PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JACQUES HARTHONG

Lazare Carnot et le calcul infinitésimal

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1984, fascicule 2
« Séminaires de mathématiques-science, histoire et société », , p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1984___2_A8_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE DE RENNES
Laboratoire associé au C.N.R.S. nº 305

IRMAR

UNIVERSITÉ DE RENNES I
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CÉDEX (France)
Tél : (99) 36.48.15

LAZARE CARNOT ET LE CALCUL INFINITESIMAL

HARTHONG Jacques
I.R.M.A.R.
7 rue René-Descartes
Université de Strasbourg
67084 STRASBOURG CEDEX

LAZARE CARNOT ET LE CALCUL INFINITESIMAL

Le but de cet exposé est de présenter un petit livre : "Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal" par Lazare Carnot (le père de Sadi). Ce texte date de 1797 et la réédition de 1970 est disponible à la librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 9, rue de Médicis, PARIS VI^e.

Le principal intérêt de ce livre est de révéler la fausseté d'une idée très courante : que le calcul infinitésimal ne serait devenu pleinement rigoureux (c'est-à-dire fondé sur la seule logique sans aucun recours à l'intuition, au flair, ou au "métier") qu'avec Weierstrass. Il est vrai que le point de vue de Weierstrass est celui qui domine aujourd'hui ; il est vrai aussi qu'il donne satisfaction ; mais il est non moins vrai que celui de Carnot (qui doit beaucoup à Lagrange, d'ailleurs) eût pu tout aussi bien donner satisfaction et il faudra trouver une autre explication au choix finalement opéré par l'histoire.

En effet Carnot propose une véritable axiomatique, dont nous allons présenter les fils conducteurs et, sur un exemple, comment elle fonctionne.

Carnot commence par distinguer parmi les grandeurs (nous dirions aujourd'hui "nombres réels") deux espèces :

- les grandeurs désignées
- les grandeurs arbitraires ou non désignées.

Une grandeur est désignée si elle est donnée explicitement er univoquement par une formule, un algorithme de calcul, ou tout simplement par son écriture décimale.

Une grandeur arbitraire est au contraire susceptible de varier (éventuellement entre des limites désignées) et reste essentiellement inconnaissable. Parmi ces grandeurs les plus importantes sont les grandeurs infinitésimales, que l'on peut supposer plus petites que n'importe quelle grandeur désignée.

.../...

Carnot part du principe (qui doit être tenu pour un axiome) que le continu est ainsi fait que, entre zéro et n'importe quelle autre grandeur désignée, il y a une infinité de grandeurs non désignables, mais néanmoins soumises aux lois du calcul algébrique usuel.

Dès lors "l'analyse infinitésimale n'est autre chose que l'art d'employer auxiliairement les quantités infinitésimales pour découvrir les relations qui existent entre des quantités proposées" (page 14).

Voici maintenant le coeur de son système (ou, comme on dit aujourd'hui, de son axiomatique) :

PRINCIPE FONDAMENTAL

- Deux quantités non arbitraires ne peuvent différer entre elles que d'une quantité non arbitraire.

Démonstration : Puisque les deux quantités proposées ne sont point arbitraires, on ne peut rien changer ni à l'une ni à l'autre, donc on ne peut rien changer non plus à leur différence, donc cette différence n'est point arbitraire. Ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire I

Deux quantités non arbitraires sont rigoureusement égales entre elles, du moment que leur différence prétendue peut être supposée aussi petite qu'on le veut.
En effet, soient P et Q les deux quantités non arbitraires proposées ; nous venons de voir que leur différence ne saurait être arbitraire, elle ne peut donc par être supposée aussi petite qu'on le veut, ce qui est contre l'hypothèse. Donc cette prétendue différence n'existe pas, donc les deux quantités supposées P, Q sont rigoureusement égales.

Corollaire II

Pour être certain que deux quantités désignées sont rigoureusement égales, il suffit de prouver que leur différence, s'il y en avait une, ne saurait être une quantité désignée.

En effet, des quantités désignées sont des quantités non arbitraires, donc leur différence ne saurait être arbitraire, donc cette différence est nécessairement une quantité désignée, donc pour prouver que cette différence n'existe pas, et que par conséquent les quantités sont égales, il suffit de prouver que si elle existait, elle ne saurait être une quantité désignée.

Théorème

Pour être certain qu'une équation est nécessairement et rigoureusement exacte, il suffit de s'assurer :

1° Qu'elle a été déduite d'équations vraies ou du moins imparfaites, par des transformations qui ne leur ont point ôté le caractère d'équations au moins imparfaites.

2° Qu'elle ne renferme plus aucune quantité infinitésimale, c'est-à-dire, aucune quantité autre que celles dont on s'est proposé de trouver la relation.

Démonstration

Puisque, par hypothèse, les transformations qu'on a pu faire subir aux équations d'où l'on est parti ne leur ont point ôté le caractère d'équations au moins imparfaites, ces équations ne peuvent se trouver affectées que d'erreurs susceptibles d'être rendues aussi petites qu'on le veut.
Mais, d'un autre côté, ces équations ne peuvent plus être de celles que j'ai nommées imparfaites, car celles-ci ne peuvent exister qu'entre quantités qui contiennent quelque chose d'arbitraire, puisque, par leur définition même, l'erreur peut en être supposée aussi petite qu'on le veut. Or, par hypothèse, toutes les quantités arbitraires sont éliminées, puisqu'il ne reste plus que celles dont on s'est proposé de trouver la relation.
Donc; les nouvelles équations ne peuvent être ni absolument fausses, c'est-à-dire affectées d'erreurs qui ne puissent être rendues aussi petites qu'on le veut, ni de celles que j'ai nommées imparfaites. Donc elles sont nécessairement et rigoureusement exactes. Ce qu'il fallait démontrer.

Pour mieux montrer le caractère opératoire de ces principes, nous les avons appliqués rigoureusement à un exemple élémentaire (ici nous ne suivons plus le livre).

<u>Définition</u> : La <u>dérivée</u> u'(x) d'une fonction u(x) au point x est l'unique grandeur <u>désignée</u> (si elle existe) qui vérifie l'équation imparfaite :

$$u'(x) \simeq \frac{u(x + dx) - u(x)}{dx}$$

lorsque dx est une grandeur infinitésimale.

Montrons que si $u(x) = x^m$, alors $u'(x) = mx^{m-1}$.

Il est bien clair que, chaque fois que x est une grandeur désignée, il en va de même pour mx^{m-1}, puisque les deux opérations qui interviennent (multiplication par m et élévation à la puissance m-1) désignent univoquement la grandeur. Nous avons donc simplement à montrer, d'après le théorème ci-dessus, l'équation imparfaite $u'(x) \simeq mx^{m-1}$, ou encore :

$$\frac{(x + dx)^m - x^m}{dx} \simeq mx^{m-1}$$

Or $(x + dx)^m - x^m = mx^{m-1}\,dx + \frac{m(m-1)}{2}\,x^{m-2}\,dx^2 \ldots + dx^m$

D'où :

$$\frac{(x + dx)^m - x^m}{dx} - mx^{m-1} = \frac{m(m-1)}{2}\,x^{m-2}\,dx + \ldots + dx^{m-1}$$

et le membre de droite est infinitésimal car il est la somme de m-1 termes infinitésimaux, C Q F D.

Nous souhaitons vous avoir donné envie de lire ce petit livre passionnant sorti du fond des âges.