M. F. COSTE

Les fractales

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1984, fascicule 2
« Séminaires de mathématiques-science, histoire et société », , p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1984___2_A4_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE DE RENNES

Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 305

IRMAR

UNIVERSITÉ DE RENNES I
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CÉDEX (France)
Tél. : (99) 36.48.15

LES FRACTALES

COSTE M.F.
U.E.R. Maths & Info.
Labo. Algèbre-Logique
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX

SEMINAIRE SCIENCE, HISTOIRE ET SOCIETE - RENNES 1984

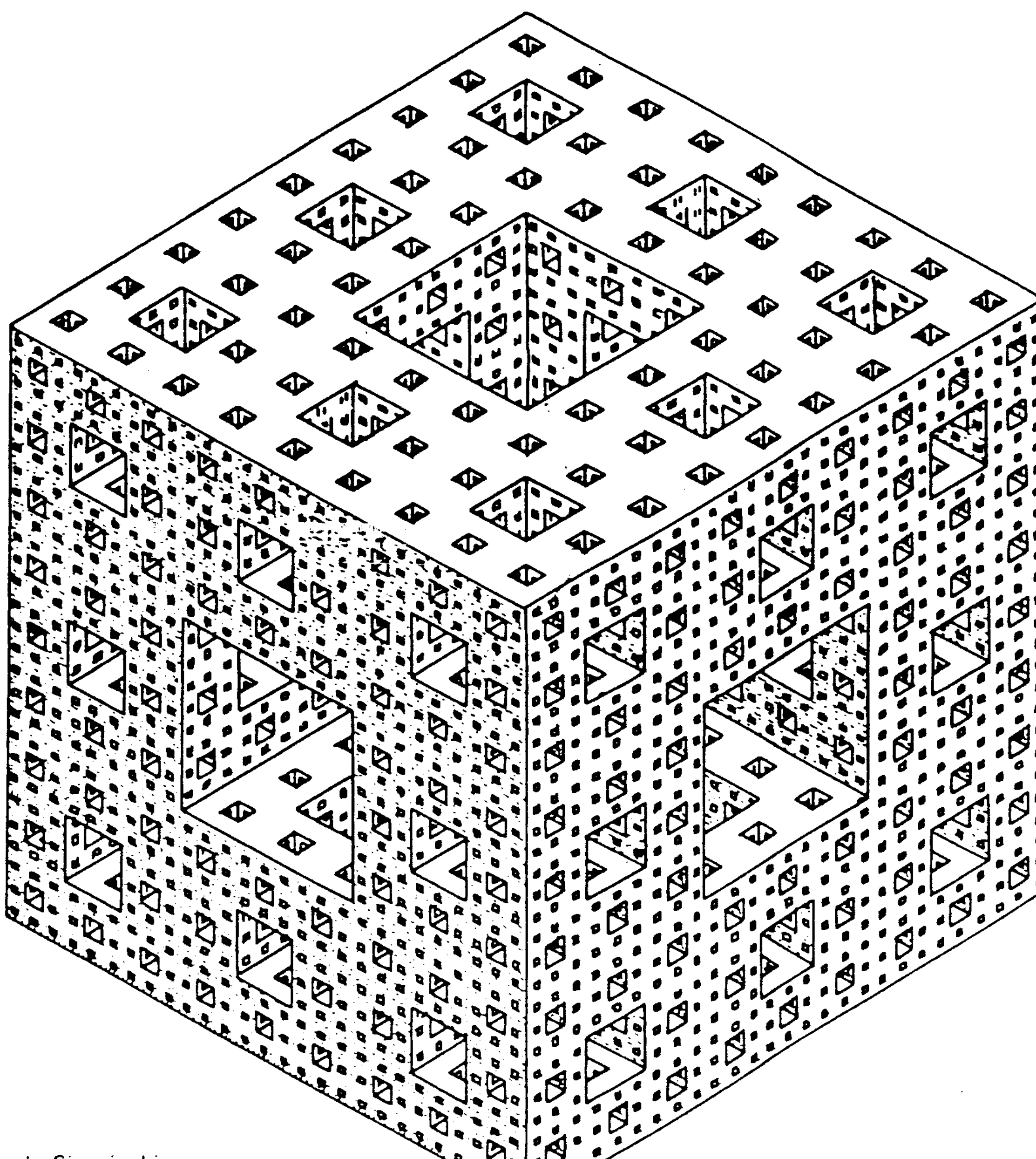
L'article qui suit est extrait du bulletin n°19 de l'IREM de Rennes. Il reprend en partie l'exposé fait le 5 octobre dans le cadre du Séinaire. D'autres aspects ont été abordés dans l'exposé et la discussion qui ont suivi:

-la nécessité d'avoir des informations historiques plus précises que celles apportées par Mandelbrot, notamment sur l'utilisation du concept de dimension fractale en probabilités

-le caractère pluridisciplinaire du sujet (géographie, mais aussi physique, mécanique des fluides)

-le fait que certains mathématiciens rennais, notamment Antoine aient travaillé sur des fractales, en particulier "l'éponge de Sierpinski" qui est une source intéressante de contre-exemples dans les questions d'extension des applications définies sur des compacts

-l'actualité des recherches sur les fractales en mathématiques appliquées.



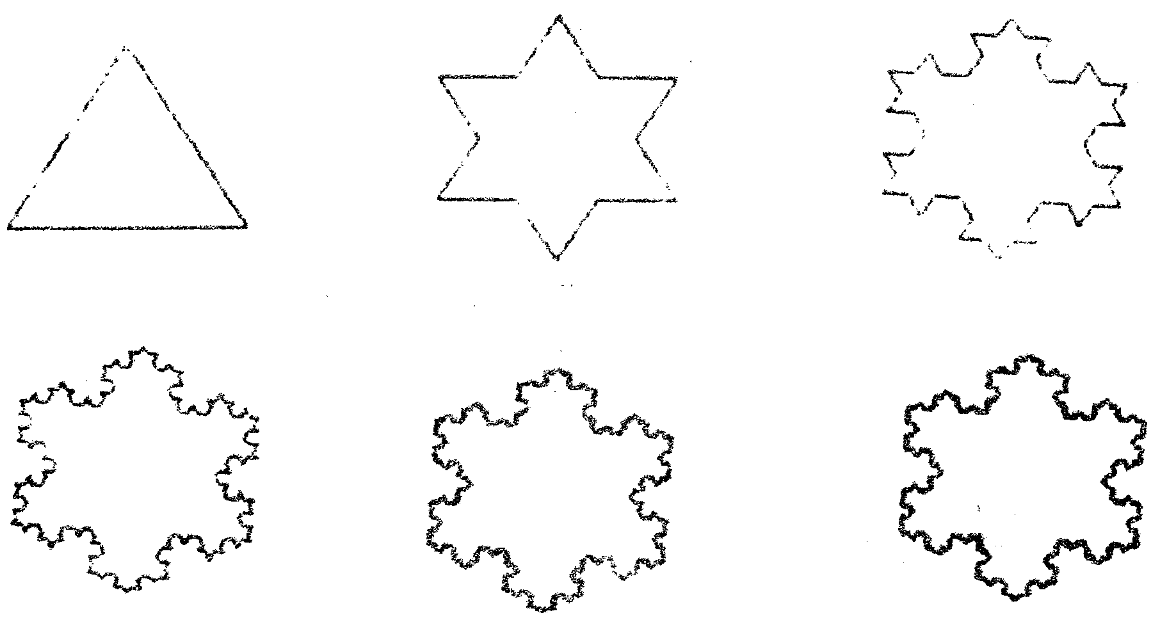
L'éponge de Sierpinski:

On part d'un cube. On le partage en 27 petits cubes. On enlève le cube central ainsi que les 6 cubes situés au centre des faces. On recommence sur les vingt cubes restant. En continuant ainsi indéfiniment, on obtiendrait l'éponge de Sierpinski.

FRACTALES

Fractal : adj. Sens intuitif : dont la forme est extêmement irrégulière et de plus (éventuellement) interrompue, fragmentée quelle que soit l'échelle d'examen.

Un exemple de courbe fractale est donné par la courbe en flocon de neige de Van Koch (1905) : on poursuit jusqu'à l'infini la construction dont voici les 6 premières étapes et qui consiste à chaque étape à remplacer le tiers du milieu de chaque côté par deux segments de longueur égale :



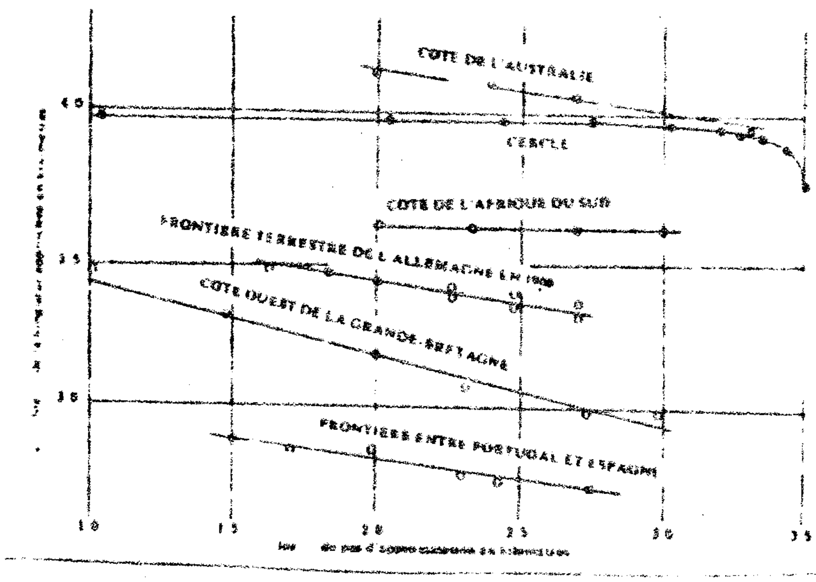
La longueur du contour obtenu à l'étape n est $3(4/3)^n$

Objet fractal : Objet naturel qu'il est raisonnable et utile de représenter mathématiquement par un ensemble fractal.

La côte de Bretagne est-elle un objet naturel de ce type ?

Supposons que nous voulions mesurer cette côte. Comment procéder ? Une méthode consiste à promener sur la côte un compas d'ouverture prescrite, p. Chaque pas commençant où le précédent avait fini ; p multiplié par le nombre de pas donnera une longueur approximative, L(p). Comme une vraie côte sauvage est extrêmement sinueuse, si on rend l'ouverture du compas de plus en plus petite, L(p) augmentera sans limite.

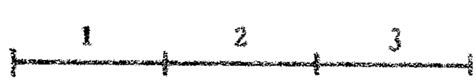
Des mesures ont été effectuées et des diagrammes établis par Richardson (1953) : on porte, dans une échelle bilogarithmique, p en abscisse et L(p) en ordonnée. Sauf dans le cas du cercle où comme il se doit la longueur a une limite finie, la longueur augmente indéfiniment. Le plus remarquable est qu'on voit apparaître des droites de pentes négatives assez faibles.



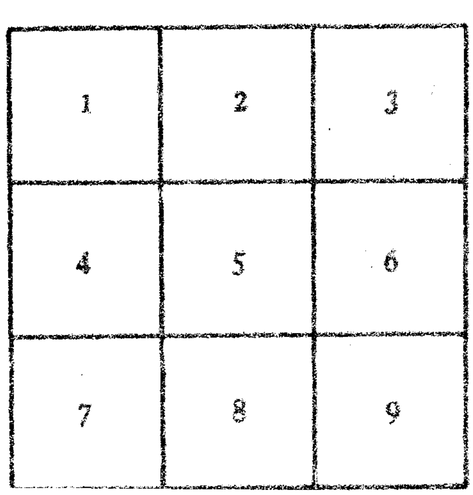
Reprenons l'exemple de la courbe en flocon de neige. $L(1/3^n) = 3(4/3)^n$, d'où en coordonnées bilogarithmiques une droite de pente $1 - \log4/\log3$ (car si $p = 1/3^n$, $n = -\log p/\log3$ d'où $\log L(p) = \log3 + (1 - \log4/\log3) \log p$)

Le nombre $\log4/\log3$ s'interprète comme une dimension appelée dimension d'homothétie : si on réduit un segment par une homothétie de rapport $1/3$, il rentre 3 morceaux réduits dans le segment de départ. Si on fait la même chose pour un carré, on obtient 9 carrés, avec un cube, 27 cubes et avec la courbe de Koch, 4 morceaux :

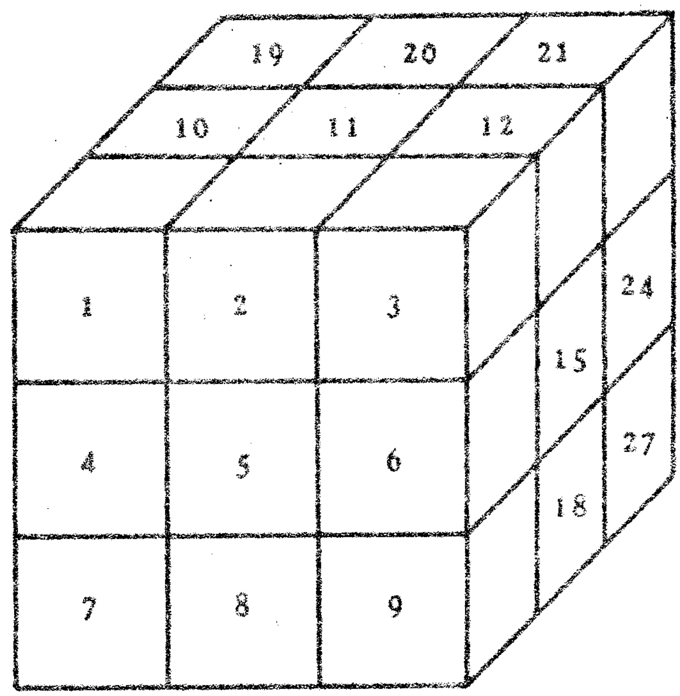
Segment :



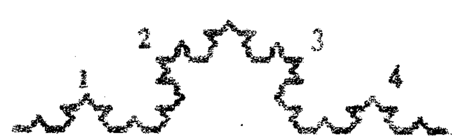
Carré :



cube :



Courbe de Koch :
(le tracé de l'imprimante déforme un peu le motif d'une partie à l'autre)



Il est alors raisonnable de définir, dans le cas où une figure est composée par exemple d'un certain nombre N de morceaux tous égaux à la figure elle-même réduite dans le rapport 1/3 de définir la dimension d'homothétie comme logN/log3. Ce rapport vaut 1 dans le cas du segment, 2 dans le cas du carré, 3 dans le cas du cube et log4/log3 ce qui est un peu plus de 1,21 , dans le cas de la courbe de Koch.

Revenons maintenant à la côte de Bretagne : si m désigne la pente légèrement négative de tout à l'heure, on définit la dimension de la courbe comme étant 1-m, ce qui fournit suivant les situations géographiques considérées (côte plus ou moins découpée) un nombre compris entre 1 et 2 qu'on est bien tenté d'interpréter comme une dimension !

Bibliographie : Les documents indiqués par (*) peuvent être consultés dans un dossier fractales déposé à la bibliothèque de l'I.R.E.M.

Livres :

B. Mandelbrot. Les objets fractals : Forme, hasard et dimension .Flammarion.
(*) Chapitre II. Combien mesure la côte de Bretagne ?

B. Mandelbrot Fractals Form, chance and dimension. W.H. Freeman and company. San Francisco

BD :

(*) Ian Stewart. Les fractals. Les chroniques de Rose Polymat. Belin

Articles :

(*) B. Mandelbrot. La Recherche N° 85 janvier 1978
(*) Le petit Archimède N° 49-50 N° 55-56
(*) Mathématiques et pédagogie N°40

Extraits de livres :

(*) Des monstres de Cantor et Peano à la géométrie fractale de la nature par B. Mandelbrot dans : Penser les mathématiques. Points. Seuil

(*) Mathématiques : Analyse et statistiques. 1°S. IREM de Strasbourg.

D'autres aspects des fractales seront développés ici-même à l'avenir, notamment leur programmation en Logo, très agréable du fait de la récursivité. Les dessins qui illustrent cet article ont été réalisés grâce à Apple.Logo.

Marie-Françoise COSTE-ROY