Présentation du rapport

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1984-1985, fascicule S5
« Informatique et ingénierie didactique », , exp. n° 1, p. 1-153
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1984-1985___S5_A1_0>

Présentation Du Rapport

Le titre de ce sous-thème 2 recouvre un ensemble de recherches conduites dans des structures et des lieux différents. Ces recherches considèrent, à l'opposé de l'autre sous-thème du thème 3, l'informatique comme un outil de l'ingéniérie didactique. Les difficultés qu'elles vont donc rencontrer, tiendront tout autant au combat contre les préjugés contradictoires à ce sujet, qu'à la complexité des problèmes embrassés (préjugés plutôt bien partagés : panacée vs cautère inactif).

Deux principes directeurs conduisent les équipes engagées dans ce sous-thème :

. d'une part, le maître doit pouvoir disposer d'un espace de liberté didactique dans l'emploi d'un logiciel : autrement dit, celui-ci ne peut être fermé, mais sa complétude ne doit pas exiger un important investissement informatique de la part du maître. C'est d'ailleurs l'option choisie, a priori, dans le projet national DIANE ;

. d'autre part, l'élève doit trouver dans le logiciel une aide relativement personnalisée, qui nécessite pour lui un dialogue, une activité vraie. Ce logiciel devrait lui offrir, par sa capacité à mémoriser ses démarches, un moyen de trouver un équilibre cognitif (provisoire certes).

C'est ainsi que tente de procéder l'équipe de Paris VII, dont on lira le rapport joint, à l'égard d'enfants de C.E. 1 puis de C.E. 2, pour équilibrer le sens et l'usage de la notation multiplicative et ceux de l'opération multiplication.

C'est également ainsi que tiennent à procéder les différentes équipes de Rennes par la recherche et l'expérimentation d'aide à la résolution de problème, aide ajustée au mieux à la structure du problème, plus d'ailleurs qu'à celle, un peu chimérique pour l'instant, de la structuration de la solution.

Si les objets d'étude apparaissent différenciés, les démarches sont voisines. Mieux les perspectives 85-86 renforcent la coopération entre les équipes parisienne et rennaise :

. à Rennes, devrait se poursuivre le travail de constitution de plusieurs banques d'exercices à vocation respectivement documentaire, diagnostique et tutorielle ;
. se poursuivra aussi celui de logiciels d'aide à la structuration de problèmes de géométrie, aide opérant sur le traitement des informations du texte et cherchant à accroître l'opérativité de la représentation et à contrôler également le processus de validation ;
. enfin, après une étude plus poussée des données procédurales relatives à un problème à modalités multiples, une équipe de Rennes devrait travailler avec l'équipe parisienne sur les problèmes multiplicatifs et le rôle de la multiplication.

---

(1) La poursuite de ce travail est subordonnée à l'octroi de moyens au C.A.T.E.N. et à la prise en compte de cette action dans sa politique 85-86.

A Rennes, on se chargera particulièrement, dans les différents cas, du traitement statistique des données recueillies.

Le rapport 84-85 ci- joint se compose des éléments suivants :

1 - Problématique et axes de la recherche organisée par l'I.R.E.M. de Rennes, avec la participation de l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique de l'Université de Rennes I, de l'I.N.S.A. de Rennes et du C.A.T.E.N. :

1er axe : *Aide à la résolution de problèmes de géométrie en classe de 4ème.*

2ème axe : *Aide à la résolution des problèmes de type "partage inégal".*

2 - Problématique et état de la recherche relative aux banques d'exercices de mathématiques du C.A.T.E.N..

3 - Même démarche pour les logiciels du CATEN pour TO7 et TO7-70 de transferts télématiques et d'aide à différents niveaux de lecture d'un texte de problème.

4 - Problématique et état de la recherche relative au problème de l'introduction de la multiplication au cours élémentaire par une équipe de l'I.R.E.M. de Paris-Sud.

5 - Problématique et généralités au sujet d'une typologie de logiciels utilisés à l'école élémentaire par E. TREHARD de l'I.R.E.M. de Paris-Sud.

UTILISATION DE LOGICIELS DANS L'APPRENTISSAGE DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES

I.R.E.M. DE RENNES

AVEC LA COLLABORATION DE :

C.A.T.E.N. - ACADEMIE DE RENNES

I.N.S.A. - DE RENNES

I.R.I.S.A.
I.R.M.A.R. - UNIVERSITE DE RENNES I

PRESENTATION DE LA RECHERCHE

Nous ne rappellerons, ici, ni les circonstances qui ont déterminé la direction donnée à la recherche, ni la composition de l'équipe, celles-ci ayant été décrites précédemment (cf annexes 1, 2 et 3).

Ce sont les principales caractéristiques de notre démarche et de notre méthodologie que nous présenterons avant de rendre compte du travail réalisé au niveau des deux premières situations étudiées.

§ 1 - L'ACTIVITE DE RESOLUTION DE PROBLEME

L'hypothèse théorique par rapport à laquelle se situe notre démarche, comme la plupart des recherches en didactique à l'heure actuelle, suppose que c'est au niveau de l'activité développée par l'élève en situation de résolution de problème qu'il faut rechercher le véritable fondement des connaissances qu'on souhaite lui transmettre.

Du point de vue de la pratique de l'enseignement, deux questions essentielles restent posées, une fois admise cette hypothèse :

- comment "orienter" cette activité de l'élève que l'on a déclenchée vers une mise en forme des connaissances correspondant aux objectifs d'enseignement retenus à un moment donné (niveaux de mathématisation et de généralité en particulier) ? C'est la question sur laquelle butent de nombreux enseignants convaincus par ailleurs de la nécessité d'un enseignement par la résolution de problème ; c'est aussi la question qui est au centre de nombreuses recherches en didactique des mathématiques ;

- mais une autre question, tout aussi fondamentale pour l'enseignement, est celle des conditions qui doivent être réunies pour que l'élève se retrouve effectivement en situation de résolution de problème et développe une véritable activité en rapport avec cette situation.

C'est à cette seconde question que nous avons choisi de nous intéresser principalement. Tout enseignant sait bien qu'il ne suffit pas de proposer un problème "intéressant" aux élèves pour que ceux-ci accrochent. On peut bien sûr rechercher les situations qui ont le plus de chance d'accrocher un maximum d'élèves ; c'est la tâche à laquelle se sont consacrées, depuis une dizaine d'années, de nombreuses équipes dans les I.R.E.M. Mais ces situations susceptibles de déclencher "naturellement" une activité de solution de problème sont, en fait, peu nombreuses. Elles ne sont pas, en outre, nécessairement les plus intéressantes du point de vue des objectifs que l'on a retenus.

L'hypothèse principale qui est à la base du travail entrepris est qu'il est possible de contrôler, dans une certaine mesure, les conditions qui déterminent le fait que l'élève s'engage ou non dans la résolution d'un problème donné et dans une recherche active de la solution. Le recours à un système informatique se justifie par la complexité de la gestion de ces conditions et par leur nécessaire individualisation.

§ 2 - L'APPRENTISSAGE DE LA RESOLUTION DE PROBLEME

L'apprentissage de la résolution de problème est presque toujours conçu :

- ou comme l'entraînement à un type de problème déterminé, basé sur l'emploi répété d'une procédure donnée (les applications de la procédure pouvant d'ailleurs ne pas être du tout immédiates : c'est la plus ou moins grande difficulté de cette application qui caractérise justement dans l'enseignement le passage des exercices aux problèmes) ;
- ou comme l'apprentissage de méthodes et de stratégies devant permettre à l'élève de s'adapter à des classes très larges de problèmes.

Si on accepte la distinction qui est souvent faite dans les recherches sur la résolution de problème entre structure du problème (qui concerne les données et les buts) et structure de la solution (qui concerne les modalités de la tâche et de la résolution), on constate que c'est plutôt au niveau de cette seconde structure que tente d'intervenir l'enseignement : que ce soit l'apprentissage de procédures spécifiques ou celui de stratégies générales, ils se proposent de donner à l'élève des solutions et des raisonnements "tout faits".

Une autre démarche possible est de considérer que l'élaboration de procédures et de solutions adaptées, la mise en oeuvre de stratégies et de raisonnements adéquats (en fait l'ensemble des processus qui concernent la structure de la solution) doivent relever directement de l'activité de l'élève. Ce sont ces processus qui constituent vraisemblablement les fondements de l'acquisition de connaissances nouvelles et il est probable qu'un apprentissage ou qu'un guidage systématique n'ait que peu d'efficacité à ce niveau. Il faut que l'élève trouve lui-même la solution (ou tout au moins la cherche véritablement) pour en comprendre parfaitement la structure et la signification. Une intervention (assistée ou non par ordinateur) dans cette phase de la résolution du problème est alors, sinon inutile, du moins très délicate à réaliser.

Il n'en va pas de même, par contre, au niveau de la structure du problème : notre hypothèse est qu'une majorité d'élèves ne s'engage presque jamais dans une véritable activité de résolution de problème parce qu'ils ne comprennent pas le problème posé et non parce qu'ils sont incapables d'élaborer une solution ou de mettre en oeuvre un raisonnement. Tous les enseignants savent bien les difficultés rencontrées pour lire un énoncé de problème, pour comprendre le but et le contrat qui caractérisent la tâche proposée, pour se représenter correctement la situation décrite, pour repérer les propriétés et les relations pertinentes...

C'est donc à ce niveau qu'une aide paraît nécessaire et sans doute efficace. Il ne faut pas que des élèves échouent seulement parce qu'ils ne comprennent pas le problème. L'observation des élèves montre qu'un blocage au niveau de cette phase de la résolution du problème n'est, généralement, source d'aucun progrès, d'aucune acquisition. Il paraît donc important d'aider les élèves qui ont le plus difficulté à surmonter un tel blocage afin qu'ils ne restent pas sur un échec, bien sûr, mais aussi afin qu'ils parviennent, coûte que coûte, à la phase de recherche véritable, celle qui concerne la structure de la solution.

En outre, c'est à ce niveau qu'un apprentissage est sans doute possible et souhaitable. Apprendre à l'élève à analyser correctement la structure d'un problème n'a pas la même signification ni la même fonction que lui apprendre la solution d'un problème ou d'une classe de problèmes. Trouver la solution d'un problème c'est "l'affaire" de l'élève et il faut sans doute peu intervenir dans le processus, pas pour le programmer en tous cas. Créer les conditions d'une recherche de solution, c'est par contre "l'affaire" de l'enseignant et il ne suffit sans doute pas, pour cela, de donner un énoncé.

Si l'intervention didactique assistée par ordinateur n'est qu'un décalque des méthodes employées dans les situations de classe, on sait d'avance les limites de son efficacité. Il faut donc s'en démarquer, étudier et utiliser de façon optimale les spécificités de l'outil informatique. C'est ce que nous tentons de faire en abordant la question de l'aide à la résolution de problème dans le cadre de la problématique décrite ici.

§ 3 - LES SITUATIONS-PROBLEMES

Le groupe de recherche a choisi de ne pas se poser, a priori, la question de savoir ce qu'est ou ce que n'est pas une situation-problème. Beaucoup de situations peuvent sans doute devenir de vrais problèmes pour les élèves pourvu qu'un certain nombre de conditions soit réalisé.

Deux directions bien différenciées ont cependant été prises dès le départ :

- La première concerne l'identification et le traitement des propriétés pertinentes dans la résolution d'un problème de géométrie.

C'est à la fois l'importance de cette question dans l'enseignement de la géométrie au niveau de la classe de 4ème et la volonté de réfléchir au rôle que peut avoir la réalisation de la figure sur écran qui ont orienté le groupe dans cette voie.

L'objectif général est d'analyser la manière dont l'élève traite les différentes propriétés d'une configuration à la fois pour réaliser une figure à partir de l'énoncé qui lui est fourni, pour repérer celles qui sont pertinentes par rapport au but proposé et pour émettre des conjectures susceptibles de le faire progresser dans son raisonnement. Le logiciel envisagé devrait fournir, pour une figure donnée, une aide à l'élève lui permettant de franchir au mieux cette étape fondamentale de la mise en oeuvre d'une démonstration et constituer la base d'un apprentissage permettant à l'élève de s'attaquer à certains problèmes de géométrie.

- La deuxième direction concerne l'identification de la structure d'un problème présenté sous une forme non mathématisée.

Au niveau des classes de CM2, 6ème et 5ème, la difficulté que rencontrent de nombreux élèves dans le traitement des problèmes "à scénario" (qu'on appelle aussi quelquefois "concrets" ou "avec habillage") est bien connue. Cette difficulté concerne la sélection des données pertinentes, comme pour les problèmes de géométrie, mais aussi la modélisation de la situation (sous forme d'un schéma par exemple) et la représentation que l'élève se fait de la structure relationnelle sous-jacente aux informations fournies dans l'énoncé.

La situation retenue est un problème de type "partage inégal" qui avait été expérimenté par ailleurs* et pour lequel un certain nombre de données brutes étaient disponibles (le prolème a été soumis sous différentes modalités à une population relativement importante d'élèves de 5ème et de 6ème). Le logiciel envisagé a pour but d'aider l'élève à surmonter les difficultés qu'il rencontre dans l'analyse de la structure du problème : il doit le conduire à se construire une représentation opérationnelle de la situation décrite dans l'énoncé et, en particulier, à donner un statut (numérique, arithmétique, algébrique) aux relations définies dans cet énoncé.

Le travail réalisé et un certain nombre de résultats concernant ces deux situations sont présentés dans la suite du compte-rendu.

§ 4 - LA CONCEPTION DES LOGICIELS

Nous spécifierons cette conception à propos de trois aspects importants des logiciels que nous envisageons :

a) Les modes d'intervention

C'est par une démarche empirique que nous nous proposons, dans un premier temps, de repérer les "éclaircissements" et les "coups de pouce" susceptibles de débloquer certaines situations critiques dans la résolution d'un problème donné. Cette expérimentation de modes d'intervention possibles, comme le choix des situations étudiées ne correspond pas, en effet, à une conception didactique particulière. Elle repose cependant sur un certain nombre de principes concernant le mode de fonctionnement du système "élève-problème-logiciel" :

- une intervention plutôt au niveau des processus qui concernent la structure du problème que de ceux qui concernent

* *Travaux réalisés sur l'apprentissage des mathématiques - Rapport de synthèse - ATP "Education" - novembre 1979 - Laboratoire de Psychologie de l'Education - Université de Haute-Bretagne RENNES II.*

la structure de la solution (ce qui ne veut pas dire qu'on soit toujours capable de faire cette distinction dans la pratique, ni même qu'elle soit toujours pertinente et souhaitable) ;

- une intervention privilégiant le recours aux possibilités graphiques du micro-ordinateur et donc au versant figuratif et représentatif des connaissances impliquées dans la résolution de problème (construction et analyse de figures, représentation graphique des relations entre les données du problème ou entre hypothèses et conclusions...) ;

- une intervention basée sur une initiative préalable de l'élève et, quand cela est possible, sur un choix qu'il effectue (par rapport à un ensemble d'aides qui lui est proposé) ; ceci n'exclut pas cependant le recours à un guidage plus systématique à certains moments.

b) L'attitude de l'élève

Les facteurs qui concernent la manière d'attaquer le problème, d'analyser l'énoncé proposé et d'identifier sa structure ne représentent, bien sûr, qu'une partie des conditions qui vont déterminer le fait que l'élève s'engage ou non dans une recherche active de la solution.

Ainsi, parmi les conditions qui déterminent le type d'activité que nous voudrions susciter, figurent en bonne place celles qui relèvent de l'initiative de l'élève et de son attitude. Nous avons choisi de ne pas aborder cette question en termes de motivation de l'élève ou d'intérêt pour une situation donnée car les nombreuses recherches qui ont plus ou moins explicitement adopté cette perspective ont montré les limites d'une telle conception de l'activité.

Plus que sur un intérêt préalable pour telle ou telle situation, c'est sur un développement progressif de l'intérêt de l'élève que nous faisons reposer notre démarche. En effet, la clarification de certains aspects de la tâche proposée, l'explicitation de la "règle du jeu", la certitude de ne pas "sécher" devant le problème pourraient contribuer à cette mise en place progressive d'une attitude de recherche active. S'il n'existe pas de motivation générale à résoudre n'importe quel problème, il paraît exister, par contre, une motivation assez "naturelle" à inventer des solutions et à élaborer des raisonnements. Encore faut-il avoir réussi à faire accepter la problématique à l'élève et à le "piquer au jeu".

La gestion au moins partielle par un système informatique de cette phase d'assimilation du contrat, de la situation et de la problématique possède un avantage évident : permettre un "dialogue" entre celui qui pose le problème et celui qui le cherche. C'est sur cette caractéristique de la situation que devrait reposer le développement de l'intérêt de l'élève et de son activité. De nombreuses inconnues existent, bien sûr, au niveau du fonctionnement et des effets du fameux dialogue élève-machine ; seules une expérimentation et une observation minutieuses permettront de mieux connaître ces effets dont on peut parier qu'ils sont à la fois positifs et négatifs...

Indépendamment de la question des interfaces (langage graphique, langage naturel) et des aspects socio-affectifs, il est clair toutefois que la réalité même d'un tel dialogue repose d'abord sur la capacité de diagnostic du système.

c) <u>Le diagnostic des dysfonctionnements</u>

C'est là, on le sait, la pierre d'achoppement de tous les systèmes d'enseignement assisté.

En ce qui concerne plus spécifiquement l'aide à la résolution de problème, on peut constater que l'analyse et l'interprétation des causes de blocage ne sont pas simples à réaliser, non plus, en situation de classe (quand on observe des groupes d'élèves en situation de recherche de problème, par exemple, on est toujours frappé par le fait que les interventions de l'enseignant qui supervise le travail de toute la classe "tombent" souvent "à côté" : il peut y avoir un grand décalage entre l'aide que voudrait apporter l'enseignant et le "problème" que se pose effectivement le groupe d'élèves). En permettant une analyse au niveau individuel, le recours à un système informatique pourrait rendre plus aisé ce diagnostic à condition toutefois que l'on se donne les moyens d'interpréter le comportement des élèves. Il est possible, en effet, que pour des situations particulières et sur la base d'une analyse approfondie de la tâche proposée on parvienne à repérer les pincipaux cas de blocage du processus qui est censé conduire l'élève à la solution du problème et à identifier la nature de ces dysfonctionnements. C'est là le but de la phase d'observation dans laquelle nous sommes engagés.

Une seconde étape, à la suite de la réalisation du logiciel, reposera sur l'analyse des "aides" que l'élève va demander (fréquence et nature en particulier) et sur la manière dont il utilise les informations et les orientations qui lui sont données. Mais la signification de ces demandes de l'élève et de l'impact plus ou moins grand de l'aide apportée n'est pas facile à interpréter et une démarche envisagée à l'heure actuelle consiste à tester la réalisation d'un tel système de diagnostic pour une classe de problèmes bien typée et déjà étudiée du point de vue de la structure de la tâche (certains problèmes additifs et multiplicatifs au niveau CM1, CM2 et 6ème par exemple).

ANNEXE 1

MISE EN PLACE DE L'AXE DE RECHERCHE

(EXTRAIT DU PROJET INITIAL - OCTOBRE 1984)

Le C.A.T.E.N. et l'I.R.E.M. de Rennes ont mis en place au début de cette année scolaire un groupe de recherche dont l'objectif est de contribuer à la réflexion sur l'utilisation des logiciels dans l'enseignement des mathématiques et, plus spécifiquement, sur l'utilisation de tels outils pédagogiques dans l'apprentissage de la résolution de problèmes.

L'impulsion est venue d'une demande de l'A.D.I. à propos de l'aide que l'on pourrait apporter aux élèves en difficulté à l'issue de la classe de cinquième.

La constitution du G.R.E.C.O. "didactique et acquisition des connaissances scientifiques" a fourni un cadre permettant aux individus et aux équipes qui souhaitaient se regrouper sur le thème de recherche précédent de mieux préciser leur orientation et leur démarche.

I - L'ORIENTATION GENERALE :

Elle est surtout définie, à l'heure actuelle, par un certain nombre de travaux auxquels participent ou ont participé les membres du groupe.

Ces travaux, cités par ordre d'antériorité, sont les suivants :

- La recherche menée par un groupe I.R.E.M. dans une perspective pluridisciplinaire (Français et Mathématiques) portant sur les élèves de sixième "en difficulté" et conduisant à l'élaboration d'un document à paraître (décembre 1984) ; quelques aspects de l'aide à la résolution de problèmes ont été expérimentés par ce groupe ; la reconstitution d'énoncés (puzzles), en particulier, a fait l'objet de plusieurs observations et a conduit à la réalisation d'un logiciel qui permet la mise en oeuvre d'une telle activité dans de bonnes conditions (le logiciel a été réalisé par des stagiaires du C.R.E.F.F.I.B.*)

---

* *Centre de Recherche et de Formation de Formateurs en Informatique de Bretagne*

- La recherche actuellement en cours dans un groupe I.R.E.M. travaillant sur le problème de la lecture des énoncés mathématiques ; ce groupe expérimente diverses situations de classe (transmission, questionnement, traduction,...) susceptibles d'améliorer la manière dont les élèves lisent et traitent les textes qu'on leur propose en mathématiques (en particulier les énoncés de problèmes mais pas uniquement) ;

- Le travail réalisé par une équipe du C.A.T.E.N. qui a conduit à la mise au point d'une banque de problèmes pour la proportionnalité ; ce travail mené dans un premier temps dans une perspective documentaire, s'appuie sur une analyse des tâches et sur une classification des problèmes retenus à partir de plusieurs critères de nature cognitive ;

- L'extension de ce travail à la réalisation d'une banque de problèmes permettant une évaluation de l'apprentissage et donc un diagnostic des causes de blocage dans la résolution des problèmes proposés.

- Le logiciel mis au point par des stagiaires du C.R.E.F.F.I.B. et qui propose un guidage dans la résolution d'un problème de géométrie ; une amélioration de ce logiciel est actuellement en cours.

Pour préciser son orientation de travail, le groupe de recherche envisage de s'appuyer également sur des recherches un peu plus théoriques concernant la compréhension des énoncés de problèmes ainsi que sur des recherches s'intéressant aux systèmes "intelligents" d'aide à la résolution de problèmes (des contacts avec des équipes travaillant sur ce sujet ont été pris).

ANNEXE 2

COMPOSITION DU GROUPE DE RECHERCHE

ALLEN Richard	I.R.I.S.A. - Université de RENNES I St-OLAF - Collège Northfield Minesota (USA)
BERTHELEU Christiane	I.R.E.M. - Université de RENNES I
BOISNARD Danièle	C.A.T.E.N.
FONTAINE Marie-Danielle	I.R.E.M. - Université de RENNES I Collège de LA GUERCHE DE BRETAGNE
GAREL Emmanuelle	I.N.S.A. - RENNES I.R.M.A.R. - Université de RENNES I
GIORGIUTTI Italo	I.R.M.A.R. - Université de RENNES I
GRAS Régis	I.R.M.A.R. - Université de RENNES I
JEGOU Yvon	I.R.E.M. - Université de RENNES I Collège de LOUDEAC
JULO Jean	I.R.E.M. - Université de RENNES I
KERBOEUF Marie-Paule	I.R.E.M. - Université de RENNES I Collège de LIFFRE
LE ROUX Roger	I.R.E.M. - Université de RENNES I
MERRI Maryvonne	I.R.E.M. - Université de RENNES I
MOULINET Brigitte	I.R.E.M. - Université de RENNES I Collège de BRUZ
NICOLAS Pierrick	I.R.I.S.A. - Université de RENNES I
PISELLA Francis	I.R.E.M. - Université de RENNES I Collège de FOUGERES

C.A.T.E.N. - Centre d'Etudes, de Recherches et d'Applications des Technologies Nouvelles pour la Formation et l'Information.
I.N.S.A. - Institut National des Sciences Appliquées.
I.R.I.S.A. - Institut de Recherche sur l'Informatique et les Systèmes Aléatoires.
I.R.E.M. - Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.
I.R.M.A.R. - Institut de Recherche Mathématique de Rennes.

ANNEXE 3

MODALITES DE FONCTIONNEMENT

- Réunions bimensuelles pour l'ensemble du groupe.
- Moyens horaires affectés au groupe par l'I.R.E.M. : 3 x 2 h + animateurs du Supérieur.
- Moyens horaires affectés par la Direction des Collèges à ce groupe au titre du GRECO : 2 x 2 h.
- Vacations pour une psychologue du groupe : 300 vacations.
- Secrétariat assuré par l'I.R.E.M. et l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique de RENNES.

A X E I

AIDE A LA RESOLUTION DE PROBLEMES DE GEOMETRIE EN QUATRIEME

CHAPITRE 1

PROBLEMATIQUE

§ 1 - POURQUOI LE DOMAINE GEOMETRIQUE ?

La recherche de l'aide à apporter à l'élève sur le versant de la structuration du problème caractérise notre démarche.

Notre problématique repose à la fois :

- sur le STATUT HEURISTIQUE que pourrait avoir cette structuration pour l'élève, ce qui l'introduirait alors dans un véritable processus de résolution (phases de recherche et de découverte) ;
- sur le ROLE D'ORIENTATION qu'a ce versant pour une structuration de la solution.

Or, la représentation graphique est un outil privilégié sur le versant de la structuration du problème : sa construction et son utilisation grâce à l'éditeur graphique formant d'ailleurs le point de convergence pour la réalisation des deux logiciels (géométrie et problèmes de partage inégal).

Cependant, le rapport entre énoncé et représentation graphique est original en géométrie :

- Il y a DEPENDANCE stricte du signifiant au signifié : l'élève "dessine" le texte ;

- chaque transformation du texte coïncide avec une transformation de la figure et de ses propriétés ;
- la figure n'est, par contre, qu'une représentation particulière des objets logico-géométriques du texte.

Les objets de l'énoncé sont définis dans le cadre d'une théorie géométrique : il s'agit en fait de classes d'objets.

Aussi, la représentation graphique ne peut-elle, dans le cas de la démonstration géométrique, être utilisée de façon autonome : toute conjecture et tout calcul sur la figure sont susceptibles d'être erronés.

Trois voies de recherche graphique s'ouvrent alors :

- l'aide à la construction de la figure : cette aide nécessite la reconnaissance, par le micro-ordinateur, des objets géométriques produits par l'élève (diagnostic)
- la transformation, par l'élève, des hypothèses (c'est-à-dire du texte) et la perception correspondante de la modification de la figure ;
- la mise à la disposition de l'élève d'un "stock" de figures (afin de tester le niveau de généralité d'une conclusion).

§ 2 - ACTIVITE DE RESOLUTION DE PROBLEMES ET ACTIVITE DE DEMONSTRATION.

L'activité de démonstration en géométrie, avec appui et contrôle de la figure, est caractéristique de la classe de Quatrième.

En effet, avant la classe de Quatrième, les preuves sont produites par des moyens empiriques. Au-delà, l'élève accède à la géométrie analytique et des outils théoriques de plus en plus puissants l'amènent à se passer des figures.

Comment l'activité de démonstration avec une figure peut-elle alors acquérir un SENS pour l'élève ?

Comment peut-il passer d'une définition empirique à une définition logique de la preuve ?

Le constat qu'émettent le plus souvent les enseignants de mathématiques de Quatrième, à propos de l'activité en géométrie de leurs élèves est : "Ils ne savent pas démontrer".

En fait, ils mettent en cause deux comportements différents :

- les élèves ne suivent pas les règles de communication préconisées par le maître : construction de la figure, hypothèses, conclusion, démonstration ;
- les élèves n'appliquent pas les règles logiques de la chaîne démonstrative.

Améliorer l'activité de résolution de problèmes en géométrie, ce serait, dans cet esprit :

- amener les élèves à respecter les "exigences" de la communication avec le maître : mais, la démonstration risque bien alors de ne correspondre qu'à un contrat que remplit l'élève, sans pour autant acquérir un sens ;
- amener les élèves à distinguer correctement les hypothèses des conclusions, car c'est la confusion la plus fréquemment signalée : or, nos observations, lors d'une comparaison entre rédaction classique et utilisation de déductogrammes, établissent que l'obstacle est autant linguistique que logique (compréhension du "si... alors").

L'hypothèse commune aux différentes parties de notre recherche, tant entreprises actuellement qu'envisagées pour l'année prochaine, est "qu'il est possible de contrôler, dans une certaine mesure, les conditions qui déterminent le fait que l'élève s'engage ou non dans la résolution d'un problème donné et dans une recherche active de la solution" (cf. présentation de la recherche).

Or, de façon effective, ces conditions ne passent pas principalement par une aide à la phase déductive, dans le domaine géométrique.

§ 3 - CHOIX D'UNE SITUATION-PROBLEME PARTICULIERE.

Nous avons distingué deux types d'activités chez l'élève :

- les activités de traitement des différentes propriétés d'un objet géométrique ;
- les activités de construction,

et tenté d'y faire correspondre des types de problèmes, discriminés entre autres par l'opposition universel-existenciel :

traitement des propriétés d'un objet	construction d'un objet
ex. 1 Démontrer que ABCD est un parallélogramme.	ex. 2 Un cercle (C) étant donné, trouver son centre en utilisant exclusivement le compas.

ex. 3 Quel est le plus grand nombre possible de points d'intersection entre un rectangle et deux cercles ?

Notre objectif principal est d'analyser la manière dont l'élève traite les différentes propriétés d'une figure.

Mais, la situation-problème choisie fait intervenir une figure complexe, représentation graphique d'une configuration.

Aussi faudra-t-il prendre en compte :

- non seulement une activité de traitement des différentes propriétés,
- mais aussi une manipulation de la figure, si l'élève teste les relations entre les objets de la configuration et parvient ainsi à extraire les relations invariantes.

Situation-problème choisie :

ABCD est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en O.

d_1 est la parallèle à (AC) passant par B ;

d_2 est la parallèle à (AC) passant par D ;

d_3 est la parallèle à (DB) passant par A ;

d_4 est la parallèle à (DB) passant par C.

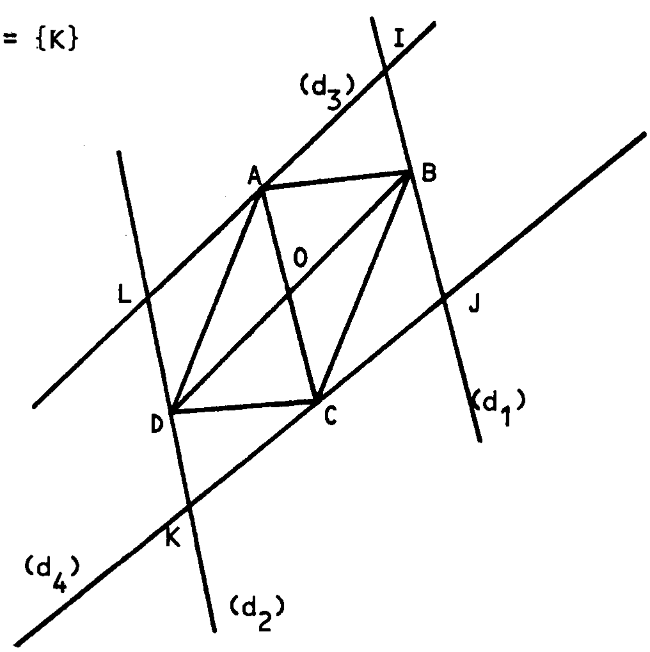
Les points I, J, K, L sont tels que :

$d_1 \cap d_3 = \{I\}$

$d_1 \cap d_4 = \{J\}$

$d_2 \cap d_3 = \{L\}$

$d_2 \cap d_4 = \{K\}$



Notre hypothèse de travail est la suivante :

L'émission de conjectures sur la figure, par l'élève lui-même, prépare et favorise l'activité de démonstration.

Cette hypothèse concerne directement le premier type de conjectures distingué ci-dessous. Mais il reste à savoir, lorsque l'élève manipule la figure et construit de nouveaux objets géométriques, sous quelles autres conditions l'évaluation du risque associé à l'émission d'une conjecture peut favoriser un passage à la démonstration.

§ 4 - STATUT DES CONJECTURES DANS L'ANALYSE DES SITUATIONS.

Nous distinguons trois catégories de conjectures :

a) Les conjectures qui portent sur la reconnaissance d'un objet géométrique.

L'élève connaît un nombre fini d'objets géométriques. Lorsqu'il émet une conjecture :

- il les fait intervenir lui-même dans la situation ;
- son jugement repose aussi bien sur un ensemble de propriétés de cet objet que sur une propriété particulière ou une de ses figurations ;
- pour valider son jugement, il lui faut choisir une propriété de définition pour la relier à une hypothèse.

L'émission de conjectures devrait alors, nous semble-t-il, favoriser l'utilisation d'une démarche rétrospective (des conclusions vers les hypothèses), alors que seule la démarche prospective (des hypothèses vers les conclusions) est généralement enseignée.

La démonstration acquiert un SENS pour l'élève lorsqu'il perçoit :

- que c'est une activité dialectique entre démarche prospective et démarche rétrospective d'une part, entre apport de preuves et apport de contre-exemples d'autre part. Mais cette seconde perspective est plus difficilement mobilisable par l'élève lui-même et l'outil informatique peut permettre un travail à ce niveau ;
- que c'est une activité de prise de décision : il faut choisir, au sein de l'ensemble des propriétés de l'objet géométrique, une propriété de définition.

b) Les conjectures qui établissent un lien entre le domaine géométrique et un autre domaine (numérique, arithmétique, des quantités physiques...).

Exemple 1.

Lorsque l'élève émet une conjecture du type "Les triangles - que je viens de nommer - sont tous superposables", deux interprétations sont possibles :

- ou il établit un lien entre le domaine géométrique (activité de découpage) et le domaine des quantités physiques (activité de recouvrement ou activité de comparaison)
- ou il y a une confusion entre "superposabilité" et "même surface", c'est-à-dire entre les aspects bidimensionnel (surface) et unidimensionnel (aire).

Exemple 2.

Lorsque l'élève émet une conjecture du type : "Le parallélogramme IJKL est deux fois plus grand que ABCD" et "Si l'on recommence la même construction à partir du parallélogramme IJKL, alors le nouveau parallélogramme est trois fois plus grand que ABCD", il établit des liens entre :

- le domaine géométrique,
- le domaine arithmétique (loi de progression),
- le domaine des quantités physiques (surface).

De même qu'il n'y a objet de connaissance que dans la mesure où l'élève établit des liens entre les différents aspects ou propriétés de cet objet (type I de conjectures), il n'y a DOMAINE DE CONNAISSANCE que lorsque l'élève est en interaction avec plusieurs domaines de contenus à la fois.

L'établissement d'un lien entre le domaine géométrique et un autre domaine permet l'intervention de deux types de critères pour une validation :

- des critères extrinsèques à la théorie logico-formelle : par exemple, lorsqu'il superpose des triangles, l'élève met en correspondance un constat et la conjecture émise :

- des critères intrinsèques : c'est le cas, lorsque l'élève fait intervenir les conditions de la superposabilité de deux triangles (avoir un côté égal compris entre deux angles égaux ou avoir un angle égal compris entre deux côtés égaux). Il est alors confronté à deux problèmes :

  . l'explicitation de ces conditions qui peuvent n'être, dans un premier temps, que des "théorèmes en acte" ;

  . l'intervention de la théorie géométrique : quand a-t-on deux angles égaux ?

c) <u>Les conjectures qui portent sur les invariants de construction</u>.

L'élève considère cette fois la figure comme le résultat d'une activité de construction. Du fait de la complexité de cette figure, son intérêt se centre non plus sur les seules propriétés des objets géométriques, mais aussi sur les relations entre ces objets. Quels sont alors les points et les directions qui articulent cette réalisation de l'élève ?

Il faut pour cela que la figure soit un ETAT dans un processus de déformation progressive, ou de transformation par réitération.

Deux voies de recherche s'ouvrent alors :

- il faut permettre à la figure de devenir un véritable support d'expérimentation pour l'élève et favoriser ainsi l'émission de "familles" de conjectures (processus de généralisation) ;

- il faut adjoindre aux différents systèmes d'aide une documentation qui peut être de deux ordres :

- un lexique des objets logico-géométriques comportant à la fois les propriétés (sous forme de graphe ?) et les représentations associées ;
- un répertoire de théorèmes (ce qui équivaut, cette fois, à une présentation sous forme de règles).

§ 5 - EVALUATION, PAR L'ELEVE, DU RISQUE ASSOCIE A L'EMISSION D'UNE CONJECTURE.

Les problèmes de géométrie sont souvent de la forme : "Démontrez que cette propriété est vraie".

Il ne s'agit pas d'une véritable tâche de résolution de problèmes cas elle ne comporte pas d'enjeu :

- la question ne porte que sur l'enchaînement des règles logiques puisque l'élève sait d'emblée que la conclusion est vraie et qu'il n'y a aucun risque d'erreur sur celle-ci ;
- il ne s'agit pas de convaincre le maître, le contrat didactique supposant une dissymétrie des relations entre les partenaires.

A toute conjecture émise par l'élève lui-même est par contre associé un degré de confiance.

Une évaluation du risque d'erreur rend alors possible une confrontation du jugement de l'élève avec celui d'autrui.

Les conditions de cette confrontation de jugements présupposent une estimation et une relative égalité des statuts sociaux des partenaires (afin d'éviter une simple complaisance) et une "consistance" de l'interlocuteur (car, sinon, peut-il y avoir conflit ?).

Sur un plan pratique, il est envisagé d'équiper quelques classes sous la forme de RESEAUX de communication entre micro-ordinateurs.

Mais l'utilisation de telles connexions et le profit que peuvent en retirer les élèves reste hasardeux si l'on ne sait pas "apparier" les utilisateurs.

A nouveau se pose la question du diagnostic, déjà non résolue lorsque l'élève travaille seul.

Les chercheurs commencent à savoir comment construire des "prototypes" d'élèves lorsqu'il s'agit de problèmes conceptuels ou d'acquisition de contenus (et des approches comme l'analyse hiérarchique ont souvent appuyé leur démarche). Ceci est envisageable pour les conjectures de type II.

Mais pour les autres conjectures ?

Il faudrait savoir comment s'établissent les conjectures, puis comment elles s'enchaînent, d'une part, comment se créent et se résolvent les conflits, d'autre part.

Seule une analyse fine de protocoles individuels ou de binômes d'élèves peut nous permettre de décrire ces processus.

CHAPITRE 2

OBSERVATIONS EN CLASSE DE QUATRIEME

Trois classes de Quatrième ont été observées, pendant une heure chacune, le 25 janvier 1985 au Collège de Liffré (Ille-et-Vilaine).

Tâche proposée.

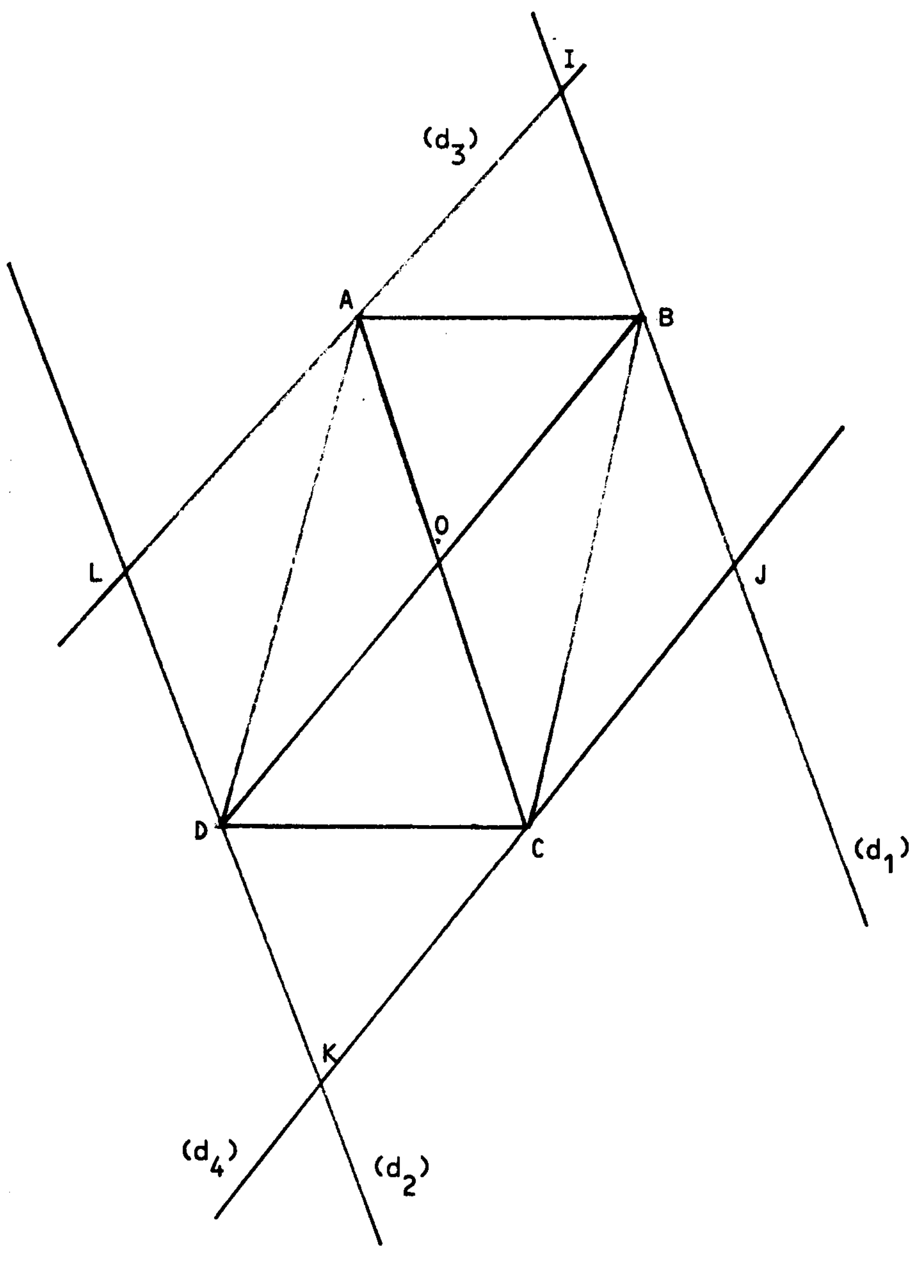
ABCD est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en O .

d1 est la parallèle à (AC) passant par B ;
d2 est la parallèle à (AC) passant par D ;
d3 est la parallèle à (DB) passant par A ;
d4 est la parallèle à (DB) passant par C .

Les points I, J, K, L sont tels que :

$d1 \cap d3 = \{I\}$
$d1 \cap d4 = \{J\}$
$d2 \cap d3 = \{L\}$
$d2 \cap d4 = \{K\}$

1) Construisez soigneusement la figure .
2) Nommez des parallélogrammes observés sur cette figure .
3) Trouvez d'autres propriétés de cette figure et écrivez-les .
4) Les propriétés que vous avez trouvées sont-elles valables sur toutes les figures de votre groupe ?
5) Si une de vos propriétés est contestée, comment convaincre vos contestataires ?
6) Comment, en conséquence, améliorer la précision du tracé de la figure ?


I
(d3)
A
B
O
L
J
D
C
(d1)
K
(d4)
(d2)

§ 1 - CONSTRUCTION DE LA FIGURE.

Les élèves lisent le texte du problème, puis construisent la figure.

Dans la première classe, les élèves tracent très méticuleusement les parallélogrammes avec l'équerre et la règle. Leur technique de construction repose sur le théorème : "Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une de ces droites est également perpendiculaire à l'autre".

- Pour plusieurs élèves, le parallélogramme ABCD occcupe une grande place au centre de la feuille. La construction du parallélogramme IJKL est difficile, voire impossible lorsque les droites IJ, JK, KL se coupent à l'extérieur de la page.
- Quelques élèves ne maîtrisent pas très bien la manipulation simultanée de la règle et de l'équerre. Mais, après quelques essais, ils obtiennent généralement une figure correcte.
- Les points A, B, C, D sont correctement placés.

Pour éviter que la figure ne sorte du cadre de la feuille, les élèves de la seconde classe doivent procéder de la manière suivante :
"FAIRE VITE", "AU BROUILLON", "A MAIN LEVEE" une première figure, afin de permettre :

- une visualisation de la forme générale de la figure, essentiellement pour les élèves gênés par le maniement des instruments ;
- une appropriation de son propre tracé ;
- une meilleure mise en page de la figure "au propre" ;
- l'utilisation, au cours du travail, d'une figure "mobile".

La hâte apportée à la réalisation a conduit à des lectures erronées du texte.

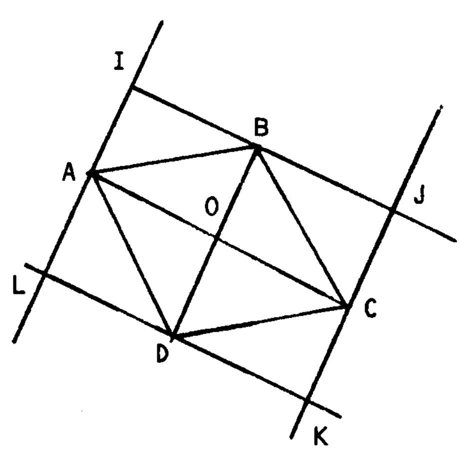
Nous retenons de cette première étape les éléments de réflexion suivants :

A - Nous observons chez certains enfants une maladresse pour tracer correctement les figures. Elle semble due à une mauvaise coordination de leurs gestes et des outils manipulés, mais aussi à une recherche obstinée du point d'entrée dans un algorithme de traçage ou dans une de ses boucles.

B - La figure semble être pour l'élève la traduction objective de l'énoncé. Elle ne lui appartient pas, car l'énoncé est l'oeuvre du maître.

Est-ce pour cette raison que l'élève hésite à joindre des points si la droite obtenue n'est pas mentionnée dans le texte, à s'aider de symboles pour mettre en évidence les relations d'égalité entre les côtés, à utiliser des couleurs différentes pour distinguer les parallèles, ou a fortiori, à tracer en dehors du contour initial de la figure ?

Avant de passer à la deuxième question, nous présentons et, en fait, institutionnalisons au tableau, une figure témoin.



Cette figure donne au parallélogramme ABCD une forme de losange : cette caractéristique sera importante lors de l'émission de conjectures.

§ 2 - NOMMEZ LES PARALLELOGRAMMES OBSERVES SUR CETTE FIGURE.

. Le parallélogramme IJKL est presque toujours donné, mais pas le parallélogramme ABCD, celui-ci figurant dans le texte et ayant donc un statut différent.

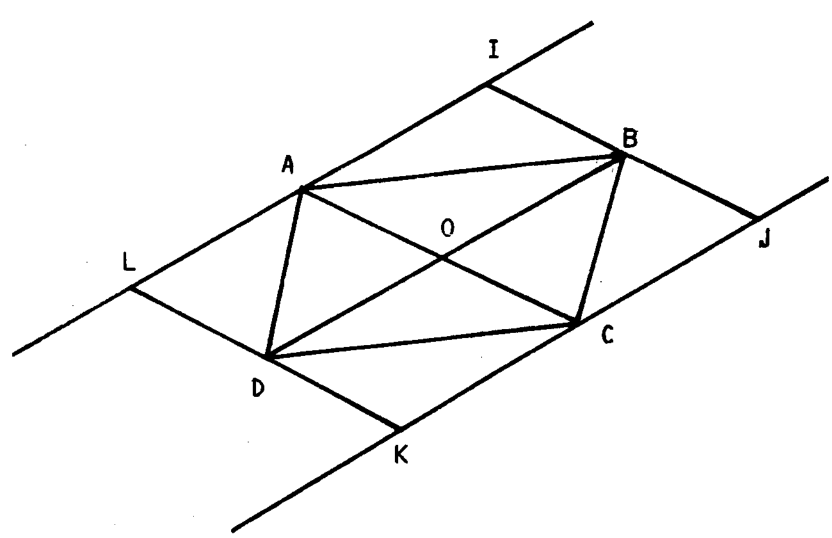
. Pour la recherche des autres parallélogrammes, une identification méthodique s'avère fructueuse.

Deux voies différentes sont empruntées :

- se servir du point O comme d'un centre et énumérer les petits parallélogrammes OBIA, OALD, OCKD, OCJB ;

- se servir des deux directions principales d_1 et d_3.

. Les parallélogrammes dont deux des côtés ne sont pas tracés ne sont donnés qu'après une demande explicite des observateurs ; le contrat entre observateurs et élèves est nouveau : la tâche de "simple reconnaissance" devient tâche de "production".



§ 3 - EMISSION DE CONJECTURES.

1ère famille : Les parallélogrammes tracés sur la figure.

- La conjecture paraît certaine et tout le monde est d'accord.
- Les élèves perçoivent cependant que leur degré de certitude est différent pour ABCD (parallélogramme donné dans l'énoncé) et pour les neuf autres parallélogrammes.

2ème famille : Les parallélogrammes non tracés et à construire.

Dès que ces parallélogrammes sont construits, la conjecture a le même degré de certitude que pour la première famille.

3ème famille : "IK a pour milieu le point O" suivi de "IK passe par O".

Ces conjectures sont l'occasion d'une réflexion et d'une recherche particulières :

- pour certains, comme le dessin n'apporte pas à lui seul la conviction de la vérité, il y a doute et même retrait de la conjecture ;

- pour d'autres, parfois même en dépit de nouveaux tracés infructueux pour aligner IOK, la confiance intellectuelle l'emporte : le dessin demeure imparfait et non crédible, mais ils attribuent cette imperfection à leur maladresse lors du tracé.

4ème famille : "Les triangles IOA, IOB, AOD, ADL, ODK, OCK, OCA,... sont superposables".

- Cette conjecture résiste longtemps aux assauts contradictoires d'une minorité d'élèves. Il est vrai que le dessin sur lequel les élèves "lisent" la propriété propose une forme de losange à ABCD (figure institutionnalisée).

. Une élève tente de déterminer les conditions suffisantes de superposabilité des triangles en disant : "Ces deux triangles sont égaux parce que leurs deux côtés sont pareils". La contrainte angulaire n'est pas encore introduite.

. Un autre élève dit : "Ils sont égaux parce qu'ils ont la même aire". Il y a interaction, voire confusion entre les deux concepts "superposabilité" et "aires égales".

. On relève chez d'autres élèves un argument soutenant la thèse d'égalité des triangles BOC et DOC par exemple. C'est un argument de symétrie : "En traçant la droite IOK, ça pourrait faire symétrique... Tout est symétrique par rapport à l'autre moitié... Ca se coupe en deux...".

<u>5ème famille</u> : "<u>Le parallélogramme IJKL est deux fois plus grand que ABCD</u>" <u>et</u> "<u>Si l'on recommence la même construction à partir du parallélogramme IJKL, alors O sera toujours le centre du parallélogramme</u>".
Une élève propose alors : "Le nouveau parallélogramme sera trois fois plus grand que ABCD". Cette dernière remarque peut être interprétée comme une confusion entre le numéro de l'étape de l'application du processus et le rapport des surfaces des parallélogrammes.
Cette conjecture séduit de nombreux élèves. Mais elle ne conduira pas à discussion.

<u>6ème famille</u> : "<u>BO est une médiane dans le triangle ABC</u>".

Remarques.

Nous retenons de cette troisième étape les éléments de réflexion suivants :

L'expression "propriétés de la figure" est souvent mal comprise par les élèves :

- d'une part, parce que les sens respectifs des mots "propriétés" et "théorèmes" sont mal connus ;

- d'autre part, parce qu'il est difficile pour l'élève d'extraire de la situation ce qui est pertinent et spécifique.

Cette dernière difficulté semble être renforcée, lors du fonctionnement didactique, par des ambiguïtés, des équivoques et des implicites sur les statuts respectifs des signifiants (figures) et des signifiés (objets et situations mathématiques) :

a) Les rapports de conformité logique des signifiés aux signifiants sont ambigus : qu'est-ce qui est pertinent ? Qu'est-ce qui est nécessaire ? Qu'est-ce qui est contingent ?

b) Le statut du signifiant par rapport au signifié glisse souvent vers un statut de référent par rapport à une réalité.
Le contrat didactique entre le maître et les élèves comporte sur ce point une équivoque et un implicite :

Le maître : "Vous voyez bien que cette propriété n'est pas vraie sur la figure !"

Les élèves traduisent : "La figure est un référent de la réalité".

Or la figure peut servir de référent pour un contre-exemple, mais ne peut supporter à elle seule l'élaboration de la preuve.

§ 4 - APPORTS DE PREUVES.

1ère famille : les parallélogrammes tracés sur la figure.

La preuve classique semble inutile aux élèves. Certains, pour faire plaisir au maître, s'y conforment, la conduisent adroitement.

Mais, lorsqu'on leur demande si la démonstration a augmenté leur confiance en ce qu'ils ont émis, ils répondent en choeur : "Non !".

2ème famille : les parallélogrammes non tracés et à construire.

Le jeu enclenché se déroule : une démonstration orale est fournie.

3ème famille : "IK a pour milieu le point K" suivi de "IK passe par O".

La nécessité de démonstration, cette fois-ci, paraît naturelle : il existe un certain désaccord dans la classe ; ce désaccord est à réduire de même que le conflit éventuel à l'égard de son propre dessin.

Le temps manquera pour conduire la démonstration.

4ème famille : les triangles superposables.

La preuve par le découpage suffit aux élèves pour ébranler leur première conviction erronée mais conduit à un tel degré de certitude que la démonstration classique aurait eu des difficultés à s'organiser.

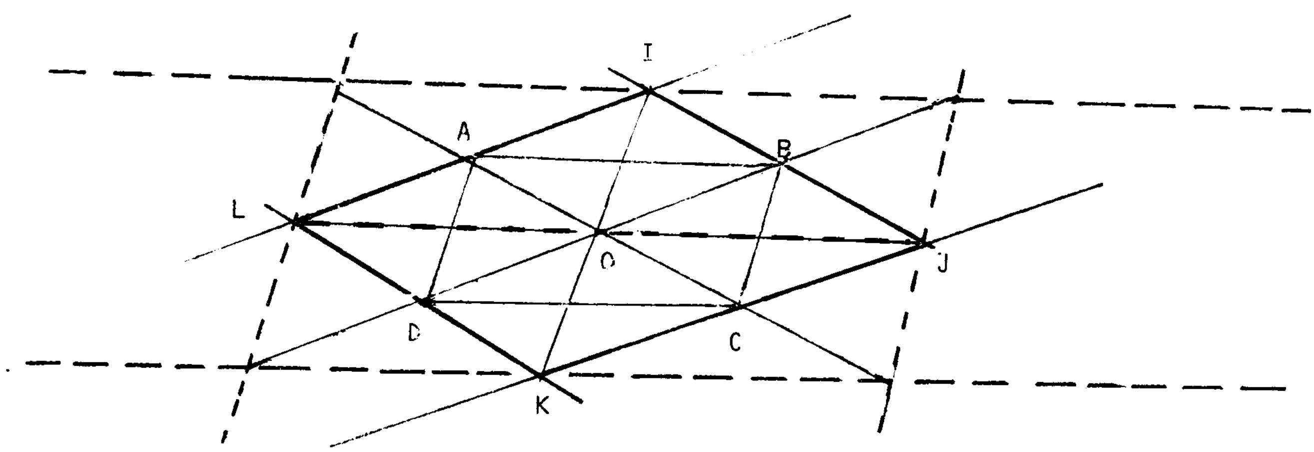
5ème famille : conjectures liées à une application réitérée du processus de construction.

Le temps a manqué pour ébranler la conjecture : "Si l'on recommence la même construction à partir du parallélogramme IJKL, alors le nouveau parallélogramme sera trois fois plus grand que ABCD".

Notons qu'une conjecture de ce type est très riche car elle ouvre des perspectives intéressantes :

- réitération d'un processus de construction et travail sur les propriétés de cet enchaînement :
  - invariance du centre des parallélogrammes successifs ;
  - découverte d'une loi de progression des surfaces ;

- introduction d'une généralisation :
  passer des relations entre les parallélogrammes ABCD et IJKL aux relations entre deux parallélogrammes correspondant à des étapes quelconques de l'application du processus.



<u>6ème famille</u> : <u>BO est une médiane dans le triangle ABC</u>.

Les élèves qui ont émis cette conjecture ont su en apporter la preuve lorsque celle-ci leur a été demandée.

<u>Remarques</u>.

Nous retenons de cette quatrième étape les éléments de réflexion suivants :

A - La nécessité d'apporter une preuve à ses conjectures n'est pas impérieuse pour l'élève. Ainsi, la lecture sur la figure des différents parallélogrammes lui suffit.

Si, dans un deuxième temps, l'élève apporte une preuve, il semble que seules la docilité, la conformité à l'égard du professeur puisse la faire se dérouler.

B - Deux seuils semblent caractériser l'apport de preuves :

- si le degré de certitude est trop faible, la démonstration paraît inaccessible ou vaine et le coût à payer trop élevé.
  Ceci est le cas, en particulier, lorsqu'il s'agit de démontrer une propriété qui, de toute évidence, n'est pas observée sur la figure ou contredite par elle ;

- si le degré de certitude est trop élevé ou égal à 1, la démonstration paraît superflue.
  Ainsi, lorsque l'un des observateurs demande aux élèves si BC et LK sont parallèles, l'évidence perceptive est telle que toute idée ou initiative de démonstration semble saugrenue.

C - Il existe, pour certains élèves, une confusion entre ce qui est vrai et ce qui l'est de façon spécifique : ils font eppel à des connaissances générales et les énoncent sans les articuler et établir de lien avec une propriété de la figure. Ainsi, ils pensent (ou feignent) avoir payé le coût de la démonstration au moyen de l'énoncé de quelques théorèmes vrais dont le contexte est celui du problème.

D - Le fonctionnement didactique semble souvent géré, à nouveau, par des équivoques et des implicites :

a) Equivoque au niveau des démarches utilisées qui conduisent souvent à la confusion entre hypothèses et conclusions : le processus utilisé par l'enseignant qui consiste à procéder par conditions suffisantes peut en être l'origine ;

b) Equivoque sur le "devoir" de démontrer : en général, le maître vise un apprentissage du raisonnement déductif à travers la résolution de problèmes.

L'élève cherche à répondre de la meilleure façon à ce qu'il croit que le maître attend de lui.

En fait, la réalité éducative est un complexe de raisons sociales (convaincre, prouver), cognitives (articuler axiomes et théorèmes en découlant) et culturelles (connaître des objets et des propriétés de ceux-ci) ;

c) Equivoque et implicite entre les niveaux d'explicitation des éléments de preuve, niveaux évoluant constamment dans le temps, différant en fonction du degré culturel ou du niveau cognitif attribué à l'élève (le "non-dit" n'est pas source d'erreur lorsque l'interlocuteur est un "bon élève), différant au cours des phases de la résolution de problème jusqu'à la publication de la solution.

Le maître connaît la nécessité de repérer, d'identifier et de réguler ces statuts et ces niveaux.

CHAPITRE 3

ANALYSE DES COPIES

La transcription des hypothèses paraît jouer en 4ème un rôle important dans la résolution d'un problème de géométrie. Une première observation de copies, sur un premier problème, a conduit à l'analyse ci-jointe (annexe 1).

Le groupe a alors décidé de proposer un travail écrit en classe de 4ème, pour mieux évaluer le rôle des hypothèses et plus généralement les types d'aide à apporter aux élèves.

Le problème proposé est le suivant :

ABCD *est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en* O.

d_1 *est la parallèle à* (AC) *passant par* B ;

d_2 *est la parallèle à* (AC) *passant par* D ;

d_3 *est la parallèle à* (DB) *passant par* A ;

d_4 *est la parallèle à* (DB) *passant par* C .

Les points I, J, K, L *sont tels que :*

$d_1 \cap d_3 = \{I\}$

$d_1 \cap d_4 = \{J\}$

$d_2 \cap d_3 = \{L\}$

$d_2 \cap d_4 = \{K\}$.

L'objectif est de démontrer l'alignement des points I, O, K.

Le problème est présenté à deux groupes d'élèves, le 1er reçoit une aide, l'autre non.

3.1 - Descriptif de la conduite de l'aide (cf. chapitre 2).

1) *Construisez soigneusement la figure.*
2) *Nommez des parallélogrammes observés sur cette figure.*
3) *Trouvez d'autres propriétés de cette figure et écrivez-les.*
4) *Les propriétés que vousavez trouvées sont-elles valables sur toutes les figures de votre groupe ?*
5) *Si une de vos propriétés est contestée, comment convaincre vos contestataires ?*
6) *Comment, en conséquence, améliorer la précision du tracé de la figure ?*

3.2 - On propose ensuite le problème aux deux groupes sous une forme classique, accompagné de la liste des propriétés à utiliser.

1) *Construisez soigneusement la figure.*
2) *Démontrez que* AIBO *et* BJCO *sont des parallélogrammes. Comparez* BI *et* BJ.
3) *Soit* P *le centre du parallélogramme* BJCO.

   Démontrez que : $BP = \frac{IO}{2}$ *et que* $PC = \frac{OK}{2}$.

   Comparez ensuite OK *et* OI.
4) *Démontrez que* O *est le milieu de* [IK].

Propriétés à utiliser.

(1) Si un quadrilatère est un parallélogramme alors :

- les diagonales se coupent en leur milieu
- les côtés opposés ont même longueur
- les côtés opposés sont parallèles deux à deux.

② Par un point, il passe une parallèle unique à une droite donnée.

③ Si un quadrilatère a ses côtés parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme.

④ La droite qui joint les milieux des deux côtés d'un triangle est parallèle au 3ème côté.

⑤ Dans un triangle, la longueur du segment qui joint les milieux des deux côtés est égale à la moitié de la longueur du 3ème côté.

3.3 - Deux grilles sont utilisées pour analyser les copies.

Grille n° 1

niveau ①:	l'élève ne fait que la figure
niveau ②:	amorce de démonstration
niveau ③:	ne parvient à rédiger qu'un type de démonstration
niveau ④:	l'élève parvient à rédiger correctement - ou presque - 2 ou 3 types de démonstration
niveau ⑤:	compréhension du problème et capacité à construire et rédiger une démonstration dans des cas différents.

Grille n° 2

niveau 1 :	utilisation directe des données pour l'application d'un théorème ou d'une propriété. Pas de données perturbatrices
niveau 2 :	application directe d'un théorème mais données perturbatrices
niveau 3 :	initiative (propriété extérieure ou résultat d'une question précédente) avant application du théorème ou de la propriété utilisée pour démontrer
niveau 4 :	deux initiatives de l'élève
niveau 5 :	plus de deux initiatives et articulation complète éventuellement.

Si nous appliquons cette dernière grille à chaque question du problème, nous obtenons :

1ère question :	réalisation de la figure
2ème question	1ère partie : niveau 2 2ème partie : niveau 3
3ème question	1ère partie : niveau 2 2ème partie : niveau 3
4ème question :	niveau 4.

Nous avons ensuite dépouillé les copies par élève et par classe suivant ces deux grilles.

Les résultats sont consignés dans les annexes 2, 3, 4, 5, 6 et 7.

3.4 - Nous n'exploitons pas ces grilles du point de vue statistique, l'échantillon ~~ne~~ semble pas suffisamment représentatif.

Nous trouvons intéressant de visualiser sous les formes présentées dans les annexes les traces écrites des élèves, donnant ainsi un premier aperçu des résultats.

Les élèves ayant reçu une aide semblent être allés plus loin dans la recherche du problème.

	sans préparation	avec préparation (conduite d'aide)
niveau 1	18,5 %	10,1 %
niveau 2	25,9 %	31,4 %
niveau 3	31,4 %	46 %
niveau 4	18,5 %	11,2 %
niveau 5	5,5 %	1 %

Nous analysons plus précisément trois points qui nous paraissent importants.

a) Les hypothèses.

Le mot "hypothèses" est interprété différemment suivant les élèves et la contraînte "classe" est forte si la transcription fait partie du contrat :

- Pour certains, ce sont les données du texte.
- Pour d'autres, c'est avant tout un outil de démonstration. La corrélation entre les deux aspects ne paraît pas évidente :
  - en $IV^{è}_{6}$ à LIFFRE (24 élèves), tous les élèves sauf un transcrivent correctement les hypothèses ; 8 s'en servent dans la démonstration dont 5 correctement. Cette phase est perçue comme exercice en elle-même ;
  - en $IV^{è}_{4}$ à LIFFRE (20 élèves), 8 élèves donnent des hypothèses surabondantes mais nécessaires à leur démonstration. Il semble qu'ici elles soient davantage perçues comme outil, mais pas nécessairement en lien avec l'énoncé.

Les élèves ont retenu ici un aspect du contrat, perçu différemment sans doute suivant l'enseignant.

b) La figure.

Nous sommes frappés, lors de l'observation, de la distance que garde l'élève vis-à-vis de l'énoncé et même de la figure.

Il semble qu'après préparation (conduite d'aide), apparaissent plus fréquemment des signes sur la figure, des couleurs, des tracés qui ne sont pas exigés. La figure prend une place différente dans l'argumentation ; de simples observations sont retenues comme propriétés et apparaissent dans les hypothèses et ceci de la part d'élèves qui auparavant ne faisaient pas ce genre d'affirmations.

Cette réaction nous paraît intéressante : l'appropriation de la figure est en effet une étape nécessaire dans l'activité de résolution de problème. Elle octroie un outil supplémentaire pour la recherche de la solution, en permettant une analyse personnelle de la structure du problème.

C'est peut-être l'absence d'initiative de l'élève qui est source commune de difficultés. Il ne se sent pas impliqué dans la tâche. Nous avons d'ailleurs noté un certain enthousiasme des élèves pendant l'observation, lié vraisemblablement aux "libertés" accordées vis-à-vis du problème posé.

c) Il serait intéressant de tester l'apport de l'ordinateur sur ce point précis.

Les procédures graphiques permettant des formulations plus simples de l'énoncé, des blocages au niveau du tracé lui-même peuvent être évités. Des confrontations plus fréquentes entre l'énoncé et la figure, sous différentes formes (animations, déformations, rupture d'hypothèses), peuvent permettre à l'élève de tester les conjectures émises. L'ordinateur apparaît alors comme outil pour clarifier le contrat, repréciser les règles du jeu, aider à la structuration du problème au sens donné dans la présentation générale, faire un diagnostic précis des causes de blocage et ceci en interaction avec la démarche de l'élève.

3.5 - Rôle du déductogramme.

Nous retenons surtout son intervention dans le raisonnement déductif et plus particulièrement au niveau de l'implication.

Dans le langage courant, celle-ci est souvent utilisée de façon ambigue.

> "(AB) est parallèle à (DC) et (AD) est parallèle à (BC) donc ABCD est un parallélogramme car un quadrilatère qui a ses côtés parallèles deux à deux est un parallélogramme".

Cette démonstration est en général jugée correcte même si elle ne met pas en évidence la propriété utilisée sous la forme "si... alors", comme il était précisé dans le contrat.

Sous forme de déductogramme apparaît ceci :

$$\left.\begin{array}{c}(AB)//(DC)\\ \text{et}\\ (AD)//(BC)\end{array}\right\}\ (3)\quad \text{ABCD parallélogramme}$$

Le n° de la propriété apparaît nécessairement et si (3) est remplacé par (1) (implication dans l'autre sens) le raisonnement est faux.

Nous constatons que le niveau d'exigence n'est pas le même pour les deux types de démonstration. La difficulté n'apparaît pas dans le premier mais l'implication peut être perçue comme une équivalence. Le déductogramme la met en évidence.

L'apprentissage de l'explicitation du raisonnement à l'aide d'un déductogramme offre donc des avantages manifestes. On perçoit, parallèlement, le rôle que pourrait alors jouer un programme informatique pour juger, contrôler, soutenir le déroulement de la démonstration.

ANNEXE 1

QUELQUES RENSEIGNEMENTS STATISTIQUES FOURNIS
PAR LA CORRECTION DE 3 PAQUETS DE COPIES (72 élèves)

On a noté :

H_1 : élève ayant écrit des hypothèses incomplètes ou n'ayant écrit aucune hypothèse

H_2 : élève ayant écrit des hypothèses surabondantes ou redondantes

H_3 : élève ayant écrit des hypothèses pertinentes

D : élève ayant écrit une démonstration correcte ou manifestant sa compréhension logique de façon non équivoque.

Voici la répartition des présences (1) - absences (0) de ces 4 caractères sur l'ensemble des questions auxquelles répond l'ensemble des élèves.

H_1	H_2	H_3	D	effectif
1	0	0	1	8
1	0	0	0	25
0	1	0	1	11
0	1	0	0	4
0	0	1	1	19
0	0	1	0	8
0	0	0	1	2
0	0	0	0	32

H_1 \ D	1	0	Total
1	25	8	33
0	44	32	76
Total	69	40	109

H_2 \ D	1	0	Total
1	11	4	15
0	29	65	94
Total	40	69	109

$H_2 \vee H_3$ \ D	1	0	Total
1	30	12	42
0	10	57	67
Total	40	69	109

H_3 \ D	1	0	Total
1	19	8	27
0	21	61	82
Total	40	69	109

Une analyse implicative, à l'aide de l'indice de R. GRAS, met en évidence :

- une implication vraie avec un seuil de confiance de 96 % de H_2 sur D ;
- une implication vraie avec un seuil de confiance de 98,5 % de H_3 sur D ;
- une implication vraie " " 99,7 % de (H_2 ou H_3) sur

Schématiquement, on peut donc dire : "Quand un élève écrit des hypothèses pertinentes, en général, il réussit la démonstration".

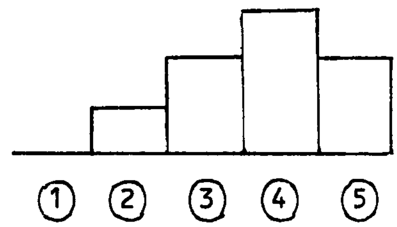
ANNEXE 2

4ème B - LA GUERCHE

SANS PREPARATION

GRILLE n° 1

	nombre d'élèves	pourcentages
niveau (1)	0	0 %
niveau (2)	1	12,5 %
niveau (3)	2	25 %
niveau (4)	3	37,5 %
niveau (5)	2	25 %



grille n°1 \ grille n°2	question 1	question 2 niv 2	question 2 niv 3	question 3 niv 2	question 3 niv 4	question 4 niveau 4
2	o			o		
3	+	+				
	+	+				
4	+	+	o	o		o
	+	+		o		
	+	o		+		
5	+	+		+	o	o

Remarques.

- En général les hypothèses ne sont pas notées.

  Un seul élève emploie le mot sans avoir l'air d'en connaître le contenu ;
- aucun élève ne fait de signes sur la figure ;
- les affirmations ne sont pas toujours justifiées (c'est le cas de 2 élèves

Code : + objectif atteint

o amorce de démonstration.

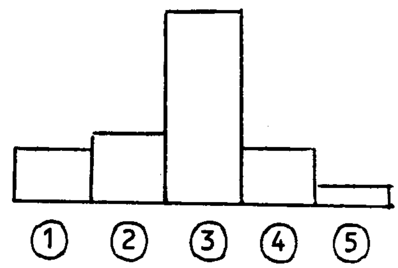
ANNEXE 3

4ème A - LA GUERCHE

SANS PREPARATION

GRILLE n° 1

	nombre d'élèves	pourcentages
niveau (1)	3	13,6 %
niveau (2)	4	18,1 %
niveau (3)	11	50 %
niveau (4)	3	13,6 %
niveau (5)	1	4,5 %



grille n°2 → / grille n°1 ↓	question 1	question 2 niv 2	question 2 niv 3	question 3 niv 2	question 3 niv 4	question 4 niveau 4
(1)	+					
	+					
	+					
(2)	+	o		o		
	+	o		o		
	+	o				
	+	o				
(3)	+	+	o	o		
	+	+	o			
	+	+	o	o	o	
	+	+		o		
	+	+				
	+	+				
	+	+	o			
	+	+		o	o	
	+	+				
	+	+				o
	+	+				
(4)	+	+	+	o		
	+	+	+			
	+	+	o	+	o	o
(5)	+	+	+	+	o	+

Remarques.

- 3 élèves parlent de parallélogrammes superposables ;
- ces élèves avaient fait un peu plus de géométrie à cette période de l'année ;
- les signes sur la figure font partie du contrat mais ne sont pas notés. 10 élèves respectent ce contrat ;
- les hypothèses sont notées à chaque question, mais beaucoup de confusions.

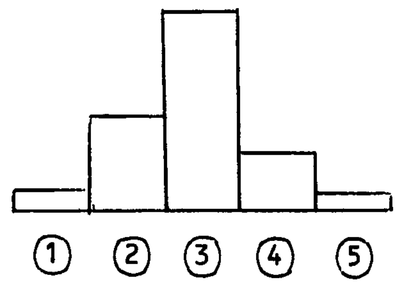
ANNEXE 4

IV^{e}_{4} - LIFFRE

AVEC PREPARATION

grille n° 1

	nombre d'élèves	pourcentages
niveau (1)	1	4,76 %
niveau (2)	5	23,80 %
niveau (3)	11	59,38 %
niveau (4)	3	14,28 %
niveau (5)	1	4,76 %



grille n°2 → / grille n°1 ↓	question 1	question 2 niv 2	question 2 niv 3	question 3 niv 2	question 3 niv 4	question 4 niveau 4
(1)	+					
(2)	+	o		o		
	+	o				
	+	o				
	+	o				
	+	o				
(3)	+	+	o	o		
	+	+		o		
	+	o	+	o		
	+			+		
	+	+	o			
	+	+	o			
	+	+	o			
	+	+				
	+	+				
	+	+				
	+	+				
(4)	+	+		+		
	+	+			+	
	+	+		+	o	
(5)	+	+	+	+	o	

Remarques spécifiques.

- Utilisation presque générale des déductogrammes

niv 2	niv 3	niv 4	niv 5
1 élève sur 5	8 élèves sur 11	3 élèves sur 3	0 élève sur 1

- utilisation de propriétés découvertes pendant l'observation :

  même aire (1 élève), parallélogrammes et milieux (3 élèves) même dimension (1 élève)

- traces sur la figure :

  2 élèves dont celui ayant utilisé "même aire".

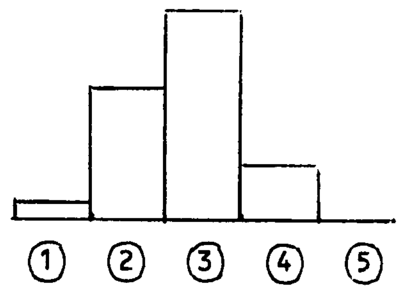
ANNEXE 5

IV^e_5 - LIFFRE

AVEC PREPARATION

GRILLE n°1

	nombre d'élèves	pourcentages
niveau (1)	1	4,16 %
niveau (2)	8	33,33 %
niveau (3)	13	54,16 %
niveau (4)	2	8,33 %
niveau (5)	0	0 %



grille n°2 / grille n°1	question 1	question 2 niv 2	question 2 niv 3	question 3 niv 2	question 3 niv 4	question 4 niveau 4
(1)	+					
(2)	+	o		o		
	+			o		
	+			o		
	+	o				
	+			o		
	+	o				
	+	o				
	+	o				
(3)	+	+				
	+	+	o	o		
	+	+		o		
	+	+		o		
	+	+		o	o	
	+	+		o		
	+	+		o	o	
	+	+		o	o	
	+	+		o	o	
	+	+		o	o	
	+	+		o	o	
	+	+				
	+	+				
(4)	+	+	+	+	+	
	+	+	+			

Remarques spécifiques.

- Influence de la préparation ?

14 élèves utilisent la notion de "parallélogrammes identiques"

5 élèves utilisent des milieux apparus sur la figure

2 justifient par le dessin

12 élèves font des marques sur la figure

(tous les élèves cités précédemment sauf 2) ;

- un seul déductogramme cité en niv (3).

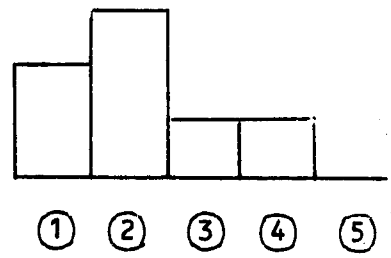
ANNEXE 6

IV$^{e}_{6}$ - LIFFRE

SANS PREPARATION

GRILLE n° 1

	nombre d'élèves	pourcentages
niveau 1	7	29,16 %
niveau 2	9	37,58 %
niveau 3	4	16,66 %
niveau 4	4	16,66 %
niveau 5	0	0



grille n°1 \ grille n°2	question 1	question 2 niv 2	question 2 niv 3	question 3 niv 2	question 3 niv 4	question 4 niveau 4
(1)	+					
	+					
	+					
	+					
	+					
	+					
	+					
(2)	+	o				
	+	o				
	+	o				
	+	o				
	+	o		o		
	+	o		o		
	+	o	o			
	+			o		
	+			o		
(3)	+	+				
	+	+				
	+			+		
	+			o		
(4)	+	+		+		
	+	+		+		
	+	+	o	+		

Remarques spécifiques.

- Ecriture systématique des hypothèses

  23 élèves écrivent correctement les hypothèses

  7 s'en servent dont 5 correctement ;

- texte donné plus tard dans cette classe ;
- seules les propriétés du cours interviennent et non celles de la fiche ;
- très souvent idée de la démonstration mais pas de justification ;
- seulement 1 copie avec des marques sur la figure ;
- déductogrammes utilisés :

niv (1)	niv (2)	niv (3)	niv (4)
0 élève sur 7	3 élèves sur 9	3 élèves sur 4	3 élèves sur 3

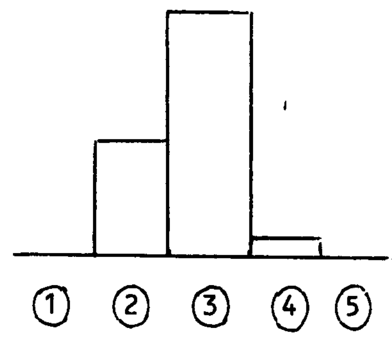
ANNEXE 7

$IV^{è}_{2}$ - LIFFRE

AVEC PREPARATION

GRILLE n° 1

	nombre d'élèves	pourcentages
niveau (1)	0	0 %
niveau (2)	6	30 %
niveau (3)	13	65 %
niveau (4)	1	5 %



grille n°2 / grille n°1	question 1	question 2 niv 2	question 2 niv 3	question 3 niv 2	question 3 niv 4	question 4 niveau 4
(2) x	+	o	o	o	o	
x	+	o		o		
x	+	o				
	+	o	o			
x	+	o		o		
	+	o		o		
(3) x	+	+	o	o	o	
x	+	+		o	o	o
	+	o		+		
x	+	o		o	o	o
	+	+		o	o	
	+	+	o			
	+	+	o			
	+	+	o	o		
	+	+	o			
	+	o	+			
	+	+		o		o
	+	+		o		o
	+	+		o		
(4) x	+	o		+		

Remarques spécifiques.

- 6 inversions de propriétés pour la question 2 - niv 2 sous forme de déductogrammes ;
- 8 élèves donnent des hypothèses surabondantes ; ils sont repérés par des croix.

  Aucun élève n'a de signes sur sa figure ;
- déductogrammes utilisés :

niv (2)	niv (3)	niv (4)
2 élèves sur 6	5 élèves sur 13	1 élève sur 1

CHAPITRE 4

AIDE A LA RESOLUTION DE PROBLEMES DE GEOMETRIE
APPORTS DE L'INFORMATIQUE

§ 1 - PRELIMINAIRES.

Par problème nous entendons problème de géométrie correspondant à la matière vue en classe de 4ème au 1er semestre ; autrement dit, on se situe à une période tout à fait nouvelle pour l'élève, essentiellement caractérisée par l'apprentissage de la démonstration.

Nous avons pensé qu'un problème devait aussi conduire à une véritable "situation-problème" (ce qui n'est pas le cas de la majorité des problèmes des manuels scolaires de 4ème).

L'aide proposée ne doit jamais conduire à "vendre" une solution, ni à guider l'élève dans une unique démarche, niant tout autre démarche qui pourrait s'avérer aussi intéressante que celle qui serait proposée : donc laisser le maximum d'initiative à l'élève. Le type d'aide doit avoir de plus l'avantage d'informer l'enseignant sur la démarche de l'élève, les concepts utilisés par ce dernier ou le refus d'autres concepts jugés plus naturels pour nous.

La réalisation informatique se fera par étapes et sera d'abord simulée, ce qui va nécessiter, dans un premier temps, la présence de plusieurs "observateurs" dans une classe.

§ 2 - PREMIERES REALISATIONS.

Elles sont parties :

1°) de l'idée vague que l'étude de l'énoncé du problème (structure du problème) et la familiarisation de l'élève avec la situation proposée devraient nécessairement avoir un effet favorable sur la résolution de celui-ci ;

2°) de la constatation du refus systématique de la démonstration chez certains enfants.

2.1. Etude de l'énoncé.

Deux types d'activités sont proposés.

Le premier utilise des procédures graphiques. Elles consistent en une reformulation graphique des hypothèses, de la conclusion, ou même de propriétés relatives à la figure tracée, les procédures graphiques et la reformulation se faisant à l'aide de primitives plus "élémentaires" que celles qui ont été données dans l'énoncé.

La partie informatique - second type - doit alors utiliser une démonstration de théorèmes pour vérifier les assertions et conjectures de l'élève.

L'aide offerte à l'élève pourrait s'étendre à la proposition d'un énoncé beaucoup plus algorithmique et plus élémentaire de construction de figure (programme de construction). Il faudrait, bien entendu, que soient enregistrées les lacunes à ce niveau.

Des débuts de réalisations ont été écrits en Prolog.

2.2. Recherche de la solution.

Ici aussi, la démarche doit être fortement interactive.

Lorsqu'elle n'utilise pas un écran graphique, elle doit demander à l'élève de construire et d'étudier des figures. Par exemple, des questions sont posées à l'élève par le programme, à partir des résultats à démontrer et des théorèmes que l'élève a à sa disposition, questions de la forme : "Penses-tu que ceci soit vrai ou faux ?", "Vois-tu tel objet ayant telle propriété ?"... Les réponses de l'élève étant analysées, le programme devrait pouvoir ainsi remonter de la conclusion à l'hypothèse. Il faudra en cours de route détecter les affirmations contradictoires de l'élève et les boucles..., ce qui ne présente pas une grosse difficulté en Prolog. (1)

Mais, d'autre part, l'écran graphique peut être utilisé. Le programme actuel doit être amélioré de manière à ce que :

1°) l'on puisse facilement modifier les hypothèses et donc faire prendre conscience plus clairement à l'élève de certaines conclusions et du rôle fondamental de certaines hypothèses (sous-problèmes),

2°) l'on puisse faire de multiples essais avant d'arriver à formuler certaines conjectures, non évidentes a priori.

2.3. Correction de la démonstration.

Cette partie n'a pas encore été testée. Elle consiste à faire rédiger à l'écran la démonstration, l'élève ayant le droit d'affirmer ce qu'il veut. Mais cette affirmation ne sera acceptée par le programme (toujours écrit en Prolog) que sous certaines conditions (qui sont très naturelles pour l'élève), par exemple : "c'est un théorème", "c'est une conclusion d'un théorème dont l'hypothèse a déjà été satisfaite", etc... .

§ 3 - CE QU'IL RESTE A FAIRE.

Il reste à tester si, en simulant ces programmes informatiques, les hypothèses (ou une partie d'entre elles) relatives à l'effet des aides apportées sont vérifiées (voir chapitres précédents pour ce qui est du travail de l'énoncé. Il reste aussi à avancer le travail dans le domaine de la preuve.

---

(1) Une maquette opérationnelle de ce travail fonctionne actuellement sur Micral 90.50

Les maquettes de programmes sont écrites en Prolog pour des raisons de facilité ; mais rien n'empêche un projet définitif de travailler dans un "bon" Logo.

§ 4 - PROJET I.R.I.S.A. RENNES : DEFINITION D'UN POSTE DE TRAVAIL E.A.O. POUR LA GEOMETRIE EN CLASSE DE 4ème.

Sans être englobé dans le GRECO, ce projet apporte sa contribution à son développement.

Ce qui suit est tiré de la communication que Monsieur RICHARD ALLEN, professeur au S^{t}-OLAF College Northfield Minesota U.S.A. en congé sabbatique pour un an en France, a faite à la conférence internationale I.C.M.I. de Strasbourg - 25-29 mars 1985.

Le matériel utilisé est un MICRAL 90/50, 1 M.octets de mémoire centrale, une tablette graphique MM1204 "Summagraphics", une carte-parole RME 186 Vecsys.

"... On a une division en deux parties : une phase de construction de la figure, dont le but est de vérifier les hypothèses et la conclusion, et une phase de démonstration, dont le but est d'aider l'élève à construire une preuve.

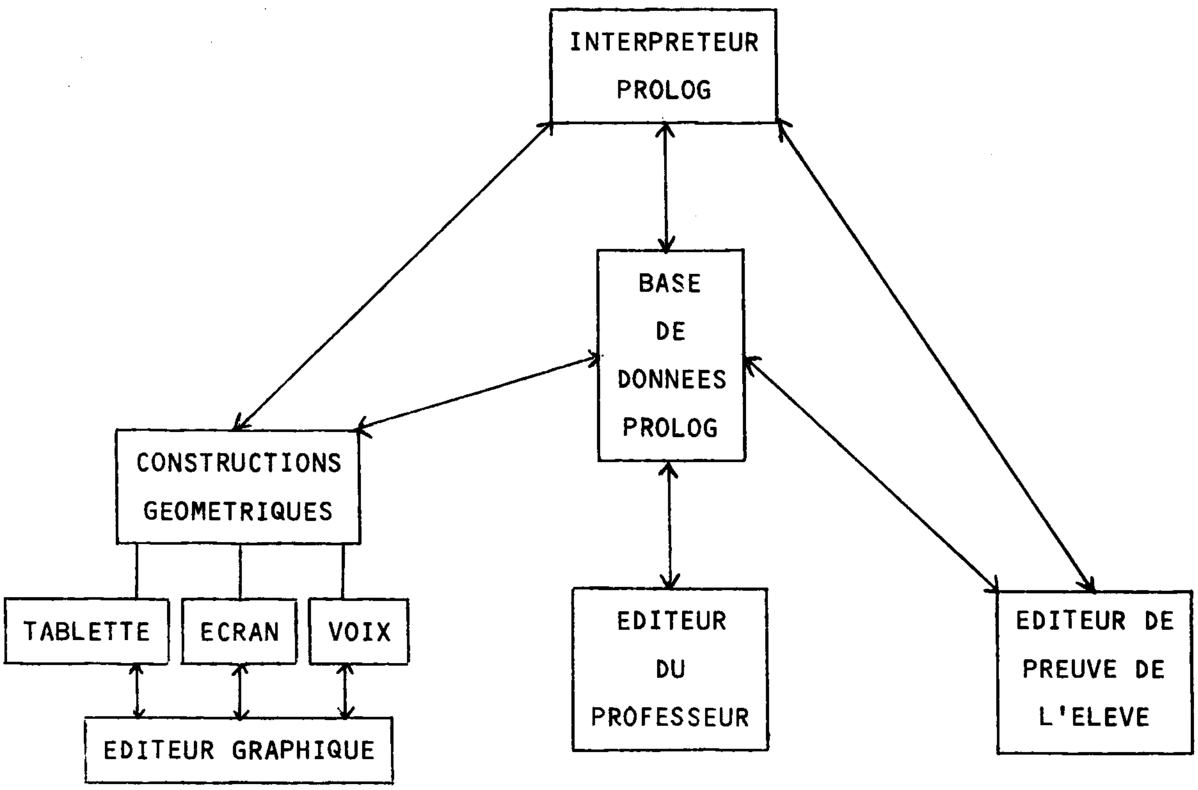
La phase de construction a été développée pour permettre des données d'une tablette graphique, d'une carte-parole, et afficher les figures sur un écran graphique. Un éditeur graphique est implémenté pour permettre, d'une part, la communication dans un langage restreint à celui de la géométrie plane euclidienne, et, d'autre part, au professeur de construire pour l'élève des outils de constructions géométriques complexes à partir de primitives de base.

En même temps, une interface en langage naturel est préparée pour permettre au professeur d'entrer les informations géométriques, y compris tous les théorèmes, sans avoir recours à une syntaxe spéciale, telle que celle de Prolog.

Une interface du même genre sera fournie à l élève pour la phase de démonstration. Toute la communication sera effectuée d'une manière ressemblant à celle utilisée dans les cours de géométrie ; i.e. une combinaison de constructions géométriques et de propriétés géométriques dans un certain formalisme (ex. : les notations utilisées dans les manuels scolaires). (Rappelons que, la compréhension du langage naturel est une des principales applications de Prolog).

La phase de démonstration du système sera reconstruite pour permettre à l'étudiant de travailler de façon rétrospective (de la conclusion vers les hypothèses) ou prospective (des hypothèses vers la conclusion) ou d'une façon qui combine les deux "directions". Ce système modélisera plus la façon dont les élèves construisent leurs preuves. Cette construction, cela doit être noté, représente une rupture avec l'approche traditionnelle de l'E.A.O.... . L'approche traditionnelle demande au professeur de fournir d'une part une "solution" et/ou d'anticiper toutes les étapes que l'élève doit parcourir pour trouver la solution ; alors qu'ici, le professeur a un outil qui lui permet de spécifier la logique du problème. Il n'a pas besoin de fournir une "solution" ni d'anticiper toutes les tentatives valides ou non valides pour prouver un théorème.

De manière interne, le système est organisé comme suit. Toutes les informations existent sous la forme de clauses Prolog. Chaque donnée géométrique entrée par le professeur est traduite sous forme de clauses et ces clauses sont ajoutées à la base de données Prolog. Les constructions géométriques de l'élève sont réalisées par des procédures graphiques et l'information logique que l'on peut en déduire est extraite et traduite en clauses Prolog. Ces dernières sont ajoutées à la base de données Prolog. Quand l'élève construit une preuve, toutes les réponses sont traduites en clauses Prolog. C'est l'interprèteur Prolog, un démonstrateur de théorème basé sur le principe de résolution, qui vérifie les inférences logiques quand cela est nécessaire. Les interfaces avec la tablette graphique et la carte-parole sont écrites en Pascal, mais sont exécutées à partir de clauses Prolog. Le système dans son ensemble est donc basé sur Prolog".



A X E II

AIDE A LA RESOLUTION DE PROBLEMES DE TYPE PARTAGE INEGAL

I INTRODUCTION

Nous avons choisi, pour l'axe II de notre recherche, une classe de problèmes particulière : les problèmes du type "partage inégal" .

Exemple :

On a trois ficelles A, B et C qui ont des longueurs différentes ; la ficelle A est deux fois plus longue que la ficelle B ; la ficelle C est trois fois plus longue que la ficelle B . Si on met bout à bout les trois ficelles, elles mesurent ensemble 315 cm .

La résolution d'un tel problème faisait l'objet d'un apprentissage spécifique dans les anciens manuels (Cf. Annexe I) .

Nous avons choisi cette classe de problèmes pour trois raisons :

A- Ces problèmes ne présentent pas de difficulté conceptuelle particulière : aussi pouvons-nous les proposer à des élèves de niveaux différents et étudier les modes de résolution et leur éventuelle progression ;

B- Ces problèmes peuvent, par contre, faire intervenir des outils de connaissance variés : l'outil arithmétique, l'outil numérique, l'outil algébrique .

Or, nous savons qu'une difficulté importante pour les élèves est d'acquérir la maîtrise de nouveaux outils de connaissance, tout en conservant celle d'outils plus anciens ;

C- Ces problèmes devraient nous permettre d'étudier le rôle de la représentation graphique dans la résolution .

C'est essentiellement ce dernier point qui a, tout d'abord, mobilisé notre réflexion .

En effet, l'élève peut s'aider d'une représentation graphique avec les trois objectifs suivants :

- identifier la structure du problème,
- rechercher la solution du problème ,
- convaincre la personne qui lit (ou corrige) ce qu'il a rédigé .

En d'autres termes :

- L'élève construit-il une telle représentation pour mieux comprendre le problème (recherche d'un modèle) ou lorsqu'il dispose déjà de cette compréhension ?
- L'élève sait-il utiliser cette construction pour compter les segments ou déduire des relations entre les trois termes ?

Pour tenter de répondre à ces quelques questions, 487 élèves de 6ème et de 5ème ont chacun résolu un problème de type "partage inégal" .

Le mode de passation était collectif ("papier-crayon") et les élèves disposaient de 20 minutes pour résoudre le problème proposé .

Nous avons testé trois versions différentes (Cf. Annexe II) de ce problème :

- Une présentation mettant en jeu la grandeur "longueur" : la version "ficelle" ;
- Une présentation mettant en jeu la grandeur "poids" : la version "poids" ;
- Une présentation ne mettant en jeu aucune grandeur, mais proposant les couples de relations sous forme symbolique : la version "relationnelle" .

En choisissant de proposer la version "ficelle", nous pensons :

- rendre plus favorable l'intervention d'une représentation tant mentale que graphique pour l'élève, et observer des modes de résolution qui particularisent cette version par rapport aux autres ;
- étudier le statut de la représentation graphique pour l'élève :

celle-ci a-t-elle valeur de schéma (ce seraient alors les ficelles qui seraient dessinées), ou de représentation d'une quantité ?

Pour trancher entre les deux branches de cette alternative, il est intéressant d'observer comment les élèves qui construisent une représentation graphique pour la version "poids" l'utilisent ensuite : savent-ils manipuler une représentation "décontextualisée" ?

Enfin, nous avons choisi de faire varier le couple de relations proposé à l'élève . Voici les quatre modalités testées :

<u>modalité 1</u> : C = 3 A et C = 6 B ;

<u>modalité 2</u> : C = 3 A et A = 2 B ;

<u>modalité 3</u> : A = 2 B et C = 3 A ;

<u>modalité 4</u> : A = 2 B et C = 6 B .

Nous recherchons les caractéristiques du couple de relations qui sont favorables au traitement de l'énoncé par l'élève . Est-ce :

- l'expression de A et de C en fonction du plus petit terme B, ce qui favoriserait l'activité de substitution dans "A + B + C = 315" (modalité 4) ;
- la possibilité d'enchaîner le dernier élément de la première relation et le premier élément de la deuxième (modalité 2) ;
- l'"extension" d'un terme, c'est-à-dire son expression en fonction d'un autre ?

Nous remarquons que pour la modalité 1, seul C est "étendu" .

Dans la suite de ce travail, nous proposerons tout d'abord une analyse de la tâche, en abordant successivement :

- le modèle que nous avons retenu de la situation ;
- nos hypothèses sur le processus de résolution ;
- une analyse des procédures .

L'apport de l'informatique à l'aide à la résolution de problèmes de type "partage inégal" est l'objet d'une troisième partie de cette rédaction .

Une première analyse des données a été proposée en Annexe III .
Un traitement des résultats au moyen de méthodes automatiques d'analyse de données est en cours (analyse hiérachique, analyse factorielle des correspondances, analyse en composantes principales,et construction de graphes d'implication) .

II ANALYSE DE LA TACHE

1 MODELE DE LA SITUATION

La STRUCTURE DU PROBLEME choisi ne comporte pas de difficulté conceptuelle particulière .

Cependant, la reconnaissance d'un MODELE de partage inégal sollicite à la fois deux composantes :

- l'inégalité des trois termes A, B, C pris deux à deux : sur le versant pratique, il faut SERIER A, B et C ;
- l'expression de A, B et C en fonction d'une unité . Du point de vue de la structure du problème, ce modèle est un modèle de FRACTIONNEMENT .

La dimension de CALCUL RELATIONNEL est très fortement sollicitée .

On distingue généralement deux types de calculs relationnels :

- déduire une relation à partir de deux données (exemple : A mesure 30 cm, et B mesure 90 cm : B est trois fois plus longue que A) ;
- déduire une relation à partir de deux relations, ou plus (exemple : C est trois fois plus longue que A, et C est six fois plus longue que B : A est deux fois plus longue que B) .

C'est ce deuxième type de calcul - que l'on peut estimer plus complexe que le premier - qui est en jeu lors de la structuration du problème, mais aussi lors de la recherche de la solution (car il y a trois objets et non deux) .

Structure du problème :

- $B < A < C$, ou trouver le plus petit ;
- Expression de A, B et C en fonction d'une unité .

Structure de la solution :

- Dans A + B + C = 315, substitution à deux des termes de leur expression en fonction du troisième .

L'articulation entre structure du problème et structure de la solution dépend de l'outil de connaissance auquel l'élève fait appel .

Nous distinguons trois outils :

- l'outil algébrique : travailler sur les propriétés des opérations ;
- l'outil arithmétique : travailler sur des quantités ; un auxiliaire puissant en est la représentation graphique ;
- l'outil numérique : travailler sur le respect, par certaines valeurs, des conditions numériques données dans l'énoncé du problème (rapports entre les valeurs, la somme des valeurs est égale à 315) .

A cet outil peut être associé un comportement de tâtonnement ou une systématisation de la recherche à l'aide des propriétés des nombres : P.G.C.D, critères de divisibilité ...

L'outil algébrique est un outil opératoire : il est situé sur le versant de la solution .

A l'outil arihmétique correspond, du point de vue de la structuration du problème, un modèle de fractionnement . Mais nous devons distinguer deux cas lors de la recherche de la solution :

- l'élève n'assimile pas l'unité de référence à l'une des inconnues : il y a alors simple comptage ;
- l'élève assimile l'unité de référence à l'une des inconnues : il y a alors mise en rapport et évolution du modèle .

A l'outil numérique correspond une simple appropriation des données et du but .

2 HYPOTHESES SUR LE PROCESSUS DE RESOLUTION

Le problème choisi ne présente pas de difficulté conceptuelle particulière . Il n'est pourtant réussi que par le quart de l'effectif global des élèves . Cette difficulté semble due au fait :

- d'avoir à GERER plusieurs contraintes à la fois (le couple de relations, la somme A+B+C = 315) ;

OU

- d'avoir à trouver un MODELE qui permette de résoudre le problème et apporte une solution généralisable .

Le modèle qui dispose de l'auxiliaire représentatif le plus puissant est ici un modèle de fractionnement . En effet, il est possible d'y associer une activité physique d'ajout ou de découpage, autant de transformations que l'élève peut reproduire mentalement ou graphiquement .

Par contre, à l'explicitation de la relation entre B et la somme, correspond un modèle de type "rapport" .

L'élève qui y accède franchit une nouvelle étape : il se dégage de la représentation comme outil et a la possibilité d'apporter une solution généralisable à des versions qui sollicitent peu (ou moins) la représentation mentale ou graphique .

A moins, pour ce dernier cas, que l'élève ne soit capable d'utiliser une représentation graphique qui possède alors les caractéristiques suivantes :

- elle est dans l'espace, c'est-à-dire décontextualisée par rapport à la version proposée à l'élève ;
- elle est unidimensionnelle .

Inversement, l'élève qui utilise une représentation graphique pour la version "ficelle" dessine-t-il les ficelles (son dessin a alors valeur de schéma), ou a-t-il recherché une représentation des quantités mises en jeu ?

Tous les élèves qui n'utilisent pas un modèle de fractionnement ou de "rapport", c'est-à-dire n'ont pas, sur le plan procédural, cherché un fractionnement de 315, ont plusieurs contraintes à manipuler et à maintenir :

- la contrainte A + B + C = 315 ;
- la contrainte relationnelle entre les termes A, B et C, exprimée par les deux couples de relations .

Or, parvenir à une solution généralisable à la classe de problèmes de partage inégal, c'est : hiérarchiser les données et y faire correspondre une hiérarchie de buts .

données -------	relation 1
	relation 2
	A + B + C = 315
but ---	trouver A, B et C .

Il faut parvenir à l'architecture suivante :

données — relation 1

relation 2

sous-but — expression de A, B et C en fonction d'une référence .

donnée — A + B + C = 315

but — valeur de A, B et C

Il existe donc une hiérarchie entre la contrainte "somme" et la contrainte relationnelle (couples de relations) .

Nous verrons plus loin que la première contrainte est nettement mieux prise en compte par les élèves, et que le progrès réalisé de 6ème en 5ème porte uniquement sur celle-ci .

Nous pensons qu'il y a au moins deux façons de surmonter la difficulté liée au respect de la contrainte relationnelle :

- l'élève peut chercher le terme commun aux deux relations ;
- l'élève effectue un calcul relationnel afin de tout exprimer en fonction de B

Ce sont de telles issues que nous étudierons.

3 ANALYSE DES PROCEDURES

A PROCEDURES DE REUSSITE

Nous notons tout d'abord le peu de variation du taux de réussite d'une classe à l'autre d'une part, d'une version à l'autre d'autre part .

Mais peut-on dire pour autant :

- que les élèves de 6ème et les élèves de 5ème emploient les mêmes procédures ?
- que proposer des versions différentes équivaut à proposer des problèmes identiques du point de vue du traitement ?

Pour répondre à ces questions, nous distinguons :

- les procédures de réussite ;
- les procédures d'échec .

L'analyse des procédures de réussite nous a conduits à distinguer trois types de procédures qui mènent à une réponse correcte :

Type I :

Division de 315 par 9 (par 4,5) pour trouver soit une unité, soit B (A), car :

- il y a 9 parts dans 315 : l'enfant fractionne le tout ;
- il y a 9 fois B dans 315 : l'enfant explicite la relation entre B et la somme .

Seuls trois élèves ont recherché la valeur de A (division par 4,5) .

Type II :

Division de 315 par 3 car :

- il y a trois objets ;

- on fait "comme si" A, B et C étaient égaux .

Notons que pour les valeurs choisies ici, deux caractéristiques favorisent l'utilisation de ce type de procédures : 315 est divisible par 3 d'une part, cette division peut amener les élèves à trouver les valeurs numériques correctes d'autre part .

Type III :

Tâtonnement numérique pouvant :

- s'appuyer (ou non) sur une connaissance : recherche d'un diviseur de 315 pour trouver une unité .

L'élève ne met pas en oeuvre (parce qu'il n'en dispose pas ?) de procédure de substitution de A et C en fonction de B dans A + B + C = 315 ;

- être plus ou moins structuré :

a- emploi de critères de divisibilité ;

b- recherche de la valeur de B par encadrements, approximations, ou essais pour des valeurs de B de plus en plus grandes .

Type / Version	I (/9)	II (/3)	III Numérique	Total	
"Ficelle"	30 62,5%	15 31%	3 6%	48	100%
"Poids"	15 39,5%	13 34%	10 26%	38	100%
"Relation."	20 41%	7 14%	22 45%	49	100%

Tableau 1 : répartition des réponses correctes pour les trois versions .

Nous constatons (tableau I) :

- que la majorité des élèves ayant passé (et réussi) la version "ficelle" ont utilisé une procédure canonique (type I) ;
- que les procédures de type numérique sont très rares pour la version "ficelle", mais qu'elles sont aussi fréquentes que les procédures de type canonique pour la version "relationnelle" ;
- que les procédures de type "partage égal" (type II) sont plus fréquentes lorsque le problème met en jeu des quantités physiques (poids et longueur) .

Nous avons cherché à confirmer ces faits pour l'ensemble des protocoles (c'est-à-dire en confondant les bonnes et les mauvaises réponses) . Pour cela, nous avons reporté, dans le tableau 2 (ci-dessous), la fréquence de recherche d'une unité et la fréquence de division de 315 en trois parts égales, pour chaque version .

recherche / version	unité	3 parts	autre	Total
"Ficelle"	55 33%	42 25%	69 42%	166 100%
"Poids"	43 28%	41 27%	70 45%	154 100%
"Relation."	35 22%	32 19%	99 60%	166 100%

Tableau 2 : Répartition de l'ensemble des réponses pour les trois versions .

Nous observons essentiellement :

- que la différence entre la version "ficelle" et les autres versions pour le comportement "recherche d'une unité" est significativement moins grande pour l'ensemble des protocoles que pour les réponses correctes considérées isolément ;

- que le progrès réalisé lorsqu'il y a donnée des bonnes valeurs pour A, B et C repose essentiellement sur la recherche d'une unité par l'élève : ceci est surtout le cas pour les versions "ficelle" et "poids" ;
- que pour la version "relationnelle", il y a, pour l'ensemble des protocoles comme pour les bonnes réponses considérées isolément, moins d'utilisation d'un modèle de résolution (qu'il soit de fractionnement, de rapport, ou de partage égal) .

Ces résultats nous informent essentiellement sur le statut de la version "relationnelle" par rapport aux autres versions .

Nous nous attendions à ce que les élèves (du moins les élèves de 5ème) utilisent plus fréquemment l'outil algébrique pour cette version . Cet outil va de pair avec l'emploi d'un modèle de type "rapport" .

Or, c'est une recherche de type "numérique" qui semble caractériser cette version . Cette approche ne constituerait-elle pas alors une "charnière" entre un modèle de fractionnement et un modèle de type "rapport" ?

En effet, une approche numérique correspond à une accentuation du travail de manipulation des données : or, un modèle de type "rapport" n'admet plus, comme un modèle de fractionnment, un simple comptage des segments ou des unités, mais requiert une véritable substitution des termes A et C en fonction de B .

Nous avons reporté, dans le tableau 3 (ci-dessous), la répartition des réponses correctes pour la classe de 6ème et pour la classe de 5ème .

Type / Classe	I (/9)	II (/3)	III Numérique	Total
6ème	32 58%	14 25%	9 16%	55 100%
5ème	33 41%	21 26%	26 32%	80 100%

Tableau 3 : Répartition des réponses correctes pour la classe de 6ème et la classe de 5ème .

Les élèves de 5ème utilisent moins de procédures canoniques mais plus de procédures numériques que les élèves de 6ème .
Ces résultats semblent renforcer notre analyse mais il est possible que le travail sur les propriétés des nombres, réalisé en classe de 5ème, ait également une part dans l'interprétation de ces faits .

B TRAVAIL DE STRUCTURATION DES DONNEES

Pour trouver le triplet de valeurs (A, B, C), l'élève doit respecter deux contraintes :

- les rapports entre les valeurs doivent correspondre à ceux donnés par le couple de relations ;
- la somme : $A + B + C$ doit être égale à 315 .

Quelle est la contrainte la mieux respectée par les élèves ?
Pour le savoir, nous avons classé l'ensemble des protocoles selon trois catégories :

- la contrainte "315" est respectée ;

- la contrainte "2 relations" est respectée ;

- l'élève ne respecte ni l'une ni l'autre de ces contraintes .

Notons que les réponses correctes appartiennent à la fois aux deux catégories .

catég. / version	"315"	"2 relations"	ni l'un ni l'autre
"Ficelle"	81 49 %	67 40 %	66 40 %
"Poids"	75 49 %	47 30 %	69 45 %
" Relation."	108 65 %	59 35 %	49 29 %

Tableau 4 : Respect des contraintes données dans l'énoncé pour chaque version .

La contrainte "315" est plus fréquemment respectée par les élèves que la contrainte "2 relations" . Nous constatons de plus :

- que 65 % des élèves qui ont passé la version "relationnelle" ont respecté la contrainte "315" ;

- que 40 % des élèves qui ont passé la version "ficelle" ont respecté la contrainte "2 relations" , contre seulement 30 % de ceux qui ont passé la version "poids" .

Enfin, le seul progrès réalisé de la classe de 6ème à la classe de 5ème porte sur le respect de la contrainte "315" , et encore ce progrès est-il peu important : 50 % en classe de 6ème et 57 % en classe de 5ème .

Deux calculs peuvent favoriser le dépassement de la difficulté liée au respect de la contrainte "2 relations " :

- une recherche du terme "pivot", c'est-à-dire du terme commun aux deux relations de l'énoncé ;
- une recherche du plus petit terme, B : il y a alors, pour les modalités 1, 2 et 3 un calcul relationnel .

Nous avons classé l'ensemble des protocoles selon ces deux catégories .

Version \ calcul	terme "pivot"		terme B		autre		total	
"Ficelle"	44	27 %	59	36 %	63	38 %	166	100%
"Poids"	44	29 %	44	29 %	66	43 %	154	100%
"Relation."	37	22 %	54	32 %	76	46 %	167	100%
Total	125	26 %	157	32 %	195	42 %	487	100%

Tableau 6 : Premier calcul effectué pour chacune des versions .

Nous constatons qu'il y a, cette fois, assez peu de différences entre les versions proposées aux élèves .

Remarquons cependant que 58 % des élèves ont effectué l'un des deux calculs considérés ici : le non-respect de la contrainte "2 relations" semble donc plus dû à des difficultés de calcul (numérique ou relationnel) qu'à sa non-prise en compte de la part de l'élève .

C CONSTRUCTION ET UTILISATION D'UNE REPRESENTATION GRAPHIQUE

" Ficelle "	" Poids "	"Relationnelle"	VERSIONS
35 %	14 %	10 %	Fréquences

Tableau 7 : Fréquence des représentations graphiques pour chacune des versions .

Les résultats vont dans le sens de notre hypothèse : les élèves qui passent la version "ficelle" constuisent plus souvent une représentation graphique que les élèves qui passent les autres versions .
Notons, de plus, que la différence entre la version "poids" et la version "relationnelle" est peu importante : l'élève construit peu de représentations graphiques lorsqu'il s'agit de représenter des quantités .

Mais,l'élève qui construit une représentation graphique sait-il pour autant l' utiliser ?
Afin de progresser sur cette question, nous avons employé un test statistique mis au point par Régis Gras .
Ce test nous fournit un critère pour l'acceptation ou le rejet de l'hypothèse d'une relation d'implication entre les deux caractéristiques suivantes : la réussite et la construction d'une représentation graphique .

Nous constatons alors :

- que l'hypothèse d'implication est acceptée pour la version "ficelle" ;
- qu'elle est par contre rejetée pour la version "poids" .

Il semble donc que les élèves qui ont, pour la version "poids", construit une représentation graphique, en aient peu bénéficié , du moins pour la réussite du problème .

D'autre part, une analyse des types de représentations graphiques que les élèves produisent met en évidence les faits suivants :

- les élèves qui ont passé la version "ficelle" représentent plus souvent les segments A, B et C qu'ils ne représentent la somme 315 ; ce n'est pas le cas pour les autres versions .
Nous pensons que la représentation a souvent valeur de schéma pour la version "ficelle" ;
- les élèves utilisent peu la représentation graphique comme une aide au calcul relationnel : elle est le plus souvent associée à un modèle de type "fractionnement" (il y a alors report et comptage de segments-unités) .

Si en 6ème, 31 % des élèves construisent une représentation graphique, il n'y en a plus que 11 % en 5ème .
Par ailleurs, la relation entre réussite et représentation graphique est moins forte pour la classe de 5ème que pour la classe de 6ème .
Mais nous ne savons pas s'il y a une moindre maîtrise de l'outil de représentation ou si ce sont les élèves les plus "démunis" qui s'orientent vers la construction d'une représentation .

Nos conclusions provisoires sont les suivantes :

- proposer des versions différentes comme la version "ficelle" et la version "relationnelle" nous permet d'observer des traitements différents ;
- les élèves de 5ème et les élèves de 6ème n'utilisent pas les mêmes procédures de réussite : c'est une évolution des outils de connaissance qui semble être à l'origine de cette variation .

Nous n'avons pas abordé ici l'effet de la variable "couple de relations" .
Il semble en effet qu'il ait de multiples facettes .
C'est pourquoi, nous avons réalisé une analyse des protocoles selon divers caractères procéduraux .
Nous pensons que les analyses automatiques de données devraient nous permettre de mieux saisir cet aspect de la structuration de l'énoncé ..

III Realisation d'un systeme d'aide a la resolution des problemes de type partage inegal : premiere maquette

1 - PRELIMINAIRES

Il faut rappeler ici la volonté de l'équipe de recherche affirmée dès le projet initial de ne jamais sacrifier la réflexion sur la didactique des mathématiques et sur la pratique de l'enseignement à la "productivité" informatique (rappelons que l'équipe constituée dans le cadre du GRECO a également une fonction de groupe IREM). De ce point de vue le bilan nous semble très positif car la démarche consistant à rechercher des aides possibles pour la résolution de problèmes particuliers et à mettre au point une gestion informatique de ces aides nous a conduits à des confrontations et des explicitations didactiques fructueuses.

On a vu pour la géométrie (AXE 1) comment cette démarche nous a contraints à expliciter, pour nous et pour les élèves, certains des termes du "contrat" qu'implique un énoncé de problème en classe de 4ème.

Au niveau du problème de partage inégal choisi pour ce second axe, ce sont surtout les objectifs d'une telle situation et les conceptions didactiques sur lesquels ils reposent que nous avons été contraints d'expliciter en vue de la réalisation d'un logiciel d'aide ou d'apprentissage :

- c'est justement par rapport à cette première option - aide ou apprentissage - que les discussions ont été les plus vives : l'objectif est-il en fait d'aider l'élève à résoudre un problème particulier ou de lui apprendre à résoudre un type de problèmes donné?

- une seconde opposition qui ne recouvre pas tout-à-fait la précédente est celle qui existe entre une intervention au niveau de la situation et de la manière dont l'élève se la représente et une intervention au niveau de la méthode de résolution ;
- une troisième option enfin qui a suscité une confrontation intéressante de nos conceptions didactiques implicites et qui ne recouvre pas non plus les précédentes concerne le degré d'ouverture du système : doit-il être conçu comme un guidage (vers une solution particulière ou vers une méthode de résolution) ou comme un ensemble de recours possibles pour l'élève en cas de blocage?

L'orientation générale choisie est celle d'une intervention plus au niveau de la structuration des données du problème qu'au niveau de la structuration de la solution. Mais un tel choix n'implique pas que nous soyons capables de décider à chaque instant quelle modalité d'intervention est la plus souhaitable. La première maquette du logiciel que nous envisageons reflète tout-à-fait les incertitudes, les conflits et même les contradictions qui sous-tendent notre démarche.

2 - LA NATURE DES AIDES

Les "aides" réalisées ont été conçues dans le cadre d'une démarche très empirique qui repose seulement sur une analyse a priori de la tâche et sur une confrontation des différentes conceptions didactiques évoquées ci-dessus. L'analyse des données expérimentales concernant la tâche proposée a été menée en parallèle à cette élaboration d'aides. Les résultats mis en évidence et l'approfondissement de l'analyse de la tâche qu'ils permettent (paragraphe précédent) ont surtout pour but d'appuyer l'interprétation du comportement de l'élève dans le cadre du système d'aide qui lui est proposé. C'est sur une exploitation à la fois des faits "a priori" décrits précédemment et de faits observés "a posteriori" (par rapport au logiciel et aux recours qu'il permet) que pourraient reposer un repérage des obstacles rencontrés dans la résolution du problème proposé et l'introduction de quelques "noeuds diagnostiques" dans le système d'aide.

Un certain nombre de modules indépendants ont donc été réalisés. Ceux-ci peuvent conduire à plusieurs structurations ou chaînages différents que nous envisagerons après les avoir décrits succinctement.

On distinguera deux types de modules du point de vue de leur fonction d'aide :

1) <u>les modules à fonction d'éclaircissement</u>

Ils ont pour but d'intervenir uniquement au niveau de la manière dont l'élève traite l'énoncé et se représente la situation qui lui est proposée. Les modules retenus et réalisés pour l'instant peuvent être décrits de la manière suivante :

→ la résolution d'un problème de même nature mais plus simple que celui proposé : il s'agit pour l'instant d'un problème de partage inégal mais avec deux ficelles seulement ;

→ une relecture guidée de l'énoncé du problème : un certain nombre de questions concernant les données du problème sont posées à l'élève ;

→ la reconnaissance de la structure du problème parmi un ensemble de représentations donné ; la représentation retenue dans un premier module est de nature graphique : les grandeurs décrites dans l'énoncé et leurs relations sont représentées par des segments de droites et six schémas différents sont proposés (l'élève doit identifier celui qui correspond aux données du problème); dans un autre module, la même tâche est proposée mais à partir d'une représentation "relationnelle" du problème telle que celle expérimentée précédemment (de type A=3B, C=4B, A+B+C=240cm).

2) <u>les modules à fonction d'orientation</u> (les "coups de pouce

Il s'agit cette fois d'aides dont on peut supposer qu'elles vont avoir des implications au niveau de la procédure adoptée pour résoudre le problème et qui ne concernent donc plus uniquement la structuration des données du problème (cette implication pouvant d'ailleurs être recherchée ou non comme c'est le cas pour le premier module que nous allons décrire) :

→ la simulation sous forme de tableau "expérimental" des contraintes liées aux relations définies par l'énoncé : l'élève choisit une mesure pour l'une des ficelles et l'ensemble des mesurescorrespondant aux relations décrites dans le problème s'affiche sous forme de tableau ;

→ la construction d'une représentation graphique des données du problème à partir du repérage de la "plus petite ficelle" et de la manipulation de cette grandeur sous forme d'un segment de droite (des segments identiques peuvent être produits au moyen du crayon optique).

D'autres modules à vocations plus particulières sont également intégrés dans le logiciel :

→ un module de validation qui fournit à l'élève des informations quant à l'exactitude de ses réponses et aux données du problème avec lesquelles ces réponses ne sont pas compatibles ; ce module a été peu développé pour l'instant, l'accent étant mis plus sur la fonction de "déblocage" du logiciel que sur la fonction de correction ou de remédiation ;

→ un module "calculatrice" auquel l'élève peut recourir à tout moment et qui permet la réalisation des opérations dont il a besoin ;

→ un module de construction d'énoncés de problèmes de type "partage inégal" à partir d'une trame générale ; ce module peut servir à l'enseignant pour créer le fichier de problèmes qu'il souhaite proposer aux élèves mais pourrait être intégré également dans l'ensemble des recours auxquels l'élève peut accéder à partir du problème initial proposé.

3 - LA STRUCTURATION DES AIDES

Le logiciel est conçu de manière à permettre la réalisation de plusieurs chaînages différents à partir des modules décrits ci-dessus. Cette structuration des aides est bien sûr déterminante du point de vue de leur impact sur la capacité de résoudre le problème proposé et il était essentiel de pouvoir expérimenter et comparer plusieurs systèmes.

Les deux grands types de structuration que l'on peut envisager sont les suivants :

→ une structuration sous forme d'un "menu" général à partir duquel l'élève peut recourir au module qu'il souhaite (ou donner une solution) ;

→ une structuration de nature séquentielle basée sur une suite de choix beaucoup plus restreints (dichotomiques le plus souvent) et éventuellement de passages "obligés" à fonction diagnostique.

Mais de nombreux chaînages mettant en oeuvre des dosages différents de ces deux types de structuration sont possibles. Les trois questions principales qui se posent dans la réalistion de tels systèmes concernent :

- la formulation des choix proposés à l'élève : pour éviter que ces choix soient complètement aléatoires, il est nécessaire que l'élève parvienne à se représenter la nature des aides auxquelles il peut recourir et comprenne donc ce qu'on lui propose ; cette question est loin d'être réglée à l'heure actuelle ;
- les "noeuds diagnostiques" : l'ensemble des modules auxquels l'élève fait appel et l'ensemble des solutions qu'il propose sont bien sûr enregistrés en vue de l'analyse des dysfonctionnements ; mais il paraît souhaitable, également, de doter progressivement le système de "noeuds" à partir desquels pourraient être orientés l'aide apportée et le cheminement de l'élève à l'intérieur de la classe de problèmes pour laquelle est conçu le logiciel (les modules de reconnaissance de la structure du problème parmi un ensemble de représentations donné ont d'ailleurs été réalisés dans cette optique) ;
- la question du cheminement à l'intérieur de la classe des problèmes de type "partage inégal" qui vient d'être évoquée est différente de celle de la structuration des aides proposées et particulièrement délicate : ce cheminement doit permettre une exploration relativement complète de la classe de problèmes (un fichier de problè-

mes différant au niveau de la nature des relations définies dans l'énoncé, du scénario mettant en oeuvre ces relations, de la nature des grandeurs et des mesures est en cours de constitution) mais aussi tenir compte des procédures utilisées dans la résolution des problèmes précédents : le rôle du diagnostic est alors essentiel mais difficile également à définir.

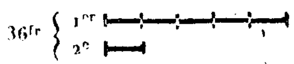
Annexe I : Extraits de manuels.

A. Lemoine.
Cours d'Arithmétique
"Théorie
2800 Exercices et Problèmes
Calcul mental.
Calcul rapide"
Cours supérieur -
Certificat d'Études. 2e Partie
Librairie HACHETTE
1923.
pages 3 et 11

PROBLÈMES

Partage en deux parties dont l'une est multiple de l'autre.

TYPE. — 8. Deux personnes ont ensemble 36 francs. L'une possède 5 fois plus que l'autre. Combien chacune a-t-elle ?



Solution. — La première personne possède 5 fois ce que possède la deuxième. Ensemble elles possèdent 5 + 1 fois, ou 6 fois ce que possède la deuxième.

Donc la deuxième a 36fr : 6 ou **6 francs** et la première 6fr × **5 ou 30 francs.**

Autre solution. — Au lieu de représenter la part inconnue de chacune des deux personnes par une *portion de droite*, il est possible et plus aisé de représenter cette part par une *lettre* quelconque de l'alphabet, par x, par exemple.

En appelant x la plus petite des deux parts, la plus grande est $5x$.

On peut dire :

x plus 5 fois x font 36 francs ; et on peut écrire :

$$x + 5x = 36 ; \text{ et } 6x = 36.$$

D'où : $$x = 36 : 6 = 6.$$

Rép. — La deuxième personne a **6 francs** ; la première a 6fr × 5 ou **30 francs**.

Remarque. — Cette solution qui comporte un raisonnement dans lequel on désigne, par une lettre, le nombre à chercher, le *nombre inconnu*, s'appelle une *solution algébrique* ; c'est, pour certains problèmes, le mode de solution le plus simple et le plus rapide. Nous y recourrons chaque fois que l'énoncé de la question le permettra.

Généralement on désigne les nombres inconnus d'un problème par une des dernières lettres de l'alphabet, x, y ou z ; les nombres connus se désignent par une des premières lettres, a, b, c, etc.

Oraux. — **9.** *J'ai 3 fois plus de billes que mon ami ; ensemble nous en avons 20. Combien en avons-nous chacun ?* — **10.** — *Si Pierre recevait 4 fois plus d'oranges qu'il n'en a, il en aurait en tout 35. Combien en a-t-il ?* — **11.** *Le poids total de deux objets est de 49 grammes ; l'un pèse 6 fois moins que l'autre. Quel est le poids de chaque objet ?*

Écrits. — **12.** Un enfant a 2 livres qui contiennent ensemble 216 pages, l'un en contient 3 fois autant que l'autre. Combien de pages y a-t-il dans chacun des livres ? *(Bourses des lycées et collèges.)*

13. Quatre associés ont à se partager une somme de 75 000 francs. Le premier doit avoir autant que les 3 autres, qui auront chacun une part égale. Combien chacun aura-t-il ? *(Aisne.)*

14. Deux tonneaux contiennent une égale quantité de liquide ; après avoir versé dans l'un 45 litres, et dans l'autre 120 litres, le contenu du 2e est double de celui du 1er. Combien de litres chacun des tonneaux contenait-il d'abord ?

15. Deux enfants jouent aux billes, à 1 bille la partie. Avant de commencer, l'un a 42 billes et l'autre 24 billes. Au bout d'un certain nombre de parties, le premier enfant possède 5 fois plus de billes que le second. Combien de parties a-t-il gagnées de plus que son camarade ?

CALCUL ÉCRIT RAPIDE

16. *Additionner* les nombres obtenus :

a) En *comptant* de 10 en 10, de 43 à 113 ; *b)* de 20 en 20, de 55 à 155.
c) En — 100 en 100, de 27 à 427 ; *d)* 50 en 50, de 38 à 388.

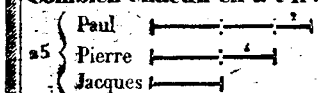
EXERCICES

Oraux. — **17.** *Dire le nom de l'unité du 3e ordre, du 5e, du 7e.* — **18.** *Quelle est l'unité dix fois plus grande que la dizaine, la dizaine de mille ? — dix fois plus petite que la centaine, le million, le mille, la centaine de mille ?* — **19.** *Combien une centaine contient-elle de dizaines ? – un mille contient-il de centaines ? — une dizaine de mille contient-elle de dizaines ?* — **20.** *Combien faut-il de dizaines d'unités pour faire un mille, une centaine de mille ?* — **21.** *Combien y a-t-il : 1° de dizaines dans huit centaines ; dans cinq mille ; 2° de centaines dans trois mille ; dans quarante mille ; dans deux millions ?*

PROBLÈMES

Partage en plusieurs parties inégales.

TYPE. — 22. Paul, Pierre et Jacques ont ensemble 25 billes. Paul en a 2 de plus que Pierre, et celui-ci 4 de plus que Jacques. Combien chacun en a-t-il ?



Solution. — Si je retranche 4 billes de la part de Pierre et 4 + 2 ou 6 billes de celle de Paul, je rends les trois parts égales à la part de Jacques.

Mais je retranche ainsi du total 4 + 6 ou 10 billes ; il reste donc 25 – 10 ou 15 billes ; d'où Jacques a 15 : 3 = **5 billes** ; Pierre en a 5 + 4 = **9** et Paul en a 9 + 2 = **11.**

Solution algébrique. — Désignons par x le plus petit nombre de billes, celui des billes de Jacques, le nombre de billes de Pierre sera $x + 4$, et celui de Paul, $x + 4 + 2$ ou $x + 6$. On peut écrire :

$$x + (x + 4) + (x + 6) = 25 \quad ; \quad \text{et} \quad 3x + 10 = 25.$$

S'il faut ajouter 10 à $3x$ pour faire 25, $3x$ seuls font 25 — 10 ou 15. On a :

$$3x = 15 \quad ; \quad \text{et} \quad x = 15 : 3 = 5.$$

Rép. — Jacques a **5** billes ; Pierre en a 5 + 4 ou **9** ; et Paul 9 + 2 ou **11**.

Oraux. — **23.** *Trois bourses contiennent ensemble 23 francs ; la 1re contient 3 francs de moins que la 2e et celle-ci 5 francs de moins que la 3e. Que contiennent-elles chacune ?* — **24.** *Il faut 28 lettres pour composer 3 mots : le 1er en a 5 de plus que le 2e et celui-ci 7 de plus que le 3e. De combien de lettres se compose chaque mot ?*

Écrits. — **25.** Partager 2000 francs entre 3 personnes de façon que la première ait 600 francs de plus que la deuxième et celle-ci 400 francs de plus que la 3e. *(Corse.)*

26. Trois ouvriers se partagent 80 francs ; le 2e a 2fr,75 de moins que le 1er ; le 3e 11fr,10 de plus que le second ; combien chacun a-t-il pour sa part ? *(C. E.)*

***27.** Partager une somme de 4310 francs entre 3 personnes, de façon que la 1re ait 450 francs de plus que la 2e et 700 francs de plus que la 3e. *(C. E.)*

28. On propose de partager 4240 francs entre 3 personnes de manière que la 3e reçoive 450 francs de plus que la 1re et 280 francs de moins que la 2e. Quelle somme chaque personne doit-elle recevoir ? *(Drôme.)*

***29.** Trois frères se partagent une récolte de 40hl,95 de blé. Le plus jeune doit avoir 2hl,25 de plus que l'aîné et de moins que le cadet. Quelle est la part de chacun des trois frères ? *(Ariège.)*

CALCUL ÉCRIT RAPIDE

30. *Additionner* les nombres obtenus :

a) En *comptant* de 100 en 100, de 27 à 627 ; *b)* de 40 en 40, de 865 à 1185.
c) En — 500 en 500, de 685 à 4685 ; *d)* de 60 en 60, de 1210 à 1630.

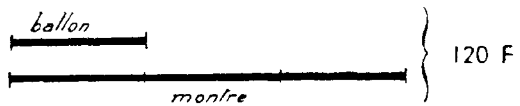
Courtel - Grill - Français : Arithmétique Nouvelle - Cours Moyen.
Editions de l'Ecole.
Programme 1945.

pp 211. 212.

PARTAGES INÉGAUX

UN DES NOMBRES EST MULTIPLE DE L'AUTRE

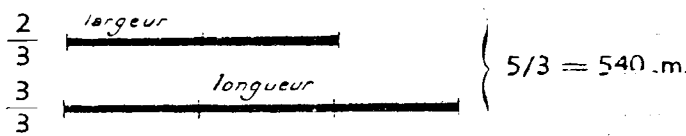
EXEMPLE I. — Une montre et un ballon valent 120 F. La montre vaut 3 fois plus que le ballon. Quelle est la valeur de chaque objet ?



4 fois la valeur du ballon = 120 F
Valeur du ballon : 120 : 4 = 30 F
Valeur de la montre : 30 × 3 = 90 F

Vérification : 90 F + 30 F = 120 F

EXEMPLE II. — Le demi-périmètre d'un champ rectangulaire mesure 540 m. Sa largeur est les 2/3 de la longueur. Calculer la longueur et la largeur.



5 tiers de périmètre = 540 m : 1 tiers = 540 : 5 = 108 m.
La largeur, ou deux tiers du demi-périmètre = 108 × 2 = **216** m.
La longueur, ou 3 tiers du demi-périmètre = 108 × 3 = **324** m.

Vérification : $\frac{216}{324} = \frac{2}{3}$ 216 + 324 = **540.**

PROBLÈMES

1re ANNÉE.

1265. Un baril et une barrique contiennent 300 litres de vin. La capacité de la barrique est 5 fois plus grande que celle du baril. Combien de litres de vin contient chaque fût ?

1266. Un mouton et un bœuf pèsent ensemble 328 kg. Le poids du mouton est le quart de celui du bœuf. Calculer le poids de chaque bête.

1267. Une fermière vend au marché 84 volailles : poulets et canards. Le nombre des poulets est 3 fois celui des canards. Elle a vendu les poulets 9 F pièce les canards 12 F pièce. Quelle somme a-t-elle perçue ?

68. Un ouvrier et son apprenti ont travaillé ensemble pendant 24 jours. Ils ont perçu un salaire de 648 F. Le salaire de l'ouvrier est double de celui de l'apprenti. Quel est le salaire journalier de chacun ?

69. Le demi-périmètre d'un jardin rectangulaire est 36 m. La longueur est double de la largeur. Quelle est la largeur de ce jardin ?

70. On a transvasé une barrique de vin de 228 litres dans deux fûts dont l'un a une contenance trois fois plus grande que celle de l'autre. Combien de litres de vin y a-t-il dans chaque fût ?

71. Tracez un rectangle dont le périmètre est 18 cm et dont la largeur est la moitié de la longueur. Calculez sa surface.

2e ANNÉE.

72. Pierre et Jean ont ensemble 95 F. Si Pierre avait 10 F de plus, il aurait 4 fois plus que Jean. Quelle est la part de chacun ?

73. Deux ménagères ont acheté une pièce de drap de 12,50 m. L'une en prend les 3/4. Le drap valant 16,40 F le mètre, combien devra payer chaque ménagère ?

74. La clôture d'un terrain rectangulaire dont la largeur est les 2/3 de la longueur a coûté 450 F, à 2,50 F le mètre. Calculer les dimensions de ce terrain.

75*. Un terrain rectangulaire a un périmètre de 272 m. La longueur est le triple de la largeur. Calculez sa surface.
Un terrain carré a le même périmètre que le terrain rectangulaire. Quelle est sa surface ?
Le terrain carré vaut 693,60 F de plus que le terrain rectangulaire. Quelle est la valeur de chacun de ces terrains ? (Le prix du mètre carré est le même pour les deux terrains.)

76*. Un terrain de 392 m de périmètre a la forme d'un rectangle dont la longueur est triple de la largeur.
1° Quelles sont ses dimensions ?
On l'entoure d'une clôture, puis on le partage en deux parties par une clôture parallèle à la largeur, de telle façon que l'une des deux parties obtenues soit un carré.
2° Quelle est la surface de chacune des deux parties ?
3° Quelle est la longueur du grillage utilisé pour les clôtures ?

77. Calcul d'examen.

$\frac{5}{4} + \frac{2}{3} = \ldots\ldots$ $\frac{7}{8} - \frac{3}{5} = \ldots\ldots$

0,25 × 0,25 × 3,1416 = ...

642,390 : 798 (trois chiffres décimaux au quotient) = ...

Annexe II : Présentation des trois versions du problème.

Version "Ficelle"

On a trois ficelles A, B et C qui ont des longueurs différentes ; la ficelle A est deux fois plus longue que la ficelle B ; la ficelle C est six fois plus longue que la ficelle B. Si on met bout à bout les trois ficelles, elles mesurent ensemble 315 cm.
Quelle est la longueur de chacune des ficelles?

longueur de la ficelle A : ....
longueur de la ficelle B : ....
longueur de la ficelle C : ....

Explique comment tu as fait :

Calculs.

Version "Poids"

On a trois objets A, B et C qui ont des poids différents ; l'objet A pèse deux fois plus lourd que l'objet B ; l'objet C pèse trois fois plus lourd que l'objet A. Si on les met ensemble sur la balance les trois objets pèsent en tout 315 g.

Quel est le poids de chacun des objets?

poids de l'objet A :................
poids de l'objet B :................
poids de l'objet C :................

Explique comment tu as fait :

Version "Relationnelle".

$A = 2B$; $C = 3A$; $A + B + C = 315$

Trouver les valeurs de A, B et C.

A : ....
B : ....
C : ....

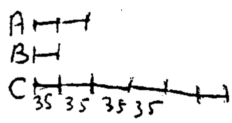
Explique comment tu as fait :

Annexe III. : Procédures de réussite.

Type I : Procédures "canoniques".

5 ème
Nathalie

On a trois ficelles A, B et C qui ont des longueurs différentes ; la ficelle A est deux fois plus longue que la ficelle B ; la ficelle C est six fois plus longue que la ficelle B. Si on met bout à bout les trois ficelles, elles mesurent ensemble 315 cm.
Quelle est la longueur de chacune des ficelles?



longueur de la ficelle A : ..70cm...
longueur de la ficelle B : ..35cm
longueur de la ficelle C : ..210cm.

Explique comment tu as fait :

J'ai calculée en combien de parties en tout mes trois ficelles etaient divisée : puis j'ai calculée la mesure. (elles sont tous de la même mesure), et j'ai multiplié cette partie en tant de fois qu'elle était demandée pour chaque ficelle.

$$\begin{array}{r|l} 315 & 9 \\ 45 & 35 \\ 0 & \end{array}$$

A = 35 cm × 2 = 70 cm
B = 35 cm
C = 35 cm × 6 = 210 cm

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 6 \\ \hline 210 \end{array}$$

Verification
210 cm + 70 cm + 35 cm = 315 cm

$$\begin{array}{r} 210 \\ 70 \\ 35 \\ \hline 315 \end{array}$$

6 ème
Ranjase

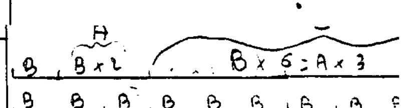
A = 2B ; C = 3A ; A + B + C = 315

Trouver les valeurs de A, B et C.

A : ..70......
B : ..35......
C : ..210....

Explique comment tu as fait :

J'ai vu, en faisant le dessin, qu'il y avait 9 B. J'ai divisé 315 par 9 et j'ai trouvé B. Puis je l'ai multiplier par 2 pour obtenir A. J'ai multiplier A par 3 pour avoir C



$$\begin{array}{r|l} 315 & 9 \\ 45 & 35 \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 2 \\ \hline 70 \\ \times 3 \\ \hline 210 \end{array}$$

Nathalie
5ème

On a trois objets A, B et C qui ont des poids différents ; l'objet A pèse deux fois plus lourd que l'objet B ; l'objet C pèse trois fois plus lourd que l'objet A. Si on les met ensemble sur la balance les trois objets pèsent en tout 315 g.

$$\begin{array}{r|l} 315 & 9 \\ 45 & \overline{35} \end{array}$$

Quel est le poids de chacun des objets?

poids de l'objet A :...70...........
poids de l'objet B :...35...........
poids de l'objet C :...210..........

Explique comment tu as fait :

$A = B+B$

$C = A+A+A = B+B+B+B+B+B$

$A+C+B = B+B+B+B+B+B+B+B+B$

$A+C+B = B \times 9$

$315 : 9 = 35$

$B = 35$

$A = 35+35 = 70$

$C = 70+70+70 = 35+35+35+35+35+35$

$C = 210 = 210$

Patricia
5ème

On a trois ficelles A, B et C qui ont des longueurs différentes ; la ficelle A est deux fois plus longue que la ficelle B ; la ficelle C est trois fois plus longue que la ficelle A. Si on met bout à bout les trois ficelles, elles mesurent ensemble 315 cm.
Quelle est la fongueur de chacune des ficelles?

longueur de la ficelle A :..~~105 cm~~..70cm.
longueur de la ficelle B :...35cm,.......
longueur de la ficelle C :..210 cm.......

Explique comment tu as fait :

$b \times 2 = a$
$[b \times 2] \times 3 = b$ donc $b \times 2 + b \times [b \times 2] \times 3 = 315$
$= b \times [2+1+3+2] =$
$b \times 9 = 315$.

$315 : 9 = b$
$315 : 9 = 35$.

$b \times 2 = a$
$35 \times 2 = 70$.

$a \times 3 = c$
$70 \times 3 = 210$.

$210 + 35 + 70 = 315$

donc si on ajoute b c a on trouve 315 et c'est le cas donc a : 70cm, b : 35cm, c : 210cm.

$b \times 2 = a$
$a \times 3 = c$
$[b \times 2] \times 3 = c$
$b \times 6 = c$
$c + b + a = 315$
$b \times [2+1+6] = b \times 9$
$35 \times 2 = 70$
$70 \times 3 = 210$

Nathalie 5e

On a trois objets A, B et C qui ont des poids différents ; l'objet C pèse trois fois plus lourd que l'objet A ; l'objet A pèse deux fois plus lourd que l'objet B. Si on les met ensemble sur la balance, les trois objets pèsent en tout 315 g.

Quel est le poids de chacun des objets?

poids de l'objet A :..70g.........
poids de l'objet B :..35g..........
poids de l'objet C :.210g........

Explique comment tu as fait :

tous d'abord j'ai chercher si les objets étaient de mêmes poids (=105g chacuns). Ensuite j'ai enlevée 315 de 105 pour trouver l'objet C. l'objet A était 3 fois plus légé que l'objet C donc j'ai divisée par 3. l'objet B était 2 fois plus légé donc j'ai divisé le poid de l'objet A par 2 pour trouver l'objet B.

315 - 105 = 210g

(315 | 3 ; 015 ; 0 ; 105)

l'objet C = 210g.

210 : 3 = 70g.
l'objet A = 70g

70 : 2 = 35g.
l'objet B = 35g.

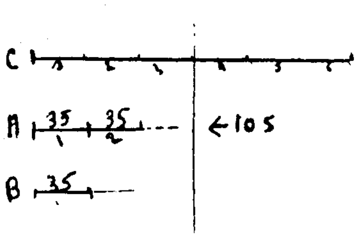
Isabelle 6e

On a trois ficelles A, B et C qui ont des longueurs différentes ; la ficelle C est trois fois plus longue que la ficelle A ; la ficelle C est six fois plus longue que la ficelle B. Si on met bout à bout les trois ficelles, elles mesurent ensemble 315 cm.

Quelle est la longueur de chacune des ficelles?

longueur de la ficelle A : ...70.......
longueur de la ficelle B : ..35.......
longueur de la ficelle C : .210......

Explique comment tu as fait :



315 : 3 = 105

C) 105 × 2 = 210 puisque le c fait 2 fois 1.2.3.

B) 105 : 3 = 35

35 correspont à un carreaux

A) 35 × 2 = 70

on trouve pour B 70 puisqu'il y a 2 fois le B donc 2 fois 35

(70 + 35) + 210 =
105 + 210 = 315 cm

315 | 3 ; 015 ; 0 ; 105

105 × 2 = 210

105 | 3 ; 15 ; 0 ; 35

35 × 2 = 70

70 + 35 + 210 = 315

Puslaure C = 3A ; C = 6B ; A + B + C = 315
5e.

Trouver les valeurs de A, B et C.

A : 210
B : 70
C : 35

Explique comment tu as fait :

au debut j'ai pris 215 et je l'ai divise par 3 pour voir si le resultat c'etait juste - mais, non ! alors j'ai pris 210 et c'etait juste donc A=70 et comme a + b + c = 315 et que 70 + ? + 210 = 315 j'ai fait une soustraction et j'ai trouvé 35 - puis j'ai multiplier 35 x 6 pour voir si je trouvais 210. et oui !

exemple :
c = 210 A = 70 B = 35
c = 3a = 3x 70 = 210
c = 6 B = 6 x 35 = 210.

Laurence A = 2B ; C = 6B ; A + B + C = 315
5e

Trouver les valeurs de A, B et C.

A : 70
B : 35
C : 210

Explique comment tu as fait :

je me dit que comme 315 est un multiple de 5 A, B ou c pourrait être un multiple de 5 mais si A ou c était un multiple de 5 cela ne marcherait pas alors j'ai pensé que B lui, serait obligatoirement un multiple de 5.

C = 3 A

Admettons que B = ~~15~~ 35
A = ~~30~~ + 70
C = ~~90~~ + 210
315

~~15 + 30 + 30 = 135~~

Myriam
6e.

On a trois objets A, B et C qui ont des poids différents ; l'objet C pèse trois fois plus lourd que l'objet A ; l'objet A pèse deux fois plus lourd que l'objet B. Si on les met ensemble sur la balance, les trois objets pèsent en tout 315 g.

Quel est le poids de chacun des objets?

poids de l'objet A : 70
poids de l'objet B : 35
poids de l'objet C : 210

Explique comment tu as fait :

Pour le poids A j'ai pris 30, pour B, 15 et pour C. 90 = 135
ça ne faisait que 135g
j'ai pris le double 30 = A, 60, B, 30 et pour C 180 = 270
ça ne faisait pas assez.
j'aie dit pourquoi ne pas prendre 70 pour A, 35 pour B et 210 pour C. j'ai fait les totaux et ça faisait 315g

A : 70
B = A:2 B = 35
C = A x 3 = 210
A + B + C = 315
70 + 35 + 210 = 315 g

A B C
70 35 210 = 3

ANNEXE IV : RESULTATS NUMERIQUES

I - TAUX DE REUSSITE

Les tableaux 1 . 2 . 3 indiquent les taux bruts de réussite.

Pour apprécier la réussite ou non du problème par un élève, nous n'avons tenu compte, dans un premier temps que des valeurs A,B et C inscrites dans le cadre prévu : notre critère est numérique.

Tableau 1 : Effectifs et fréquences de réussite en 6ème et 5ème lorsque le problème est présenté sous la forme POIDS.

	P1 C = 3A C = 6B	P2 C = 3A A = 2B	P3 A = 2B C = 3A	P4 A = 2B C = 6B	TOTAL
6è	4/18 22%	5/18 27%	3/17 17%	5/18 27%	17/71 23%
5è	3/22 13%	6/19 31%	5/21 23%	6/21 28%	20/83 24%
TOTAL	7/40 17%	11/37 29%	8/38 21%	11/39 28%	37/154 24%

Tableau 2 : Effectifs et fréquences de réussite en 6ème et 5ème lorsque le problème est présenté sous la forme RELATIONNELLE.

	A (C = 3A, C = 6B)	A2 (C = 3A, A = 2B)	A3 (A = 2B, C = 3A)	A4 (A = 2B, C = 6B)	TOTAL
6è	2/18 11%	4/16 25%	4/15 26%	7/15 46%	17/64 26%
5è	8/26 30%	8/25 32%	9/25 36%	7/26 26%	32/102 31%
TOTAL	10/44 22%	12/41 29%	13/40 32%	14/41 34%	49/166 29%

Tableau 2 : Effectifs et fréquences de réussite en 6ème et 5ème lorsque le problème est présenté sous la forme FICELLE.

	F1 (C = 3A, C = 6B)	F2 (C = 3A, A = 2B)	F3 (A = 2B, C = 3A)	F4 (A = 2B, C = 6B)	TOTAL
6è	6/18 33%	5/17 29%	4/18 22%	5/18 27%	20/71 28%
5è	5/25 20%	2/22 9%	11/24 45%	10/24 41%	28/95 29%
TOTAL	11/43 25%	7/39 17%	15/42 35%	15/42 35%	48/166 28%

Ces premiers tableaux montrent :

1 - La difficulté de ce problème pour les élèves :

Il n'est réussi en effet que par un peu plus du quart (27,5%) de l'effectif global.

2 - La relative stabilité des taux de réussite pour des versions différentes d'une part, de la classe de 6ème à la classe de 5ème d'autre part :

Tableau 4 : Taux de réussite pour les trois versions, toutes classes et couples de relations confondus.

Version	Taux de réussite
"Poids"	23%
"Ficelle"	28%
"Relation-nelle"	29%

Tableau 5 : Taux de réussite en 6ème et en 5ème, toutes versions et tous couples de relations confondus.

Version	Taux de réussite
6ème	26,2%
5ème	28,6%

Notons, d'autre part, que la version "poids" est la version la plus difficile, en 6ème comme en 5ème.

3 - La variabilité du taux de réussite pour les différentes modalités du facteur "couple de relations" :

Tableau 6 : Taux de réussite pour chaque couple de relations, toutes classes et versions confondues.

Couple de relations	1 C = 3A C = 6B	2 C = 3A A = 2B	3 A = 2B C = 3A	4 A = 2B C = 6B
Taux de réussite	22%	26%	30%	33%

Les taux de réussite correspondant aux différents couples se placent de façon régulière sur une échelle d'intervalles.

4 - La caractérisation de la version "Ficelle" par rapport à la version "Poids" pour les différents couples de relations proposés :

Tableau 7 : Taux de réussite pour chaque version et chaque couple de relations, toutes classes confondues.

Couple de relations / Version	1 C = 3A C = 6B	2 C = 3A A = 2B	3 A = 2B C = 3A	4 A = 2B C = 6B
"Ficelle"	25%	17%	35%	35%
"Poids"	17%	29%	21%	28%
"Relation."	22%	29%	32%	34%

La modalité 4 est plus facile pour les différentes versions.

Mais la version "poids" se particularise par rapport à la version "ficelle" : les taux de réussite des modalités 2 et 3 pour les deux versions ne sont pas équivalents.

5 - La non-interaction entre la variable "classe" et la variable "couple de relations". :

Tableau 8 : Taux de réussite pour chaque classe et chaque couple de relations, toutes versions confondues.

Couple de relations / Version	1 C = 3A C = 6B	2 C = 3A A = 2B	3 A = 2B C = 3A	4 A = 2B C = 6B
6ème	22%	27%	22%	37%
5ème	22%	24%	36%	32%

C'est la modalité 4 qui est la mieux réussie en classe de 6ème.

Ce sont les modalités 3 et 4 qui sont les mieux réussies en classe de 5ème.

Ces résultats sont relatifs aux deux faits suivants :

- En classe de 6ème, la modalité 4 est réussie par 46% des sujets pour la version "relationnelle" (moyenne 26% cf tableau 2);

- En classe de 5ème, les modalités 3 et 4 sont réunies respectivement par 45% et 41% des sujets pour la version "ficelle" (moyenne 29% cf tableau 3).

II - PROCEDURES DE REUSSITE :

1 - Classement des procédures :

L'analyse des procédures de réussite permet de dégager des faits intéressants.

Ainsi, nous avons pu distinguer trois grands types de procédures qui mènent à une réponse correcte :

Type I :

Division de 315 par 9 (4,5) pour trouver soit une unité, soit B(A) car :

- il y a 9 parts dans 315 : l'enfant fractionne le tout ;
- il y a 9 fois B dans 315 : l'enfant explicite la relation entre B et la somme.

Type II :

Division de 315 par 3 car :

- il y a 3 objets ;
- on fait "comme si" A,B,C étaient égaux.

Type III :

Tâtonnement numérique pouvant :

- s'appuyer (ou non sur une connaissance : recherche d'un diviseur de 315 pour trouver une unité ;
- être plus ou moins structuré :
  . Emploi de critères de divisibilité.
  . Recherche de la valeur de B par encadrements, approximations, ou essais pour des valeurs de B de plus en plus grandes.

2 - Type de procédure correcte et version proposée à l'élève :

Tableau 9 : Répartition des réponses correctes pour les trois versions.

Type de procédure correcte / Version	I (/9)	II (/3)	III Numérique	TOTAL
"Ficelle"	30 62,5%	15 31,25%	3 6,25%	48 100%
"Poids"	15 39,5%	13 34,2%	10 26,3%	38 100%
"Relation."	20 40,08%	7 14,3%	22 44,9%	49 100%
TOTAL	65 48%	35 26%	35 26%	135 100%

Il y a <u>une dépendance</u> entre le type de procédure correcte et la version proposée à l'élève. (x^2 = 21,2, significatif à .01).

Nous constatons :

- que la majorité des élèves ayant passé la version "ficelle" (et réussi) ont utilisé une procédure canonique ;

- que les procédures de type "numérique" sont très rares pour la version "ficelle" mais qu'elles sont aussi fréquentes que les procédures de type canonique pour la version "relationnelle";

- que les procédures de type "partage égal" (type II) sont plus fréquentes lorsque le problème met en jeu des quantités physiques (poids et longueur).

3 - Type de procédure correcte et couple de relations proposé à l'élève :

Tableau 10 : Répartition des réponses correctes pour les différents couples de relations.

Type de procédure correctes / Couple de relations	I (/9)	II (/3)	III Numérique	TOTAL
1 C = 3A C = 6B	7 25%	11 39,3%	10 35,7%	28 100%
2 C = 3A A = 2B	11 36,7%	12 40%	7 23,3%	30 100%
3 A = 2B C = 3A	22 59,5%	7 18,9%	8 21,6%	37 100%
4 A = 2B C = 6B	25 62,5%	5 12,5%	10 25%	40 100%
TOTAL	65 48%	35 26%	35 26%	135 100%

Il y a <u>une dépendance</u> entre le type de procédure correcte et le couple de relations proposé à l'élève (x^2 = 15,72, significatif à .05).

- La majorité des élèves utilisent une procédure "canonique" pour les modalités 3 et 4 ;

- Il y a plus de procédures de type "partage égal" pour les modalités 1 et 2.

- Il y a plus de procédures de type "numérique" pour la modalité 1.

4 - Type de procédure correcte et classe :

Tableau 11 : Répartition des réponses correctes pour la classe de 6è et la classe de 5è.

Classe \ Type de procédure Correcte	I (/9)	II (/3)	III Numérique	TOTAL
6è	32 58,2%	14 25,4%	9 16,4%	55 100%
5è	33 41,25%	21 26,25%	26 32,5%	80 100%
TOTAL	65 48%	35 26%	35 26%	135 100%

Il y a <u>une indépendance</u> entre le type de procédure correcte et la classe de l'élève ($x^2 = 5,22$).

Notons cependant que cette valeur du x^2 est très proche de la valeur minimale requise à .05 (x^2 min = 5,99).

- Les élèves de 6è emploient plus de procédures canoniques que les élèves de 5è ;

- Les élèves de 5è emploient plus de procédures "numériques" que les élèves de 6è.

III - ANALYSE DES REPONSES DU POINT DE VUE DE LA STRUCTURATION DES DONNEES

378 élèves sur 487 (78%) donnent une réponse numérique pour A,B,C.

Or, il n'y a que le quart des élèves qui trouvent les bonnes valeurs pour A,B et C.

Notons que c'est pour la version "relationnelle" qu'il y a le plus de réponses pour A,B et C.

Version "poids" : 75%

Version "ficelle" : 73%

Version "relationnelle" : 84%

Nous avons observé par ailleurs (cf. paragraphe II) que c'est pour la version relationnelle que les procédures correctes sont le plus souvent de type "numérique".

Mais il n'y a de différence importante ni entre les différentes modalités de la variable "couple de relations", ni de la classe de 6è à la classe de 5è.

Pour trouver le triplet de valeurs (A,B,C), l'élève doit respecter deux contraintes :

- Les rapports entre les valeurs doivent correspondre à ceux donnés dans l'énoncé ;

- La somme : A+B+C doit être égale à 315.

Le respect de ces contraintes peut :

- Faire l'objet d'une simple vérification : l'élève dispose d'un modèle qui prend en charge ces contraintes ;

- Etre l'objet de la résolution d'un problème : c'est le cas pour les procédures "numériques".

Dans ces deux cas, l'élève parvient à faire correspondre aux contraintes présentées simultanément dans l'énoncé, une procédure qui est, elle, définie séquentiellement.

Mais ces trois contraintes (315, rel 1, rel 2) peuvent être, pour l'élève, une charge trop importante.

1
- Cette difficulté est-elle plus liée à la contrainte "somme" qu'à la contrainte "relationnelle" ?

- Quelle est la contrainte la mieux prise en compte ?

2
- La somme et les rapports correspondent-ils à deux types de contraintes pour l'élève, ou bien est-ce le nombre des relations à maintenir qui est déterminant dans la définition de la "charge" de travail ?

1 - La contrainte "315" et la contrainte "2 relations" :

Nous avons classé l'ensemble des protocoles selon trois catégories :

- La contrainte "315" est respectée,
- La contrainte "2 relations" est respectée,
- L'élève ne respecte ni l'une ni l'autre de ces contraintes.

Tableau 12 : Respect des contraintes données dans l'énoncé (315 et 2 rél) pour l'ensemble des protocoles.

"315"	"2 relations"	ni l'un ni l'autre	TOTAL
264 54%	173 36%	184 38%	487

- La contrainte "315" est mieux respectée ;
- 62% des élèves respectent au moins une contrainte (pour l'ensemble des protocoles).

Si nous classons uniquement les protocoles pour lesquels la réponse est erronée :

Tableau 13 : Respect des contraintes données dans l'énoncé pour les réponses incorrectes.

Catégorie	"315"	"2 relations"	ni l'un ni l'autre	TOTAL
Fréquence	130 37%	39 11%	184 52%	353 100%

- La contrainte 315 est mieux respectée ;
- Il n'y a plus que 48% des élèves (qui donnent une réponse incorrecte) qui respectent au moins une contrainte.

a) Selon la version proposée :

Tableau 14 : Respect des contraintes données dans l'énoncé, pour chaque version (ensemble des protocoles).

Catégorie / Version	"315"	"2 relations"	ni l'un ni l'autre
"Ficelle"	81 49%	67 40%	66 40%
"Poids"	75 49%	47% 30%	69 45%
"Relation"	108 65%	59 35%	49 29%

Nous constatons :

- que 65% des élèves qui ont passé la version "relationnelle" ont respecté la contrainte "315" ;
- que 40% des élèves qui ont passé la version "ficelle" ont respecté la contrainte "2 relations", contre seulement 30% de ceux qui ont passé la version "poids".

Tableau 15 : Respect des contraintes données dans l'énoncé, pour chaque version, pour les réponses incorrectes.

Catégorie / Version	"315"	"2 relations"	ni l'un ni l'autre	TOTAL
"Ficelle"	33 28%	19 16%	66 56%	118 100%
"Poids"	38 32%	10% 9%	69 59%	117 100%
"Relation"	59 50%	10 8%	49 42%	118 100%

- La moitié des élèves qui donnent une réponse incorrecte pour la version "relationnelle" respectent la contrainte "315" contre seulement 32% pour la version "poids" et 28% pour la version "ficelle".

b) Selon la classe :

Tableau 16 : Respect des contraintes données dans l'énoncé, pour chaque classe (ensemble des protocoles).

Catégorie / Classe	"315"	"2 relations"	ni l'un ni l'autre
6è	95 46%	72 35%	93 45%
5è	165 59%	101% 36%	94 34%

- Le seul progrès constaté de la classe de 6è à la classe de 5è concerne la prise en compte plus fréquente de la contrainte "315".

Tableau 17 : Respect des contraintes données dans l'énoncé, pour chaque classe (réponses incorrectes).

Catégorie / Classe	"315"	"2 relations"	ni l'un ni l'autre	TOTAL
6è	43 28%	18 12%	91 60%	152 100%
5è	87 43,5	21 10,5	22 46%	200 100%

- La prise en compte de la contrainte "315" est quatre fois plus fréquente que la prise en compte de la contrainte "2 relations" pour les élèves de 5è qui donnent une réponse incorrecte.

c) <u>Selon le couple de relations proposé</u> :

Quatre couples ont été testés :

1 C = 3A
C = 6B

2 C = 3A
A = 2B

3 A = 2B
C = 3A

4 A = 2B
C = 6B

Tableau 18 : Respect des contraintes données dans l'énoncé, pour chaque couple de relations (ensemble des protocoles).

Couple de relations \ Catégorie		"315"		"2 relations"		ni l'un ni l'autre	
1	C = 3A C = 6B	66	52%	35	28%	54	43%
2	C = 3A A = 2B	58	50%	42	36%	47	40%
3	A = 2B C = 3A	74	62%	47	39%	35	29%
4	A = 2B C = 6B	66	55%	49	40%	46	38%

- C'est pour la modalité 1 que la contrainte "2 relations" est la moins fréquemment respectée ;

- C'est pour la modalité 3 que la contrainte "315" est la plus fréquemment respectée ;

- La contrainte "2 relations" n'est pas significativement mieux respectée pour la modalité 4, modalité pour laquelle A et C sont définis dans l'énoncé en fonction de B.

Tableau 19 : Respect des contraintes données dans l'énoncé pour chaque couple de relations (réponses incorrectes).

Couple de relations \ Catégorie		"315"		"2 relations"		ni l'un ni l'autre		TOTAL	
1	C = 3A C = 6B	38	38%	7	7%	54	55%	89	100%
2	C = 3A A = 2B	28	32%	12%	14%	47	54%	87	100%
3	A = 2B C = 3A	38	45%	11	14%	35	41%	84	100%
4	A = 2B C = 6B	26	33%	9	11%	46	57%	81	100%

- Pour la modalité 3, 59% des élèves qui ont donné une réponse incorrecte respectent au moins une des contraintes.

2 - La "charge de travail" de l'élève :

Si l'on ne distingue plus, cette fois, la contrainte "315" des contraintes "rapports", le problème de partage inégal avec trois objets met en cause le respect simultané de trois contraintes "relationnelles". C'est ce que nous appellerons ici la "charge de travail" de l'élève.

Les protocoles ont été répartis en quatre catégories :

Catégorie 1 : Respect d'aucune contrainte.

Catégorie 2 : Respect d'une contrainte.

Catégorie 3 : Respect de deux contraintes.

Catégorie 4 : Respect de trois contraintes.

Tableau 20 : Répartition des protocoles selon le nombre de contraintes respectées.

Nombre de contraintes respectées	0	1	2	3	TOTAL
Effectif	152	119	80	135	486
Fréquence	31%	24,5%	16,5%	28%	100%

Nous remarquons que :

- près d'un élève sur trois ne respecte aucune contrainte ;

- il y a moins d'élèves qui respectent deux contraintes que d'élèves qui en respectent trois.

L'hypothèse de la "charge de travail" comporte donc la limitation suivante :

Il n'y a de difficulté à intégrer <u>simultanément</u> ces contraintes que lorsque la demarche de l'élève est séquentielle. Ce n'est plus le cas lorsque l'élève respecte les trois contraintes, ce respect n'étant plus, bien souvent, l'objet de la démarche engagée mais sa conséquence : l'élève a alors hiérarchisé les contraintes.

Remarquons, d'autre part, qu'il y a peu de variation de la classe de 6è à la classe de 5è.

Tableau 21 : Répartition des protocoles selon le nombre de contraintes respectées, en 6è et en 5è.

		6è	5è
Nombre de contraintes respectées	0	70 34%	82 29%
	1	46 22,5%	73 26%
	2	34 16,5%	46 16%
	3	55 27%	81 29%
	TOTAL	205 100%	281 100%

IV - EXISTENCE ET ROLE D'UNE CONSTRUCTION GRAPHIQUE :

1 - Existence d'une construction graphique :

a) Selon la version proposée :

Tableau 22 : Fréquence des constructions graphiques, selon la version proposée.

Version	Poids	Ficelle	Relationnelle
Fréquence	14%	35%	10%

La version "ficelle" est plus souvent accompagnée d'une construction graphique que les autres versions, ce qui est conforme à notre attente.

Mais 35% (pour la version "ficelle") est une fréquence assez faible.

Les constructions graphiques qui accompagnent les versions "poids" et "relationnelle" sont toutes linéaires (à deux exceptions près).

b) Selon la classe :

Tableau 23 : Fréquence des constructions graphiques pour chaque classe et chaque version.

Version \ Classe	6è	5è
Poids	25%	4%
Ficelle	48%	25%
Relationnelle	17%	5%
Ensemble	31%	11%

Nous notons que 31% des élèves de 6è contre seulement 11% des élèves de 5è construisent une représentation graphique.

2 - Lien entre construction graphique et réussite :

a) Selon la version proposée.

Tableaux 24 et 25 : Effectifs correspondant à la présence et à l'absence d'une construction graphique pour les élèves qui ont réussi à résoudre le problème, pour ceux qui n'ont pas réussi pour la version "poids" (tableau 24) et pour la version "ficelle" (tableau 25).

POIDS (tableau 24)

	Réussite	Echec	TOTAL
Construction graphique	8	13	21
Pas de construction graphique	29	104	133
TOTAL	37	117	154

Il y a une <u>indépendance</u> entre la réussite du problème et l'existence d'une représentation graphique pour la version "poids" ($x^2 = 2,64$).

FICELLE (tableau 25)

	Réussite	Echec	TOTAL
Construction graphique	29	29	58
Pas de construction graphique	19	88	103
TOTAL	48	117	164

Il y a une dépendance entre la réussite du problème et l'existence d'une représentation graphique pour la version "ficelle" (x^2 = 18,95 ; significatif à .01)

Nous avons, d'autre part, employé un test statistique mis au point par Régis GRAS.

Ce test nous fournit un critère pour l'acceptation et le rejet de l'hypothèse d'une relation d'implication entre les deux caractéristiques suivantes :

- la réussite et la construction d'une représentation graphique.

Nous constatons alors :

- que l'hypothèse d'implication est acceptée pour la version "ficelle" ;

- qu'elle est par contre rejetée pour la version "poids".

b) Selon la classe :

Tableaux 26 et 27 : Effectifs correspondant à la présence et à l'absence d'une construction pour les élèves qui ont réussi à résoudre le problème, pour ceux qui n'ont pas réussi en 6è (tableau 26) et en 5è (tableau 27).

CLASSE DE 6ème (tableau 26)

	Réussite	Echec	TOTAL
Construction graphique	29	35	64
Pas de construction graphique	25	117	143
TOTAL	54	151	205

Il y a une dépendance entre la réussite du problème et l'existence d'une construction graphique ($x2$ = 17,42 ; significatif à .01).

CLASSE DE 5ème (tableau 27)

	Réussite	Echec	TOTAL
Construction graphique	17	15	32
Pas de construction graphique	63	185	248
TOTAL	80	200	280

Il y a une dépendance entre la réussite du problème et l'existence d'une représentation graphique ($x2$ = 10,67 ; significatif à .01)

En appliquant le test d'implication, nous constatons que :

- l'hypothèse d'implication est acceptée pour la classe de 6è et la classe de 5è.
- la relation entre réussite et représentation graphique est moins forte pour la classe de 5è que pour la classe de 6è.

BRUYERE

BANQUE D'EXERCICES DE MATHEMATIQUES

BOISNARD Danièle

C.A.T.E.N.

I - PROBLEMATIQUE

Pour des raisons d'efficacité, l'enseignement devrait être plus individualisé mais, pour des raisons de moyens, il doit bien sûr rester encore largement collectif.

Si l'on observe une classe en fonctionnement, on s'aperçoit généralement que le professeur donne un minimum d'indications permettant ensuite aux élèves d'exercer leur activité sur ce que l'on peut appeler des exercices.

A une époque où l'on a accès à des banques de données de toutes sortes, le professeur qui prépare son activité de classe n'a d'autre ressource que de se plonger dans des manuels et documents divers pour y chercher presque "au hasard" les exercices dont il a besoin. Il est même obligé de faire ces exercices pour repérer les types de difficulté qu'ils contiennent car, même si, dans certains manuels, les exercices sont balisés par un code, il n'existe pas actuellement de systeme cohérent de repérage des difficultés sous-jacentes.

De plus, les exercices sont la plupart du temps choisis pour l'ensemble de la classe, car celle-ci forme un groupe qui est censé progresser à une allure unique (ou presque...) Bien entendu, les individus qui la composent sont très divers et leur vitesse d'exécution a une échelle des valeurs bien plus étendue encore que l'échelle des salaires!

Résultat: ennui de ceux qui comprennent et travaillent vite, abandon de ceux qui ont un rythme lent et, en définitive, inefficacité de l'activité proposée.

Le problème n'est pas simple à résoudre, nous y pensons depuis déjà longtemps parmi beaucoup d'autres... Le travail de groupe, le travail par fiches améliorent déjà le fonctionnement de certaines activités mais il semble que l'une des principales difficultés restantes soit de prescrire à chaque élève l'exercice qui convient pour le stade qu'il a atteint.

Le temps que l'enseignant passe à analyser de multiples documents pour extraire l'exercice qui conviendra au niveau MOYEN de sa classe, le polycopier, ce temps multiplié par le nombre d'enseignants qui font partout, chaque année le même travail, pourrait être beaucoup mieux consacré à des tâches d'aide réelle aux élèves lorsque ceux-ci ont rencontré une difficulté.

Des mots-clés associés à un exercice devraient permettre de mieux décrire celui-ci sans figer, dans un premier temps, un ensemble trop strict de descripteurs. Par des propositions successives de différentes équipes, on pourrait peut-être avancer dans la conception d'un système cohérent et rationnel de documentation permettant à chacun d'économiser un temps précieux et de faire des prescriptions plus individualisées.

Par ailleurs, lorsqu'on examine les différents exercices proposés dans les manuels, on s'aperçoit que la palette des activités auxquelles ils conduisent est diversement étalée. Certains manuels n'offrent que des exercices très semblables, variant peu l'activité de l'élève, ce qui fait que celui-ci ne sait pas mettre en oeuvre ses connaissances hors du contexte habituel. Cette analyse conduit à penser que pour mieux atteindre les objectifs de l'enseignement des mathématiques et rendre la connaissance plus opératoire chez nos élèves, nous avons intérêt à élargir le plus possible la palette des activités.

Pour répondre à la problématique qui vient d'être explicitée, l'idée nous est venue de construire, à titre de proposition expérimentale, une maquette de banque d'exercices dont le descriptif est le suivant:

II - DESCRIPTIF

La banque fonctionne selon trois modalités :
- banque documentaire EXOMA
- banque pour l'évaluation autonome EVAMA
- banque pour le travail autonome OTOMA

2-1 BANQUE DOCUMENTAIRE prévue pour un accès télématique EXOMA

Ensemble d'énoncés d'exercices construits pour satisfaire chacun des aspects de la typologie d'activités de l'élève (en liaison avec les objectifs pédagogiques) pour chacun des niveaux d'acquisition.
A chaque exercice sont associés des descripteurs qui spécifient :
- la notion sur laquelle il porte
- le niveau d'acquisition auquel il se situe
- le type d'activité qu'il induit
- la classe d'âge du public auquel il s'adresse de manière privilégiée.

Consultation par mots-clés.

2-2 PRODUIT DESTINE A L'EVALUATION AUTONOME EVAMA

Test court permettant de repérer à titre indicatif le niveau de l'utilisateur par rapport aux classes d'une taxonomie d'objectifs cognitifs.
Logiciel permettant un cheminement linéaire avec prise en compte des résultats partiels et bilan final.

2-3 PRODUIT DESTINE AU TRAVAIL AUTONOME OTOMA

Programme d'activités orienté vers l'apprentissage par la résolution d'exercices choisis en fonction des compétences de l'élève.

III- FONCTIONS

3-1 La banque documentaire EXOMA a quatre types de fonctions :

.Elle permet aux professeurs de choisir très rapidement des énoncés d'exercices en fonction

* | du public auquel ils s'adressent
| du niveau de ce public sur une notion donnée
| du type d'activité à développer à un moment donné

.Elle permet aux professeurs corrigeant des devoirs de prescrire individuellement à chaque élève les exercices les mieux adaptés aux besoins de celui-ci.

.Elle permet à tout élève s'étant évalué avec EVAMA de trouver les exercices correspondant à la prescription qui lui aura été faite.

.Elle permet à des professeurs ou maîtres en formation initiale ou continue, de se confronter à une manière inhabituelle de repérer les exercices et de s'interroger sur les critères optimaux de classement de ceux-ci .

3 -2 Les tests EVAMA

.Permettent à un utilisateur de repérer individuellement et hors de la présence d'un enseignant, son niveau sur une notion donnée ainsi que certains types d'erreurs parmi ceux qu'il commet le plus couramment.

Un bilan sous forme de constats de réussites, prescription de travail et recommandations sur ses comportements de réponses lui est adressé.

.Permettent à des professeurs ou maîtres en formation initiale ou continue, de se confronter à une manière inhabituelle d'évaluer et permettent également de s'interroger sur les apports et lacunes de ce type d'évaluation.

3 -3 Les modules de travail autonome OTOMA

.Devront permettre à un utilisateur de se voir adresser, à l'issue d'un test EVAMA un programme d'activités adapté

à leur niveau
à leur âge
à la rectification des types d'erreurs détectées.

.Devront permettre à des professeurs ou maîtres en formation initiale ou continue de se confronter à un système inhabituel d'aide à l'élève en situation de résolution de problèmes.

ETAT D'AVANCEMENT au 28-01-85

EXOMA

Un ensemble de 212 exercices sur la proportionnalité constitue un premier module de cette banque.
Les exercices sont sélectionnés par mots-clés.
Les informations sur la manière de consulter cette banque sont structurées sur le mode arborescent et accessibles directement à partir de la disquette.
La maquette est réalisée sur LX 529 et fonctionne.

EVAMA

Un test de dix exercices sur la proportionnalité conçu pour la classe d'âge 1 fonctionne sur LX 529.
Deux autres tests de dix exercices chacun (classes d'âge 2 et 3) sont élaborés et en cours d'expérimentation-papier afin d'écrire les programmes de traitement appropriés aux procédures de résolution couramment rencontrées.

OTOMA

Un module de travail autonome doit être adapté à l'élève auquel il s'adresse,il doit donc être sélectionné à partir des résultats du test et en fonction de ce que le test a permis de repérer sur les connaissances de l'élève ainsi que du type d'erreurs détectées.
Une arborescence est en cours d'élaboration,nous ignorons actuellement si les programmes de gestion d'arborescences dont nous disposons pourront convenir.

Figurent en annexe les spécifications des mots-clés (niveaux,types d'activité, classes d'âge,notions) ainsi que des exemples d'exercices et d'analyses associées dans le test.

IV - PERSPECTIVES

Fin Juin 85 auront été conçus trois produits et réalisées deux maquettes d'outils d'aide à l'enseignement.
Si après expérimentation et évaluation,ces produits se révèlent pertinents,ils constitueront des éléments de base d'une architecture qui devrait couvrir d'autres notions en mathématiques mais aussi d'autres disciplines et s'appuyer sur d'autres supports que la seule micro-informatique.

En effet,comment faire parvenir en chaque lieu d'apprentissage l'ensemble des possibilités d'utilisation,lesquelles ne seraient d'ailleurs utilisées qu'à un très faible pourcentage et difficilement enrichies des derniers travaux ? Comment faire participer au coût d'élaboration et de diffusion ?

Pour nous,l'orientation à prendre serait celle de la télématique avec téléchargement et travail en local sur micro-ordinateur afin de réduire considérablement les coûts de connexion.

Ceci veut dire concrètement qu'il faudrait transférer sur les micro-ordinateurs actuellement distribués dans les collèges (c'est-à-dire des TO7-70) les programmes ARGUS et ANEX .[Ces logiciels ont été élaborés respectivement par Andre LE MEUR (C.A.T.E.N. et GRECO "Didactique") et André SIMON (Lycée Bréquigny Rennes)] qui gèrent les données de cette banque et qu'il faudrait saisir les données actuellement opérationnelles pour les remettre sur serveur mini 6.

Sans ouverture future à d'autres disciplines, sans possibilités de perfectionnement, sans recherche appliquée et théorique sur le fonctionnement cognitif des élèves, ce travail n'aurait ni signification ni fondement et ne serait qu'un exercice de style sans lendemain pour l'avancée du système éducatif.

V - *ANNEXES*

Pour classer les exercices, nous avons utilisé des critères de quatre types:

- *CLASSES D'AGE*
- *NIVEAUX*
- *TYPES D'ACTIVITE*
- *NOTIONS*

Trois classes d'âge ont donné lieu à des habillages d'exercices distincts:

1 - *Douze ans et moins*
2 - *Entre douze et seize ans*
3 - *Plus de seize ans*

En référence à la taxonomie de R.GRAS, nous avons spécifié cinq indicateurs de niveaux opératoires relatifs à la proportionnalité par les définitions suivantes:

A - *Une situation de proportionnalité étant donnée, opérer. (l'opérateur étant donné)*

B - *Une situation de proportionnalité étant donnée, trouver un opérateur et le faire fonctionner. (Usage direct seulement)*

C - *Une situation de proportionnalité étant donnée, organiser les données, trouver un opérateur et le faire fonctionner de façon directe et réciproque.*

D - *Faire opérer la proportionnalité dans une situation ou se mêlent d'autres concepts (aire, volume, poids...) ou composer des relations de proportionnalité.*

E - *Accepter, réfuter ou critiquer l'adéquation du modèle de la proportionnalité à la situation proposée.*

En référence à une typologie d'activités construite par le même auteur, nous avons retenu huit $\boxed{\text{types d'activité}}$ et tenté de trouver des exercices leur correspondant pour chacun des niveaux précédemment définis :

HEURISTIQUE
chercher en tâtonnant
TRADUCTIF
passer d'un langage dans un autre
CLASSIFICATOIRE
classer,organiser,ordonner
CALCULATOIRE
appliquer des algorithmes
LOGIQUE
raisonner,prouver,enchaîner des informations
REINVESTISSEMENT
opérer dans un contexte différent de celui de l'apprentissage
CRITIQUE
maîtriser la vraisemblance
PREDICTIF
estimer,induire

Les $\boxed{\text{notions}}$ sont celles qui,traditionnellement,figurent dans les programmes scolaires.Pour l'instant,les exercices de la maquette portent tous sur la notion de proportionnalité.Le mot-clé PROPORTION est donc inutile.Par contre des spécifications comme ECHELLE ou POURCENTAGE sont mentionnées.
Un exercice peut porter sur plusieurs notions indépendantes comme par exemple POURCENTAGE et EQUATION .Il nous a donc paru utile de les mentionner chaque fois que possible.

Tous ces éléments constituent donc les mots-clés servant à l'appel des exercices.Figurent aussi parmi les mots-clés,des descripteurs comme AIRE VOLUME,DENSITE,VITESSE,ECHELLE,POURCENTAGE,PUISSANCE,TAUX,etc...qui permettent de sélectionner les exercices en fonction de la présence ou de l'absence souhaitée des notions sous-jacentes.

EXEMPLES D'EXERCICES DE MEME NIVEAU ILLUSTRANT DES ACTIVITES DIFFERENTES

Niveau A Heuristique

titre: FARCEUR
énoncé:

Un petit farceur a déplacé certains nombres de ce tableau.

12	6	15	20	10	>>>>>
					x 2,5
50	4	8	30	20	<<<<<

Remets-les à leur place.
clef:PROPORTION\1\A\HEURISTIQUE

Niveau A Calculatoire

titre: ORAGE
énoncé:

Le son parcourt dans l'air environ 340 m à la seconde.
Quelle distance nous sépare d'un orage sachant que NATHALIE a noté 4,5 secondes entre l'éclair et le bruit du tonnerre.
clef:PROPORTION\1\A\CALCULATOIRE\VITESSE

Niveau A Réinvestissement

titre: ALPINE
énoncé:

Un fabriquant de jouets veut réaliser un modèle réduit de l'Alpine Renault A 310 à l'échelle 1/20 .
La longueur hors-tout du véhicule est 4.18 m ,sa plus grande largeur est 1.64 m et sa hauteur 1.15 m .

Quelles sont les dimensions du modèle réduit ?
clef:PROPORTION\1\A\REINVESTISSEMENT\ECHELLE

Niveau A Critique

titre: CREPES SUCREES
énoncé:
Valérie,Chantal et Sandie, 3 amies friandes de crêpes , discutent de leurs recettes de pâte.

- Valérie :"moi,je mets 100 g de sucre"
- Chantal :"et moi,200"
- Sandie :"et moi,250 mais,pour 600g de farine"

Peut-on savoir qui des trois amies fait les crêpes les plus sucrées et pourquoi ?
clef:PROPORTION\1\A\CRITIQUE

Niveau A Prédictif

titre: MILLION
énoncé:

Crois-tu avoir déjà vécu un million de jours ?
et un million d'heures ?
et un million de secondes ?

clef:PROPORTION\1\A\PREDICTIF

EXEMPLES D'EXERCICES ILLUSTRANT UN MEME TYPE D'ACTIVITE A DES NIVEAUX DIFFERENTS

Critique A

titre: LANCERS DE DES
énoncé:

Des enfants s'amusent avec un dé.
Pascal jette le dé 10 fois de suite et obtient 4 fois la face six.
Il affirme alors à ses camarades :
"Si je le lançais 20 fois de suite j'obtiendrais donc 8 fois le six !"

A-t-il raison ?

clef:PROPORTION\1\A\CRITIQUE

Critique B

titre: CHANDELEUR
énoncé: Pour la chandeleur, les élèves d'une classe décident de faire des crêpes. Ils trouvent la recette suivante dans un livre de cuisine:
"Pour 4 personnes, préparez une pâte avec 6 oeufs, 10 cuillerées à soupe de farine, 8 verres de lait, 20g de beurre, 16g de sucre, 6 cuillerées à café de sucre vanillé."
Comme ils sont nombreux, ils décident d'augmenter les quantités.
Ils préparent la pâte avec: 15 oeufs, 25 cuillerées à soupe de farine, 20 verr de lait, 50g de beurre, 35g de sucre, 15 cuillerées à café de sucre vanillé.

JACQUES dit qu'ils ont respecté les proportions.
CORINNE n'est pas d'accord.
Qui a raison et pourquoi ?

clef:PROPORTION\1\B\CRITIQUE

Critique C

titre: VACANCES ANGLAISES
énoncé:

Un français est parti en vacances en ANGLETERRE avec sa voiture
Il traverse une localité anglaise à la vitesse de 60 km/h.
La limitation de vitesse est de 30 miles/h.
L'automobiliste est-il en infraction ?

(le mile vaut environ 1609 m)

clef:PROPORTION\3\C\CRITIQUE\VITESSE

Critique D

titre: TARTES
énoncé:

Dans une boulangerie,on trouve deux sortes de tartes aux pommes
- des petites,parfaitement circulaires et ayant 5 cm de rayon
- des grandes,également circulaires et ayant 10 cm de rayon.

JACQUES achète une grande tarte.
PAUL préfère,pour le même prix,acheter deux petites.

JACQUES affirme qu'il en a plus que PAUL pour le même prix.
PAUL,quant à lui,déclare,que cela revient au même.

Lequel a raison ?

clef:PROPORTION\1\D\CRITIQUE

Critique E

titre: CONTROVERSE 2
énoncé:

1,5	7	10	2,3	1,8	14,5
8,75	11,5	45	3,25	2,30	21,5

Annie,Marc et Michel sont d'accord:le tableau ci-dessus n'est pas un tableau de proportionnalité.

Annie dit: " Avec deux calculs,on peut le prouver "
Marc : " Mais non,tu dois en faire six !"
Michel : " A mon avis,il en faut au moins trois "

Qui a raison ?

clef:PROPORTION\1\E\CRITIQUE

EXEMPLE D'ANALYSE DE REPONSES FIGURANT DANS LE TEST :

Nous avons voulu essayer de déterminer, pour un élève donné, à quel niveau d'usage de la proportionnalité il réussit et éventuellement, quels types de modèles érronés il emploie.

Pour atteindre cet objectif, nous avons construit un test en dix exercices pour chacune des 3 classes d'âge.
Chacun des exercices a été choisi pour que sa réussite soit révélatrice de l'atteinte du niveau que cet exercice représente.
En outre, pour chacun d'eux, la majeure partie des réponses erronées est interprêtable et se catégorise en flux d'erreurs significatives

de l'utilisation de modèles implicites déjà répertoriés.

Dans le test, des exercices de même niveau relèvent de types d'activité **différents** (cela pour permettre à un élève handicapé par un type d'activité, de se révéler dans un autre).

Les exercices du test EVAMA 2 se situent comme suit :

Niveaux / Types d'activité	A	B	C	D	E
TRADUCTIF		■		■	
CLASSIFICATOIRE		■	■		
CALCULATOIRE	■		■		
LOGIQUE			■		
REINVESTISSEMENT				■	
CRITIQUE					■
PREDICTIF	■				

Seul le niveau E n'est testé qu'une fois.

7 types d'activité sont représentés.

Analyse de l'un des exercices du test :

énoncé

A et B sont deux récipients à base carrée et à parois verticales.

Voici leurs caractéristiques :

	côté du carré	hauteur
A	10 cm	22 cm
B	5 cm	35 cm

Le récipient A contient un liquide que l'on veut transvaser dans B.

Ce liquide atteint une hauteur de 7 cm dans A.

Quelle hauteur atteindra-t-il dans B ?

Sur cet exercice, proposé à 259 élèves de $4^{ème}$ ou de $3^{ème}$, nous avons obtenu 25 modalités de réponses dont 20 correspondent à des modèles reconnus que nous expliciterons ci-dessous en signalant leur fréquence approximative d'emploi.

Les modalités de réponses rencontrées le plus fréquemment semblent pouvoir se classer en fonction des critères suivants :

1 - reconnaissance (ou non) de la proportionnalité inverse qui régit la relation "hauteur - base" (volume constant).

2 - reconnaissance (ou non) de la "proportionnalité directe - puissance deux qui régit la relation "côté - aire de base".

3 - prise en compte (ou non) de données non pertinentes pour la résolution du problème : hauteur des récipients.

4 - référence implicite à des propriétés fausses comme :

- *la conservation de l'espace vide dans les récipients.*
- *la compensation entre dimensions.*

5 - usage d'algorithmes de calcul ou d'analogies fréquemment rencontrés en mathématiques mais n'ayant pas de rapport avec la situation - problème.

Pour faciliter la lecture de l'analyse des réponses, nous désignerons dans la suite par :

P_1 : la proportionnalité inverse.
P_2 : la prise en compte d'une aire.
P_3 : l'éviction de données non pertinentes.
P_4 : la référence à des propriétés fausses
P_5 : l'usage d'algorithmes ou d'analogies sans signification concrète.

A - Modalités de réponses expliquées :

I. Prenant en compte la proportionnalité inverse :

28 cm	*10%*	*C'est la bonne réponse.* *Deux procédures ont été explicitées.* *1 - "le carré de A est quatre fois le carré de B donc la hauteur de B sera quatre fois celle de A".* *2 - Calcul du volume d'eau dans A et division par l'aire de la base de B.* *Cette réponse correspond au tableau de proportionnalité suivant :* <table><tr><td>10 x 10</td><td>x</td></tr><tr><td>5 x 5</td><td>7</td></tr></table>

14 cm	28%	C'est la réponse la plus fréquente, elle correspond à la reconnaissance de la proportionnalité inverse (P_1) la non prise en compte de l'aire de base (non P_2) l'éviction de données non pertinentes (P_3) explication procédurale la plus courante : "la base est divisée par 2, la hauteur doit être multipliée par 2". Les élèves ayant fait cette réponse n'ont pas une connaissance suffisante de la notion de volume. Des observations, manipulations et expériences leur seraient sans doute très utiles pour fonder et consolider l'algorithme de calcul. Cette réponse correspond au tableau de proportionnalité suivant : 10 | x 5 | 7
4,4 cm 4 4 cm	1%	Cette réponse n'a été rencontrée que deux fois, on peut donc négliger ce courant; cependant on doit noter qu'elle correspond à : la reconnaissance de la proportionnalité inverse (P_1) la non prise en compte de l'aire de base (P_2) la prise en compte de données non pertinentes (non P_3) ce qui est conforme au tableau de proportionnalité suivan 22 | x 35 | 7 On peut penser que la réponse 44 corespond plus probablement à une correction de vraisemblance sur 4,4 qu'à une simple erreur de virgule. (la dimension attendue devant être supérieure à 7).
8,8	1%	Cette réponse est peu fréquente mais correspond à une situation qu'on pouvait s'attendre logiquement à rencontrer : la reconnaissance de la proportionnalité inverse (P_1) la prise en compte de l'aire de base (P_2) la prise en compte de données non pertinentes (P_3)

ce qui est conforme au tableau de proportionnalité suivant :

10 x 22	x
5 x 35	7

Résumons ceci dans un tableau :

	P_3	non P_3
P_2	28 (10%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 10 \times 10 & x \\ \hline 5 \times 5 & 7 \\ \hline\end{array}$	8,8 (1%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 10 \times 22 & x \\ \hline 5 \times 35 & 7 \\ \hline\end{array}$
non P_2	14 (28%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 10 & x \\ \hline 5 & 7 \\ \hline\end{array}$	4,4 (1%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 22 & x \\ \hline 35 & 7 \\ \hline\end{array}$

Il est intéressant de noter que les flux correspondant aux 2 dernières réponses sont très négligeables par rapport à ceux des 2 premières (2% contre 38%). La reconnaissance de la proportionnalité inverse semble donc impliquer pratiquement l'éviction de données non pertinentes.

II - <u>Modalités de réponses excluant la proportionnalité inverse</u> :

Lorsque la proportionnalité inverse n'est pas reconnue, les réponses sont beaucoup plus éparses ; cependant les flux correspondant à l'éviction des données non pertinentes demeurent les plus forts comme le montre le tableau ci-dessous :

	P_3	non P_3
P_2	1,75 (5%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 10 \times 10 & 7 \\ \hline 5 \times 5 & x \\ \hline\end{array}$	2,78 (1%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 10 \times 10 \times 10 & 7 \\ \hline 5 \times 5 \times 5 & x \\ \hline\end{array}$ 8,75 (1%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 10 \times 10 & 35 \\ \hline 5 \times 5 & x \\ \hline\end{array}$ 5,5 (2%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 10 \times 22 & 7 \\ \hline 5 \times 35 & x \\ \hline\end{array}$
non P_2	3,5 (3%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 10 & 7 \\ \hline 5 & x \\ \hline\end{array}$	11,1 (2%) $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 22 & 7 \\ \hline 35 & x \\ \hline\end{array}$

III - Modalités de réponses montrant l'utilisation de propriétés fausses :

1- Conservation de $\boxed{\text{l'espace vide}}$:

20 cm . *espace vide repéré uniquement par la hauteur :*

$22 - 7 = 15$
$35 - 15 = 20$ | *la hauteur sera donc de 20 cm dans B.*

25 cm . *espace vide repéré par une aire :*

$22 \times 10 = 220$ $\quad$ $220 - 70 = 150$ | *la hauteur sera donc*
$35 \times 5 = 175$ $\quad$ $175 - 150 = 25$ | *de 25 cm dans B.*

liquide $10 \times 7 = 70$.

2 - Compensation :

10,5 cm . *"le carré de A est 1/2 fois plus grand, la hauteur de B sera 1/2 fois plus grande".*
donc $7 + \frac{1}{2} \times 7 = 7 + 3,5 = 10,5$.

19 cm . $7 \times 2 = 14$ *et* $14 + 5 = 19$
"les 5 cm de moins du côté vont dans la hauteur".

Ces réponses, peu fréquentes, montrent malgré tout la persistance en 4ème ou 3ème de collège, de modèles que l'on croirait depuis longtemps évincés par l'expérience chez des enfants de cet âge. Il n'en est rien. Aussi me paraît-il important de fournir encore à ce niveau, les situations susceptibles d'ébranler ces modèles ou, au moins, de les dépister.

IV - Modalités de réponses utilisant des algorithmes ou des analogies sans signification concrète :

2,2 cm $\quad 5 \xrightarrow{\times 7} 35$ $\quad$ | *hauteur d'eau considérée comme opérateur multiplicatif.*

$10 \xrightarrow{\times 2,2} 22$

11,8 cm $\quad$ A : $\frac{22}{10}$ $\qquad$ B : $\frac{35}{5}$

$$\frac{35}{5} - \frac{22}{10} = \frac{70}{10} - \frac{22}{10} = \frac{48}{10} = 4,8$$

différence 4,8 donc $7 + 4;8 = 11,8$

Ces procédures montrent que, pour quelques enfants au moins, le jeu abstrait sur les nombres, en relation avec des situations didactiques classiques, prend le pas sur la signification concrète.

Bien sûr, on trouve encore d'autres modalités de réponses correspondant à des modèles.

plus simplistes	13 cm ⟶ 35 - 22	ou 5 cm ⟶ 35 : 7 = 5
ou mixtes	21 cm ⟶ 7 x 2 = 14	et 35 - 14 = 21
ou inexpliqués	33 cm ⟶ 35 - 7 = 28	et 28 + 5 = 33

Cependant, il est intéressant d'estimer le poids des grandes causes d'échec :

1- non reconnaissance de la proportionnalité inverse : 60%
2- non éviction de données non pertinentes : 54%
3- non prise en compte de la notion d'aire : 80%
4- référence à des propriétés fausses : 5%
5- usage d'algorithmes ou d'analogies sans signification concrète : 8%

Ces différents facteurs étant mêlés, il n'est pas étonnant que le taux de réussite à cet exercice soit faible (10%).

Le test a pour but de repérer les réussites aux différents niveaux et dans les divers types d'activités. Il vise également la détection chez un utilisateur, à l'aide d'analyses comparables à la précédente, de l'usage de modèles erronés qui le font échouer, l'objectif didactique étant alors de tenter d'y remédier.

Il est bien évident que cet outil n'est pas un filtre fin, il est seulement conçu pour effectuer une première catégorisation, aidant ainsi le maître ou l'élève isolé. Il ne saurait en aucun cas remplacer l'enseignant pour une analyse plus fine et donc plus adaptée au niveau thérapeutique.

Le 25 Mars 1985

BRUYERE fleur discrète de l'hiver
qui égaie la lande bretonne
et fertilise la terre qui l'a portée...

LOGICIELS DE TRANSFERTS TELEMATIQUES ET D'AIDE A LA LECTURE DE TEXTES

Jean-Pierre CAROFF (CATEN)

Alain NICOLAS (LEP Rennes) [1]

§ 1 - PROBLEMATIQUE.

1. Donner aux élèves et aux enseignants des outils leur permettant, non seulement de consommer, mais aussi de modifier ou créer des pages-écrans aux normes vidéotex.
2. Intégrer les contraintes systémiques et, en particulier, minimiser la durée des communications téléphoniques entre établissements et serveurs.
3. Compléter les produits commerciaux pour les adapter aux besoins et contraintes didactiques.

§ 2 - PRODUITS OPERATIONNELS.

ENRED-VIA. Logiciel de création, affichage et modification de pages-écran aux normes VIDEOTEX. Sauvegarde sur cassette ou sur disquette. Fonctionne sur TO7 et TO7-70.

Les options LISTCO-VIA, SUPPCO-VIA, INSERTCO-VIA permettent respectivement de lister les codes videotex d'une page, de supprimer un code donné, d'insérer un code à un endroit donné.

---

(1) Alain NICOLAS, professeur au Lycée Professionnel Jean-Jaurès de Rennes a bénéficié de 2 heures complémentaires au titre du GRECO.

La version de décembre 84 d'ENRED-VIA est accompagnée de nouveaux caches qui permettent d'introduire toutes les spécifications de la norme videotex y compris les codes d'incrustation, lignage et clignotement inacessibles sur le TO7 ou le TO7-70. Tous les caractères spéciaux sont disponibles.

ARBOVI-12. Logiciel de gestion de pages-écran permettant de simuler sur TO7 ou TO7-70 muni d'un lecteur de disquettes le fonctionnement d'un extrait de base de données au format videotex.

ARBOVI permet également de gérer des créations originales réalisées sur ENRED-VIA (ex. Conte interactif en videotex réalisé par des stagiaires de l'Université d'été de Lannion) et d'introduire jusqu'à trois "guides spécialisés" par page-écran, appelant des sous-arborescences avec retour automatique au point d'appel (Mini-Savant, "Savant" étant une réalisation de l'E.N.S.T. de Paris).

ENRED-VIA permet donc un travail pédagogique de conception et de production de pages-écrans de manière décentralisée (sur tout TO7 ou TO7-70) tandis qu'ARBOVI permet un travail pédagogique sur la structuration de ces pages et leur gestion effective.

Ce logiciel a été complété par l'enregistrement d'une "trace" de la consultation effectuée par l'utilisateur. Cette "trace" est "lisible" par RECONSTITUTION AUTOMATIQUE de la consultation.

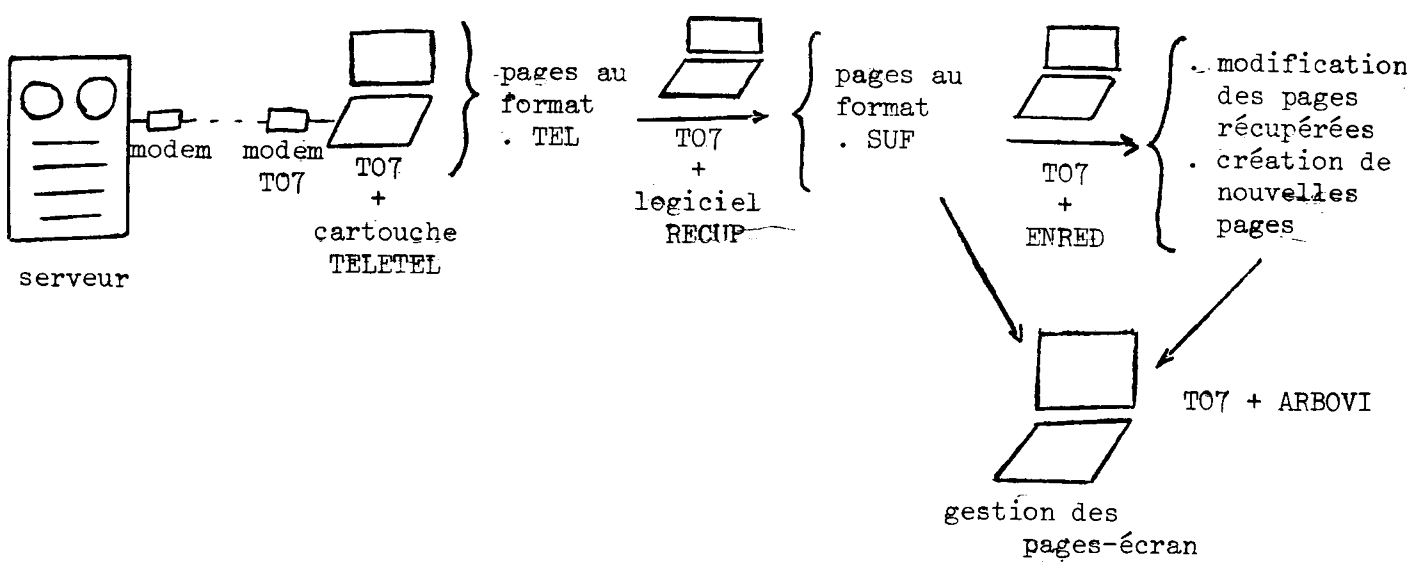
Les développements en cours visent à rendre ENRED et ARBOVI complémentaires et non concurrents des cartouches commercialisées par THOMSON.

Nouvelle routine d'affichage.

Une nouvelle routine est en cours d'élaboration pour faire fonctionner le TO7 sous BASIC aux prescriptions videotex des terminaux. (La conformité aux prescriptions videotex des pages-écrans est déjà assurée par la version décembre 84). Elle prendra en compte le concept de "sous-article" et permettra de développer dans ENRED-VIA des possibilités de modification de pages analogues à celles du logiciel VGX tournant sur le micro-mega (serveur).

RECUP. Ce logiciel permet actuellement de transformer un fichier de page-écran créé par la cartouche TELETEL en un fichier utilisable par ENRED et ARBOVI.

On peut donc d'ores et déjà récupérer et utiliser en mode local une partie de base de données par la démarche suivante :



C'est ainsi que les pages crées par le CATEN sur Micro-mega au lycée de la Fontaine des Eaux de Dinan ont été récupérées à Brest et y tournent en mode local sur TO7.

CREMOVI. C'est la fusion des anciens logiciels ENRED-VIA, RECUP, LISTCO-VIA, INSERTCO- VIA, SUPPCO-VIA et l'adjonction de nouvelles fonctionnalités. (Gestion de la disquette, utilisation de l'imprimante à impact, passage disquette-cassette, interventions sur les codes).

Deux niveaux d'intervention sur les pages VIDEOTEX sont nettement séparés :

- un niveau fortement interactif dans lequel l'interfaçage utilisateur-codes videotex est entièrement assuré par le logiciel. Le changement de type et de nom des fichiers enregistrés par la cartouche TELETEL de THOMSON, en vue de modification ou gestion par ARBOVI, est fait à ce niveau ;
- un niveau plus technique permettant une connaissance et une intervention sur n'importe quels codes ou séquences de codes videotex d'une page-écran.

DEVELOPPEMENTS PLUS SPECIFIQUEMENT LIES AU GRECO.

Une maquette a été réalisée dans l'esprit "mini-savant" (cf. ARBOVI-12). Elle montre les possibilités d'ARBOVI pour une approche d'un TEXTE DE PROBLEME à des NIVEAUX DE LECTURE différents par appel de "guides" spécifiques (cf. annexe).

Les modalités d'intégration de ce type d'aide dans un logiciel quelconque sont actuellement étudiées. (Logiciel "d'aide à la résolution des problèmes de type partage inégal" développé par le groupe IREM-UER Maths-CATEN du GRECO-Rennes).

ANNEXE

LECTURE DE TEXTES

à des niveaux différents

par appel de commentaires spécifiques.

Taper SUITE

On verse de l'eau dans un [redacted] à l'aide d'un verre. On note chaque fois la [redacted] obtenue.

Nombre de verres	3	6
Hauteur d'eau en cm.	7	9

Peut-on dire du récipient qu'il:

a des [redacted] verticales? 1

est plus large en haut qu'en bas? 2

est plus large en bas qu'en haut? 3

109 95 163136 609 67

Tape un mot en jaune
ou ton choix

Récipient:

un verre
une bouteille
un vase
un bocal
une éprouvette
...

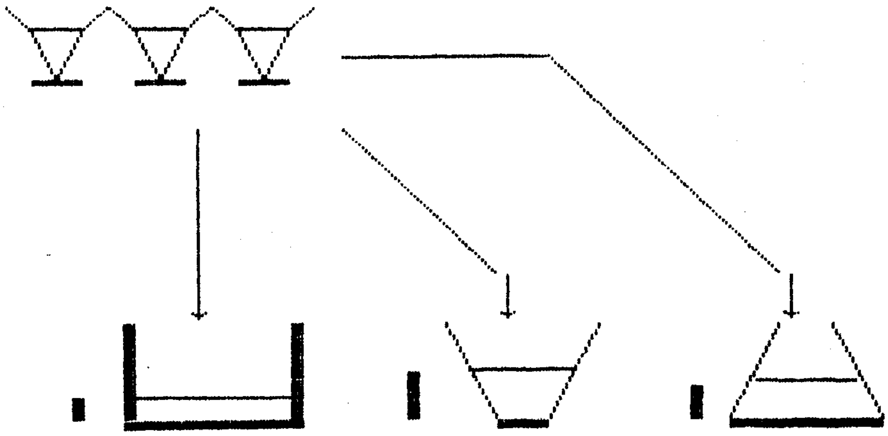
sont des exemples de récipients.

Il y a diverses [redacted] de récipients.

819 69

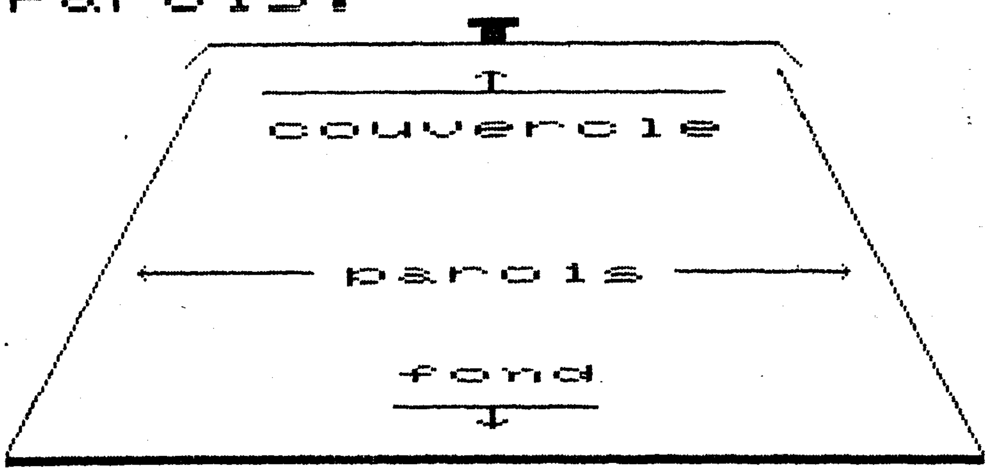
Tape le mot en jaune
ou **

Hauteur d'eau



Tape **

Parois:



Tape **

Formes:

ce récipient a des
[redacted] verticales.

ce récipient est plus
large en haut qu'en bas.

ce récipient est plus
large en bas qu'en haut.

295 67

Tape le mot en jaune
ou **

GRECO DIDACTIQUE

SOUS-THEME : INFORMATIQUE ET DIDACTIQUE

IREM-PARIS SUD / D.BUTLEN -C.LETHIELLEUX

I CADRE DE LA RECHERCHE

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une recherche effectuée par l'équipe élémentaire / informatique de l'IREM de Paris-sud. Cette équipe essaie de construire et d'expérimenter plusieurs séquences utilisant des logiciels et visant à l'apprentissage des nombres et des opérations à l'école élémentaire.

En 83-84, des logiciels sur la numération ont été réalisés par A. de Boissieu et J.Mac Aleese ainsi qu' une recherche sur "l'apport de l'outil ordinateur à l'introduction des écritures multiplicatives " (thèse de 3ème cycle en préparation- D.Butlen)

Nous nous sommes inspirés, pour construire nos didacticiels, de situations d'apprentissage, construites et expérimentées par différents IREM. Ces situations posent des difficultés de mise en oeuvre dans une classe, en particulier de nombreuses difficultés d'ordre matériel.

Nous avons donc essayé d'améliorer ces activités en tenant compte des spécificités de l'outil-ordinateur:

- l'ordinateur permet aisément de lier les cadres graphiques et numériques.

-l'ordinateur-outil intervient dans la constitution d'un cadre matériel, eventuellement ludique; il offre à l'élève la possibilité d'avoir une action contrôlée, d'anticiper, de construire et de mettre en oeuvre des stratégies de résolution basées sur cette action. L'élève peut demander à la machine des informations supplémentaires nécessaires à la production d'une réponse à un problème.

-l'ordinateur fournit une aide au calcul et à la représentation graphique.

-l'ordinateur permet un travail individualisé; il peut permettre de revoir des éléments de la stratégie de résolution adoptée par un élève.Il peut apporter des éléments graphiques et/ou numérique de validation?

-l'ordinateur permet de mieux maîtriser la variable didactique temps.

-l'ordinateur permet de proposer plusieurs problèmes isomorphes.

-par le recueil de données, il est un moyen de mieux connaitre les processus d'apprentissage; en particulier, il peut permettre au didacticien de connaître plus aisément les informations et les données jugées pertinentes par l'élève pour résoudre un problème.

Précisons enfin notre position quant à l'utilisation judicieuse de didacticiels. Nous pensons qu'il est nécessaire que ces derniers soient utilisés comme des outils supplémentaires, se rajoutant à la panoplie du maître. Cela suppose notamment que s'établissent des interactions entre les phases de travail individuel (ou par petits groupes) sur les logiciels et les phases de travail collectif (où sont mis en commun et discutés les méthodes, les pratiques et les résultats des passations individuelles) avec ou sans ordinateur. Cela suppose également que puisse s'instaurer un "dialogue argumenté" entre l'élève et l'ordinateur.

II APPORTS DE L'OUTIL INFORMATIQUE DANS LA CONSTRUCTION D'UNE TECHNIQUE OPERATOIRE DE LA MULTIPLICATION.

description de la situation "classique"

Les élèves savent associer à une collection organisée en grille rectangulaire l'écriture de son cardinal sous deux formes: une écriture multiplicative et une écriture additive du type a+a+....+a.

Afin de pouvoir donner la forme canonique de ce nombre, les élèves découpent la grille en rectangle plus petits dont les cardinaux sont fournis ou sont connus puis font la somme de ces résultats intermédiaires.

Cette technique est optimisée de deux points de vue:

-nombre de découpages restreint (4 par exemple)

-calcul des produits intermédiaires plus aisé (emploi du facteur 10)

Comme nous l'avons déjà signalé, ce type d'activité soulève de nombreuses difficultés d'ordre matériel et de gestion ,qui peuvent en compromettre la reproductibilité.

Ainsi les difficultés manipulatoires liées au "découpage" s'avèrent constituer parfois des obstacles quasi insurmontables pour certains élèves "peu habiles".

De même la gestion des éléments du contrat didactique portant notamment sur le principe d'optimisation peut être délicate.

présentation de la situation

logiciel n°1

Il permet à l'élève de se familiariser avec l'action de découpage de la grille en rectangles plus petits.

3 grilles de croix sont données successivement.

L'élève propose un rectangle à découper en choisissant ses quatre sommets à l'aide d'un curseur .

Le logiciel contrôle la validité du rectangle proposé:

-les 4 sommets forment bien un rectangle

-il est possible de découper ce rectangle

Si le rectangle est accepté, il est découpé : il change de couleur, le produit intermédiaire s'affiche sur ce rectangle, le nombre de croix découpées s'affiche comme somme des produits intermédiaires déjà obtenus.

A la fin du découpage, le résultat est donné sous la forme d'un nombre, d'une écriture multiplicative, d'une somme .

logiciel n°2

L'objectif est d'optimiser le découpage du point de vue du nombre de découpages utilisés

Le logiciel propose une grille de croix et un répertoire de produits qui permet ,en choisissant bien, de faire un découpage en quatre coups; un score de 10 apparait au début.

La "règle du jeu" est la suivante : l'élève découpe des rectangles de croix en choisissant un sommet du rectangle ,deux directions, deux nombres et en utilisant, si possible, le répertoire. A chaque découpage, le score est diminué d'un point . L'élève a la possibilité de compléter le répertoire pour terminer le découpage mais perd deux points.

les interventions du logiciel:

-il effectue la validation du rectangle proposé:

-c'est bien un rectangle

-les nombres proposés sont dans le répertoire

-il est possible de découper ce rectangle

-A chaque découpage, le logiciel affiche le résultat du produit intermédiaire, et indique la somme partielle obtenue.

-Le logiciel offre la possibilité de compléter le répertoire; il en contrôle la nécessité et l'éxécute.

-En cas de score nul, le programme est arrêté

-Lorsque le découpage de la grille est entièrement réalisé, le résultat est donné sous forme multiplicative, sous la forme d'une somme, sous forme canonique.

III PHASE EXPERIMENTALE

La phase expérimentale consiste en une passation sur microordinateur TO7/TO70 des logiciels décrits suivie d'une institutionnalisation des savoirs-faire visés, au cours d'une séquence collective faite en classe.

Ces didacticiels font l'objet d'un expérimentation dans une classe de CE2, à l' école annexe de l'école normale des Batignolles à Paris.Seul le logiciel n°1 a été expérimenté. Nous attendons d'avoir expérimenté les deux logiciels pour porter des conclusions sur l'inteêêt de ceux-ci.

i.r.e.m.

UNIVERSITE PARIS VII

TYPOLOGIE DE LOGICIELS POUVANT IMPLIQUER DES ACTIVITES MATHEMATIQUES A L'ECOLE ELEMENTAIRE : QUELQUES RESULTATS

PAR F. TREHARD

0 - INTRODUCTION

Dans ce cahier sont exposés des questions et des résultats établis dans le cadre d'une recherche* constituant une synthèse d'expériences d'activités informatiques en liaison avec la didactique des mathématiques à l'école élémentaire, expériences menées** à divers titres depuis 1981-82.

0.1. Situation de la recherche

Actuellement, le matériel d'analyse des logiciels (1° et 2° degrés d'enseignement) est limité.

On rencontre :

- des grilles d'examen des qualités techniques et/ou des conditions d'emploi des logiciels.
- des évocations (sans grilles d'analyse) de classements possibles des logiciels en référence à l'utilisation de spécificités de l'ordinateur, ou à des enjeux "pédagogiques" mal cernés, voire peu justifiables.
- des schémas descriptifs des logiciels d'enseignement programmé (schémas Crowdériens).

Ceci ne permet pas d'expliquer l'aval ou le qualificatif (didacticiel, imagiciel, logiciel-outil, micromonde, ...) accordés à certains logiciels.

Ceci n'autorise pas non plus un jugement rationnel des enjeux de l'usage d'un logicial à des fins d'apprentissage mathématique à l'école élémentaire.

Dans la situation présente (implantations d'origines diverses de micro-ordinateurs dans les écoles), il y a un manque de fondements pour l'analyse comme pour la conception de produits informatiques.

Remarque :
La recherche entreprise concerne les logiciels de mathématiques pour le 1° degré. Son propos comme ses résultats semblent pouvoir se généraliser à d'autres cycles d'enseignement, et, pour nombre des questions abordées à d'autres disciplines.

---

* Cette recherche fait l'objet d'une thèse nouveau régime en didactique des mathématiques.

** L'auteur est Professeur à l'Ecole Normale d'Institutrices de Paris, Animatrice à l'IREM Paris Sud).

0.2. Objectifs de la recherche

Objectif 1 : Etablir des grilles permettant l'analyse a priori de certaines spécificités de logiciels pouvant impliquer des concepts mathématiques objets d'enseignement à l'école élémentaire (contenu, communication) et dégager une typologie à partir de ces grilles.
Cette typologie classera les logiciels indépendamment de leur utilisation effective pendant l'enseignement, ce qui explique son qualificatif "a priori"

Pour préciser, elle ne prendra pas en compte :
- les conditions d'utilisation du logiciel.
- la place, le rôle du logiciel dans l'apprentissage.
- l'adéquation des consignes émises, le cas échéant, par le logiciel ou son environnement.

Elle ne s'intéressera pas à la qualité technique du logiciel.

Elle ne prétendra pas être à elle-seule un instrument de mesure de l'intérêt des logiciels.

Objectif 2 : Emettre des hypothèses relatives aux enjeux de l'utilisation effective (pendant l'enseignement) de logiciels de chaque type, aux rôles impartis à la machine, aux produits réformatiques souhaitables.
Il sera rendu compte de tests partiels.

Objectif 3 : Confronter les types dégagés à un vocabulaire informatique et didactique.

0.3. Remarque

Ce cahier rend compte essentiellement de l'objectif 1 de la recherche décrite ci-dessus.

1 - METHODOLOGIE RETENUE POUR ETABLIR LA TYPOLOGIE "A PRIORI".

1.1. Hypothèses

La méthodologie retenue repose sur les hypothèses suivantes :

- la communication avec le micro-ordinateur est un élément spécifique : peut-être serait-il possible de l'envisager en tant que variable didactique.
- il y a dépendance entre le type de contenu et le type de communication proposés par le logiciel.

En conséquence, pour rendre compte d'un logiciel, il convient de s'intéresser :
- . à son contenu
- . à la communication qu'il propose à l'utilisateur avec le micro-ordinateur.

1.2. Définition

La méthodologie retenue se définit ainsi :

I (ou II)* Etablissement d'une typologie du point de vue du contenu : Typologie CONT

- . Construction d'une grille d'analyse a priori du contenu du logiciel indépendamment de la communication : grille CONT
- . Analyse de neuf logiciels selon la grille CONT
- . Etude des résultats : typologie CONT

II (ou I)* Etablissement d'une typologie du point de vue de la communication : Typologie COM

- . Construction d'une grille d'analyse a priori de la communication : grille COM
- . Analyse des neuf logiciels précédents selon la grile COM
- . Etude des résultats : Typologie COM

III Comparaison des typologies CONT et COM : recherche d'une typologie générale.

1.3. Remarques

- Choix des logiciels

Dans cette recherche, le terme "logiciel" désigne les logiciels d'explcitation <u>et</u> d'application, et ceci de façon délibérée.

---

* Les parties I et II sont indépendantes : l'ordre (I ou II) ne concerne que l'exposé.

Cette option peut se justifier à deux niveaux :

. au niveau informatique, en référence à la signification du terme logiciel : "logiciel" désigne "l'ensemble des programmes, procédés et règles et éventuellement de la documentation, relatifs au fonctionnement d'un ensemble de traitement de l'information" (terminologie de l'informatique, arrêté du 22.12.81, Ministres de l'Industrie et de l'Education Nationale).

. au niveau utilisateur, en référence à sa position face à un système informatique : elle est indépendante a priori du logiciel. Pour l'utilisateur, il s'agit toujours moyennant un logiciel (d'exploitation ou d'application) d'utiliser un périphérique d'entrée et de lire – au sens large – un périphérique de sortie de la configuration dont il dispose.

Sur l'ensemble des neuf logiciels, on trouve :

. des logiciels d'exploitation (LOGO) et d'application.

. des logiciels portant sur le domaine numérique ou géométrique.

Aucun logiciel n'est exclusivement ludique.
Aucun logiciel n'est du genre Q C M , mais ce travail permettra néanmoins de rendre compte de leur existence.

- Portée des résultats

Elle dépend de la représentativité des logiciels analysés. D'autres logiciels pourraient confirmer les conclusions établies grâce aux neuf logiciels choisis.