 297-301,

[4] J. JACOD : Processus de Hellinger, absolue continuité, contiguité. Publications des séminaires de Mathématiques (Séminaires de Probabilités RENNES 1983).

[5] KABANOV, R.S. LIPCER and A.N. SIRJJAEV : Absolute continuity and singularity of localy absolutly continuous probability distribution.
I. MATH. USSR SBORNIK, VOL 35 (1979) n° 5
II. ...., VOL 36 (1980) n° 1

[6] S. KAKUTANI : On equivalence of infinite product measures. ANN of MATH 49 (1948) p. 214-224.

[7] C. KRAFT : "Some conditions for consistency and uniform consistency of statistical procedures". PUB. UNIV. CALIFORIA. VOL. 2 n° 6 p. 125-142.

[8] R. LEPAGE and V. MANDREKAR : "On likel hood raito of measures given by Markov chains" PROC. AMER.MATH. SOC. VOL. 52 (1975) p. 377-380.

[9] J. MEMIN et A.N. SHIRYAYEV : "Distance, d'Hellinger-Kakutani des lois correspondant à deux processus à accroissement indépendant". Preprint.

[10] T. NEMETZ : "Equivalence-orthogonality dichotomies of probability theory" Colloquium on limite theorem of probability theory. KESZITHELY (1974).

[11] A. SPATARU : "On absolute continuity and singularity of probability measures". REV.ROUM.MATH. PUR et APPL. TOME XXVII n° 2 (1983) p. 171-193.