Emile Le Page

Théorèmes de renouvellement pour les produits de matrices aléatoires Équations aux différences aléatoires

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1983, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-116
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1983___1_A4_0>

THEOREMES DE RENOUVELLEMENT

POUR LES PRODUITS DE MATRICES ALEATOIRES

EQUATIONS AUX DIFFERENCES ALEATOIRES

E. LE PAGE
U.E.R. Mathématiques
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX FRANCE

INTRODUCTION

On considère une suite $(A_n)_{n>1}$ de matrices aléatoires indépendantes, et de même loi à valeurs dans le groupe $GL(d,\mathbb{R})$ des matrices $d\times d$ inversibles à coefficients réels. On munit l'espace vectoriel ${}^t\mathbb{R}^d$ des vecteurs lignes $x = (x_1,x_2,\dots x_d)$ du produit scalaire canonique et pour $A \in GL(d,\mathbb{R})$, on note $\|A\| = \sup_{\|x\| = 1} \|xA\|$.

On sait [4] que si $E \log^+ \|A_1\| < +\infty$

$$\text{p.s} \quad \lim_n \frac{1}{n} \log \|A_1A_2\dots A_n\| = \alpha .$$

Dans son article [12], H. Kesten a démontré en particulier des résultats du type suivant :

si $\alpha>0$ $x \in {}^t\mathbb{R}^d$

$$\lim_{t\to+\infty} E\,[\text{ card } n; t \le \|xA_1A_2\dots A_n\| < th] = \frac{\log h}{\alpha}$$

si $\alpha<0$, il existe un $\lambda_1 > 0$ tel que pour $x \in \mathbb{R}^d-\{0\}$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\lambda_1} P(\max_n \|xA_1A_2\dots A_n\| > t)$$

existe et est strictement positive.

Les théorèmes précédents ont été établis dans le cas où la loi de A_1 est portée par des matrices positives ou dans le cas où la loi de A_1 admet une densité. L'objet de ce travail est d'étendre les précédents résultats au cas général.

Les résultats obtenus sont énoncés et démontrés au paragraphe 2. Leur preuve s'appuie sur la théorie du renouvellement établie par H. Kesten [11] pour les fonctionnelles d'une chaine de Markov.

Afin de vérifier les conditions d'application de cette théorie, nous devons au paragraphe 1 étudier certaines chaines de Markov à valeurs dans l'espace projectif ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ associé à ${}^t\mathbb{R}^d$.

Plus précisément, nous montrons à l'aide de propriétés d'équicontinuité que pour tout $\lambda \geq 0$, l'opérateur $S(\lambda)$ défini sur l'espace $\mathcal{C}\,({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ des fonctions continues sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ par

$$S(\lambda)f(\bar{x}) = \int \|x\cdot A_1\|^\lambda \; f(x\cdot A_1)\; dp(A_1) \quad \bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$$

(x est un vecteur de norme 1 d'image $\bar{x}$ dans ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ et $\cdot$ note l'action de $GL(d,\mathbb{R})$ sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$)

admet une fonction propre h_λ continue, strictement positive sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$, et ayant pour valeur propre le rayon spectral $k(\lambda)$ de $S(\lambda)$ sur $\mathcal{C}\,({}^t\mathbb{P}^{d-1})$.

Ensuite, nous établissons que l'opérateur markovien ${}^\lambda P$ défini par

$${}^\lambda P(f) = \frac{1}{h_\lambda} \; \frac{1}{k(\lambda)} \; S(\lambda)\; [f\, h_\lambda]$$

est quasi compact sur un espace de fonctions Höldériennes convenable.

Pour mener cette étude, on s'inspire de techniques mises en place dans [7], [8], [9], [10], qui permettent de faire apparaitre des phénomènes de convergences en direction.

Au paragraphe 3, nous donnons une application des résultats du paragraphe 2 à l'étude d'équations aux différences aléatoires.

On étudie la distribution limite de la solution Y_n de l'équation aux différences aléatoires

$$(*) \quad Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n \qquad n \geq 1$$

où les $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi à valeurs dans $\overline{GL}(d,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$.

Pour Y_o donné, la solution de $(*)$ est

$$Y_n = B_n + A_n B_{n-1} + \ldots + (A_n A_{n-1} \ldots A_2) B_1 + (A_n A_{n-1} \ldots A_1) Y_o.$$

La loi de $Y_n - (A_n \ldots A_1) Y_o$ est alors la même que la loi de la variable aléatoire

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} A_1 A_2 \ldots A_{k-1} B_k$$

Si l'on suppose que $\lim_n \frac{1}{n} \log \|A_1 \ldots A_n\| = \alpha < 0$ et des conditions de moments suffisantes sur la loi de B_1, la série $R = \sum_{k=1}^{+\infty} A_1 A_2 \ldots A_{k-1} B_k$ converge presque sûrement.

On établit, sous des hypothèses assez générales qu'il existe un réel $\lambda_1 > 0$ tel que la limite

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\lambda_1} P(x R > t) \qquad x \in {}^t\mathbb{R}^d - \{0\}$$

existe, est finie et strictement positive.

Des résultats analogues avaient été prouvés par H. Kesten [12] dans le cas où les matrices $(A_i)_{i \geq 1}$ étaient positives ou admettaient une loi ayant une densité.

1. Résultats préliminaires : Etude de chaînes de Markov obtenues par relativisation

1.1 Notations - définitions - rappels de résultats

Nous appelons $\mathbb{P}_{d-1}$ [resp ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$] l'espace projectif associé à $\mathbb{R}^d = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \quad x_i \in \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq d\}$

(resp à ${}^t\mathbb{R}^d = \{(x_1,\ldots,x_d) \quad x_i \in \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq d\}$.

Pour $x = (x_1,\ldots x_d) \in {}^t\mathbb{R}^d$, nous posons $\|x\| = (\sum_{i=1}^{d} x_i^2)^{1/2}$, et pour toute matrice A du groupe linéaire $GL(d,\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^d$ nous notons

$$\|A\| = \sup_{x \in {}^t\mathbb{R}^d - \{0\}} \frac{\|x A\|}{\|x\|}$$

Nous désignons par ρ le cocycle sur ${}^t\mathbb{P}^{d-1} \times GL(d,\mathbb{R})$ défini par

$$\rho(\bar{x},A) = \frac{\|x.A\|}{\|x\|} \quad \bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}, \quad A \in GL(d,\mathbb{R})$$

où x désigne un élément de ${}^t\mathbb{R}^d-\{0\}$ d'image $\bar{x}$ dans ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.

Rappelons par ailleurs, la décomposition de Cartan d'une matrice A de $GL(d,\mathbb{R})$: on peut écrire A sous la forme

$$A = k_1 \; a \; k_2$$

où k_1 et k_2 sont des matrices orthogonales, et a une matrice diagonale : $\mathrm{diag}(a_1,a_2,\ldots,a_d)$ avec $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_d$.

Les réels $(a_i)_{1 \leq i \leq d}$ sont déterminés de façon unique par A ; le couple (k_1,k_2) n'est pas unique. Lorsque $a_1 > a_2 > \ldots > a_d$: les autres décompositions de Cartan s'obtiennent en remplaçant le couple (k_1,k_2) par un couple $(k_1 m, m^{-1} k_2)$ avec $m \in \{\mathrm{diag}\,(\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_d) \quad \varepsilon_i = \pm 1\}$.

Considérons alors une probabilité p sur le groupe $GL(d,\mathbb{R})$. Nous supposons que p satisfait aux hypothèses (H) suivantes :

1) Le groupe fermé G_p engendré par le support de p et ses sous-groupes d'indice fini ont une action irréductible sur $\mathbb{R}^d$.

2) Le semi-groupe fermé T_p engendré par le support de p a une action contractante sur l'espace projectif $\mathbb{P}_{d-1}$, c'est-à-dire qu'il existe dans T_p une suite $(y_n)_{n\geq 1}$ telle que si y_n admet la décomposition de Cartan

$$y_n = k_1(n)\ a(n)\ k_2(n)$$

où $a(n) = \mathrm{diag}(a_1(n), a_2(n),\dots,a_d(n))$ $\quad a_1(n) \geq a_2(n) \geq \dots \geq a_d(n)$

on ait $\lim_n \dfrac{a_2(n)}{a_1(n)} = 0.$

Soit $(A_k)_{k\geq 1}$ une suite de matrices aléatoires indépendantes et de loi p définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$

De plus adoptons la définition

<u>Définition 1.1</u> : *On dira qu'une mesure* α *sur l'espace projectif* ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ *est irréductible si elle ne charge pas de sous-variété projective.*

et les notations suivantes : Pour $A \in GL(d,\mathbb{R})$ et $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, $\bar{x}.A$ est l'image de $\bar{x}$ par l'action de A sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$. Par ailleurs, pour une probabilité λ sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$, $\lambda * p$ est la probabilité sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ définie par

$$\lambda * p(\phi) = \int \phi(\bar{x}.A)\ d\lambda(\bar{x})$$

où ϕ est une fonction borélienne bornée sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.

Nous pouvons alors énoncer la

<u>Proposition 1.1</u> : *Si* p *satisfait à l'hypothèse* (H), *il existe sur* ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ *une unique probabilité* $\tilde{\nu}$ p *invariante* $(\tilde{\nu} * p = \tilde{\nu})$ *et cette probabilité est irréductible. De plus, il existe une variable aléatoire* $\tilde{Z}$ *de loi* $\tilde{\nu}$, *telle que pour toute probabilité irréductible* $\tilde{\alpha}$ *sur* ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ *la suite* $\tilde{\alpha}.A_n\, A_{n-1} \dots A_1$ $n\geq 1$ *converge presque sûrement vers la mesure de Dirac* $\varepsilon_{\tilde{Z}}$.

Par ailleurs, pour toute fonction f *continue sur* ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ *, on a*

$$\lim_n \sup_{\bar{x}\in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} \left| \int f(\bar{x}.A)\, p^n(dA) - \int f(\bar{x})\, \nu(d\bar{x}) \right| = 0$$

La preuve de cette proposition a été donnée dans [6] dans le cas où p est portée par SL(d,$\mathbb{R}$) mais reste valide dans le cas présent.

1.2 Construction de fonction propres pour une famille d'opérateurs

Soit $\lambda \geq 0$; si p satisfait à la condition

(1.1) $\int \|A\|^\lambda dp(A) < +\infty$.

Considérons l'opérateur $S(\lambda)$ défini sur l'espace de Banach $\mathcal{C}({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ des fonctions continues sur $\mathbb{P}_{d-1}$ de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{P}_{d-1}$ par

$$S(\lambda)f(\bar{x}) = \int \rho^\lambda(\bar{x},A) f(\bar{x}.A) p(dA)$$

$$f \in \mathcal{C}({}^t\mathbb{P}_{d-1}) \qquad \bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}.$$

Notons $k(\lambda)$ le rayon spectral de $S(\lambda)$.

Nous pouvons alors énoncer la

Proposition 1.2 :

1) *Si* p *satisfait à l'hypothèse* (H) *et à la condition* (1.1), *il existe une fonction* h_λ *strictement positive sur* ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ *, telle que*

$$S(\lambda)h_\lambda = k(\lambda)\, h_\lambda$$

De plus, toute autre fonction continue positive ϕ_λ *satisfaisant à l'égalité*

$$S(\lambda)\,\phi_\lambda = k(\lambda)\,\phi_\lambda$$

est proportionnelle à h_λ .

2) *Si* p *satisfait aux hypothèses du 1) pour un réel* $\lambda = \lambda_o > 0$ *et si de plus*

$$\int [\,\mu(A)]^{\lambda_o}\, dp(A) \geq 1$$

où $\mu(A)$ *désigne la plus petite valeur propre de la matrice* $(A\ {}^tA)^{1/2}$ *alors il existe un réel* $\lambda_1 \in]0,\lambda_o]$ *tel que* $k(\lambda_1) = 1$.

Démonstration de la proposition 1.2

1) Soit $M_1({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ le convexe compact pour la topologie étroite des probabibilités sur ${}^t\mathbb{P}^{d-1}$.
L'application $T(\lambda)$ de $M_1({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ dans $M_1({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ définie par

$$\sigma \to \sigma\, T(\lambda) \quad \text{où} \quad \sigma T(\lambda)[\phi] = \frac{\int S(\lambda)\phi(\bar{x})\sigma(d\bar{x})}{\int S(\lambda)e(\bar{x})\sigma(d\bar{x})}$$

où $\phi \in \mathcal{C}({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ et e est la fonction identique à 1 sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$, est continue de $M_1({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ dans $M_1({}^t\mathbb{P}_{d-1})$. D'après le théorème de Schauder-Tychonov $T(\lambda)$ admet un point fixe dans $M_1({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ c'est-à-dire qu'il existe une probabilité $\tilde{\nu}_\lambda \in M_1({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ et une constante $k_1(\lambda)$ telle que

$$\tilde{\nu}_\lambda\, S(\lambda) = k_1(\lambda)\, \tilde{\nu}_\lambda.$$

Il en résulte que pour tout $n \geq 1$, on a

$$(1.2) \quad k_1^n(\lambda) = \int_{{}^t\mathbb{P}_{d-1}} S^n(\lambda)e(\bar{x})\ \tilde{\nu}_\lambda(d\bar{x})$$

De plus, on a le

Lemme 1.1

$$k(\lambda) = k_1(\lambda) = \lim_n (E\,\|A_1\ A_2\ \dots\ A_n\|^\lambda)^{1/n}$$

Démonstration du lemme 1.1

De (1.2), il résulte facilement l'inégalité

$$(1.3) \quad k_1^n(\lambda) \leq \int \|A\|^\lambda p^n(dA) \qquad n \geq 1$$

Considérons d'autre part, l'application $A \to \int \rho^{\lambda}(\bar{x},A)\tilde{\nu}_{\lambda}(d\bar{x})$ de la boule unité de l'espace vectoriel $M_d(\mathbb{R})$ des matrices $d \times d$ à coefficients réels dans $\mathbb{R}$. Cette application est continue et ne s'annule pas. En effet, sinon il existerait une matrice M_o non nulle de $M_d(\mathbb{R})$ telle que $\tilde{\nu}_{\lambda}(\ker M_o) = 1$ $\ker M_o = \{x \in {}^t\mathbb{R}^d \; ; \; xM_o = 0\}$. Or le support de $\tilde{\nu}_{\lambda}$ est stable par T_p, donc aussi $\ker M_o$; il en résulterait alors que $\ker M_o$ est stable par G_p ce qui est contraire à l'hypothèse H 1)

on a alors

$$\operatorname*{Inf}_{\{A \in M_d(\mathbb{R}) \; ; \|A\| = 1\}} \int \rho^{\lambda}(\bar{x},A)\tilde{\nu}_{\lambda}(d\bar{x}) = c > 0$$

d'où il résulte que

$$(1.4) \quad c \int \|A\|^{\lambda} p^n(dA) \leq \int S^n(\lambda)e(\bar{x})\tilde{\nu}_{\lambda}(d\bar{x}) = k_1^n(\lambda) \qquad n \geq 1$$

On déduit alors de (1.3) et de (1.4) que

$$(1.5) \quad k_1(\lambda) = \lim_n \left[\int \|A\|^{\lambda} p^n(dA)\right]^{1/n} = \lim_n \left[E\, \|A_1 A_2 \ldots A_n\|^{\lambda}\right]^{1/n}$$

Par définition de $k(\lambda)$, on a

$$(1.6) \quad k_1(\lambda) \leq k(\lambda).$$

D'autre part, pour tous $n \geq 1$, $f \in \mathcal{C}({}^t\mathbb{P}^{d-1})$

$$\sup_{\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} |S^n(\lambda)f(\bar{x})| \leq \int \|A\|^{\lambda} p^n(dA) \sup_{\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} |f(\bar{x})|$$

et donc

$$(1.7) \quad k(\lambda) \leq \lim_n \left[\int \|A\|^{\lambda} p^n(dA)\right]^{1/n}$$

Le lemme 2.1 résulte de (1.5), (1.6) et (1.7).

2) Construisons une fonction h_λ positive de $\mathcal{C}({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ telle que

$$S(\lambda)\, h_\lambda = k(\lambda)\, h_\lambda .$$

Pour cela, considérons la suite de fonctions

$$h_{\lambda,n} = \frac{S^n(\lambda)e}{k^n(\lambda)} \qquad n \geq 1$$

sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.

Cette suite est bornée. En effet, on a en tenant compte du lemme 1.1 et de (1.4)

$$\sup_{\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} |h_{\lambda,n}(\bar{x})| \leq \frac{\int \|A\|^\lambda \, dp^n(A)}{k^n(\lambda)} \leq \frac{1}{c}$$

De plus, elle est équicontinue.

Pour le prouver, nous allons munir ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ d'une distance. Pour deux éléments $x = (x_1,\dots,x_d)$ et $y = (y_1,\dots,y_d)$ de ${}^t\mathbb{R}^d$, nous posons $\|x \wedge y\| = [\sum_{1\leq i\leq j\leq d} (x_i y_j - x_j y_i)^2]^{1/2}$ et $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i\, y_i$. Nous avons

$$\|x \wedge y\|^2 + (\langle x,y\rangle)^2 = \|x\|^2\, \|y\|^2 .$$

Nous appelons d la distance sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ définie par

$$d(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\|x \wedge y\|}{\|x\|\,\|y\|}$$

où x et y sont des représentants de $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans ${}^t\mathbb{R}^d$.

Si $\theta(x,y)$ désigne l'angle des vecteurs x et y, nous avons $d(\bar{x},\bar{y}) = |\sin\theta(x,y)|$. Pour tous $\bar{x},\bar{y} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, il existe deux vecteurs $x,y \in {}^t\mathbb{R}^d$ d'image $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$ et que $|\theta(x,y)| \leq \frac{\pi}{2}$; de plus, on a également pour ces vecteurs

(1.8) $\frac{1}{\sqrt{2}}\|x-y\| \leq d(\bar{x},\bar{y}) \leq \|x-y\|$.

Par ailleurs, pour toute matrice $A \in M_d(\mathbb{R})$ et tous vecteurs $x,y \in {}^t\mathbb{R}^d$ on a les inégalités suivantes

$$\big|\,\|xA\|^\lambda - \|yA\|^\lambda\big| \leq \|A\|^\lambda \|x-y\|^\lambda \qquad \text{pour } 0<\lambda\leq 1$$

et

$$\big|\,\|xA\| - \|yA\|^\lambda\big| \leq \lambda \|A\|^\lambda \|x-y\| \qquad \text{pour } \lambda\geq 1$$

Des remarques précédentes, il résulte alors que si $0\leq\lambda\leq 1$

$$(1.9)\quad |h_{\lambda,n}(\bar{x}) - h_{\lambda,n}(\bar{y})| \leq \frac{1}{[k(\lambda)]^n} \int \|A\|^\lambda p^n(dA)\; 2^{\lambda/2}\; d^\lambda(\bar{x},\bar{y})$$

$$\leq \frac{2^{\lambda/2}}{c}\; d^\lambda(\bar{x},\bar{y})$$

$$\bar{x},\bar{y} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$$

et de même si $\lambda\geq 1$

$$(1.10)\quad |h_{\lambda,n}(\bar{x}) - h_{\lambda,n}(\bar{y})| \leq \frac{\lambda\sqrt{2}}{c}\; d(\bar{x},\bar{y}) \qquad \bar{x},\bar{y} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$$

ce qui établit bien l'équicontinuité de la suite $(h_{\lambda,n})_{n\geq 1}$.

Par application du théorème d'Ascoli, il existe donc une suite $(n_\ell)_{\ell\geq 1} \subset \mathbb{N}$ telle que la suite de fonctions $\left(v_{\lambda,\ell} = \frac{1}{n_\ell}\sum_{k=0}^{n_\ell} h_{\lambda,k}\right)_{\ell\geq 1}$ converge uniformément sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ vers une fonction h_λ.

De l'égalité

$$S(\lambda)\; v_{\lambda,\ell} = k(\lambda)\; v_{\lambda,\ell} + \frac{1}{n_\ell}\,(h_{\lambda,n_\ell+1} - 1)$$

il résulte que $S(\lambda)\; h_\lambda = k(\lambda)\; h_\lambda$.

Par ailleurs, d'après (1.9) et (1.10) h_λ est évidemment Höldérienne d'ordre $\mathrm{Inf}(\lambda,1)$.

3) Montrons que h_λ est strictement positive sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.
Comme pour tout $n\geq 1$ $\tilde{\nu}_\lambda(h_{\lambda,n}) = 1$, on a aussi $\tilde{\nu}_\lambda(h_\lambda) = 1$ et donc h_λ n'est pas identiquement nulle sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.

Supposons qu'il existe un point $\bar{x}_0 \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ tel que $h_\lambda(\bar{x}_0) = 0$, alors pour tout $n\geq 1$ on a

$$\int h_\lambda(\bar{x}_0 . A)\ \rho^\lambda(\bar{x}_0, A)\ p^n(dA) = 0$$

et donc aussi $\int h_\lambda(\bar{x}_0 . A)\ p^n(dA) = 0$

et par conséquent (Proposition 1.1)

$$\tilde{\nu}(h_\lambda) = \lim_n \int h_\lambda(\bar{x}_0 . A)\ p^n(dA) = 0.$$

Or ceci est impossible ; en effet, en raisonnant comme dans la preuve du lemme 1.1, on voit qu'il existe une conatante $c_1(\lambda) > 0$ telle que pour tout $n\geq 1$

$$c_1(\lambda) \int ||A||^\lambda\ p^n(dA) \leq \int \rho^\lambda(\bar{x}, A)\ p^n(dA)\ d\tilde{\nu}(\bar{x}).$$

On en déduit que pour tout $\ell\geq 1$, on a

$$\tilde{\nu}(v_{\lambda,\ell}) \geq c_1(\lambda) \frac{1}{n_\ell} \sum_{j=0}^{n_\ell} \frac{\int ||A||^\lambda\ dp^j(A)}{[k(\lambda)]^j} \geq c_1(\lambda) \frac{n_\ell + 1}{n_\ell}$$

d'où il résulte que $\tilde{\nu}(h_\lambda) \geq c_1(\lambda)$.

Par conséquent, h_λ est strictement positive sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.

4) Montrons que toute fonction ϕ_λ continue positive satisfaisant à l'égalité

$$S(\lambda)\ \phi_\lambda = k(\lambda)\ \phi_\lambda$$

est proportionnelle à h_λ.

Soit $M = \sup_{\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}^{d-1}} \frac{\phi_\lambda(\bar{x})}{h_\lambda(\bar{x})} = \frac{\phi_\lambda(\bar{x}_0)}{h_\lambda(\bar{x}_0)}$ la fonction $M_\lambda\ h_\lambda - \phi_\lambda$ est continue,

positive s'annule en un point $\bar{x}_0$ et satisfait à l'égalité

$$S^n(\lambda)\,[M_\lambda\, h_\lambda - \phi_\lambda] = [k(\lambda)]^n\,(M_\lambda\, h_\lambda - \phi_\lambda) \qquad n \geq 1$$

d'où il résulte que

$$S^n(\lambda)\,[M_\lambda\, h_\lambda - \phi_\lambda]\,(\bar{x}_0) = 0 \qquad n \geq 1$$

et donc $\displaystyle\int (M_\lambda\, h_\lambda(\bar{x}_0.A) - \phi_\lambda(\bar{x}_0.A))\, p^n(dA) = 0 \qquad n \geq 1.$

En passant à la limite dans cette égalité, il vient (Proposition 1)

$$\tilde{\nu}\,[M_\lambda\, h_\lambda - \phi_\lambda] = 0$$

c'est-à-dire que la fonction $M_\lambda\, h_\lambda - \phi_\lambda$ est nulle sur le support de $\tilde{\nu}$.

Considérons alors la fonction $\psi_\lambda = \dfrac{M_\lambda\, h_\lambda - \phi_\lambda}{h_\lambda}$.

Pour tout $n \geq 1$, on a les égalités suivantes :

$$\frac{1}{k^n(\lambda)}\;\frac{1}{h_\lambda(\bar{x})}\int \rho^\lambda(\bar{x},A)\;h_\lambda(\bar{x}.A)\;\psi_\lambda(\bar{x}.A)\;p^n(dA) = \psi_\lambda(\bar{x}) \qquad \bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$$

$$\frac{1}{[k(\lambda)]^n}\;\frac{1}{h_\lambda(\bar{x})}\int \rho^\lambda(\bar{x},A)\;h_\lambda(\bar{x}.A)\;p^n(dA) = 1 \qquad \bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1} .$$

On en déduit que si $\psi_\lambda(\bar{y}_0) = \sup\limits_{\bar{y} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} \psi_\lambda(\bar{y})$ on a

$\psi_\lambda(\bar{y}_0.A) = \psi_\lambda(\bar{y}_0)$ pour tout $A \in T_p$ et donc aussi $\tilde{\nu}(\psi_\lambda) = \psi_\lambda(\bar{y}_0)$.

Comme ψ_λ est nulle sur le support de $\tilde{\nu}$, ψ_λ est donc nulle sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$, d'où $\psi_\lambda = M_\lambda\, h_\lambda$.

5) Pour terminer la preuve de la seconde assertion, il suffit de prouver l'existence d'un réel $\lambda_1 > 0$ tel que $k(\lambda_1) = 1$.

Remarquons tout d'abord qu'en raison de l'inégalité $\mu(A) \leq \|A\|$, on a

$$k(\lambda_0) \geq 1.$$

D'autre part, comme chacune des fonctions de la suite $\frac{1}{n}$ Log $E\,\|A_n\, A_{n-1}\ldots A_1\|^{\lambda}$ $n\geq 1$ est convexe sur l'intervalle $[0,\lambda_0]$, il résulte du lemme 3.1, qu'il en est de même de la fonction $\lambda \to$ Log $k(\lambda)$, ce qui en particuler établit la continuité de cette fonction sur l'intervalle $[0,\lambda_0[$.

Montrons que cette fonction est également continue en λ_0.
Pour tout $\lambda \in [0,\lambda_0]$ la suite $E\,\|A_1\, A_2\ldots A_n\|^{\lambda}$ $n\geq 1$ est sous-multiplicative et donc

(1.11) $k(\lambda) = \inf\limits_{n\geq 1}\{E\,\|A_1\, A_2\ldots A_n\|^{\lambda}\}^{1/n}$.

Etant donné $\varepsilon>0$, choisissons un entier n_1 tel que

(1.12) $k(\lambda_0) \leq \{E\,\|A_1\, A_2\ldots A_{n_1}\|^{\lambda_0}\}^{1/n_1} \leq (1+\varepsilon)\, k(\lambda_0)$

et $c^{1/n_1} \geq 1-\varepsilon$.

Par continuité de l'application $\lambda \to (E\,\|A_1\, A_2\ldots A_{n_1}\|^{\lambda})^{1/n_1}$ sur l'intervalle $[0,\lambda_0]$ il existe un réel $\eta>0$ tel que pour $\eta>\lambda_0-\lambda\geq 0$ on ait

(1.13) $(1-\varepsilon)(E\,\|A_1\, A_2\ldots A_{n_1}\|^{\lambda_0})^{1/n_1} \leq (E\,\|A_1\, A_2\ldots A_{n_1}\|^{\lambda})^{1/n_1}$

$\leq (1+\varepsilon)(E\,\|A_1\, A_2\ldots A_{n_1}\|^{\lambda_0})$.

On déduit de (1.11) et de (1.12) que pour λ tel que $\eta>\lambda_0-\lambda\geq 0$ on a

(1.14) $(1-\varepsilon)k(\lambda_0) \leq (E\,\|A_1\, A_2\ldots A_{n_1}\|^{\lambda})^{1/n_1} \leq (1+\varepsilon)^2\, k(\lambda_0)$.

De (1.4) et (1.11) résulte alors que pour λ tel que $\eta>\lambda_0-\lambda\geq 0$ on a

$k(\lambda) \leq (1+\varepsilon)^2\, k(\lambda_0)$

et également

$(1-\varepsilon)^2\, k(\lambda_0) \leq c^{\frac{1}{n_1}}\, [E(\,\|A_1\ldots A_{n_1}\|^{\lambda}]^{1/n_1} \leq k(\lambda)$

ce qui établit bien la continuité de la fonction $\lambda \to \operatorname{Log} k(\lambda)$ en λ_0.

L'assertion 2) de la proposition 1.1 résulte alors facilement du fait que $k(\lambda_0) \geq 1$.

1.3 Etude de certaines chaînes de Markov

Soit $\lambda \geq 0$, tel que $\int \|A\|^\lambda p(dA) < +\infty$.
L'objet du présent paragraphe est d'étudier la chaîne de Markov sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ de probabilité de transition ${}^\lambda P$ définie par

$$(1.15)\quad {}^\lambda Pf(\bar{x}) = \frac{1}{k(\lambda)}\,\frac{1}{h_\lambda(\bar{x})} \int \rho^\lambda(\bar{x},A)\, h_\lambda(\bar{x}.A)\, f(\bar{x}.A)\, dp(A) \qquad \bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$$

Cette étude a été menée dans [14] , dans le cas où $\lambda = 0$; les méthodes ici utilisées sont dans le cas où $\lambda > 0$ une extension de celles utilisées dans le cas précédent [14] et également inspirées de [6] .

Considérons sur $[GL(d,\mathbb{R})]^{\mathbb{N}}$ les probabilités ${}^\lambda P_{\bar{x}}$ $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ définies par

$$(1.16)\quad {}^\lambda P_{\bar{x}}\,[A_1 \in B_1, A_2 \in B_2, \ldots, A_n \in B_n] = \frac{1}{[k(\lambda)]^n}\,\frac{1}{h_\lambda(\bar{x})} \int \rho^\lambda(\bar{x},A_1 A_2 \ldots A_n)$$
$$h_\lambda(\bar{x}.A_1 \ldots A_n)\; 1_{B_1}(A_1) 1_{B_2}(A_2) \ldots 1_{B_n}(A_n)$$
$$dp(A_1)\, dp(A_2) \ldots dp(A_n).$$

Notons que dans le cas $\lambda = 0$ ${}^0 P_{\bar{x}}$ est la probabilité produit $p^{\otimes \mathbb{N}}$ sur $[GL(d,\mathbb{R})]^{\mathbb{N}}$.

Nous commencerons par mettre en évidence des propriétés de contraction de l'action des produits $A_1 \ldots A_n$ sur $\mathbb{P}_{d-1}$, la loi de la suite $(A_i)_{i \geq 1}$ étant définie par la probabilité ${}^\lambda P_{\bar{x}}$.

Pour cela, la construction d'une martingale nous sera utile

1.3.1. Construction d'une martingale

Notons $M_1(\mathbb{P}_{d-1})$ l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{P}_{d-1}$ nous pouvons alors énoncer la

Proposition 1.3 : *Si l'hypothèse $H_{1)}$ est satisfaite, il existe une application $\bar{x} \to \mu_{\bar{x}}$ continue de ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ dans $M_1(\mathbb{P}_{d-1})$ muni de la topologie de la convergence en variation, et telle que pour tout $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ on ait :*

$$(1.17) \quad \mu_{\bar{x}} = \frac{1}{k(\lambda) h_\lambda(\bar{x})} \int \rho^\lambda(\bar{x},A)\ h_\lambda(\bar{x}.A)\ A.\mu_{\bar{x}.A}\ dp(A)$$

qui admet le corollaire

Corollaire 1.1 : *La suite $A_1\ A_2 \ldots A_n . \mu_{\bar{x}.A_1\ A_2 \ldots A_n}$ $n \geq 1$ $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ est une ${}^\lambda P_{\bar{x}}$ martingale à valeurs dans $M_1(\mathbb{P}_{d-1})$.*

Démonstration de la proposition 1.3

Remarquons tout d'abord que si $\lambda = 0$, il suffit de prendre $\mu_{\bar{x}} = \nu$, où $\nu \in M_1(\mathbb{P}_{d-1})$ et est p invariante $(p * \nu = \nu)$.

Nous supposons désormais que $\lambda > 0$.

Considérons la suite d'applications de ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times GL(d,\mathbb{R})$ dans $M_1(\mathbb{P}_{d-1})$ définie par

$$(1.18) \quad \mu_{n,\bar{x},A}(\phi) = \frac{1}{[k(\lambda)]^n} \frac{1}{h_\lambda(\bar{x})} \int \rho^\lambda(\bar{x},A_1\ A_2 \ldots A_n)\ h_\lambda(\bar{x}.A_1\ A_2 \ldots A_n)$$
$$\phi(A\ A_1\ A_2 \ldots A_n . y_0) dp(A_1) dp(A_2) \ldots dp(A_n)$$

où $n \geq 1$ $x \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, $A \in GL(d,\mathbb{R})$, y_0 est un élément fixé de $\mathbb{P}_{d-1}$, et ϕ une fonction borélienne définie sur $\mathbb{P}_{d-1}$.

La suite précédente satisfait aux propriétés énoncés dans le

Lemme 1.2 : *Pour tout compact* K *de* $GL(d,\mathbb{R})$ *la suite* $\mu_{n,\cdot,\cdot}$ $n\geq 1$ *de* ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times K$ *dans* $M_1(\mathbb{P}_{d-1})$ *est équicontinue,* $M_1(\mathbb{P}_{d-1})$ *étant muni de la topologie de la convergence vague*

Démonstration du lemme 1.2

Munissons $\mathbb{P}_{d-1}$ d'une distance d' : si $\overline{u},\overline{v} \in \mathbb{P}_{d-1}$ ont pour représentant $u,v \in \mathbb{R}^d$ avec $\|u\| = 1$ $\|v\| = 1$, on définit d' en posant

$$d'(\overline{u},\overline{v}) = d(\overline{{}^t u}, \overline{{}^t v}).$$

La topologie de la convergence vague sur $M_1(\mathbb{P}_{d-1})$ peut être définie à l'aide d'une suite $(\phi_p)_{p\geq 1} = \Lambda$ de fonctions Lipschitziennes sur $\mathbb{P}_{d-1}$ telle que $\forall\ p\geq 1 \quad \sup_{\overline{x} \in \mathbb{P}_{d-1}} |\phi_p(\overline{x})| = 1$, et cette topologie est alors la topologie associée à la distance :

$$(1.19) \quad \delta(\alpha,\beta) = \sum_{p\geq 1} \frac{1}{2^p} |\alpha(\phi_p) - \beta(\phi_p)| \qquad \alpha,\beta \in M_1(\mathbb{P}_{d-1})$$

Soit $\phi \in \Lambda$, on étudie la différence

$$(1.20) \quad |\mu_{n,\overline{x},A}(\phi) - \mu_{n,\overline{x}',B}(\phi)| \leq |\mu_{n,\overline{x},A}(\phi) - \mu_{n,\overline{x}',A}(\phi)| + |\mu_{n,\overline{x}',A}(\phi) - \mu_{n,\overline{x}',B}(\phi)|$$

$n\geq 1 \qquad \overline{x},\overline{x}' \in {}^t\mathbb{P}_{d-1} \qquad A,B \in GL(d,\mathbb{R})$

Appelons $T_n(\overline{x},\overline{x}';A,\phi)$ (resp $U_n(\overline{x}';A,B,\phi)$) le premier (resp le second) terme du second membre de (1.20).

Montrons que

1) il existe une constante $C_1(\lambda)$ telle que pour tous $n\geq 1$, $A \in GL(d,\mathbb{R})$, et $\phi \in \Lambda$, on ait l'inégalité

$$(1.21) \quad T_n(\bar{x},\bar{x}';A,\phi) \leq C_1(\lambda)\, d(\bar{x},\bar{x}')^{\mathrm{Inf}(\lambda,1)} \qquad \bar{x},\bar{x}' \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$$

2) Pour chaque $\phi \in \Lambda$ et tout compact K de $GL(d,\mathbb{R})$, il existe une constante $C_2(\phi,K,\lambda)$ telle que pour tous $n\geq 1$, $x' \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, $A,B \in K$, on ait l'inégalité

$$(1.22) \quad U_n(\bar{x}';A,B,\phi) \leq C_2(\phi,K,\lambda) \quad \|A-B\|$$

Il est clair que les propriétés précédentes suffisent,en tenant compte de (1.20),à prouver que la suite $\mu_{n,\cdot,\cdot}$ $n\geq 1$ est équicontinue de ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times K$ dans $M_1(\mathbb{P}_{d-1})$ muni de la topologie de la convergence vague.
Il reste à prouver les affirmations 1) et 2).

1) Commençons par étudier $T_n(\bar{x},\bar{x}',A,\phi)$. On a

$$T_n(\bar{x},\bar{x}',A,\phi) = \Big|\frac{1}{[k(\lambda)]^n} \int [\rho^\lambda(\bar{x},A_1\, A_2 \ldots A_n)\, \frac{h_\lambda(\bar{x}.A_1\ldots A_n)}{h_\lambda(\bar{x})} - \rho^\lambda(\bar{x}';A_1\, A_2\ldots A_n)\, \frac{h_\lambda(\bar{x}'.A_1\ldots A_n)}{h_\lambda(\bar{x}')}]$$

$$\phi(A\, A_1\, A_2\ldots A_n\, y_0)dp(A_1)\ldots dp(A_n)\Big|$$

d'où il vient

$$T_n(\bar{x},\bar{x}';A,\phi) \leq \{\frac{1}{k(\lambda)^n} \int |\rho^\lambda(\bar{x},A_1\ldots A_n) - \rho^\lambda(\bar{x}';A_1\ldots A_n)|\, \frac{h_\lambda(\bar{x}.A_1\ldots A_n)}{h_\lambda(\bar{x})}$$

$$dp(A_1)\ldots dp(A_n) + \frac{1}{k^n(\lambda)} \Big|\int \rho^\lambda(\bar{x}';A_1\ldots A_n)(\frac{h_\lambda(\bar{x}.A_1\ldots A_n)}{h_\lambda(\bar{x})} - \frac{h_\lambda(\bar{x}';A_1\ldots A_n)}{h_\lambda(\bar{x})})$$

$$\phi(A\, A_1\, A_2\ldots A_n\, y_0)\, dp(A_1)\ldots dp(A_n)\Big|$$

$$= I_n(\bar{x},\bar{x}') + J_n(\bar{x},\bar{x}',A,\phi).$$

On a tout d'abord :

pour $\lambda \leq 1$ $$I_n(\bar{x},\bar{x}') \leq \sup_{\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} h_\lambda(\bar{x}) \frac{1}{\operatorname{Inf}_{\bar{x}} h_\lambda(\bar{x})} \frac{1}{k^n(\lambda)}$$

$$\times \int \|A\|^\lambda p^n(dA)\ 2^{\lambda/2}\ d^\lambda(\bar{x},\bar{x}')$$

$$\leq \sup_{\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} h_\lambda(\bar{x}) \frac{1}{\operatorname{Inf}_{\bar{x}} h_\lambda(\bar{x})} \times \frac{2^{\lambda/2}}{c} d^\lambda(\bar{x},\bar{x}')$$

et pour $\lambda \geq 1$

$$I_n(\bar{x},\bar{x}') \leq \sup_{\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} h_\lambda(\bar{x}) \frac{1}{\operatorname{Inf}_{\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} h_\lambda(\bar{x})} \frac{1}{c} \lambda \sqrt{2}\ d(\bar{x},\bar{x}')$$

Etudions maintenant $J_n(\bar{x},\bar{x}',A,\phi)$

$$J_n(\bar{x},\bar{x}',A,\phi) = \left| \frac{1}{[k(\lambda)]^n} \frac{h_\lambda(\bar{x}') - h_\lambda(\bar{x})}{h_\lambda(\bar{x})\ h_\lambda(\bar{x}')} \int \rho^\lambda(\bar{x}',A_1\ A_2\dots A_n) \right.$$

$$\left. h_\lambda(\bar{x}.A_1\dots A_n)\ \phi(A\ A_1\ A_2\dots A_n\ y_0)\ dp(A_1)\dots dp(A_n) \right|$$

$$+ \left| \frac{1}{[k(\lambda)]^n} \frac{1}{h_\lambda(\bar{x}')} \int \rho^\lambda(\bar{x}',A_1\ A_2\dots A_n)\ [h_\lambda(\bar{x}.A_1\dots A_n) - h_\lambda(\bar{x}'.A_1\dots A_n)] \right.$$

$$\left. \phi(A\ A_1\ A_2\dots A_n\ y_0)\ dp(A_1)\ dp(A_2\dots dp(A_n) \right|$$

d'où il résulte que

$$J_n(\bar{x},\bar{x}',A,\phi) \leq \frac{1}{\operatorname{Inf}_{\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} h_\lambda^2(\bar{x})} \sup_{\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} h_\lambda(\bar{x}) \frac{1}{c} \left| h_\lambda(\bar{x}) - h_\lambda(\bar{x}') \right|$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{Inf}_{\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} h_\lambda(\bar{x})} \times \frac{1}{[k(\lambda)]^n} \int \rho^\lambda(\bar{x}',A_1\ A_2\dots A_n) \left| h_\lambda(\bar{x}.A_1\dots A_n) - h_\lambda(\bar{x}'.A_1\dots A_n) \right|$$

$$dp(A_1)\dots dp(A_n)$$

Or, on sait que

$$|h_\lambda(\bar{x}) - h_\lambda(\bar{x}')| \leq \frac{2^{\lambda/2}}{c} \quad d^\lambda(\bar{x},\bar{x}') \qquad \text{pour} \qquad 0\leq\lambda\leq 1$$

et $$|h_\lambda(\bar{x}) - h_\lambda(\bar{x}')| \leq \frac{\lambda\sqrt{2}}{c} \quad d(\bar{x},\bar{x}') \qquad \text{pour} \qquad \lambda\geq 1$$

$\bar{x},\bar{x}' \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$

On a alors pour $0\leq\lambda\leq 1$, en désignant par x et x' deux représentants de normes 1 dans ${}^t\mathbb{R}^d$, de $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ les inégalités suivantes pour $0\leq\lambda\leq 1$

$$\frac{1}{[k(\lambda)]^n} \int \rho^\lambda(x;A_1 A_2\ldots A_n) \, |h_\lambda(\bar{x}.A_1\ldots A_n)-h_\lambda(\bar{x}'.A_1\ldots A_n)|\, dp(A_1)\ldots dp(A_n)$$

$$\leq \frac{1}{[k(\lambda)]^n} \frac{2^{\lambda/2}}{c} \int \|x'A_1\ldots A_n\|^\lambda \left\| \frac{x A_1\ldots A_n}{\|x A_1\ldots A_n\|} - \frac{x' A_1\ldots A_n}{\|x' A_1\ldots A_n\|}\right\|^\lambda dp(A_1)\ldots dp(A_n)$$

$$\leq \frac{1}{[k(\lambda)]^n} \frac{2^{\lambda/2}}{c} \int \left\| (x A_1\ldots A_n - x' A_1\ldots A_n) + x A_1\ldots A_n \left(\frac{\|x A_1\ldots A_n\| - \|x' A_1\ldots A_n\|}{\|x A_1\ldots A_n\|}\right)\right\|^\lambda$$

$$dp(A_1\ldots dp(A_n)$$

$$\leq \frac{1}{[k(\lambda)]^n} \frac{2^{\lambda/2}}{c} \quad 2\,\|x-x'\|^\lambda \int \|A_1\ldots A_n\|^\lambda \, dp(A_1)\ldots dp(A_n)$$

$$\leq \frac{2}{c^2} \; 2^\lambda \, d^\lambda(\bar{x},\bar{x}')$$

De façon analogue, on voit que pour $\lambda\geq 1$, on a l'inégalité

$$\frac{1}{[k(\lambda)]^n} \int \rho^\lambda(\bar{x};A_1\ldots A_n)|h_\lambda(\bar{x}.A_1\ldots A_n) - h_\lambda(\bar{x}'.A_1\ldots A_n)| \; dp(A_1)\ldots dp(A_n)$$

$$\leq \frac{4\lambda}{c^2} \; d(\bar{x},\bar{x}')$$

Les considérations précédentes suffisent à justifier (1.21).

2) Etudions maintenant la quantité $U_n(\bar{x}'\!,A,B,\phi)$.

$$U_n(x'\!,A,B,\phi) = \frac{1}{[k(\lambda)]^n} \left| \frac{1}{h_\lambda(\bar{x}')} \int \rho^\lambda(\bar{x}'\!.A_1 \ldots A_n)\, h_\lambda(\bar{x}'.A_1\, A_2 \ldots A_n)\right.$$

$$\left. [\phi(A\, A_1\, A_2 \ldots A_n \cdot y_0) - \phi(B\, A_1\, A_2 \ldots A_n \cdot y_0)]\; dp(A_1)dp(A_2)\ldots dp(A_n)\right|$$

ϕ étant Lipschitzienne, et A,B appartenant à un compact K, il existe une constante $c(\phi,K)$ telle que pour $A,B \in K$, on ait

$$\sup_{z,z' \in \mathbb{P}_{d-1}} |\phi(A.z) - \phi(B.z)| \leq c(\phi,K)\, \|A-B\|$$

On en déduit que pour $n \geq 1$, $A,B \in K$ $\quad x' \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ $\quad$ on a

$$U_n(\bar{x}'\!,A,B,\phi) \leq \sup_{\bar{x}' \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} h_\lambda(\bar{x}') \; \frac{1}{\inf\limits_{\bar{x}' \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} h_\lambda(\bar{x}')} \; \frac{1}{c}\; c(\phi,K)\, \|A-B\|$$

ce qui établit (1.22).

La suite $\mu_{n,\cdot,\cdot}$ $n \geq 1$ satisfait aux relations suivantes :

(1.23) $$\mu_{n+1,\bar{x},A} = \frac{1}{k(\lambda)} \frac{1}{h_\lambda(\bar{x})} \int \rho^\lambda(\bar{x},A_1)\, h_\lambda(\bar{x}.A_1)\, \mu_{n,\bar{x}.A_1,AA_1}\, dp(A_1)$$

(1.24) $$\mu_{n,\bar{x},A} = A\cdot\mu_{n,\bar{x},I}$$

$\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, $A \in GL(d,\mathbb{R})$, I désignant la matrice identité de $GL(d,\mathbb{R})$

Soit maintenant $\nu_{n,\cdot,\cdot}$ $n \geq 1$ la suite d'applications de ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times GL(d,\mathbb{R})$ dans $M_1(\mathbb{P}_{d-1})$ définie par

(1.25) $$\mu_{n,\cdot,\cdot} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_{k,\cdot,\cdot}\,.$$

Cette suite est comme la suite $\mu_{n,\cdot,\cdot}$ $n \geq 1$ équicontinue de ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times K$ dans

dans $M_1(\mathbb{P}_{d-1})$, K étant un compact quelconque de $GL(d,\mathbb{R})$; de plus, on a

$$(1.26)\quad \nu_{n,\bar{x},A} = \frac{1}{k(\lambda)}\ \frac{1}{h_\lambda(\bar{x})} \int \rho^\lambda(\bar{x},A_1)\ h_\lambda(\bar{x}\cdot A_1)\ \nu_{n,\bar{x}.A_1,AA_1}\, p(dA_1)$$

$$+\frac{1}{n}\ \mu_{1,\bar{x},A} - \frac{1}{n}\ \mu_{n+1,\bar{x},A}$$

A l'aide du théorème d'Ascoli, on peut extraire de la suite $\mu_{n,\cdot,\cdot}$ $n\geq 1$, une sous-suite convergeant uniformément sur les compacts de ${}^t\mathbb{P}_{d-1}\times GL(d,\mathbb{R})$. Soit $\mu_{\cdot,\cdot}$ cette limite. Elle vérifie d'après (1.26) l'égalité

$$(1.27)\quad \mu_{\bar{x},A} = \frac{1}{k(\lambda)}\ \frac{1}{h_\lambda(\bar{x})} \int \rho^\lambda(\bar{x},A_1)\ h_\lambda(\bar{x}.A_1)\ \mu_{\bar{x}.A_1,AA_1}\, p(dA_1)$$

$$\bar{x}\in {}^t\mathbb{P}_{d-1}\ ,\quad A\in Gl(d,\mathbb{R})$$

et d'autre part, on a d'après (1.24)

$$(1.28)\quad \mu_{\bar{x},A} = A\cdot\mu_{\bar{x},I} \qquad \bar{x}\in {}^t\mathbb{P}_{d-1}\ ,\quad A\in GL(d,\mathbb{R})$$

La probabilité $\mu_{\bar{x}} = \mu_{\bar{x},I}$ satisfait alors à l'équation

$$(1.29)\quad \mu_{\bar{x}} = \frac{1}{k(\lambda)}\ \frac{1}{h_\lambda(\bar{x})} \int \rho^\lambda(\bar{x},A_1)\ h_\lambda(\bar{x}.A_1)\ A_1\cdot\mu_{\bar{x}.A_1}\ dp(A_1)$$

$$\bar{x}\in {}^t\mathbb{P}_{d-1}.$$

D'autre part, il résulte de (1.21) que pour toute fonction ϕ continue sur $\mathbb{P}_{d-1}$, telle que $\sup\limits_{\bar{x}\in\mathbb{P}_{d-1}} |\phi(\bar{x})| = 1$ on a

$$|\mu_{\bar{x}}(\phi) - \mu_{\bar{x}'}(\phi)| \leq C_1(\lambda)\ d(\bar{x},\bar{x}')^{\mathrm{Inf}(\lambda,1)}$$

Par conséquent, si $\|\mu_{\bar{x}} - \mu_{\bar{x}'}\|$ est la norme en variation totale de la probabilité $\mu_{\bar{x}} - \mu_{\bar{x}'}$, sur $\mathbb{P}_{d-1}$ on a

(1.30) $\|\mu_{\bar{x}} - \mu_{\bar{x}'}\| \leq C_1(\lambda)\, d^{\mathrm{Inf}(\lambda,1)}(\bar{x},\bar{x}') \qquad \bar{x},\bar{x}' \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$

ce qui achève la preuve de la proposition 1.3.

<u>Démonstration du corollaire 2.1</u>

Soit F une fonction borélienne bornée sur G^n et ϕ une fonction continue sur $\mathbb{P}_{d-1}$. On a

$$^{\lambda}E_{\bar{x}}\,[F(A_1,A_2,\dots,A_n)\;\; A_1\, A_2\dots A_{n+1}\cdot\, \mu_{\bar{x}.A_1\dots A_{n+1}}(\phi)]$$

$$= \frac{1}{h_\lambda(\bar{x})}\;\frac{1}{[k(\lambda)]^{n+1}}\int dp(A_1)\dots dp(A_{n+1})\; F(A_1,A_2,\dots,A_n)\,\rho^\lambda(\bar{x},A_1\, A_2\dots A_{n+1})$$
$$h_\lambda(\bar{x}.A_1\dots A_{n+1})\int \phi(A_1\, A_2\dots A_{n+1}y)\;\mu_{\bar{x}.A_1\dots A_{n+1}}(dy)$$

$$= \frac{1}{h_\lambda(\bar{x})}\;\frac{1}{[k(\lambda)]^{n}}\int dp(A_1)\dots dp(A_n)\,\rho^\lambda(\bar{x},A_1\dots A_n)\; h_\lambda(\bar{x}.A_1\dots A_n)$$

$$\Big[\frac{1}{h_\lambda(\bar{x}.A_1\dots A_n)}\int dp(A_{n+1})\,\rho^\lambda(\bar{x}.A_1\dots A_n,A_{n+1})\,h_\lambda(\bar{x}.A_1\dots A_n\; A_{n+1})$$
$$\times\int \phi(A_1\dots A_n z)\;\; A_{n+1}\cdot\mu_{\bar{x}.A_1\dots A_n\; A_{n+1}}(dz)\Big]$$

En raison de la proposition 1.3 la relation entre [ ] est égale à

$$\int \phi(A_1\dots A_n.\, y)\;\;\mu_{\bar{x}.A_1\dots A_n}(dy)$$

et par conséquent, on a

$$^{\lambda}E_{\bar{x}}(F(A_1,\dots,A_n)\;\; A_1\; A_2\dots A_{n+1}\;\mu_{\bar{x}.A_1\dots A_{n+1}}(\phi)) = {}^{\lambda}E_{\bar{x}}[\,F(A_1,A_2,\dots,A_n)A_1\dots A_n\cdot\mu_{\bar{x}.A_1\dots A_n}(\phi)]$$

<u>$n \geq 1$</u>

Ceci suffit à prouver le corollaire 3.1.

1.3.2 Propriétés de contraction

Théorème 1.1 : *Si les hypothèses* (H) *sont satisfaites et si*

$\int \|A\|^\lambda \, p(dA) < +\infty$ *où* $\lambda > 0$.

Pour tout $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ *la suite* $A_1 A_2 \ldots A_n \cdot \mu_{\bar{x}}.A_1 A_2 \ldots A_n$ $n \geq 1$ *est une* ${}^\lambda P_{\bar{x}}$ *martingale dans* $M^1(\mathbb{P}_{d-1})$ *qui converge* ${}^\lambda P_{\bar{x}}$ *ps vers une mesure de Dirac* ε_Z.
De même pour toute probabilité irréductible $\alpha \in M_1(\mathbb{P}_{d-1})$ *on a*

$${}^\lambda P_{\bar{x}} \text{ ps } \lim_n A_1 A_2 \ldots A_n \alpha = \varepsilon_Z$$

et pour toute fonction ϕ *continue sur* $\mathbb{P}_{d-1}$

$$\int \phi(y)\, \mu_{\bar{x}}(dy) = {}^\lambda E_{\bar{x}}\{\phi(Z)\} \qquad \bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$$

Avant de faire la démonstration du théorème 1.1, énonçons et prouvons la

Proposition 1.4 : *Sous les hypothèses du théorème 1.1 pour tout* $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ $\mu_{\bar{x}} \in M_1(\mathbb{P}_{d-1})$ *est une probabilité irréductible.*

Démonstration de la proposition 1.4

a) Traitons tout d'abord le cas $\lambda = 0$, alors $\mu_{\bar{x}} = \nu$, ν étant une probabilité p invariante portée par P_{d-1}. Considérons l'ensemble des sous-variétés projectives W de $\mathbb{P}_{d-1}$ telles que $\nu(W) > 0$ et de dimension minimum. Si W_1 et W_2 sont de telles sous-variétés distinctes, on a $\nu(W_1 \cap W_2) = 0$ car $\dim(W_1 \cap W_2)$ est inférieure à $\dim W_1 = \dim W_2$.

Donc pour tout $\delta > 0$, l'ensemble des sous-variétés du type précédent vérifiant $\nu(W) > \delta$ est fini et donc il existe un W_0 maximisant $\nu(W)$. De plus, on a l'équation de convolution

$$\nu(W_0) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \int \nu(g^{-1}W_0)\, dp^n(g)$$

La famille finie $\mathcal{F} = \{g^{-1}W_0;\ \nu(g^{-1}W_0) = \nu(W_0)\}$ est donc stable par T_p et donc aussi par G_p ; il en résulte que W_0 est stable par un sous-groupe d'indice fini de G_p ce qui contredit l'hypothèse.

b) Supposons désormais que $\lambda > 0$.
Soit V_k l'ensemble des sous-variétés projectives de $\mathbb{P}_{d-1}$ de dimension inférieure ou égale à k.
Posons $m_k(\bar{x}) = \sup\{\mu_{\bar{x}}(W)\ ;\ W \in V_k\}$
Nous nous proposons de démontrer que pour tout k / $1\leq k\leq d-1$, on a $m_k(\bar{x}) = 0$.
Nous allons raisonner par récurrence sur k

b_1) Supposons tout d'abord que k=1.
Remarquons que l'application $\bar{x} \to m_1(\bar{x})$ est continue sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.
En effet, sinon il existerait un point $\bar{x}_0 \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, un réel $\delta > 0$ et une suite $(\bar{x}_n)_{n\geq 1} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ tels que l'on ait : $\lim_n \bar{x}_n = \bar{x}_0$

(1.31) pour tous $n\geq 1$ $|m_1(\bar{x}_n) - m_1(\bar{x}_0)| > \delta$.

D'autre part, en raisonnant comme en a), on voit que pour tout $n\geq 0$ on a

$$m_1(\bar{x}_n) = \mu_{\bar{x}_n}(y_n) \qquad y_n \in \mathbb{P}_{d-1}$$

On peut d'ailleurs supposer sans restriction que la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ converge vers un élément $y_0' \in \mathbb{P}_{d-1}$.
On a alors pour tout $n\geq 1$

$$|\mu_{\bar{x}_n}(y_n) - \mu_{\bar{x}_0}(y_0')| \leq \|\mu_{\bar{x}_n} - \mu_{\bar{x}_0}\| + |\mu_{\bar{x}_0}(y_n) - \mu_{\bar{x}_0}(y_0')|$$

d'où il résulte que $\lim_n \mu_{\bar{x}_n}(y_n) = \mu_{\bar{x}_0}(y_0')$

De plus, pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu_{\bar{x}_n}(y_0) \leq \mu_{\bar{x}_n}(y_n)$$

d'où l'on déduit par passage à la limite que

$$m_1(\bar{x}_0) = \mu_{\bar{x}_0}(y_0) \leq \mu_{\bar{x}_0}(y_0')$$

De l'inégalité (1.31) et de ce qui précède, il résulte alors que

$$\mu_{\bar{x}_0}(y_0') - m_1(\bar{x}_0) \geq \delta > 0$$

ce qui contredit la définition de $m_1(\bar{x}_0)$.

Par conséquent $x \to m_1(\bar{x})$ est continue sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.

D'autre part, pour tout $n \geq 1$ on a

(1.32) $$m_1(\bar{x}) \leq \frac{1}{[k(\lambda)]^n h_\lambda(\bar{x})} \int \rho^\lambda(\bar{x},A)\, h_\lambda(\bar{x}.A)\, m_1(\bar{x}.A)\, dp^n(A)$$

Donc si $\bar{x}_0$ est un point de ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ où m_1 atteint son maximum, on a pour tout $n \geq 1$

$$m_1(\bar{x}_0) = \int m_1(\bar{x}_0 A)\, p^n(dA)$$

d'où l'on déduit par passage à la limite en n que

$$m_1(\bar{x}_0) = \tilde{\nu}(m_1)$$

et par conséquent que $m_1(\bar{x}) = m_1(\bar{x}_0)$ pour tout $\bar{x}$ du support de $\tilde{\nu}$.

Si $m_1(\bar{x}_0) = \sup_{\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} m_1(\bar{x}) = 0$, on a bien $m_1(\bar{x}) = 0$ pour tout $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$.

Supposons maintenant que $m_1(\bar{x}_0) > 0$.

Pour tout $\bar{x}$ du support $S_{\tilde{\nu}}$ de $\tilde{\nu}$, soit $S^1_{\bar{x}} = \{y \in \mathbb{P}_{d-1} \;;\; \mu_{\bar{x}}(y) = m_1(\bar{x}_0)\}$; sous l'hypothèse précédente $S^1_{\bar{x}}$ est non vide et fini.

De la proposition 1.3, il résulte que si $y \in S^1_{\bar{x}}$ on a :

$$\mu_{\bar{x}}(y) = \mu_{\bar{x}.A}(A^{-1}y) \qquad \text{pour presque tout A du support de } p^n \quad n \geq 1.$$

ce qui établit que

(1.33) $A^{-1}\, S^1_{\bar{x}} \subset S^1_{\bar{x}.A}$

pour presque tout A du support de p^n $n \geq 1$.

Grâce à l'inégalité

$$\|\mu_{\bar{x}} - \mu_{\bar{x}'}\| \leq C_1(\lambda)\, d^{\mathrm{Inf}(\lambda,1)}(\bar{x},\bar{x}')$$

on peut, d'autre part, conclure que dès que

$$d^{\mathrm{Inf}(\lambda,1)}(\bar{x},\bar{x}') < \frac{m_1(\bar{x}_0)}{2C_1(\lambda)} \qquad \bar{x},\bar{x}' \in S_\nu$$

on a $S^1_{\bar{x}} = S^1_{\bar{x}'}$.

L'ensemble $F_1 = \bigcup_{\bar{x} \in S_\nu} S^1_{\bar{x}}$ est donc fini, et d'après l'inclusion (1.33) stable par T_p^{-1} et donc aussi par G_p. Chaque élément de F_1 est alors invariant par un sous-groupe d'indice fini de G_p ce qui contredit l'hypothèse d'irréductibilité H 1).

Par conséquent, $m_1(\bar{x}_0) = 0$ et donc $m_1(\bar{x}) = 0$ pour tout $\bar{x}$ de ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.

b_2) Soit $1 \leq k_0 \leq d-1$. Supposons que pour tout $1 \leq k \leq k_0$ $m_k(\bar{x}) = 0$, $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$.
Montrons que $m_{k_0+1}(\bar{x}) = 0$ pour tout $\bar{x}$ de ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.
Pour cela, commençons par établir que m_{k_0+1} est continue sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.

Remarquons tout d'abord que pour tout $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, il existe une sous-variété projective H de dimension k_0+1 telle que

$$m_{k_0+1}(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}}(H)$$

si $m_{k_0+1}(\bar{x}) = 0$ c'est évident ; si $m_{k_0+1}(\bar{x}) > 0$ l'ensemble des sous-variétés projectives H de dimension k_0+1 telles que $\mu_{\bar{x}}(H) > \frac{1}{2} m_{k_0+1}(\bar{x})$ est fini puisque si H^1 et H^2 sont deux telles sous-variétés, on a d'après l'hypothèse de récurrence $\mu_{\bar{x}}(H^1 \cap H^2) = 0$, et l'affirmation précédente s'en déduit immédiatement.

Supposons que m_{k_0+1} ne soit pas continue. Il existe alors un point $\bar{x}_0 \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, un réel $\delta > 0$ et une suite $(\bar{x}_n)_{n\geq 1}$ de ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ tels que

$$\lim_{n\geq 1} \bar{x}_n = \bar{x}_0$$

et

(1.34) $\quad |m_{k_0+1}(\bar{x}_n) - m_{k_0+1}(\bar{x}_0)| > \delta$ pour tout $n\geq 1$.

On a $\quad m_{k_0+1}(\bar{x}_n) = \mu_{\bar{x}_n}(H_n) \qquad n\geq 0$

où H_n est une sous-variété projective de $\mathbb{P}_{d-1}$ de dimension k_0+1.

On peut supposer que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ converge vers une sous-variété projective H_0' de $\mathbb{P}_{d-1}$.

Distinguons plusieurs cas :

α) si H_0' est de dimension k_0+1, on a :

$$\mu_{\bar{x}_n}(H_n) \geq \mu_{\bar{x}_n}(H_0) \qquad n\geq 1$$

Par un passage à la limite en n, que l'on justifie comme au paragraphe b_1) , on en déduite que

(1.35) $\quad \mu_{\bar{x}_0}(H_0') \geq \mu_{\bar{x}_0}(H_0) = m_{k_0+1}(\bar{x}_0)$.

D'autre part, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (1.34), on obtient aussi

(1.36) $\quad |\mu_{\bar{x}_0}(H_0') - m_{k_{0+1}}(x_0)| > \delta$

Les inégalités (1.35) et (1.36) sont incompatibles avec la définition de $m_{k_0+1}(\bar{x}_0)$.

β) si H'_0 est de dimension inférieure ou égale à k_0, on a d'après (1.35) $m_{k_0+1}(\bar{x}_0) = 0$; de plus, $\mu_{\bar{x}_0}(H'_0) = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence, et l'inégalité (1.36) ne peut être satisfaite.

Nous pouvons donc conclure que m_{k_0+1} est continue sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.
Le même raisonnement que celui effectué au paragraphe b_1) permet de conclure que m_{k_0+1} est nulle sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$. Pour cela, il suffit de substituer m_{k_0+1} à m_1, et

$$S_{\bar{x}}^{k_0+1} = \{H \ ; \ H \in W_{k_0+1} \quad \mu_{\bar{x}}(H) = m_{k_0+1}(\bar{x})\}$$

à $S_{\bar{x}}^1$ $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, où W_{k_0+1} désigne l'ensemble des sous-variétés projectives de dimension k_0+1 de ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.

Donnons maintenant la

Démonstration du théorème 1.1

Nous utiliserons le

Lemme 1.3 : *Soit* τ *la probabilité* $\tau = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} p^n$ *et* $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, *pour* ${}^\lambda P_{\bar{x}} \times \tau$ *presque tout* $(\omega,A) \in [GL(d,\mathbb{R})]^{\mathbb{N}} \times GL(d,\mathbb{R})$, *les suites*

$$A_1(\omega)\, A_2(\omega)\ldots A_n(\omega).\,\mu_{\bar{x}.A_1(\omega)\, A_2(\omega)\ldots A_n(\omega)} \qquad n\geq 1$$

et

$$A_1(\omega)\, A_2(\omega)\ldots A_n(\omega)\, A.\,\mu_{\bar{x}.A_1(\omega)\, A_2(\omega)\ldots A_n(\omega)\, A} \qquad n\geq 1$$

convergent vaguement vers la même limite.

Démonstration du lemme 1.3

La suite $A_1\, A_2\ldots A_n \cdot \mu_{\bar{x}.A_1\ldots A_n}$ $n\geq 1$ est une ${}^\lambda \mathbb{P}_{\bar{x}}$ martingale à valeurs dans $M_1(\mathbb{P}_{d-1})$ (corollaire 1.1) ; elle converge donc ${}^\lambda P_{\bar{x}}$ ps pour la topologie vague sur $M_1(\mathbb{P}_{d-1})$.

Notons $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{d-1})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{P}_{d-1}$ et soit $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{P}_{d-1})$.

La fonction $F(A,\bar{x}) = A.\mu_{\bar{x}}(\phi)$ $\quad \bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, $A \in GL(d,\mathbb{R})$ satisfait à l'égalité

(1.37) $F(A,\bar{x}) = {}^{\lambda}E_{\bar{x}}(F(A\,A_1,\bar{x}.A_1))$.

Soient p et r deux entiers ; en utilisant (1.37), on obtient que

$$(1.38)\quad \sum_{n=1}^{p} {}^{\lambda}E_{\bar{x}}\,\{ F(A_1\,A_2\ldots A_{n+r},\, \bar{x}.A_1\,A_2\ldots A_{n+r}) - F(A_1\ldots A_n,\bar{x}.A_1\ldots A_n)\}^2$$

$$= \sum_{n=1}^{p} {}^{\lambda}E_{\bar{x}}\, F^2(A_1\,A_2\ldots A_{n+r},\bar{x}.A_1\ldots A_{n+r}) - {}^{\lambda}E_{\bar{x}}\, F^2(A_1\ldots A_n,\bar{x}.A_1\ldots A_n)$$

$$\leq 2r \sup_{\bar{x}\in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} |\phi(\bar{x})|.$$

Comme $\mu(A) = \operatorname{Inf}_{||x||=1} ||xA||$ on a l'inégalité :

$$(1.39)\quad \sum_{n=1}^{p} {}^{\lambda}E_{\bar{x}}\,\{ F(A_1A_2\ldots A_{n+r},\, \bar{x}.A_1\ldots A_{n+r}) - F(A_1\ldots A_n,\bar{x}.A_1\ldots A_n)\}^2$$

$$\geq \frac{1}{[k(\lambda)]^r}\,\frac{\operatorname{Inf} h\lambda}{\sup h\lambda} \sum_{n=1}^{p} \int p^r(dA)\,\mu^{\lambda}(A)\,{}^{\lambda}E_{\bar{x}}\,\{F(A_1A_2\ldots A_nA,\bar{x}.A_1A_2\ldots A_nA)$$

$$- F(A_1A_2\ldots A_n,\bar{x}.A_1\ldots A_n)\}^2$$

Soit alors $s(\lambda) = \dfrac{k(\lambda)}{\overline{\lim}_n\, [\int(\mu(A))^{\lambda}\, dp^n(A)]^{1/n}}$ et $s_1(\lambda) = \operatorname{Inf}\{\frac{1}{2}, \frac{s(\lambda)}{2}\}$.

Notons de plus τ_λ la mesure finie définie sur $GL(d,\mathbb{R})$ par :

$$\tau_\lambda(dA) = \sum_{r=1}^{+\infty} [s_1(\lambda)]^r \int \mu^{\lambda}(A)\quad p^r(dA).$$

De (1.38) et de (1.39) il résulte que :

$$\left(\frac{\operatorname{Inf} h_\lambda}{\sup h_\lambda}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \int \tau_\lambda(dA)\ {}^{\lambda}E_{\overline{x}}\ \{F(A_1A_2\ldots A_nA,\overline{x}\ A_1 1_2\ldots A_nA)$$

$$- F(A_1A_2\ldots A_n,\overline{x}.A_1A_2\ldots A_n)\}^2 \leq 2 \sup_{\overline{x}\in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} |\Phi(\overline{x})| \sum_{r=1}^{\infty} r\,[s_1(\lambda)]^r < +\infty$$

On en déduit que pour ${}^{\lambda}P_{\overline{x}} \times \tau_\lambda$ presque tout (ω,A)

$$\sum_{n=1}^{\infty} [F(A_1A_2\ldots A_nA,\ \overline{x}.A_1A_2\ldots A_nA) - F(A_1\ldots A_n,\ \overline{x}.A_1\ldots A_n)]^2 < +\infty$$

ce qui entraîne que pour ${}^{\lambda}P_{\overline{x}} \times \tau_\lambda$ presque tout (ω,A)

$$(1.40)\qquad \lim_n F(A_1\ldots A_nA,\ \overline{x}.A_1A_2\ldots A_nA) = \lim_n F(A_1\ldots A_n,\overline{x}.A_1\ldots A_n).$$

Comme d'autre part τ_λ et τ ont même support (1.40) est également vérifiée pour ${}^{\lambda}P_{\overline{x}} \times \tau$ presque tout (ω,A).

Le lemme 1.3 se déduit de ce qui précède en notant qu'une suite de probabilités $(\nu_n)_{n\geq 1}$ de $M_1(\mathbb{P}_{d-1})$ converge vaguement si et seulement si la suite $(\nu_n(\Phi_i))_{n\geq 1}$ converge pour une suite dense $(\Phi_i)_{i\geq 1}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{P}_{d-1})$

Terminons maintenant la démonstration du théorème 1.1. D'après le lemme précédent pour toute suite $(M_i)_{i\geq 1}$ dense de T_p il existe un ensemble Ω_o tel que ${}^{\lambda}P_{\overline{x}}(\Omega_o) = 1$ et tel que

$\forall\, \omega \in \Omega_o$, $\forall\ i\geq 1$ on ait :

$$\lim_n A_1(\omega)\ A_2(\omega)\ldots A_n(\omega)\ M_i\ \mu_{\overline{x}.A_1(\omega)\ldots A_n(\omega)M_i}$$

$$= \lim_n A_1(\omega)\ A_2(\omega)\ A_n(\omega)\ \mu_{\overline{x}.A_1(\omega)\ldots A_n(\omega)} = \theta(\omega)$$

Soit $\omega \in \Omega_o$, il existe une suite $(n_k)_{k\geq 1}$ d'entiers telle que la suite

$(A_1(\omega)\ A_2(\omega)\ldots A_{n_k}(\omega))_{k\geq 1}$ converge vers une application quasi-projective $\tau(\omega)$,

et telle que la suite $(\overline{x}, A_1(\omega)\ A_2(\omega)\ldots A_{n_k}(\omega))_{k\geq 1}$ converge vers un élément

$\overline{y}(\omega)$ de ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.

Puisque d'après la proposition 1.4 $\mu_{\overline{y}(\omega)}$ et $\mu_{\overline{y}(\omega).M_i}$ ne chargent pas de sous variété projective de $\mathbb{P}_{d-1}$ on a pour tout $i\geq 1$:

$$\tau(\omega)\ M_i\,\mu_{\overline{y}(\omega).M_i} = \tau(\omega)\ \mu_{\overline{y}(\omega)} = \theta(\omega).$$

En passant à la fermeture, on en déduit que pour toute matrice N de T_p on a :

$$(1.41)\qquad \tau(\omega)\ N.\mu_{\overline{y}(\omega).N} = \tau(\omega)\ \mu_{\overline{y}(\omega)} = \theta(\omega)$$

On peut choisir une suite contractante $(N_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{P}_{d-1}$ telle que la suite de mesure $N_n\cdot\mu_{\overline{y}(\omega).N_n}$ $n\geq 1$ converge vers une mesure de Dirac $\varepsilon_{Z_1}(\omega)$.

De (1.41) il résulte que $\tau(\omega)\ Z_1(\omega)$ est défini et que

$$\tau(\omega)\ Z_1(\omega) = \tau(\omega)\ \mu_{\overline{y}(\omega)} = \theta(\omega).$$

Ce qui montre que $\tau(\omega)$ est de rang 1, et donc que $\theta(\omega)$ est une mesure de Dirac $Z(\omega)$.Ceci établit la première assertion du théorème 1.1

D'autre part le raisonnement précédent montre que pour $\omega \in \Omega_o$, toute valeur d'adhérence (au sens des applications quasi-projectives) de la suite $A_1(\omega)\ A_2(\omega)\ A_n(\omega)$ $n\geq 1$ a pour image $Z(\omega)$; donc pour toute probabilité irréductible $\alpha \in M_1(\mathbb{P}_{d-1})$ et tout $\omega \in \Omega_o$ on a :

$$\lim_n\ A_1(\omega)\ A_2(\omega)\ldots A_n(\omega).\alpha = \varepsilon_{Z(\omega)}$$

Enfin de l'égalité

$$\int \Phi(y)\,\mu_{\overline{x}}(dy) = {}^{\lambda}E_{\overline{x}}\left[\int \Phi(A_1\ A_2\ldots A_n\ y)\,\mu_{\overline{x}.A_1\ldots A_n}(dy)\right]\quad n\geq 1$$

On déduit de ce qui précède par passage à la limite l'égalité :

$$\int \Phi(y)\, \mu_{\overline{x}}(dy) = {}^{\lambda}E_{\overline{x}}\, \Phi(Z(\omega))$$

Enonçons et démontrons maintenant un corollaire du théorème 1.1 qui nous sera utile par la suite.

Proposition 1.5 *Sous les hypothèses du théorème 1.1 pour tout* $u \in {}^t\mathbb{R}^d$ *tel que* $||u|| = 1$ *, la suite*
$\dfrac{||u\, A_1\, A_2 \ldots A_n||}{||A_1\, A_2 \ldots A_n||}$ *converge* ${}^{\lambda}P_{\overline{x}}$ *presque-sûrement vers une variable aléatoire strictement positive.*

Démonstration de la proposition 1.5

Considérons la décomposition de Cartan

$$A_1\, A_2 \ldots A_n = k_1(n)\, a(n)\, k_2(n) \qquad n \geq 1$$

et écrivons u sous la forme $u = (1,0,\ldots 0)\, k = \tilde{e}_1\, k$ où k est une matrice orthogonale. Il vient alors :

$$||u\, A_1\, A_2 \ldots A_n|| = ||\tilde{e}_1\, k\, k_1(n)\, a(n)\, k_2(n)|| \quad n \geq 1$$

Posons $x(n) = k\, k(n) = (x(n))_{i,j} \quad 1 \leq i,j \leq d$

On a alors :

$$||u\, A_1\, A_2 \ldots A_n||^2 = x^2_{1,1}(n)\, a^2_1(n) + x^2_{1,2}\, a^2_2(n) + \ldots + x^2_{1,d}\, a^2_d(n)$$

et $||A_1\, A_2 \ldots A_n||^2 = a^2_1(n)$

d'où

$$\text{(1.41)} \qquad \frac{||u\, A_1\, A_2 \ldots A_n||^2}{||A_1\, A_2 \ldots A_n||^2} = x^2_{1,1}(n) + x^2_{1,2}(n)\, \frac{a^2_2(n)}{a^2_1(n)} + \ldots + x^2_{1,d}(n)\, \frac{a^2_d(n)}{a^2_1(n)}$$

Si les hypothèses (H) sont satisfaites, on a ${}^{\lambda}P_{\overline{x}}$ ps $\lim\limits_n A_1\, A_2 \ldots A_n\, m = \varepsilon_Z$ m désignant la probabilité invariante par rotation portée par $\mathbb{P}_{d-1}$. Il résulte de cette convergence que :

a) $\lambda_{P_{\overline{x}}}$ ps $\lim_n \frac{a_j(n)}{a_1(n)} = 0$ pour $1 \leq j \leq d$

b) $\lambda_{P_{\overline{x}}}$ ps $\lim_n k_1(n) \cdot \overline{e}_1 = Z(\omega)$ où $\overline{e}_1$ est l'image dans $\mathbb{P}_{d-1}$

du vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$.

De l'égalité $|x_{1,1}(n)| = |<\tilde{e}_1 k,\ k_1(n)\ e_1>|$ et du b) précédent, on conclut que :

$$\lambda_{P_{\overline{x}}} \text{ ps } \quad \lim_n |x_{1,1}(n)| = |<\tilde{e}_1\ k,\ Z(\omega)|$$

cette limite est $\lambda_{P_{\overline{x}}}$ presque sûrement non nulle car la loi $\mu_{\overline{x}}$ de Z pour $\lambda_{P_{\overline{x}}}$ ne change pas de sous variété projective de $\mathbb{P}_{d-1}$.

En utilisant a) et l'égalité (1.41), on conclut facilement que :

$$\lambda_{P_{\overline{x}}} \text{ ps } \quad \lim_n \frac{||u\ A_1 \ldots A_n||}{||A_1\ A_2 \ldots A_n||} = |<\tilde{e}_1 k,\ Z(\omega)>|$$

1.3.3. Négativité d'un cocycle

Commençons par préciser quelques notations.

Appelons ${}^tM$ l'espace constitué par l'espace produit ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ auquel on a retiré sa diagonale ; nous compactifions M en lui adjoignant l'espace des drapeaux ${}^t\mathbb{P}_{1,2}^{d-1}$ de dimension 2, c'est-à-dire l'espace des couples (E_1, E_2) de sous-espaces vectoriels de ${}^t\mathbb{R}^d$ tels que $E_1 \subset E_2$ et $\dim E_i = i$ $i=1,2$.

Nous disons qu'une suite $\{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)\}$ d'éléments de ${}^tM$ converge vers l'élément $(\bar{u}, (\bar{u}, \bar{v}))$ de ${}^t\mathbb{P}_{1,2}^{d-1}$ si la suite $\{(\bar{u}_n, \bar{v}_n))\}$ de ${}^t\mathbb{P}_{1,2}^{d-1}$ associée à la suite $\{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)\}$ converge vers $(\bar{u}, (\bar{u}, \bar{v}))$. Nous notons $\overline{{}^tM}$ ce compactifié de ${}^tM$.

Posons alors

$$\sigma[(\bar u,\bar v),A] = \frac{d(\bar u A,\bar v A)}{d(\bar u,\bar v)} \qquad \bar u \neq \bar v \in {}^t\mathbb{P}_{d-1} \qquad A \in GL(d,\mathbb{R})$$

$$\sigma((\bar u,(\bar v)),A) = \frac{\|uA \wedge vA\|}{\|uA\|^2\ \|u\wedge v\|}$$

$A \in GL(d,\mathbb{R})$ $(\bar u,(\bar u,\bar v)) \in {}^t\mathbb{P}^{d-1}_{1,2}$ où u (resp v) est un représentant dans ${}^t\mathbb{R}^d$ de norme 1 de $\bar u$ (resp $\bar v$). L'application σ est alors un cocycle continu sur ${}^t\overline{M} \times GL(d,\mathbb{R})$ c'est-à-dire satisfait à la relation

$$\sigma(\xi,AB) = \sigma(\xi A,B)\ \sigma(\xi,B)$$

$$A,B \in GL(d,\mathbb{R}), \quad \xi \in {}^t\overline{M}$$

Nous nous proposons d'établir maintenant le

Théorème 1.2 : *Si les hypothèses du théorème 1.1 sont satisfaites et de plus si* $\int \|A\|^\lambda\ |\mathrm{Log}\ \|A\|\ \ p(dA)| < +\infty$, *pour toute probabilité* η *sur* ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\overline{M}$ *satisfaisant à l'équation d'invariance*

$$(1.42) \qquad \int f(\bar x,\xi)\ \eta(d\bar x,d\xi) = \int \eta(d\bar x,d\xi)\ {}^\lambda E_{\bar x}\ f(\bar x.A_1,\xi A_1)$$

où f *est une fonction continue quelconque sur* ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\overline{M}$ *, on a l'inégalité*

$$\int {}^\lambda E_{\bar x}\ \mathrm{Log}\ \sigma(\xi A_1)\ \eta(d\bar x,d\xi) < 0$$

qui admet le

Corollaire 1.2 : *Sous les hypothèses du théorème 1.2 , pour toute suite* $(\bar x_n,\xi_n)_{n\geq 1} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\overline{M}$

on a

$$\overline{\lim_n}\ \frac{1}{n}\ {}^\lambda E_{\bar x_n}\ \mathrm{Log}\ \sigma(\xi_n,A_1A_2\ldots A_n) < 0$$

Démonstration du théorème 1.2

Notons $\mathcal{C}({}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\overline{M})$ l'espace des fonctions continues sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\overline{M}$.

L'opérateur défini par

$${}^{\lambda}Q\, f(\overline{x},\xi) = {}^{\lambda}E_{\overline{x}}\, f(\overline{x}.A_1,\ \xi.A_1) \qquad f \in \mathcal{C}({}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\overline{M}) \qquad \overline{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}, \qquad \xi \in {}^t\overline{M}$$

est un opérateur Markovien continu sur $\mathcal{C}({}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\overline{M})$.

D'après le théorème de Markov-Kakutani, il existe donc sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\overline{M}$ des probabilités invariantes par ${}^{\lambda}Q$, c'est-à-dire des probabilités satisfaisant à (1.42).

Soit η l'une d'elle.

Sur l'espace $\Omega_1 = (GL(d,\mathbb{R}) \times {}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\overline{M})^{\mathbb{N}} = \{(A_i,\ \overline{x}_{i-1},\ \xi_{i-1}) \quad i \geq 1\}$ nous considérons un système dynamique : nous appelons Π la probabilité sur Ω_1 définie par :

$$\Pi\,\{\omega_1 \ /\ (A_i,\ \overline{x}_{i-1},\ \xi_{i-1}) \in \mathcal{A}_i \times \mathcal{B}_{i-1} \times \mathcal{C}_{i-1} \qquad 1 \leq i \leq n\}$$

$$= \frac{1}{[k(\lambda)]^n} \int \eta(d\overline{x},\ d\xi)\ \ \rho^{\lambda}(\overline{x},\ A_1 \ldots A_n)\ \ \frac{h_\lambda\ (\overline{x}.A_1 \ldots A_n)}{h_\lambda(\overline{x})}$$

$$\prod_{i=1}^{n} 1_{\mathcal{A}_i}(A_i) \qquad \prod_{i=1}^{n} 1_{\mathcal{B}_{i-1}}(\overline{x}.A_1 \ldots A_{i-1}) \qquad \prod_{i=1}^{n} 1_{\mathcal{C}_{i-1}}(\xi A_1 \ldots A_{i-1})$$

$$dp(A_1)\ dp(A_2)\ \ldots\ dp(A_n).$$

Soit d'autre part θ la transformation sur Ω_1 définie par :

si $\omega_1 = \{(A_i,\ \overline{x}_{i-1},\ \xi_i)_{i \geq 1}\}$ on a $\theta\omega_1 = \{(A_{i+1},\ \overline{x}_{i-1}\cdot A_i,\ \xi_{i-1}\cdot A_i) \quad i \geq 1\}$

La probabilité Π est θ-invariante.

Sur Ω_1 définissons la fonction H suivante :

$$H(\omega_1) = \mathrm{Log}\ \sigma(\xi_o,\ A_1)$$

On a pour tout entier $N \geq 1$:

$$\mathrm{Log}\ \sigma(\xi,\ A_1\ A_2 \ldots A_n) = \sum_{k=0}^{N-1} H \circ \theta^k(\omega_1)$$

et également :

$$\int H(\omega_1)\ \Pi(d\omega_1) = \int \eta(d\bar{x},\ d\xi)\ {}^{\lambda}E_{\bar{x}}\ \mathrm{Log}\ \sigma(\xi,A_1)$$

Le lemme de théorie ergodique suivant [10] appliqué au système dynamique $(\Omega_1, \vartheta, \Pi)$ permet de prouver la conclusion du théorème 1.2, en s'assurant que Π p s $\lim\limits_n \mathrm{Log}\, \sigma(\xi,\ A_1 \ldots A_n) = -\infty$.

<u>Lemme 1.4</u> : *Soit* (E,T,α) *un système dynamique où* α *est une mesure invariante finie,* h *une fonction* α *intégrable telle que* $\sum\limits_{k=0}^{n-1} h \circ T^k$ *converge p p vers* $-\infty$ *alors* $\int_E h\, d\alpha < 0$.

Or ceci résulte du :

<u>lemme 1.5</u> : *Pour tout* $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, *et tout* $\xi \in {}^t\bar{M}$ *on a* ${}^{\lambda}P_{\bar{x}}$ p s

$\lim\limits_n\ \sigma(\xi,\ A_1\ A_2 \ldots A_n) = 0$

qui se déduit du théorème 1.1

La preuve du théorème 1.2 est donc achevée par la démonstration de ce lemme.

<u>Démonstration du lemme 1.5</u>.

D'après la proposition 1.5, il suffit de montrer que pour tous vecteurs $u,v \in {}^t\mathbb{R}^d$, de norme 1, on a ${}^{\lambda}P_{\bar{x}}$ p s.

$$(1.43) \qquad \lim_n \frac{||u\ A_1\ A_2 \ldots A_n\ \Lambda\ v\ A_1\ A_2 \ldots A_n||}{||A_1\ A_2 \ldots A_n||^2} = 0.$$

Nous pouvons supposer que u et v sont orthogonaux et alors écrire :

$u = \tilde{e}_1\ k \qquad v = \tilde{e}_2\ k \qquad$ avec $\qquad \tilde{e}_1 = (1,0,\ldots 0) \qquad \tilde{e}_2 = (0,1,0,\ldots 0)$

Reprenant les notations utilisées dans la preuve de la proposition 1.5, on a :

$$(1.44) \qquad ||A_1\ A_2 \ldots A_n|| = a_1(n)$$

et

$$(1.45) \qquad u\ A_1 \ldots A_n = a_1(n)\ x_{1,1}(n)\ \tilde{e}_1 + a_1(n)\ o\ (n)$$

$$(1.46) \qquad v\ A_1 \ldots A_n = a_1(n)\ x_{2,1}(n)\ \tilde{e}_2 + a_1(n)\ o\ (n).$$

Les deux dernières égalités étant justifiées par le fait que ${}^{\lambda}P_{\bar{x}}$ p s on a :

$$\lim_n \frac{a_j(n)}{a_1(n)} = 0 \qquad 2 \leq j \leq d.$$

Les égalités (1.44) (1.45) et (1.46) entraînent que ${}^{\lambda}P_{\bar{x}}$ p s on a (1.43).

Donnons maintenant la

Démonstration du corollaire 1.2

Soit $F \in \mathcal{C}({}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\bar{M})$ définie par $F(\bar{x},\xi) = {}^{\lambda}E_{\bar{x}} \operatorname{Log} \sigma(\xi, A_1)$.

Pour tous $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, $\xi \in {}^t\bar{M}$, et $n \geq 1$, on a l'égalité :

$$ {}^{\lambda}E_{\bar{x}} \log \sigma(\xi, A_1 A_2 \ldots A_n) = \sum_{p=1}^{n} {}^{\lambda}Q^p F(\bar{x},\xi).$$

Les seules valeurs d'adhérence de la suite $\frac{1}{n} {}^{\lambda}E_{\bar{x}_n} \log \sigma(\xi_n, A_1 A_2 \ldots A_n)$

$\bar{x}_n \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ $\xi_n \in {}^t\bar{M}$ $n \geq 1$ sont donc de la forme :

$$\int F(\bar{x},\xi) \ \eta(d\bar{x}, d\xi) = \int {}^{\lambda}E_{\bar{x}} \operatorname{Log} \sigma(\bar{x},A_1) \ \eta(d\bar{x},d\xi)$$

où η est une probabilité sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\bar{M}$ telle que $\eta\,{}^{\lambda}Q = \eta$.

La conclusion du corollaire 1.2 se déduit alors immédiatement du théorème 1.2

1.3.4. Unicité de la probabilité invariante de la chaîne de Markov de probabilité de transition ${}^{\lambda}P$.

Théorème 1.3 : *Si les hypothèses du théorème 1.1 sont satisfaites, la chaîne de Markov de probabilité de transition ${}^{\lambda}P$ sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ admet une unique probabilité invariante η_{λ}*

Démonstration du théorème 1.3

Elle utilise les deux lemmes :

Lemme 1.6 $$\lim_n \sup_{\bar{x},\bar{y} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} {}^{\lambda}E_{\bar{x}}\, d(\bar{x}.A_1 \ldots A_n, \bar{y}.A_1 \ldots A_n) = 0.$$

Preuve du lemme 1.6

La suite $\delta_n = \sup\limits_{\overline{x},\overline{y}\in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} {}^\lambda E_{\overline{x}}\, d(\overline{x}.A_1\ldots A_n,\ \overline{y}.A_1\ldots A_n)$ est décroissante, et l'on a pour un couple $\overline{x}_n,\ \overline{y}_n \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$

$$\delta_n = E_{\overline{x}_n}\ d(\overline{x}_n.A_1\ A_2\ldots A_n,\ \overline{y}_n.A_1\ A_2\ldots A_n)$$

D'autre part en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 1.5, on établit que :

$$^\lambda P_{\tilde{\nu}_\lambda}\ \text{p s}\ \lim_n\ d(\overline{x}_n.A_1\ A_2\ldots A_n,\ \overline{y}_n.A_1\ A_2\ldots A_n) = 0.$$

Il en résulte à l'aide du théorème de convergence bornée de Lebesgue que :

$$\lim_n\ {}^\lambda E_{\tilde{\nu}_\lambda}\ d(\overline{x}_n.A_1\ldots A_n,\ \overline{y}_n.A_1\ A_2\ldots A_n) = 0.$$

L'inégalité

$$^\lambda E_{\overline{x}_n}\ d(\overline{x}_n.A_1\ A_2\ldots A_n,\ \overline{y}_n.A_1\ldots A_n) \leq C\ {}^\lambda E_{\tilde{\nu}_\lambda}\ d(\overline{x}_n.A_1\ldots A_n,\ \overline{y}_n.A_1\ldots A_n) \quad n\geq 1$$

jointe au résultat précédent permet alors de conclure :

Lemme 1.7 : *Si* f *est une fonction Lipschitzienne sur* ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ *la suite de fonctions* $({}^\lambda P^n f)$ $n\geq 1$ *est équicontinue sur* ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$

Preuve du lemme 1.7

Pour $\overline{x},\ \overline{y}\ \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ $n\geq 1$ on a :

$$(1.47)\qquad {}^\lambda P^n f(\overline{x}) - {}^\lambda P^n f(\overline{y}) = \frac{1}{[k(\lambda)]^n}\int \Big\{\rho^\lambda(\overline{x},A)\,\frac{h_\lambda(\overline{x}.A)}{h_\lambda(\overline{x})} - \frac{\rho^\lambda(\overline{y},A)\ h_\lambda(\overline{y}.A)}{h_\lambda(\overline{y})}\Big\}$$

$$\times\ f(\overline{x}.A)\ p^n(dA)$$

$$+ \frac{1}{[k(\lambda)]^n}\int \rho^\lambda(\overline{y}.A)\,\frac{h_\lambda(\overline{y}.A)}{h_\lambda(\overline{y})}\,[f(\overline{x}.A) - f(\overline{y}.A)]\ p^n(dA)$$

$$= T_1(n,\overline{x},\overline{y}) + T_2(n,\overline{x},\overline{y})$$

on obtient facilement en raisonnant comme dans la preuve du lemme 1.2 que :

$$(1.48)\qquad |T_1(n,\overline{x},\overline{y})| \leq C_3(\lambda)\sup_{\overline{x}\in {}^t\mathbb{P}_{d-1}}|f(\overline{x})|\quad d(\overline{x},\overline{y})^{\mathrm{Inf}(1,\lambda)}$$

D'autre part, si k(f) est le coefficient de Lipschitz de f, on a

(1.49) $\quad |T_2(n,\bar{x},\bar{y})| \leq k(f) \sup_{\bar{x},\bar{y} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} {}^{\lambda}E_{\bar{y}}[d(\bar{y}.A_1\ldots A_n,\bar{x}.A_1\ldots A_n)] \qquad n\geq 1$

Les inégalités (1.48) et (1.49) et le lemme 1.6 permettent de justifier la conclusion du lemme 1.7.

Revenons maintenant à la preuve du théorème 1.3.
Soit f une fonction lipchitzienne sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ et η une probabilité ${}^{\lambda}P$ invariante.
Il résulte du lemme 1.7 que la suite $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} {}^{\lambda}P^j f \quad n\geq 1$ est équicontinue sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$. Soit $\tilde{f}$ une valeur d'adhérence de cette suite ; il existe une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ d'entiers telle que la suite $\frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} {}^{\lambda}P^j f \quad k\geq 1$ converge uniformément vers $\tilde{f}$ sur ${}^t\mathbb{P}^{d-1}$. Il est clair que $\tilde{f}$ est continue sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ et satisfait à l'égalité $\tilde{f} = {}^{\lambda}P\tilde{f}$, et par conséquent $\tilde{f}$ est constante sur ${}^t\mathbb{P}^{d-1}$ et donc $\tilde{f} = \eta(\tilde{f})$.

D'autre part, on a $\lim_k \int \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} {}^{\lambda}P^j f(\bar{x})\eta(d\bar{x}) = \eta(f) = \eta(\tilde{f})$

Des considérations précédentes, on peut conclure que la suite $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} {}^{\lambda}P^j f \quad n\geq 1$ converge uniformément sur ${}^t\mathbb{P}^{d-1}$ vers $\eta(f)$. Le même résultat étant vrai pour toute autre probabilité η_1 sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ ${}^{\lambda}P$ invariante, et les fonctions Lipschitziennes formant un ensemble dense dans $\mathcal{C}({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ muni de la topologie de la convergence uniforme, le théorème 1.3 est ainsi justifié.

1.3.5 Propriété de quasi-compacité de ${}^{\lambda}P$

Commençons par adopter quelques notations. Pour $f \in \mathcal{C}({}^{t}\mathbb{P}_{d-1})$ posons

$$|f| = \sup_{\bar{x} \in {}^{t}\mathbb{P}_{d-1}} |f(\bar{x})|$$

D'autre part, pour $0<\varepsilon\leq 1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}({}^{t}\mathbb{P}_{d-1})$, on définit

$$m_{\varepsilon}(f) = \sup_{\bar{x}\neq\bar{y} \in {}^{t}\mathbb{P}_{d-1}} \frac{|f(\bar{x})-f(\bar{y})|}{d^{\varepsilon}(\bar{x},\bar{y})}$$

et $$\mathcal{L}_{\varepsilon} = \{f \in \mathcal{C}({}^{t}\mathbb{P}_{d-1}) \ ; \ \|f\|_{\varepsilon} = |f| + m_{\varepsilon}(f) < +\infty\}$$

$\mathcal{L}_{\varepsilon}$ est une algèbre de Banach unitaire munie de la norme $\| \ \|_{\varepsilon}$.

Posons de plus pour $A \in GL(d,\mathbb{R})$ $\quad \delta(A) = \sup(\|A\|,\|A^{-1}\|)$.

Nous pouvons alors énoncer le

<u>Théorème 1.4</u> : *Si les hypothèses du théorème 1.1 sont satisfaites et si de plus pour un réel* $\alpha>0$, *on a*

$$\int \delta^{\lambda+\alpha}(A)\ p(dA) < +\infty$$

il existe un réel $0<\varepsilon_0<\alpha$ *tel que pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}_{\varepsilon_0}$ *et tout* $n\geq 1$, *on ait*

$${}^{\lambda}P^{n}f = \eta_{\lambda}(f)e + {}^{\lambda}R^{n}(f)$$

où η_{λ} *est l'unique probabilité de* $M_1(\mathbb{P}_{d-1})$ ${}^{\lambda}P$ *invariante*

e *est la fonction égale à* 1 *sur* ${}^{t}\mathbb{P}_{d-1}$

${}^{\lambda}R$ *est un opérateur sur* $\mathcal{L}_{\varepsilon_0}$ *de rayon spectral strictement inférieur à* 1, *et tel que* ${}^{\lambda}Re = 0$.

qui admet le corollaire

<u>Corollaire 1.3</u> : *Sous les hypothèses du théorème 1.4 pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ *on a*

$$\lim_n \sup_{\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} |{}^\lambda P^n f(\bar{x}) - \eta_\lambda(f)| = 0$$

<u>Démonstration du théorème 1.4</u>

Commençons par établir plusieurs lemmes utiles par la suite

<u>Lemme 1.8</u> : *Il existe* $0<\varepsilon_0<\delta$ *tel que que si* $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0$

$$\lim_n \{\sup_{(\bar{x},\xi) \in {}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\bar{M}} {}^\lambda E_{\bar{x}}\, \sigma^\varepsilon(\xi, A_1 \dots A_n)\}^{1/n} < 1$$

<u>Preuve du lemme 1.8</u>

La suite $\gamma_n(\varepsilon) = \sup_{(\bar{x},\xi) \in {}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\bar{M}} E_{\bar{x}}\, \sigma^\varepsilon(\xi, A_1 \dots A_n) \qquad n\geq 1 \qquad 0<\varepsilon<\alpha$

est sous-multiplicative et donc on a

$$(1.50) \quad \lim_n (\gamma_n(\varepsilon))^{1/n} = \operatorname{Inf}_n (\gamma_n(\varepsilon))^{1/n}$$

D'après le corollaire 1.2, il existe un entier N_0 tel que

$$\beta = \sup_{(\bar{x},\xi) \in {}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\bar{M}} {}^\lambda E_{\bar{x}} \log\sigma(\xi, A_1\, A_2 \dots A_{N_0}) < 0$$

D'autre part, on a pour $(\bar{x},\xi) \in {}^t\mathbb{P}_{d-1} \times {}^t\bar{M}$

$$ {}^\lambda E_{\bar{x}}(\sigma^\varepsilon(\xi, A_1\, A_2 \dots A_{N_0})) \leq 1 + \beta\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \sup_{\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}} {}^\lambda E_{\bar{x}}[\,(\operatorname{Log}\delta(A_1\, A_2 \dots A_{N_0}))^2 \, \delta^\varepsilon(A_1\, A_2 \dots A_{N_0})]$$

l'existence du coefficient de ε^2 étant assurée par les hypothèses.

Par conséquent, il existe un réel $0<\varepsilon_0<\mathrm{Inf}(1,\alpha)$ tel que

$$\gamma_{N_0}(\varepsilon_0) = \sup_{(\bar{x},\xi)\,\in\, {}^t\mathbb{P}_{d-1}\times {}^t\overline{M}} E_{\bar{x}}\, \sigma^{\varepsilon_0}(\xi, A_1\ldots A_{N_0}) < 1$$

et donc aussi

$$(\gamma_{N_0}(\varepsilon_0))^{1/N_0} < 1.$$

L'égalité (1.50) permet alors de conclure.

Nous supposerons de plus si $\lambda>0$ que l'on a choisi $\varepsilon_0\leq\lambda$; ce qui est possible. On a alors le

<u>lemme 1.9</u> : *Il existe un entier* $n_0\geq 1$ *et des constantes* $r_0<1$, $R_0>0$ *telles que pour toute fonction* $f\in\mathcal{L}_{\varepsilon_0}$ *on ait*

$$\| {}^{\lambda}P^{n_0} f \|_{\varepsilon_0} \leq r_0 \|f\|_{\varepsilon_0} + R_0\, |f|$$

<u>Preuve du lemme 1.9</u> :

Considérons à nouveau les expressions apparaissant dans la démonstration du lemme 1.7. De (1.48) et (1.49), il résulte que pour $\bar{x},\bar{y}\in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, $n\geq 1$, $f\in\mathcal{L}_{\varepsilon_0}$, on a

$$|{}^{\lambda}P^n f(\bar{x}) - P^n f(\bar{y})| \leq C_3(\lambda)\ |f|\ d^{\mathrm{Inf}(1,\lambda)}(\bar{x},\bar{y})$$
$$+ m_{\varepsilon_0}(f)\ {}^{\lambda}E_{\bar{y}}\ d^{\varepsilon_0}(\bar{x}.A_1\ldots A_n, \bar{y}.A_1\ldots A_n)$$

D'où l'on déduit

$$m_{\varepsilon_0}({}^{\lambda}P^n f) \leq C_3(\lambda)|f| + m_{\varepsilon_0}(f) \sup_{(\bar{x},\xi)\,\in\, {}^t\mathbb{P}_{d-1}\times {}^t\overline{M}} \sigma^{\varepsilon_0}(\xi, A_1\ldots A_n)$$

Choisissons n_0 de sorte que $\displaystyle\sup_{(\bar{x},\xi)\,\in\, {}^t\mathbb{P}_{d-1}\times {}^t\overline{M}} {}^{\lambda}E_{\bar{x}}\, \sigma^{\varepsilon_0}(\xi, A_1\ldots A_{n_0}) = r_0 < 1.$

ce qui est possible d'après le lemme 1.8. On a alors en tenant compte du fait que $|{}^{\lambda}P^{n_0}f| \leq |f|$

$$\|{}^{\lambda}P^{n_0}f\|_{\varepsilon_0} \leq r_0 \|f\|_{\varepsilon_0} + [1+c_3(\lambda)] \; |f|$$

ce qui établit le lemme 1.9.

Revenons maintenant à la preuve du théorème 1.4.

Si L est une partie bornée de $(\mathcal{L}_{\varepsilon_0}, \| \;\|_{\varepsilon_0})$.
${}^{\lambda}P^{n}L$ est une partie bornée et équicontinue de $\mathcal{C}({}^{t}\mathbb{P}_{d-1})$ et donc d'après le théorème d'Ascoli une partie compacte de $(\mathcal{C}({}^{t}\mathbb{P}_{d-1}), | \;|)$.

En tenant compte du fait que ${}^{\lambda}P$ est une contraction de $({}^{t}\mathbb{P}_{d-1}, | \;|)$, du lemme 1.9 et de la remarque précédente, on en conclut à l'aide du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [15] que l'on peut écrire

$$(1.51) \quad \forall \; n \geq 1 \quad {}^{\lambda}P^{n} = \sum_{\mu \in S} \mu^{n} U_{\mu} + {}^{\lambda}R^{n}$$

où S est l'ensemble fini des valeurs propres de module 1 de ${}^{\lambda}P$ dans $\mathcal{L}_{\varepsilon_0}$, et où U_{μ}, $\mu \in S$ et ${}^{\lambda}R$ sont des opérateurs bornés sur $(\mathcal{L}_{\varepsilon_0}, \| \;\|_{\varepsilon_0})$ tels que $U_{\mu}^{2} = U_{\mu}$ $U_{\mu} U_{\mu'} = 0$ si $\mu \neq \mu'$, $U_{\mu} \mathcal{L}_{\varepsilon_0} = D_{\mu}$ où $D_{\mu} = \{f \in \mathcal{L}_{\varepsilon_0} ; {}^{\lambda}Pf = \mu f\}$ est de dimensions finie. De plus ${}^{\lambda}R$ est de rayon spectral strictement inférieur à 1.

Pour terminer la preuve du théorème 1.4, nous utiliserons le

<u>Lemme 1.10</u> : *1 est l'unique valeur propre de* ${}^{\lambda}P$ *de module égal à* 1

<u>**Preuve du lemme 1.10**</u> :

Soit $\mu \in S$, $\mu \neq 1$ et soit $f \in \mathcal{L}_{\varepsilon_0}$ une fonction propre correspondant à la valeur propre μ ; c'est-à-dire telle que

(1.52) $\quad {}^{\lambda}Pf = \mu f$

On en déduit en passant au module que pour tout $n \geq 1$

(1.53) $\quad {}^{\lambda}P^{n}|f| \geq |f|$

Si $|f|(\bar{x}_0) = \sup_{\bar{y} \in {}^{t}\mathbb{P}_{d-1}} |f(\bar{y})|$, il résulte de (1.53) que pour tout A du support de p^n, on a

$$|f|(x_0) = |f|(\bar{x}_0.A)$$

et donc $\quad |f|(x_0) = P^n|f|(x_0) \qquad n \geq 0$

Comme $\lim_n P^n|f|(x_0) = \tilde{\nu}(|f|)$, on a donc pour tout $\bar{x} \in S_{\tilde{\nu}}$

$$|f|(\bar{x}_0) = \sup_{\bar{y} \in {}^{t}\mathbb{P}_{d-1}} |f(\bar{y})| = |f|(\bar{x})$$

c'est-à-dire que la fonction f a un module constant sur le support de $\tilde{\nu}$; comme ce support est stable par T_p, l'égalité (1.52) entraine que par tous $\bar{x} \in S_{\tilde{\nu}}$ et $A \in Sp$, on a

$$f(\bar{x}.A) = \mu f(\bar{x})$$

et donc également

(1.54) $\quad f^n(\bar{x}.A) = \mu^n f^n(\bar{x}) \qquad n \geq 1$

Par conséquent, on a

(1.55) $\quad {}^{\lambda}P^n f^n(\bar{x}) = \mu^n f^n(\bar{x}) \qquad \bar{x} \in S_{\tilde{\nu}}, \quad n \geq 1$

L'espace $\mathcal{L}_{\varepsilon_0}(S_{\tilde{\nu}})$ des fonctions Höldériennes d'ordre ε_0 sur $S_{\tilde{\nu}}$ est stable par ${}^{\lambda}P$, et la restriction de l'opérateur ${}^{\lambda}P$ à $\mathcal{L}_{\varepsilon_0}(S_{\tilde{\nu}})$ possède les mêmes propriétés que l'opérateur ${}^{\lambda}P$ sur $\mathcal{L}_{\varepsilon_0}$ et a en particulier un nombre fini de valeurs propres de module 1. De l'égalité (1.55), on peut en conclure que

$\{\mu^n \; n \geq 1\}$ est fini c'est-à-dire que μ est une racine de l'unité.

Par ailleurs, on a pour $\bar{x} \in S_{\tilde{\nu}}$, $n \geq 1$

$$P^n f(\bar{x}) = \mu^n f(\bar{x})$$

Comme de plus $\lim_n P^n f(\bar{x}) = \tilde{\nu}(f)$, on a obligatoirement $\mu = 1$, ce qui justifie le lemme 1.10.

On a donc pour tout $n \geq 1$

$$^{\lambda}P^n = U_1 + {}^{\lambda}R^n.$$

Comme d'après le théorème 1.3, $^{\lambda}P$ admet une unique probabilité invariante η_λ, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}({}^t\mathbb{P}^{d-1})$ la suite $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} {}^{\lambda}P^j f$ $n \geq 1$ converge uniformément sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ vers $\eta_\lambda(f)$. Il est donc clair que pour $f \in \mathcal{L}_{\varepsilon_0}$

$U_1(f) = \eta_\lambda(f)$.

La preuve du théorème 1.4 est ainsi achevée.

Démonstration du corollaire 1.3

La propriété énoncée dans ce corollaire est vérifiée pour toute fonction $f \in \mathcal{L}_{\varepsilon_0}$ d'après le théorème 1.4. Elle est également satisfaite pour toute fonction $f \in \mathcal{C}({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ car $^{\lambda}P$ est une contraction de $\mathcal{C}({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ et car $\mathcal{L}_{\varepsilon_0}$ est dense dans $\mathcal{C}({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ muni de norme $|\;\;|$ de la convergence uniforme sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.

2. Théorèmes de renouvellement pour les produits de matrices aléatoires indépendantes

2.1. La théorie du renouvellement de Kesten pour les chaînes de Markov

Dans ce paragraphe, nous rappelons des théorèmes de renouvellement pour certaines chaînes de Markov, établis par Kesten [11] et qui nous seront utiles par la suite.

Avant de donner ces résultats, nous précisons des notations.
Soient (S,d) un espace métrique, la tribu borélienne de S et P une probabilité de transition de S dans $\mathcal{S}$. De plus, donnons nous une probabilité de transition $F(d\lambda,x,y)$ de $S\times S$ dans $\mathcal{B}$ tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Considérons l'espace $\Omega = (S\times\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ muni de la tribu $\mathcal{F} = (\mathcal{S}\otimes\mathcal{B})^{\mathbb{N}}$; notons $(X_i, U_i)_{i\geq 0}$ les coordonnées sur cet espace. Pour tout $x\in S$, il existe une unique probabilité $\overline{P}_x$ sur $(\Omega,\mathcal{F})$ telle que pour tout $n\geq 0$

$$(2.1)\qquad \overline{P}_x(X_i\in A_i \quad 0\leq i\leq n,\quad U_i\in B_i \quad 0\leq i\leq n)$$
$$= 1_{A_0}(x)\int_{A_1} P(x,dx_1)\int_{A_2} P(x_1,dx_2)\dots\int_{A_n} P(x_{n-1},dx_n)\prod_{i=0}^{n-1} F(B_i,x_i,x_{i+1})$$

Les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ forment une chaîne de Markov à valeurs dans S, de probabilité de transition P.
La loi de la variable aléatoire U_n conditionellement aux autres variables X_j $j\geq 0$ et U_j $j\neq n$ ne dépend que de X_n et X_{n+1}.
On pose $V_n = \sum_{i=0}^{n-1} U_i$ et on étudie des théorèmes de renouvellement pour les sommes précédentes.

Définissons de plus : pour $t>0$

$$(2.2)\qquad N_t = \mathrm{Inf}\,\{n\geq 0 \; ; \; V_n > t\}$$

$$(2.3)\qquad W_t = (V_{N_t} - t)\, 1_{[N_t < +\infty]}$$

(2.4) $\qquad Z_t = X_{N_t} 1_{[N_t < +\infty]}$

D'autre part, posons

$$c_0 = \emptyset$$

et pour $k \geq 1 \quad c_k = \{x \in S \; ; \; \overline{P}_x [\bigcap_{m \geq k} (V_m \geq \frac{m}{k})] \geq \frac{1}{2} \}$

et adoptons les définitions suivantes :

<u>Définition 2.1</u> : *Une fonction* g *de* $S \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est appelée directement Riemann intégrable si elle est* $\mathcal{S} \times \mathcal{B}$ *mesurable, satisfait à la condition :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} (k+1) \quad \sup \{ |g(x,t)| ; \quad x \in c_{k+1} - c_k \; \ell \leq t \leq \ell+1 \}$$

et si pour chaque $x \in S$ *et* $0 < L < +\infty$ *la fonction* $t \to g(x,t)$ *est Riemann intégrable sur* $[-L, L]$.

<u>Définition 2.2</u> : *Pour toute fonction* f *de* $(S \times \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et tout* $\delta > 0$ *, on pose*

$$f^{\delta}(x_0, v_0, x_1, v_1, \ldots) = \lim_{n \to +\infty} \sup \{ f(y_0, w_0, y_1, w_1 \ldots)$$

$$d(x_i, y_i) + |v_i - w_i| < \delta \qquad \text{pour } 0 \leq i \leq n \}$$

Enonçons alors l'ensemble des "conditions c" suivantes :

$\cdot$<u>condition</u> c_1 : il existe une probabilité ϕ sur S invariante par P, et telle que pour tout ouvert 0 satisfaisant à la condition $\phi(0) > 0$ on ait $\forall x \in S \quad \overline{P}_x (\bigcup_{n \geq 1} (X_n \in 0)) = 1$

$\cdot$<u>condition</u> c_2 : l'intégrale $\int_S \phi(dx) \int_S P(x, dx_1) \int_{\mathbb{R}} |\lambda| F(d\lambda, x, x_1)$ converge, et de plus pour tout $x \in S$ $\overline{P}_x$ p.s on a

$$\lim_n \frac{V_n}{n} = \alpha$$

où $\alpha = \int_S \Phi(dx) \int_S P(x,dx_1) \int_{\mathbb{R}} \lambda\ F(d\lambda,x,x_1)$, et où α est strictement positive.

.<u>condition</u> c_3 : il existe une suite $(\xi_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, engendrant un sous-groupe dense dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout élément ξ_n et tout $\delta > 0$, il existe un élément $y = y(n,\delta)$ de S satisfaisant à la propriété suivante :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $A \in \mathcal{J}$ avec $\Phi(A) > 0$, des entiers m_1, m_2 et un réel ζ tels que pour $x \in A$ on ait :

(2.5) $\overline{P}_x(d(X_{m_1},y) < \varepsilon \ ; \ |V_{m_1} - \tau| < \delta) > 0$

et

(2.6) $\overline{P}_x(d(x_{m_2},y) < \varepsilon \ ; \ |V_{m_2} - \tau - \xi_n| < \delta) > 0$

.<u>condition</u> c_4 : pour chaque x de S, et $\delta > 0$, il existe un réel $r_0 = r_0(x,\delta) > 0$ tel que pour toute fonction f de $(S \times \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ mesurable bornée, et pour tout y de S tel que $d(x,y) < r_0$, on ait

(2.7) $\overline{E}_x f(X_0,V_0,X_1,V_1,\ldots) \leq \overline{E}_y f^{\delta}(X_0,V_0,X_1,V_1,\ldots) + \delta \sup|f|$

et

(2.8) $\overline{E}_y f(X_0,V_0,X_1,V_1,\ldots) \leq \overline{E}_x f^{\delta}(X_0,V_0,X_1,V_1,\ldots) + \delta \sup|f|$.

Considérons de plus les indices d'échelle de la suite $(V_n)_{n\geq 0}$. Ils sont définis par :

(2.9) $\nu_0 = 0$

$$\nu_{i+1} = \begin{cases} \operatorname{Inf}\{n > \nu_i : V_n > V_{\nu_i}\} & \text{si } \{n > \nu_i \ \ V_n > V_{\nu_i}\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut alors énoncer la

<u>Proposition 2.1</u> : *Si les conditions* (c) *sont satisfaites, pour tout* $x \in S$

et pour tout $i \geq 1$

$$\overline{P}_x(\nu_i < +\infty) = 1$$

De plus, la suite $(X_{\nu_i})_{i\geq 0}$ *est une chaine de Markov admettant une probabilité invariante* ψ *telle que*

$$\int \psi(dy)\ \overline{E}_y(\nu_1) = 1$$

$$\int \psi(dy)\ \overline{E}_y(V_{\nu_1}) = \alpha$$

ainsi que les théorèmes

<u>Théorème 2.1</u> : *Si les conditions* (c) *sont satisfaites pour toute fonction* f *de* $S \times [0,+\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$ *bornée et continue, et pour tout* $x \in S$ *on a :*

$$\lim_{t\to+\infty} \overline{E}_x f(Z_t,W_t) = \frac{1}{\alpha} \int_S \psi(dy)\ \overline{E}_y\left(\int_0^{V_{N_0}} f(X_{N_0},s)ds\right)$$

<u>Théorème 2.2</u> : *Si les conditions* (c) *sont satisfaites pour toute fonction* f *de* $S \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *continue, directement intégrable et pour tout* $x \in S$ *on a*

$$\lim_{t\to+\infty} \overline{E}_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} g(X_n,t-V_n)\right) = \frac{1}{\alpha} \int_S \phi(dy) \int_{-\infty}^{+\infty} g(y,s)ds$$

2.2 <u>Théorèmes de renouvellement pour les produits de matrices aléatoires indépendantes</u>

2.2.1. <u>Notations. Rappel</u>

Nous reprenons les notations définies au paragraphe 1 ; il nous faudra, avant d'énoncer les théorèmes, préciser quelques éléments supplémentaires.

Commençons par la

<u>Définition 2.1</u> : *Une matrice* $M \in GL(d,\mathbb{R})$ *sera dite* p*-réalisable s'il existe*

un entier n *et des matrices* $M_1, M_2, \ldots, M_n \in S_p$ *telles que* $M = M_1 M_2 \ldots M_n$, , *et si de plus* M *admet une valeur propre simple réelle* $q(M)$ *qui en module excède toutes les autres valeurs propres de* M .

Nous envisageons les hypothèses suivantes $(\tilde{H})$ pour la probabilité p :

- $(\tilde{H}_1)$ le groupe fermé G_p engendré par la support de p et ses sous-groupes d'indice fini ont une action irréductible sur $\mathbb{R}^d$
- $(\tilde{H}_2)$ le groupe engendré par $\{\operatorname{Log}|q(M)| \; ; \; M$ p-réalisable$\}$ est dense dans $\mathbb{R}$
- $(\tilde{H}_3)$ $E \log^+ \|A_1\| = \int \log^+ \|A_1\| \, p(dA_1) < +\infty$

Rappelons [4] de plus la

Proposition 2.1 : *Si les hypothèses* $(\tilde{H}_1)$ *et* $(\tilde{H}_2)$ *sont satisfaites, il existe une constante* α *telle que pour tout* $x \in {}^t\mathbb{R}^d - \{0\}$ *on ait*

$$\text{p.s} \qquad \alpha = \lim_n \frac{1}{n} \log \|x A_1 A_2 \ldots A_n\| = \lim_n \frac{1}{n} \log \|A_1 A_2 \ldots A_n\|$$

De plus, on a

$$\alpha = \iint_{GL(d,\mathbb{R}) \times {}^t\mathbb{P}_{d-1}} \log \rho(\bar{x}, A) \, \tilde{\nu}_1(d\bar{x}) \, p(dA)$$

où $\tilde{\nu}_1$ *est une probabilité* p *invariante quelconque portée par* ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.

Enfin, définissons également pour $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, $t \in \mathbb{R}$

$$(2.10) \quad N_{\bar{x}}(t) = \begin{cases} \operatorname{Inf} \; \{ n \geq 0 \; ; \; \log \rho(\bar{x}, A_1 A_2 \ldots A_n) > t \} & \text{si cet ensemble est non-vid} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(2.11) \qquad W_{\bar{x}}(t) = (\log \sigma(\bar{x}, A_1 A_2 \ldots A_{N_{\bar{x}}(t)}) - t) \; 1_{[\, N_{\bar{x}}(t) \; < +\infty \,]}$$

(2.12) $Z_{\bar{x}}(t) = X_{N_{\bar{x}}(t)}\, 1_{[N_{\bar{x}}(t) < +\infty]} = \bar{x}.A_1\, A_2 \dots A_{N_{\bar{x}}(t)}\, 1_{[N_{\bar{x}}(t) < +\infty]}$

Nous pouvons maintenant donner les

2.2.2 Enoncés des théorèmes

On a tout d'abord le

Théorème 2.3 : *Si les hypothèses* (H) *sont satisfaites et si* $\alpha > 0$

1) pour tout $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ *et toute fonction* g *continue bornée de* ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times \mathbb{R}^+$ *dans* $\mathbb{R}$, *la limite*

$$\lim_{t \to +\infty} E\, g(Z_{\bar{x}}(t),\, W_{\bar{x}}(t))$$

existe et est indépendante de $\bar{x}$

Elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{\alpha} \int_{{}^t\mathbb{P}^{d-1}} \psi(d\bar{y})\; E\left[\int_0^{W_{\bar{y}}(0)} g(Z_{\bar{y}}(0),s)\,ds\right]$$

où $\psi \in M_1({}^t\mathbb{P}_{d-1})$

2) pour toute fonction g *continue de* ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times \mathbb{R}$ *telle que*

$$\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \sup\{|g(\bar{y},t)|\ ;\ \bar{y} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}\quad \ell \le t \le \ell+1\} < +\infty$$

et tout $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ *on a*

$$\lim_{t \to +\infty} E\left[\sum_{n=0}^{\infty} g(\bar{x}.A_1\, A_2 \dots A_n,\, t - \log\rho(\bar{x},A_1\, A_2 \dots A_n))\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_{{}^t\mathbb{P}_{d-1}} \tilde{\nu}(d\bar{y}) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\bar{y},s)\, ds$$

$\tilde{\nu}$ *étant l'unique probabilité* p-*invariante appartenant à* $M_1({}^t\mathbb{P}_{d-1})$.

Ce théorème admet le corollaire suivant, dans lequel on note card A le nombre d'éléments d'un ensemble fini A.

Corollaire 2.1 : *Si les hypothèses* $(\tilde{H})$ *sont satisfaites, et si* $\alpha>0$ *pour tous* $x \in {}^t\mathbb{R}^d$, $\|x\| = 1$, $h \geq 1$ *on a*

$$\lim_{t \to +\infty} E \text{ card } \{n \,;\, t \leq \|x\, A_1\, A_2 \ldots A_n\| \leq th\} = \frac{\log h}{\alpha}$$

Envisageons maintenant le cas où $\alpha<0$. Nous pouvons énoncer le

Théorème 2.4 : *Si les hypothèses* $(\tilde{H})$ *sont satisfaites,* $\alpha<0$ *et si de plus il existe un réel* $\lambda_0 > 0$ *tel que*

$$\int \|A_1\|^{\lambda_0} \log^+\|A_1\| \, dp(A_1) < +\infty$$

et

$$\int [\mu(A_1)]^{\lambda_0} \, dp(A_1) \geq 1$$

où $\mu(A_1)$ *est la plus petite valeur propre de la matrice* $(A_1\, {}^tA_1)^{1/2}$

alors :

1) *il existe un réel* $\lambda_1 \in]\, 0, \lambda_0]$ *et une fonction* h_{λ_1} *continue strictement positive sur* ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ *telle que pour tout* $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ *on ait l'égalité*

$$(2.13) \qquad h_{\lambda_1}(\bar{x}) = \int \rho^{\lambda_1}(\bar{x},A)\, h_{\lambda_1}(\bar{x}.A)\, dp(A)$$

Toute autre fonction continue positive satisfaisant à la relation (2.13) est proportionnelle à h_{λ_1}.

2) *pour toute fonction* g *continue de* ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times \mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que la fonction* $(\bar{x},t) \to e^{-\lambda_1 t} g(\bar{x},t)$ *soit bornée, et pour tout* $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ *la limite*

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_1 t} E(g(Z_{\bar{x}}(t), W_{\bar{x}}(t) ; N_{\bar{x}}(t) < +\infty)$$

existe et est de la forme $K(g)\, h_{\lambda_1}(\bar{x})$.

Si g *est strictement positive sur* ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times R_+$, $K(g)$ *est strictement positive.*

3) *pour toute fonction* g *continue de* ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \sup\{|g(\bar{y},t)| \quad \bar{y} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1} \;;\quad \ell \leq t < \ell+1\} < +\infty$$

et tout $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$, *on a*

$$\lim_{t\to-\infty} E\{\sum_{k=0}^{\infty} g[\bar{x}.A_1 A_2 \ldots A_n,\ t - \log\rho(\bar{x},A_1 A_2 \ldots A_n)]\}$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \int_{{}^t\mathbb{P}_{d-1}} \tilde{\nu}(d\bar{y}) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\bar{y},s)\,ds$$

où $\tilde{\nu}$ *est l'unique probabilité* p *invariante appartenant à* $M_1({}^t\mathbb{P}_{d-1})$

4) *pour toute fonction* g *continue de* ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} e^{-x_1 \ell} \sup\{|g(\bar{y},t)| \;;\quad \bar{y} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1} \quad \ell \leq t \leq \ell+1\} < +\infty$$

et pour tout $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ *on a*

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda_1 t} E\,(\sum_{k=0}^{\infty} g(\bar{x}.A_1 A_2 \ldots A_n,\ t - \log\rho(\bar{x},A_1 A_2 \ldots A_n))$$

$$= \frac{h_{\lambda_1}(\bar{x})}{\alpha(\lambda_1)} \int_{{}^t\mathbb{P}_{d-1}} \eta_{\lambda_1}(d\bar{y}) \frac{1}{h_{\lambda_1}(\bar{y})} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 s}\, g(\bar{y},s)\,ds$$

où $\eta_{\lambda_1} \in M_1({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ *est l'unique probabilité* ${}^{\lambda_1}p$ *invariante, et où*

$$\alpha(\lambda_1) = \int_{{}^t\mathbb{P}_{d-1}} \eta_{\lambda_1}(d\bar{x})\ {}^{\lambda_1}E_{\bar{x}}(\log\rho(A_1,\bar{x})) \qquad 0<\alpha(\lambda_1)<+\infty.$$

Ce théorème admet les corollaires suivants :

Corollaire 2.2 : *Sous les hypothèses du théorème 2.4, il existe une constante* $0<K_1<+\infty$ *telle que pour tout* $x \in {}^t\mathbb{R}^d-\{0\}$ $\|x\|=1$ *on ait*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\lambda_1} P(\max_n \|x A_1 A_2 \ldots A_n\| > t) = K_1 \; h_{\lambda_1}(\bar{x})$$

$\bar{x}$ *étant l'image de* x *dans* ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.

Corollaire 2.3 : *Sous les hypothèses du théorème 2.4, pour tout* $x \in {}^t\mathbb{R}^d-\{0\}$ $\|x\|=1$ $h\geq 1$ *on a*

1) $$\lim_{t\to 0} E\,\mathrm{card}\{n \,;\, t\leq \|x A_1 A_2 \ldots A_n\| \leq th\} = \frac{-\log h}{\alpha}$$

2) $$\lim_{t\to+\infty} t^{\lambda_1} E\,\mathrm{card}\{n \,;\, t\leq \|x A_1 A_2 \ldots A_n\| \leq th\} = \frac{h_{\lambda_1}(\bar{x})(h^{\lambda_1}-1)}{\alpha(\lambda_1)\,\lambda_1} \int_{{}^t\mathbb{P}_{d-1}} \frac{1}{h_{\lambda_1}(\bar{y})}\,\eta_{\lambda_1}(d\bar{y})$$

$\bar{x}$ *étant l'image de* x *dans* ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$.

2.2.3 Démonstration des théorèmes

Commençons par remarquer que l'assertion 1 du théorème 2.4 a été établie dans la proposition 1.2.

Pour établir la preuve des autres conclusions des théorèmes 2.3 et 2.4, nous nous appuierons sur les résultats de Kesten énoncés au paragraphe 2.1.

La chaine de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sera

a) dans le cas où $\alpha>0$ la chaine de Markov à valeurs dans ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ et de probabilité de transition $P = {}^0P$.

b) dans le cas où $\alpha<0$, la chaine de Markov à valeur dans ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ obtenue par relativisation de probabilité de transition ${}^{\lambda}1_P$.

Définissons d'autre part en étendant légèrement les notations du paragraphe 2, la probabilité ${}^{\lambda}P_{\bar{x}}$ $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ $\lambda > 0$ sur $[{}^t\mathbb{P}_{d-1} \times \mathbb{R} \times GL(d,\mathbb{R})]^{\mathbb{N}}$

par

$$(2.14) \quad {}^{\lambda}E_{\bar{x}} \{f(X_0,V_0,X_1,V_1,\dots X_n,V_n) \; ; \; A_i \in D_i \quad 1 \leq i \leq n+1\}$$

$$= \frac{1}{[k(\lambda)]^{n+1}} \quad \frac{1}{h_\lambda(\bar{x})} \int p(dA_1)p(dA_2)\dots p(dA_{n+1})$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} 1_{D_i}(A_i) \; \rho^{\lambda}(\bar{x},A_1\dots A_n) h_\lambda(\bar{x}.A_1\dots A_n) \; f\{\bar{x}, \; \log\rho(\bar{x},A_1),\bar{x}.A_1,$$

$$\log\rho(\bar{x}.A_1,A_2),\dots,\bar{x}.A_1\dots A_n, \; \log\rho(\bar{x}.A_1\dots A_n, A_{n+1})\} \quad n \geq 0$$

où f est une fonction mesurable bornée sur $({}^t\mathbb{P}_{d-1} \times \mathbb{R})^{n+1}$ et $(D_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ sont des boréliens de $GL(d,\mathbb{R})$.

On voit en faisant dans la formule précédente $D_i = GL(d,\mathbb{R})$ pour tout $1 \leq i \leq n+1$ que l'on obtient une formule du type (2.1) en posant

$$F(B,\bar{x},\bar{y}) = {}^{\lambda}E_{\bar{x}} \{1_B [\log\rho(\bar{x},A)]\}$$

où $\bar{x},\bar{y} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ et B est un borélien de $\mathbb{R}$.

Nous allons démontrer que sous les hypothèses des théorèmes 2.3 et 2.4, les conditions (c) des théorèmes de Kesten sont satisfaites.

1) <u>preuve de la condition</u> c_1

Soit 0 un ouvert de ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ tel que $\eta_\lambda(0) > 0$. Il existe alors une fonction $\phi \in \mathcal{C}({}^t\mathbb{P}_{d-1})$ telle que $1_0 \geq \phi \geq 0$ et $\eta_\lambda(\phi) > 0$.

Or la suite $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} {}^{\lambda}P^{j}(\phi)$ $n \geq 1$ converge uniformément sur ${}^{t}\mathbb{P}_{d-1}$ vers $n_{\lambda}(\phi)$. Il existe donc un réel $\delta > 0$ et un entier n_0 tel que

$$\operatorname*{Inf}_{\bar{x} \in {}^{t}\mathbb{P}_{d-1}} {}^{\lambda}P^{n_0}\, 1_0(\bar{x}) \geq \operatorname*{Inf}_{\bar{x} \in {}^{t}\mathbb{P}_{d-1}} {}^{\lambda}P^{n_0}\phi(\bar{x}) \geq \delta$$

Le lemme de Borel-Cantelli pour les chaines de Markov [1] entraine alors que pour tout $\bar{x} \in {}^{t}\mathbb{P}_{d-1}$, on a

$$P_{\bar{x}}\left[\bigcup_{n \geq 1} \{(\bar{x}.A_1 \ldots A_n) \in 0\}\right] = {}^{\lambda}P_{\bar{x}}\left\{ \bigcup_{n \geq 1} (X_n \in 0) \right\} = 1$$

c'est-à-dire la condition c_1.

2) <u>preuve de la condition c_4</u>

Pour $\bar{x} \in {}^{t}\mathbb{P}_{d-1}$ et $\delta > 0$, définissons les ensembles

$$E(\bar{x},\delta,k) = \{ \omega \ ; \ \rho(\bar{x},A_1(\omega)\ldots A_\ell(\omega)) \geq \delta \ \|A_1(\omega)A_2(\omega)\ldots A_\ell(\omega)\| \quad 1 \leq \ell \leq k\}$$

et $$E(\bar{x},\delta) = \bigcap_{k \geq 1} E(\bar{x},\delta,k)$$

En raison de l'inégalité (1.8), on a dès que $d(\bar{x},\bar{y}) \leq \frac{\delta_1 \delta}{\sqrt{2}}$ et $\omega \in E(\bar{x},\delta,k)$

(2.15) $$(1-\delta_1)\rho(\bar{x},A_1(\omega)A_2(\omega)\ldots A_k(\omega)) \leq \rho(\bar{y},A_1(\omega)A_2(\omega)\ldots A_k(\omega)) \leq (1+\delta_1)\rho(\bar{x},A_1(\omega)\ldots A_k(\omega)).$$

De plus, comme

$$d(\bar{x}.A_1\ldots A_k,\bar{y}.A_1\ldots A_k) = \frac{\|(x-y)A_1A_2\ldots A_k \wedge yA_1A_2\ldots A_k\|}{\|xA_1A_2\ldots A_k\| \, \|yA_1A_2\ldots A_k\|} \leq \frac{\|x-y\| \, \|A_1\ldots A_k\|}{\|xA_1A_2\ldots A_k\|}$$

où x,y sont deux vecteurs de norme 1, d'image $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans ${}^{t}\mathbb{P}_{d-1}$ et tels que $|\theta(x,y)| \leq \frac{\Pi}{2}$, on a également dès que $d(\bar{x},\bar{y}) \leq \frac{\delta_1\delta}{\sqrt{2}}$ et

$\omega \in E(\bar{x},\delta,k)$ l'inégalité

(2.16) $\quad d(\bar{x}.A_1(\omega)\ldots A_k(\omega),\ \bar{y}.A_1(\omega)\ldots A_k(\omega)) \leq \delta_1$

Soit f une fonction mesurable bornée sur $({}^t\mathbb{P}_{d-1}\times\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, des inégalités (2.15) et (2.16), il résulte que pour $d(\bar{x},\bar{y})\leq \frac{\delta_1\,\delta}{\sqrt{2}}$, on a

$$(2.17)\quad {}^{\lambda}E_{\bar{y}}\, f(\bar{y},0,\bar{y}.A_1,\log\rho(\bar{y},A_1),\ldots,\bar{y}A_1\ldots A_n,\log\rho(\bar{y},A_1\ldots A_n),\ldots)$$

$$\leq {}^{\lambda}E_{\bar{y}}[f^{\delta_1}\{\bar{x},0,\bar{x}.A_1\ ,\ldots,\bar{x}.A_1\ldots A_n,\log\rho(\bar{x},A_1\ldots A_n),\ldots\}1_{E(\bar{x},\delta)}]$$

$$+\ \sup|f|(1-P_{\bar{y}}\,[E(\bar{x},\delta)]).$$

Des définitions de ${}^{\lambda}P_{\bar{x}}$ et de ${}^{\lambda}P_{\bar{y}}$, on déduit immédiatement que

$$(2.18)\quad {}^{\lambda}E_{\bar{y}}[f^{\delta_1}\{\bar{x},0,\bar{x}.A_1,\log\rho(\bar{x},A_1),\ldots,\bar{x}.A_1\ldots A_n,\log\rho(\bar{x},A_1\ldots A_n)\ldots\}\,1_{E(\bar{x},\delta)}]$$

$$\leq \sup_{d(\bar{z}_1,\bar{z}_2)\leq\delta_1} \frac{h_\lambda^2(\bar{z}_1)}{h_\lambda^2(\bar{z}_2)}\,(1+\delta_1)^{\lambda}\ {}^{\lambda}E_{\bar{x}}[f^{\delta_1}\{\bar{x},0,\bar{x}.A_1,\log\rho(\bar{x},A_1)\ldots,\bar{x}.A_1\ldots A_n,$$

$$\log\,(\bar{x},A_1\ldots A_n),\ldots\}\,1_{E(\bar{x},\delta)}]$$

De même, on a l'inégalité

$$(2.19)\quad {}^{\lambda}P_{\bar{y}}(E(\bar{x},\delta))\ \geq \operatorname*{Inf}_{d(\bar{z}_1,z_2)\leq\,\delta_1} \frac{h_\lambda^2(\bar{z}_1)}{h_\lambda^2(\bar{z}_2)}\ (1-\delta_1)^{\lambda}\ {}^{\lambda}P_{\bar{x}}(E(\bar{x},\delta_1))$$

ε positif étant donné, on peut en raison de la continuité uniforme de h_λ sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ choisir $\delta_1(\varepsilon) < 3\varepsilon$ assez petit pour que l'on ait

$$\sup_{d(\bar{z}_1,z_2)\leq\delta_1} \frac{h_\lambda^2(\bar{z}_1)}{h_\lambda^2(\bar{z}_2)}\,(1+\delta_1)^{\lambda} \leq 1+\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \operatorname*{Inf}_{d(\bar{z}_1,\bar{z}_2)\leq\delta_1} \frac{h_\lambda^2(\bar{z}_1)}{h_\lambda^2(\bar{z}_2)}\ (1-\delta_1)^{\lambda} \geq 1-\varepsilon$$

Dans ces conditions pour $d(\bar{x},\bar{y}) \leq \dfrac{\delta_1(\varepsilon)\delta}{2}$ on a :

(2.20) $${}^{\lambda}E_{\bar{y}}\ [f(\bar{y},0,\bar{y}.A_1,\log\rho(\bar{y},A_1),\dots,\bar{y}A_1\dots A_n,\log\rho(\bar{y},A_1\dots A_n),\dots)]$$

$$\leq E_{\bar{x}}\ [f^{\delta_1}(\bar{x},0,\bar{x}.A_1,\log\rho(\bar{x},A_1),\dots,\bar{x}.A_1\dots A_n,\log\rho(\bar{x},A_1\dots A_n,\dots)]$$

$$+ \sup|f|({}^{\lambda}P_{\bar{x}}(\ \complement E(\bar{x},\delta)) + 2\varepsilon).$$

Comme d'après la proposition 1.5, on sait que

$$\lim_{\delta\downarrow 0} {}^{\lambda}P_{\bar{x}}\ \{\ \complement E(\bar{x},\delta)\ \} = 0$$

On peut choisir $\delta(\varepsilon)$ tel que ${}^{\lambda}P_{\bar{x}}\ [\ \complement E(\bar{x},\delta(\varepsilon))] < \varepsilon$

Pour $d(\bar{x},\bar{y}) \leq \dfrac{\delta_1(\varepsilon)\delta(\varepsilon)}{\sqrt{2}}$, on a alors

(2.21) $${}^{\lambda}E_{\bar{y}}\ [f^{3\varepsilon}\{\bar{y},0,\bar{y}.A_1,\log\rho(\bar{y},A_1),\dots,\bar{y}.A_1\dots A_n,\log\rho(\bar{y},A_1\dots A_n)\dots\}]$$

$$\leq {}^{\lambda}E_{\bar{x}}\ [f(\bar{x},o,\bar{x}.A_1,\log\rho(\bar{x},A_1),\dots,\ \bar{x}.A_1\dots A_n,\ \mathrm{Log}\,\rho(\bar{x},A_1\dots A_n)\dots)]$$

$$+ 3\ \varepsilon\ \sup|f|.$$

Ce qui établit une des inégalités figurant dans la condition c_4 ; la seconde inégalité se prouve de manière analogue.

3) Preuve de la condition c_2

La suite des matrices aléatoires $(A_i)_{i\geq 1}$ est stationnaire pour la probabilité ${}^{\lambda}P_{\eta_\lambda}$. En outre la suite $\mathrm{Log}||A_1A_2\dots A_n||$ $n\geq 1$ est sous additive, et l'on a en raison de l'hypothèse $(\tilde{H}_3)$ ${}^{\lambda}E_{\eta_\lambda}(\mathrm{Log}^+||A_1||) < +\infty$.

Le théorème ergodique sous-additif de Kingman [13] permet donc de conclure que ${}^{\lambda}P_{\eta_\lambda}$ ps la limite $\lim\limits_n \frac{1}{n} \log||A_1(\omega)A_2(\omega)\ldots A_n(\omega)||$ existe. Notons-la $\xi(\omega)$, $-\infty \leq \xi < +\infty$.

En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 1.1, et en raison du fait que η_λ ne peut être portée par une sous-variété projective de ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ (car sinon $\tilde{\nu}$ le serait aussi), on voit qu'il existe une constante $C'(\lambda) > 0$ telle que pour tout $\overline{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ on ait :

$$(2.22) \qquad {}^{\lambda}P_{\overline{x}} \leq C'(\lambda)\ {}^{\lambda}P_{\eta_\lambda}$$

Par conséquent on a aussi pour tout $\overline{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$

$$(2.23) \qquad {}^{\lambda}P_{\overline{x}}\{\omega ; \lim_n \frac{1}{n} \mathrm{Log}||A_1(\omega)A_2(\omega)\ldots A_n(\omega)|| = \xi(\omega)\} = 1$$

et également en raison de la proposition 1.5 pour tous $\overline{x}, \overline{y} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$

$$(2.24) \qquad {}^{\lambda}P_{\overline{x}}\{\omega ; \lim_n \log||A_1(\omega)A_2(\omega)\ldots A_n(\omega)|| = \lim_n \frac{1}{n} \log \rho(\overline{y}, A_1(\omega)A_2(\omega)\ldots A_n(\omega))\} = 1.$$

Il nous reste à identifier ξ.

Commençons par montrer que ${}^{\lambda}P_{\eta_\lambda}$ ps (et donc aussi ${}^{\lambda}P_{\overline{x}}$ ps) que ξ est constante.

Supposons le contraire ; il existe alors un élément $\overline{x}_o$ du support de η_λ, $r, \varepsilon > 0$ et un entier ℓ_1 tels que :

$$(2.25) \qquad {}^{\lambda}P_{\overline{x}_o}\{\omega ; \frac{1}{n} \log \rho(\overline{x}_o, A_1(\omega)A_2(\omega)\ldots A_n(\omega)) \leq r - 2\varepsilon \quad \forall\, n \geq \ell_1\} \geq 2\varepsilon$$

et

$$(2.26) \qquad {}^{\lambda}P_{\overline{x}_o}\{\omega ; \frac{1}{n} \log \rho(\overline{x}_o, A_1(\omega)A_2(\omega)\ldots A_n(\omega)) \geq r + 2\varepsilon \quad \forall\, n \geq \ell_1\} \geq 2\varepsilon$$

En utilisant la condition c_4 prouvée précédemment, ceci implique qu'il existe un réel $r_o > 0$ tel que tout $\bar{y} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ satisfaisant à l'inégalité $d(\bar{y},\bar{x}_o) < r_o$ on ait :

(2.27) $\quad {}^{\lambda}P_{\bar{y}} \{\omega \; ; \; \frac{1}{n} \log\rho(\bar{y},A_1(\omega)A_2(\omega)\ldots A_n(\omega)) \leq r-\varepsilon \; , \; \forall\, n \geq \ell_1\} \geq \varepsilon$

et

(2.28) $\quad {}^{\lambda}P_{\bar{y}} \{\omega \; ; \; \frac{1}{n} \log\rho(\bar{y},A_1(\omega)A_2(\omega)\ldots A_n(\omega)) \geq r+\varepsilon \; , \; \forall\, n \geq \ell_1\} \geq \varepsilon$

d'où

(2.29) $\quad {}^{\lambda}P_{\bar{y}} \{\omega \; ; \; \underline{\lim}_n \; \frac{1}{n} \log\rho(\bar{y},A_1(\omega)A_2(\omega)\ldots A_n(\omega)) \leq r-\varepsilon\} \geq \varepsilon$

et

(2.30) $\quad {}^{\lambda}P_{\bar{y}} \{\omega \; ; \; \overline{\lim}_n \; \frac{1}{n} \log\rho(\bar{y},A_1(\omega)A_2(\omega)\ldots A_n(\omega)) \geq r+\varepsilon\} \geq \varepsilon$.

Or pour tout $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ et $k \geq 1$, on a

(2.31) $$ {}^{\lambda}P_{\bar{x}} \{\omega \; ; \; \underline{\lim}_n \frac{1}{n} \log\rho(\bar{x},A_1(\omega)A_2(\omega)\ldots A_n(\omega)) \leq r-\varepsilon \mid X_0,X_1,\ldots X_k, \log\rho(\bar{x},A_1),\ldots, \log\rho(\bar{x},A_1\ldots A_k), A_1,\ldots,A_k\} $$

$$ = {}^{\lambda}P_{\bar{x}.A_1\ldots A_k}\{\omega ; \underline{\lim}_n \frac{1}{n} \log\rho(\bar{x},A_1(\omega)A_2(\omega)\ldots A_n(\omega)) \leq r-\varepsilon\} $$

${}^{\lambda}P_{\bar{x}}$ p.s sur l'ensemble $d(\bar{x}A_1\ldots A_k,\bar{x}_0) < r_0$.

Du théorème de convergence des martingales et du fait que puisque $\eta_\lambda\{\bar{y};\, d(\bar{y},\bar{x}_0) < r_0\} > 0$, on a (propriété c_1)

$$ P_{\bar{x}} \{ \bigcap_n \bigcup_{k>n} d(\bar{x}.A_1\ldots A_k,\bar{x}_0) < r_0\} = 1 $$

On déduit que

(2.32) $\quad {}^{\lambda}P_{\bar{x}} \{\omega \; ; \; \underline{\lim}_n \; \frac{1}{n} \log\rho(\bar{x},A_1A_2\ldots A_n) \leq r-\varepsilon\} = 1$

et de même, on a

$$(2.33) \qquad {}^{\lambda}P_{\bar{x}} \{\omega \; ; \overline{\lim_{n}} \frac{1}{n} \log\rho(\bar{x},A_1A_2\ldots A_n) \geq r+\varepsilon\} = 1$$

ce qui contredit (2.24).

Calculons maintenant ξ . De (2.24), on déduit que

$$\begin{aligned} &{}^{\lambda}P_{\eta_\lambda}\{\omega \; ;\lim_{n} \frac{1}{n} \log\rho(x_0,A_1A_2\ldots A_n) = \xi\} \\ &= \int \eta_\lambda(d\bar{x}) \; {}^{\lambda}P_{\bar{x}}\{\omega ;\lim_{n} \frac{1}{n} \log\rho(\bar{x},A_1A_2\ldots A_n) = \xi)\} = 1 \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $\frac{1}{n} \log \rho(x_0,A_1\ldots A_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log\rho(x_0.A_1\ldots A_k,A_{k+1})$;

l'application du théorème ergodique aux moyennes précédentes permet de conclure que

$$(2.34) \qquad \xi = {}^{\lambda}E_{\eta_\lambda}(\xi) = \lim_{n} E_{\eta_\lambda}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log\rho(x_0A_1\ldots A_k,A_{k+1}) = \int \eta_\lambda(d\bar{x})\,{}^{\lambda}E_{\bar{x}} \log \rho(\bar{x},A_1)$$

car ${}^{\lambda}E_{\eta_\lambda} \log^{+}\rho(x_0,A_1) < +\infty$.

La preuve de la condition c_2 s'achèvera en montrant que dans le cas où $\alpha < 0$ on a

$$\alpha(\lambda_1) = \int \eta_{\lambda_1}(d\bar{x}) \; {}^{\lambda_1}E_{\bar{x}} \log\rho(\bar{x},A_1) > 0.$$

Soit n_1 un entier tel que $E \log \|A_1A_2\ldots A_{n_1}\| < 0$.

Par application du lemme de Fatou, on a

$$\{ \frac{d}{d\lambda} E \|A_1A_2\ldots A_{n_1}\|^{\lambda}\}_{\lambda=0} = \lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{E \|A_1A_2\ldots A_{n_1}\|^{\lambda}-1}{\lambda} \leq E \log \|A_1A_2\ldots A_{n_1}\| < 0$$

il existe donc un réel $0<\lambda'<\lambda_1$ tel que

$$(2.35) \qquad E \|A_1A_2\ldots A_{n_1}\|^{\lambda'} = e^{-\gamma} <1.$$

Par conséquent, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$, on ait

(2.36) $\quad E\,\|A_1A_2\ldots A_n\|^{\lambda'} \leq K\, e^{-\gamma n}.$

Il en résulte que pour $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$

$$P\,\{\rho(\bar{x},A_1A_2\ldots A_n) \geq e^{-\frac{\gamma n}{2\lambda'}}\} \leq e^{\frac{\gamma n}{2}}\, E\,\|A_1A_2\ldots A_n\|^{\lambda'} \leq K\, e^{-\frac{\gamma n}{2}}$$

et aussi que

(2.37) $\quad {}^{\lambda_1}P_{\bar{x}}\{\rho(\bar{x},A_1A_2\ldots A_n) \leq e^{\frac{\gamma n}{4\lambda_1}}\} =$

$$\frac{1}{h_{\lambda_1}(\bar{x})}\; E\,\{\rho^{\lambda_1}(\bar{x},A_1A_2\ldots A_n)h_{\lambda_1}(\bar{x}.A_1A_2\ldots A_n)\;;\;\rho(\bar{x},A_1A_2\ldots A_n) \leq e^{\frac{\gamma n}{4\lambda_1}}\}$$

$$\leq \frac{|h_{\lambda_1}|}{h_{\lambda_1}(\bar{x})}\;[e^{-\frac{\gamma n\lambda_1}{2\lambda'}} + E\{\rho^{\lambda_1}(\bar{x},A_1A_2\ldots A_n)\;;\;e^{-\frac{\gamma n}{2\lambda'}} \leq \rho(\bar{x},A_1A_2\ldots A_n] \leq e^{\frac{\gamma n}{4\lambda_1}}\}$$

$$\leq \frac{|h_{\lambda_1}|}{h_{\lambda_1}(\bar{x})}\;[e^{-\frac{\gamma n\lambda_1}{2\lambda'}} + K\, e^{-\frac{\gamma n}{2}}\, e^{\frac{\gamma n}{4}}]$$

On a donc $\sum\limits_{n>0} {}^{\lambda_1}P_{\bar{x}}(\rho(\bar{x},A_1A_2\ldots A_n) \leq e^{\frac{\gamma n}{4\lambda_1}}) < +\infty$ ce qui d'après le lemme de Borel-Cantelli permet de conclure que $\alpha(\lambda_1) \geq \frac{\gamma\,\lambda_1}{4} > 0$.

La démonstration de la condition c_2 est ainsi terminée.

3) Preuve de la condition c_3

Soit $M \in S_p k$ une matrice réalisable. Il existe une sous-variété projective V de ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ et un élément $\bar{v} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ tels que pour tout $\bar{x} \notin V$, on ait $\lim_n \bar{x}.M^n = \bar{v}$, $\bar{v} = \bar{v}\cdot M$; ceci implique que $\bar{v} \in S_{\tilde{\nu}}$, en effet si $\bar{x}_0 \in S_{\tilde{\nu}}$, on a $S_{\tilde{\nu}} = \overline{x_o \cdot T_p}$

On a également $\bar{v} \in S_{\eta_\lambda}$ puisque $S_{\eta_\lambda} = S_{\tilde{\nu}}$, cette dernière assertion résultant du fait que $S_{\tilde{\nu}}$ porte une probabilité ${}^\lambda P$ invariante de support $S_{\tilde{\nu}}$ et du fait que ${}^\lambda P$ admet une unique probabilité invariante.

ε positif étant donné, il existe un voisinage U de $\bar{v}$, et un entier ℓ_0 tels que pour tous $\bar{x} \in U$ et $\ell \geq \ell_0$, on ait

(2.38) $\quad d(\bar{x}.M^\ell, \bar{v}) < \varepsilon/2$

et

(2.39) $\quad \left| \log\rho(\bar{x}, M^\ell) - \ell \log|q(M)| \right| < \varepsilon/2.$

Par conséquent, il existe un voisinage W_M de M tel que pour tous $\bar{x} \in U$ et $\ell \geq \ell_0$, on ait

(2.40) $$ {}^\lambda P_{\bar{x}}(d(\bar{x}.A_1 A_2 \ldots A_{k\ell}, \bar{v}) < \varepsilon, \ |\log\rho(\bar{x}, A_1 A_2 \ldots A_{k\ell}) - \ell \log|q(M)|| \leq \varepsilon) $$

$$ \geq {}^\lambda P_{\bar{x}}(A_{pk+1} A_{pk+2} \ldots A_{(p+1)k} \in W_M, \ 0 \leq p \leq \ell - 1) > 0 $$

En posant successivement $\ell = \ell_o$ $k = m_1$ puis $\ell = (\ell_0+1)k = m_2$, l'inégalité précédente permet d'obtenir (2.5) et (2.6) pour $\xi_n = \log|q(M)|$, $y = \bar{v}$, $A = U$ $\tau = \ell_0 \log|q(M)|$ (le fait que $\delta = \varepsilon$ n'étant pas restrictif).

Comme d'après l'hypothèse $(\tilde{H}_2)$ $\{\log|q(M)|$; M réalisable$\}$ est dense dans $\mathbb{R}$, la condition (c_3) est ainsi vérifiée.

L'énoncé du théorème 2.4 est une application directe des théorèmes 2.1 et 2.2 dans le cas où $\lambda = 0$.

Il en est de même de l'assertion 3) du théorème 2.4 en posant $V_n = -\log\rho(\bar{x}, A_1 \ldots A_n)$ $n \geq 1$.

Prouvons maintenant l'assertion 2) du théorème 2.4.

On a les égalités

$$(2.41)\qquad {}^{\lambda_1}E_{\bar{x}}\ \{\frac{1}{h_{\lambda_1}(Z_{\bar{x}}(t))}\ e^{-\lambda_1 W_{\bar{x}}(t)}\ g(Z_{\bar{x}}(t),\ W_{\bar{x}}(t))\ ;\ N_{\bar{x}}(t) < +\infty\}$$

$$= \frac{1}{h_{\lambda_1}(\bar{x})}\ \sum_{n=0}^{\infty}\ E[\rho^{\lambda_1}(\bar{x},A_1\ldots A_n)\ \frac{1}{h_{\lambda_1}(\bar{x}.A_1\ldots A_n)}\ h_{\lambda_1}(\bar{x}.A_1\ldots A_n)$$

$$e^{-\lambda_1(\log\rho(\bar{x},A_1\ldots A_n)-t)}\ g(\bar{x}.A_1\ldots A_n,\log\rho(\bar{x},A_1\ldots A_n)-t)\ ;\ N_{\bar{x}}(t) = n\ ]$$

$$= \frac{e^{\lambda_1 t}}{h_{\lambda_1}(\bar{x})}\quad E\ [g(Z_{\bar{x}}(t),\ W_{\bar{x}}(t)\ ;\ N_{\bar{x}}(t) < +\infty]\ .$$

d'où il résulte en appliquant le théorème 2-1 au premier membre de (2.41) et en posant $g^*(\bar{x},t) = \frac{1}{h_{\lambda_1}(\bar{x})}\ e^{-\lambda_1 t}\ g(\bar{x},t)\quad \bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1},\ \ t \in \mathbb{R}$, l'existence de la limite

$$\lim_{t\to+\infty}\ e^{\lambda_1 t}\ E(g(Z_{\bar{x}}(t),\ W_{\bar{x}}(t)\ ;\ N_{\bar{x}}(t) < +\infty\ )$$

Cette limite s'exprime sous la forme

$$h_{\lambda_1}(\bar{x})K(g) = h_{\lambda_1}(\bar{x}) \times \frac{1}{\alpha(\lambda_1)}\quad \int \psi(d\bar{y})\ {}^{\lambda_1}E_{\bar{y}}\ [\int_0^{W_{\bar{y}}(0)} g^*\ (Z_{\bar{y}}(0),s)\ ds]$$

$\psi \in M_1({}^t\mathbb{P}_{d-1})$.

Cette expression montre que $K(g)$ est strictement positive dès que g est strictement positive sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1} \times \mathbb{R}_+$.

3. Application à l'étude d'équations aux différences aléatoires

Dans ce paragraphe, on étudie la distribution limite de la solution Y_n de l'équation aux différences aléatoire

(3.1) $\qquad Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n \qquad n \geq 1$

où les A_n $n \geq 1$ sont des matrices de $GL(d,\mathbb{R})$ et les B_n $n \geq 1$ sont des vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^d$.

Pour Y_o donné, la solution (3.1) est

$$Y_n = B_n + A_n B_{n-1} + \dots + (A_n A_{n-1} \dots A_2) B_1 + (A_n \dots A_1) Y_o .$$

Nous supposerons que les variables aléatoires $(A_n, B_n)_{n \geq 1} \in GL(d,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$ sont indépendantes et de même loi.

La loi de $Y_n - (A_n \dots A_1) Y_o$ est alors la même que la loi de la variable aléatoire

(3.2) $\qquad R_n = \sum_{k=1}^{n} A_1 A_2 \dots A_{k-1} B_k \in \mathbb{R}^d .$

Si l'on a :

$$\text{p.s} \quad \lim_n \frac{1}{n} \log \|A_1 A_2 \dots A_n\| = \alpha < 0$$

et si de plus $E\|B_1\|^\gamma < +\infty$ pour $\gamma > 0$

alors $\quad P[\bigcap_p \bigcup_{n \geq p} \|B_n\| \leq e^{-\frac{1}{2}\alpha n}] = 1$

et donc la suite $(R_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrememnt vers

(3.3) $\qquad R = \sum_{k=1}^{\infty} A_1 A_2 \dots A_{k-1} B_k$

Nous allons énoncer un théorème qui précise les propriétés asymptotiques de la loi de R.

Adoptons auparavant les notations suivantes : on pose $S_{d-1} = \{ x \in {}^t\mathbb{R}^d \ ; \ \|x\| = 1\}$

et pour $x \in S_{d-1}$, $A \in GL(d,\mathbb{R})$

$$x.A = \frac{xA}{\|xA\|}$$

Théorème 3.1 : *Soit* $(A_n, B_n)_{n\geq 1} \in GL(d,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi.*

1) Si $E \log^+ \|A_1\| < +\infty$, *la limite*

$$\alpha = \lim_n \frac{1}{n} \log \|A_1 A_2 \ldots A_n\|$$

existe presque sûrement et est $< +\infty$ *presque sûrement.*
Si $\alpha < 0$ *et si pour un* $\gamma > 0$ $0 < E\|B_1\|^\gamma < +\infty$ *la série* $R = \sum_{n=1}^{\infty} A_1 A_2 \ldots A_{n-1} B_n$ *converge presque sûrement, et la loi de la solution* (Y_n) *de (3.1) converge vers celle de* R, *indépendamment de* Y_o.

2) Si de plus les conditions suivantes sont satisfaites :

i) pour tout ouvert $U \subset S_{d-1}$ *et tout* $x \in S_{d-1}$

$$\sum_{n\geq 0} \int 1_U(x.A)\, p^n(dA) > 0$$

où p *désigne la loi de* A_1 .

ii) $\{\log|q(M)| \ ; \ M$ *soit* p-*réalisable* $\}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

iii) pour tout vecteur $r \in \mathbb{R}^d$ *on a*

$$P(A_1 r + B_1 = r) < 1$$

iv) il existe un λ_o *tel que*

$$E\,[\mu(A_1)]^{\lambda_o} \geq 1$$

où $\mu(A_1)$ *désigne le plus petite valeur propre de la matrice* $(A_1\,{}^tA_1)^{1/2}$ *et un* $\delta > 0$ *tel que* $E\,\{\sup(\|A_1\|\,,\,\|B_1\|)\}^{\lambda_o+\delta} < +\infty$ *et* $E\,\|A_1\|^{-\delta} < +\infty$ *alors il existe un* $\lambda_1 \in\,]0,\lambda_o]$ *tel que* $\lim_n\,(E\,\|A_1A_2\ldots A_n\|^{\lambda_1})^{1/n} = 1$ *et l'on a pour tout* $x \in S_{d-1}$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\lambda_1} P(x\;R > t) = H_{\lambda_1}(\bar{x})$$

où $\bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$ *est l'image de* $x \in S_{d-1}$ *et où* H_{λ_1} *est une fonction continue, strictement positive sur* ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ *telle que*

$$H_{\lambda_1}(\bar{x}) = \int \rho^{\lambda_1}(\bar{x},A_1)H_{\lambda_1}(\bar{x}.A_1)p(dA_1) \qquad \bar{x} \in {}^t\mathbb{P}_{d-1}$$

avec $\rho(\bar{x},A_1) = \|xA_1\| \quad x \in S_{d-1}$.

Démonstration du théorème 3.1

1) Les affirmations contenues dans le 1) du théorème 3.1 sont claires d'après la proposition 2.1 et les considérations qui précèdent l'énoncé du théorème 3.1, hormis le fait que l'on a si $\alpha < 0$

$$\text{p.s.} \quad \lim_n A_n\,A_{n-1}\ldots A_1\,Y_o$$

ceci résulte du fait que

$$\frac{1}{n}\log\|A_nA_{n-1}\ldots A_1Y_0\| \leq \frac{1}{n}\log\|A_nA_{n-1}\ldots A_1\| \qquad n \geq 1$$

et du fait que l'on a p.s.

$$(3.4) \qquad \lim_n \frac{1}{n}\log\|A_nA_{n-1}\ldots A_1\| = \lim_n \frac{1}{n}\log\|A_1A_2\ldots A_n\| = \alpha$$

L'égalité (3.4) résultant simplement du fait que

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \|A_n A_{n-1} \dots A_1\| = \operatorname{Inf}_n \frac{1}{n} \int \log \|A\| \, p^n(dA) =$$

d'après le théorème ergodique sous-additif de Kingman [13] .

2) Démontrons maintenant la deuxième partie du théorème 3.1.

Rappelons tout d'abord que, sous les hypothèses du théorème 3.1, d'après la proposition 1.2, il existe un réel $\lambda_1 \in]0,\lambda_o]$ tel que

$$\lim_n (E \|A_1 A_2 \dots A_n\|^{\lambda_1})^{1/n} = 1,$$

et une fonction h_{λ_1} continue sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$, strictement positive telle que

$$h_{\lambda_1}(\bar{x}) = \int \rho^{\lambda_1}(\bar{x},A_1) \, h_{\lambda_1}(\bar{x}.A_1) \, p(dA_1).$$

Nous allons étudier pour $x \in S_{d-1}$ le comportement lorsque t tend vers $+\infty$ de

$$(3.5) \qquad Z(x,t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^{\lambda_1} P(x R > u) \, du.$$

Nous verrons par la suite que cette étude suffit à obtenir les résultats énoncés.

Commençons par établir que Z satisfait à une équation de renouvellement.

Nous pouvons écrire

$$R = B_1 + A_1 R^1$$

où $R^1 = \sum_{k=2}^{+\infty} A_2 A_3 \dots A_{k-1} B_k$ est indépendante de (A_1,B_1) et a même loi que R.

On en déduit que pour tous $x \in S_{d-1}$, $t \in \mathbb{R}$, on a

$$(3.6) \qquad P(x R > t) = P(x A_1 R^1 > t) + \psi(x,t)$$

où

$$(3.7) \qquad \psi(x,t) = P(t - x B_1 < x A_1 R^1 \leq t) - P(t < x A_1 R^1 \leq t - x B_1)$$

d'où il résulte que

(3.8) $$Z(x,t) = E\left[\|x\, A_1\|^{\lambda_1} e^{t-\log\|x\, A_1\|} \int_0^{e^{t-\log\|x\, A_1\|}} v^{\lambda_1} P\left(\frac{xA_1}{\|xA_1\|} R^1 > v\right) dv\right]$$

$$+ e^{-t} \int_0^{e^t} v^{\lambda_1} \psi(x,v)\,dv$$

c'est-à-dire

(3.9) $$Z(x,t) = E\left[\|x\, A_1\|^{\lambda_1} Z(x.A_1, t-\log\|x\, A_1\|)\right] + z(x,t)$$

où

(3.10) $$z(x,t) = e^{-t} \int_0^{e^t} v^{\lambda_1} \psi(x,v)\,dv.$$

Notons maintenant ${}^{\lambda_1}\tilde{P}$ la probabilité de transition définie sur $S_{d-1} \times \mathbb{R}$ par

(3.11) $${}^{\lambda_1}\tilde{P}f(x,t) = \frac{1}{h_{\lambda_1}(\bar{x})} \int \|x\, A_1\|^{\lambda_1} h_{\lambda_1}(\bar{x}.A_1) f(x.A_1, t-\log\|x\, A_1\|)\, p(dA_1)$$

$$= {}^{\lambda_1}E_{\bar{x}}\, f(x.A_1, t-\log\|x.A_1\|)$$

et posons

(3.12) $$\tilde{Z}(x,t) = \frac{Z(x,t)}{h_{\lambda_1}(x)}\ ,$$

(3.13) $$\tilde{z}(x,t) = \frac{z(x,t)}{h_{\lambda_1}(\bar{x})}\ .$$

La relation (3.9) équivaut alors à

(3.14) $$\tilde{Z}(x,t) = {}^{\lambda_1}\tilde{P}\,\tilde{Z}(x,t) + \tilde{z}(x,t) \qquad x \in S_{d-1},\quad t \in \mathbb{R}$$

On en déduit le

<u>Lemme 3.1</u> :

Pour $x \in S_{d-1}$, $t \in \mathbb{R}$, *on a* :

$$(3.15)\quad \tilde{Z}(x,t) = \frac{1}{h_{\lambda_1}(\bar{x})}\; e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\lambda 1}\; P(x\,R>u)\;du = \sum_{n=0}^{\infty} {}^{\lambda_1}\tilde{P}^n\,\tilde{z}\,(x,t)$$

Preuve du lemme 3.1

De (3.14), il résulte que pour tout $n\geq 1$ on a :

$$(3.16)\quad \tilde{Z}(x,t) = {}^{\lambda_1}\tilde{P}^{n+1}\tilde{Z}(x,t) + \sum_{k=0}^{n} {}^{\lambda_1}\tilde{P}^n\,\tilde{z}(x,t)$$

Or, en posant $F(x,t) = P(x\;R>t)\quad x\in {}^t\mathbb{R}^d,\quad t\in\mathbb{R}$

on peut écrire que :

$$(3.17)\quad {}^{\lambda_1}\,\tilde{P}^{n+1}\,\tilde{Z}(x,t) = \frac{1}{h_{\lambda_1}(\bar{x})}\,E\,[e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\lambda 1}.F(xA_1\ldots A_{n+1},u)h_{\lambda_1}(\bar{x}.A_1A_2\quad A_{n+1})du]$$

$$= \frac{1}{h_{\lambda_1}(\bar{x})}\;e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\lambda_1}\;E\,[F(x\;A_1\ldots A_{n+1},u)h_{\lambda_1}(\bar{x}.A_1A_2\ldots A_{n+1})]\;du\,.$$

Comme pour tout $x\in S_{d-1}$ on a ps $\lim\limits_n ||x\;A_1A_2.A_n|| = 0$ puisque $\alpha<0$,

on en conclut que pour tout $u>0$ $\lim\limits_n E[F(x\;A_1\ldots A_{n+1},u)\;h_{\lambda_1}(\bar{x}\cdot A_1A_2\ldots A_{n+1})$

on obtient également en appliquant le théorème de la convergence bornée de

Lebesgue puisque pour tout $n\geq 1$ et tout $u\geq 0$ $E[F(x\,A_1\ldots A_{n+1},u)h_{\lambda_1}(x\,A_1\ldots A_{n+1})]$

$\leq \sup h_{\lambda_1}$

que :

$$(3.18)\quad \lim_n\; {}^{\lambda_1}\tilde{P}^{n+1}\tilde{Z}(x,t) = 0\qquad x\in S_{d-1},\quad t\in\mathbb{R}$$

Le lemme 3.1 est une conséquence immédiate de (3.17) et de (3.18).

Pour obtenir le comportement asymptotique de $\tilde{Z}(x,t)$ quand t tend vers $+\infty$, nous appliquerons le théorème 2.2. Pour cela nous allons montrer successivement que :

A) la chaîne de Markov à valeurs dans $S_{d-1}\times\mathbb{R}$ définie par

$(x\cdot A_1\ldots A_n,\quad t-\log||x\;A_1\ldots A_n||)\quad n\geq 1$ de probabilité de transition

$\lambda_1 \tilde{P}$ satisfait aux hypothèses de ce théorème.

B) et qu'il en est de même pour la fonction $\tilde{z}$.

A) La condition (c_1) est immédiatement justifiée en appliquant le résultat suivant :

lemme 3.2 : *Soit* Q *la probabilité de transition d'une chaîne de Markov* (Y_n) *définie sur un espace compact* X . *Supposons que* Q *opère sur l'espace* $\mathcal{C}(X)$ *des fonctions continues sur* X, *et que de plus* Q *satisfasse l'hypothèse d'irréductibilité suivante :*
pour tout $x \in X$ *et tout ouvert* U *de* X

$$\sum_{n \geq 0} Q^n(x,U) > 0$$

Alors pour tout $x \in X$ *et tout ouvert* U *de* X *on a :*

$$Q_x\left(\bigcup_{n \geq 1} (Y_n \in U)\right) = 1.$$

Preuve du lemme 3.2 : Soit U un ouvert de X , la fonction $x \to Q_x\left(\bigcup_{n \geq 1} (Y_n \in U)\right)$ est semi-continue inférieurement sur X, et strictement positive sur X, il existe donc un réel $\delta(U) > 0$ tel que pour tout $x \in X$:

$$Q_x\left(\bigcup_{n \geq 1} (Y_n \in U)\right) \geq \delta(U).$$

Le lemme de Borel Cantelli étendu aux chaînes de Markov [1] permet alors de conclure que pour tout $x \in X$

$$Q_x\left(\bigcup_{n \geq 1} (Y_n \in U)\right) = 1.$$

Dans le cas particulier qui nous intéresse, nous savons donc que pour tout ouvert U de S_{d-1} et tout $x \in S_{d-1}$, on a :

$$\lambda_1 \tilde{P}_x \left\{ \bigcup_{n \geq 1} [(x \cdot A_1 \ldots A_n) \in U] \right\} = 1.$$

Nous noterons $\tilde{\eta}_{\lambda_1}$ la probabilité invariante pour la chaîne de Markov précédente et définie par :

(3.19) $\quad \tilde{\eta}_{\lambda_1}(A) = \eta_{\lambda_1}(\bar{A})$

où A est un borélien quelconque de S_{d-1}, et $\bar{A}$ sa projection sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$

Remarque : La chaîne de Markov $(x \bullet A_1 \ldots A_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans S_{d-1} sera étudiée plus complètement dans la partie C) qui suit. Nous verrons en particulier que $\tilde{\eta}_{\lambda_1}$ est son unique probabilité invariante.

Les preuves des conditions (c_2), (c_3) (c_4)... sont identiques à celles fournies dans la démonstration du théorème 2.4, la seule modification consistant à remplacer la distance d sur l'espace projectif ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ par la distance δ sur la sphère définie par

$$\delta(x,y) = \|x-y\| \qquad x \in S_{d-1}, \quad y \in S_{d-1}$$

B) Etudions maintenant les propriétés de $\tilde{z}$.

Commençons par noter le

lemme 3.3 : *La loi de* R *ne charge aucune sous-variété affine de* $\mathbb{R}^d$.

Preuve du lemme 3.3 : Désignons par μ la loi de R, et posons pour

$g = (A(g), B(g)) \in GL(d,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$

$$g\,x = A(g)\,x + B(g).$$

Supposons que l'énoncé du lemme 3.3 ne soit pas satisfait, et considérons l'ensemble des sous-variétés affines W de $\mathbb{R}^d$ telles que $\mu(W) > 0$ et de dimension minimum. Si W_1 et W_2 sont deux telles sous-variétés distinctes on a $\mu(W_1 \cap W_2) = 0$ puisque $\dim(W_1 \cap W_2)$ est strictement inférieur à $\dim W_i$ $(i=1,2)$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des sous-variétés W du type précédent vérifiant de plus $\mu(W) \geq \varepsilon$ est fini. Par conséquent, il existe une sous-variété W_o maximisant $\mu(W)$. Si l'on désigne par Φ la loi de $g_1 = (A_1, B_1)$ l'équation de convolution

(3.20) $$\mu(W_o) = \int (g\mu)(W_o) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \Phi^n(dg)$$

(Φ^n est la nième convolée de Φ dans le groupe affine $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^d$) établit que l'on a (3.21) $g\,\mu(W_o) = \mu(W_o)$ pour tout g appartenant à un ensemble $B \subset \mathcal{A}$ de probabilité 1 pour $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \Phi^n$. L'ensemble des $g^{-1} W_o$ $g \in B$ est donc fini. Si G_Φ désigne le sous-groupe fermé de $\mathcal{A}$ engendré par le support de Φ il est clair que $\mathcal{F} = \{g^{-1} W_o, g \in G_\Phi\}$ est également fini et que G_Φ applique $\mathcal{F}$ dans lui-même.

Envisageons maintenant deux cas :

1° Si $\dim W_o = 0$, c'est-à-dire si W_o est un point de $\mathbb{R}^d$, l'équibarycentre v_o de $\mathcal{F}$ est invariant par tout élément $g \in G_\Phi$, en particulier on a :

$$P(g_1\ v_o = A_1\ v_o + B_1 = v_o) = 1$$

ce qui contredit l'hypothèse (iii).

2° Si $1 \leq \dim W_o \leq d-1$

Soit $\tilde{W}_o$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ définissant la direction de W_o et $W_o^\perp$ le sous-espace vectoriel de ${}^t\mathbb{R}^d$, de dimension $d - \dim W_o$ des vecteurs orthogonaux à $\tilde{W}_o$. D'après ce qui précède l'image de $\{W_o^\perp \cdot A(g),\ g \in G_\Phi\}$ dans l'espace projectif ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$ est une réunion finie de sous-variétés projectives propres de ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$. Ceci est incompatible avec l'hypothèse d'irréductibilité (i)

La preuve du lemme 3.3 est ainsi achevée.

Nous en déduisons le

<u>Lemme 3.4</u> : *L'application* $\tilde{z}$ *est continue sur* $S_{d-1} \times \mathbb{R}$.

Preuve du lemme 3.4 . Pour établir ce lemme, il suffit d'établir que l'application $(x,t) \to \int_o^{e^t} u^{\lambda_1} [P[x R > u] - P(x A_1 R^1 > u)] du = \alpha(x,t)$ est continue sur $S_{d-1} \times \mathbb{R}$. Cette propriété s'obtient facilement en utilisant la décomposition :

$$\alpha(x,t) - \alpha(x_o,t_o) = \int_o^{e^{t_o}} u^{\lambda_1}_{t} [P(x R>u) - P(x_o R>u] du - \int_o^{e^{t_o}} u^{\lambda_1} [P(x A_1 R^1 >u) - P(x_o A_1 R^1 >u)] du + \int_{e^{t_o}}^{e} u^{\lambda_1} [P(x R>u) - P(x A_1 R^1 >u] du$$

et à l'aide du résultat du lemme 3.3

La suite du paragraphe B) va être consacrée à établir une propriété d'intégrabilité de $\tilde{z}$. Auparavant énonçons et prouvons un lemme utile pour cette étude

Lemme 3.5 : *Pour tout* $0 \leq \lambda < \lambda_1$ *on a* $E||R||^\lambda < +\infty$

Preuve du lemme 3.5 : Remarquons d'abord que pour $\lambda \in]o,\lambda_1[$ on a $\lim_n (E||A_1A_2 \ldots A_n||^\lambda)^{1/n} = k(\lambda) < 1$.

Cette propriété résulte du fait que la fonction $\log k(\lambda)$ est convexe sur l'intervalle $[o,\lambda_1]$, que $k(o) = k(\lambda_1) = 1$, et $k(\lambda)$ est strictement inférieure à 1 sur un intervalle $]o,\varepsilon[$ $\varepsilon>0$ car $\alpha<0$. L'énoncé du lemme 3.5 se déduit alors immédiatement des inégalités

$$E||R||^\lambda \leq \sum_{k=1}^{\infty} E||A_1A_2 \ldots A_{k-1}||^\lambda \; E||B_k||^\lambda \qquad \text{pour } 0<\lambda \leq 1$$

et

$$(E||R||^\lambda)^{1/\lambda} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (E||A_1A_2 \ldots A_{k-1}||^\lambda)^{1/\lambda} (E||B_k||^\lambda)^{1/\lambda} \text{ pour } 1 \leq \lambda.$$

Enonçons et démontrons maintenant le

Lemme 3.6 : *La fonction* $\sup_{x \in S_{d-1}} |\tilde{z}(x,t)|$ *est directement Riemann intégrable sur* $\mathbb{R}$ *c'est-à-dire que :*

$$\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \sup \{|z(x,t)| \ , \ x \in S_{d-1} \ \ell \leq t < \ell+1\} < +\infty$$

Preuve du lemme 3.6 : nous avons :

$$(3.22) \qquad \tilde{z}(x,t) = \tilde{z}_1(x,t) - \tilde{z}_2(x,t) \qquad\qquad x \in S_{d-1}, \ t \in \mathbb{R}$$

où

$$(3.23) \qquad \tilde{z}_1(x,t) = \frac{e^{-t}}{h_{\lambda_1}(\overline{x})} \int_0^{e^t} v^{\lambda_1} P(v - x B_1 < x A_1 R^1 \leq v) \, dv$$

$$(3.24) \qquad \tilde{z}_2(x,t) = \frac{e^{-t}}{h_{\lambda_1}(\overline{x})} \int_0^{e^t} v^{\lambda_1} P(v < x A_1 R^1 \leq v - x B_1) \, dv$$

Majorons la fonction $\tilde{z}_1$.

Fixons $0 < \varepsilon < 1$ tel que (3.25) $\quad -1 < \lambda_1 - (\lambda_1 + \delta)\varepsilon < 0$

on a :

$$(3.26) \qquad 0 \leq \tilde{z}_1(x,t) \leq \frac{1}{\operatorname{Inf}_{\overline{x}} h_\lambda(\overline{x})} \left[e^{-t} \int_0^{e^t} v^{\lambda_1} P(x B_1 > v^\varepsilon) \, dv \right.$$
$$\left. + e^{-t} \int_0^{e^t} v^{\lambda_1} P(v - v^\varepsilon < x A_1 R^1 \leq v) \, dv \right]$$

Etudions successivement chacun des termes du crochet figurant au second membre de (3.26).

(i) on a tout d'abord

$$0 \leq e^{-t} \int_0^{e^t} v^{\lambda_1} P(x B_1 > v^\varepsilon) dv \leq e^{-t} \int_0^{e^t} v^{\lambda_1} v^{-(\lambda_1+\delta)\varepsilon} E||B_1||^{(\lambda_1+\delta)}$$

c'est-à-dire :

$$(3.27)\qquad 0 \le e^{-t} \int_o^{e^t} v^{\lambda_1} P(x\, B_1 > v^{\varepsilon})\, dv \le \frac{E||B_1||^{\lambda_1+\delta)}}{1+\lambda_1 - \varepsilon(\lambda_1+\delta)}\, e^{t[\lambda_1 - (\lambda_1+\delta)\varepsilon]}$$

(ii) De plus, on a :

$$0 \le e^{-t} \int_o^{e^t} v^{\lambda_1} P(v - v^{\varepsilon} < x\, A_1 R^1 \le v)dv = e^{-t}\int_o^{e^t} v^{\lambda_1} P(x\, A_1 R^1 > v - v^{\varepsilon})dv - e^{-t}\int_o^{e^t - e^{\varepsilon t}} v^{\lambda_1} (P(xA_1 R^1 > v)dv$$

$$- \; e^{-t} \int_{e^t - e^{\varepsilon t}}^{e^t} v^{\lambda_1} P(x\, A_1 R^1 > v)\, dv$$

d'où l'on déduit par changement de variable dans la seconde intégrale figurant au second membre de l'égalité précédente que :

$$(3.28)\qquad 0 \le e^{-t} \int_o^{e^t} v^{\lambda_1} P(v - v^{\varepsilon} < x\, A_1 R^1 \le v)dv = e^{-t}\int_o^{e^t} [u^{\lambda_1} - (u-u^{\varepsilon})^{\lambda_1}]\,(1 - \varepsilon u^{\varepsilon - 1})$$

$$\times\, P(x\, A_1 R^1 > u - u^{\varepsilon})\; du \; - \; e^{-t}\int_{e^t - e^{\varepsilon t}}^{e^t} v^{\lambda_1} P(x\, A_1 R^1 > v)dv.$$

Remarquons alors qu'il existe une constante k_1 telle que pour tout $u \ge 0$

$$(3.29)\qquad 0 \le [u^{\lambda_1} - (u-u^{\varepsilon})^{\lambda_1}]\;(1 - \varepsilon u^{\varepsilon-1}) \le k_1\, u^{\lambda_1 + \varepsilon - 1}$$

et que d'autre part si λ est un nombre réel tel que

$$(3.30)\qquad 0 < \lambda < \lambda_1 \qquad \text{et} \qquad -1 < \lambda_1 - \lambda + \varepsilon - 1 < 0$$

on a

$$(3.31)\qquad 0 \le P(x\, A_1\, R^1 > v) \le v^{-\lambda}\, E||A_1||^{\lambda}\, E||R||^{\lambda}$$

le second membre de cette inégalité étant fini d'après le lemme 3.5

On déduit alors de (3.28) (3.29 et (3.31) qu'il existe une constante k_2 telle que

$$(3.32)\qquad 0 \le e^{-t} \int_o^{e^t} v^{\lambda_1} P(v - v^{\varepsilon} < x\, A_1 R^1 \le v)dv \le k_2\, e^{t(\lambda_1 - \lambda + \varepsilon - 1)} \qquad x \in S_{d-1}, t \in \mathbb{R}$$

Des inégalités (3.30) et (3.32) il résulte que $\sup\limits_{x \in S_{d-1}} \tilde{z}_1(x,t)$ est directement Riemann intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Comme de plus, on a :

(3.33) $\quad 0 \leq \tilde{z}_1(x,t) \leq \dfrac{1}{\operatorname{Inf} h_{\lambda_1}} \; e^{\lambda_1 t}$

$\sup\limits_{x\in S_{d-1}} \tilde{z}_1(x,t)$ est aussi directement Riemann intégrable sur $\mathbb{R}_-$, et donc

$\sup\limits_{x\in S_{d-1}} \tilde{z}_1(x,t)$ est directement Riemann intégrable sur $\mathbb{R}$.

Un raisonnement analogue permet de montrer qu'il en est de même pour

$\sup\limits_{x\in S_{d-1}} \tilde{z}_2(x,t)$ et le lemme 3.6 est donc prouvé.

En tenant compte des lemmes 3.1, 3.4, 3.6, et des résultats de la partie A) nous pouvons donc conclure à l'aide du théorème 2.2 que :

<u>Proposition 3.1</u>

$$\lim_{t\to+\infty} Z(x,t) = \lim_{t\to+\infty} e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\lambda_1} P(x\,R>u)\,du$$

$$= \frac{h_{\lambda_1}(\bar{x})}{\alpha(\lambda_1)} \int_{S_{d-1}} \frac{1}{h_{\lambda_1}(\bar{z})}\,\tilde{\eta}_{\lambda_1}(dz) \int_0^{+\infty} u^{\lambda_1-1}\,[P(z\,R>u) - P(z\,A_1\,R^1>u)]\,du$$

où $\quad 0 < \alpha(\lambda_1) = \displaystyle\int_{{}^t\mathbb{P}_{d-1}} \eta_{\lambda_1}(d\bar{x})\;{}^{\lambda_1}E_{\bar{x}}\,[\operatorname{Log}\rho(\bar{x},A_1)] < +\infty$,

<u>Preuve de la proposition 3.1</u> :

L'existence de la limite est justifiée par les remarques qui précèdent l'énoncé de la proposition 3.1. Cette limite $\ell(x)$ est donnée par :

$$\ell(x) = \frac{h_{\lambda_1}(\bar{x})}{\alpha(\lambda_1)} \int_{S_{d-1}} \tilde{\eta}_{\lambda_1}(z)\,\frac{1}{h_{\lambda_1}(\bar{z})} \quad I(z)$$

où $\quad I(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dt\; e^{-t} \int_0^{e^t} u^{\lambda_1}\,[P(z\,R>u) - P(z\,A_1\,R^1>u)]\,du$

Calculons $I(z)$ afin d'obtenir l'expression de $\ell(x)$ donnée dans l'énoncé de la proposition 3.1 .

On a : $I(z) = \lim_{N\to+\infty} I_N(z)$

où $$I_N(z) = \int_{-N}^{+\infty} dt\ e^{-t} \int_o^{e^t} u^{\lambda_1} [P(z\ R>u) - P(z\ A_1 R^1>u)]\ du.$$

En faisant le changement de variable $y = e^t$, et en utilisant le théorème de Fubini, il vient :

$$I_N(z) = e^N \int_o^{e^{-N}} du\ u^{\lambda_1} [P(z\ R>u) - P(z\ A_1\ R^1>u)]$$

$$+ \int_{e^{-N}}^{+\infty} du\ u^{\lambda_1 - 1} [P(z\ R>u) - P(z\ A_1\ R^1>u)]\ du.$$

Le résultat s'en déduit immédiatement.

Prouvons maintenant un lemme qui permet d'assurer à partir de la convergence en moyenne de Cesaro établie dans la proposition 3.1, la convergence lorsque $t \to +\infty$ de $t^{\lambda_1} P(x\ R>t)$

Lemme 3.7 : *On a*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\lambda_1} P(x\ R>t) = \ell(x) \qquad x \in S_{d-1}$$

Démonstration du lemme 3.7

Posons $U_x(t) = \int_o^t u^{\lambda_1} P(x\ R>u)\ du$

d'après la proposition 3.1 on sait que

(3.34) $$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} U_x(t) = \ell(x)$$

Envisageons deux cas :

(i) $\ell(x) = 0$

Les inégalités

$$\frac{1}{t} U_x(t) \geq \frac{1}{t} \int_{t/2}^{t} u^{\lambda_1} P(x\ R>u)\ du \geq \frac{1}{2} \left(\frac{t}{2}\right)^{\lambda_1} P(x\ R>t) \geq 0$$

montrent que

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\lambda_1} P(x\ R>t) = 0 = \ell(x)$$

(ii) $\ell(x) > 0$

Soit $(\mu_{t,x})_{t\geq 1}$ la famille de mesures définies sur l'intervalle $]1, +\infty[$

en posant :

$$\text{(3.35)} \qquad \mu_{t,x}[a,b] = \frac{U_x(tb) - U_x(ta)}{U_x(t)} \qquad b \geq a \geq 1$$

D'après (3.34) on a

$$\text{(3.36)} \qquad \lim_{t\to+\infty} \mu_{t,x}[a,b] = b - a$$

Par ailleurs nous pouvons écrire facilement que

$$\text{(3.37)} \qquad \mu_{t,x}[a,b] = \int_a^b v^{\lambda_1} g_{t,x}(v)\ dv$$

où $\quad g_{t,x}(v) = \dfrac{t^{\lambda_1+1} P(x\ R>tv)}{U_x(t)}$

Remarquons que la famille de fonctions $(g_{t,x})_{t\geq 1}$ est uniformément bornée sur $]1 + \infty[$. On a en effet :

$$0 \leq g_{t,x}(v) \leq \frac{1}{\frac{1}{t}\displaystyle\int_{t/2}^{t} \left(\frac{u}{t}\right)^{\lambda_1} \frac{P(x\ R>u)}{P(x\ R>tv)}\ du}$$

Comme pour $u \leq t$ et $v \geq 1$ on a :

$P(x\,R>u) \geq P(x\,R>t) \geq P(x\,R>tv)$

Il en résulte que

$0 \leq g_{t,x}(v) \leq 2^{\lambda_1+1} \qquad t \geq 1 \qquad v \geq 1$

Par ailleurs pour tout $t \geq 1$ l'application $v \to g_t(v)$ est décroissante sur $[1+\infty[$.

De toute suite $\{t_n \; n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ telle que $\lim_n t_n = +\infty$, il est donc possible d'extraire une sous-suite $\{t_{n_k} \; k \geq 1\}$ telle que :

$$\lim_k g_{t_{n_k},x}(v) = g_x(v)$$

en tout point de continuité d'une fonction décroissante g_x sur $[1+\infty[$.

On en déduit à l'aide de (3.36) et de (3.37) que

$$b - a = \int_a^b v^{\lambda_1} g_x(v)\,dv \qquad 1 \leq a \leq b$$

Par conséquent pour tout $v \geq 1$ $\quad g_x(v) = \dfrac{1}{v^{\lambda_1}}$ ce qui permet d'affirmer

que pour tout $v > 1$: $\quad \lim_{t\to+\infty} g_{t,x}(v) = \dfrac{1}{v^{\lambda_1}}$.

Il en résulte facilement que :

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\lambda_1} P(x\,R>t) = \ell(x)$$

Toutes les conclusions du théorème 3.1, hormis la stricte positivité de $\ell(x)$, sont ainsi établies.

Le paragraphe C) qui suit va être consacré à établir ce résultat.

C) Considérons la chaîne de Markov à valeurs dans $S_{d-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par

$$(3.38) \quad (X_n, U_n, T_n) = \left(x \cdot A_1 A_2 \ldots A_n, \frac{u + x R_n}{\|x A_1 A_2 \ldots A_n\|}, t - \log\|x A_1 \ldots A_n\|\right) \quad n \geq 0$$

de probabilité de transition Q définie par :

$$(3.39) \quad Q f(x,u,t) = E f\left(x \cdot A_1, \frac{u + x B_1}{\|x A_1\|}, t - \log\|x A_1\|\right)$$

f étant une fonction mesurable bornée sur $S_{d-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

De plus, soit ζ le temps d'arrêt défini par :

$$(3.40) \quad \zeta = \operatorname{Inf}\{n \geq 1 \ ; \ U_n \geq U_o\}$$ et Q_ζ le noyau défini $S_{d-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(3.41) \quad Q_\zeta f(x,t,u) = E_{(x,u,t)} \left[1_{[\zeta < +\infty]} f(X_\zeta, U_\zeta, T_\zeta)\right]$$

Remarquons que si f est une fonction ne dépendant pas de la coordonnée u, il en est de même de $Q_\zeta f$, ce qui permet de définir le noyau $\overline{Q}_\zeta$ sur $S_{d-1} \times \mathbb{R}$ en posant :

$$(3.42) \quad \overline{Q}_\zeta f(x,t) = E_{(x,u,t)} \left[1_{[\zeta < +\infty]} f(X_\zeta, T_\zeta)\right]$$

Posons d'autre part :

$$(3.43) \quad Z_1(x,t) = P(x R > e^t) \qquad x \in S_{d-1}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(3.44) \quad \Phi(x,t,u) = P(e^t - u < x R \leq e^t)$$

$$(3.45) \quad H(x,t) = Q_\zeta \Phi(x,o,t)$$

On vérifie la relation :

$$(3.46) \quad Z_1(x,t) = \overline{Q}_\zeta Z_1(x,t) + H(x,t) \qquad x \in S_{d-1} \qquad t \in \mathbb{R}$$

d'où il résulte que pour tout $n \geq 1$

$$(3.47) \quad Z_1(x,t) = \overline{Q}_\zeta^{n+1} Z_1(x,t) + \sum_{k=o}^{n} \overline{Q}_\zeta^k H(x,t)$$

Si l'on définit par récurrence la suite $\zeta_n \quad n\geq 1$ en posant

$$(3.48) \qquad \zeta_1 = \zeta, \qquad \zeta_{k+1} = \begin{cases} \operatorname{Inf}\{x>\zeta_k \ ; \ U_n \geq U_{\zeta_k}\} & \text{si } \{\ \} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

on a

$$(3.49) \qquad \overline{Q}_\zeta^n\, Z_1(x,t) = E\,\{F_1(x\,A_1\,A_2 \ldots A_{\zeta_n})\ 1_{[\zeta_n<+\infty]}\ ,\ t)\}$$

où $F_1(x,t) = P(x\,R > e^t)$

Comme $\lim_n \|x\,A_1 \ldots A_{\zeta_n}\ 1_{[\zeta_n<+\infty]}\| \leq \lim_n \|A_1A_2 \ldots A_{\zeta_n}\ 1_{[\zeta_n<+\infty]}\| = 0$ ps

on a donc $\lim_n \overline{Q}_\zeta^n\, Z_1(x,t) = 0$, et par conséquent

$$(3.50) \qquad Z_1(x,t) = \sum_{k=o}^{+\infty} \overline{Q}_\zeta^k\ H(x,t)$$

Considérons d'autre part la "chaîne relativisée" associée à la chaine $(X_n, U_n, T_n)\ \ n\geq 1$ et de probabilité de transition ${}^{\lambda_1}Q$ définie par

$$(3.51) \qquad {}^{\lambda_1}Q\, f(x,u,t) = \frac{1}{h_{\lambda_1}(\overline{x})} \int \rho^{\lambda_1}(\overline{x},A_1)\ h_{\lambda_1}(\overline{x}\cdot A_1)$$

$$\times\ f\left(x\cdot A_1,\ \frac{u + x\,B_1}{\|x\,A_1\|},\ t - \log\|x\,A_1\|\right)\ \Phi(dA_1,\ dB_1)$$

et soient ${}^{\lambda_1}Q$ et ${}^{\lambda_1}\overline{Q}$ les analogues des noyaux Q et $\overline{Q}$

Si l'on pose

$$(3.52) \qquad \tilde{Z}_1(x,t) = \frac{e^{\lambda_1 t}\ Z_1(x,t)}{h_{\lambda_1}(\overline{x})}$$

et

$$(3.53) \qquad \tilde{H}(x,t) = \frac{e^{\lambda_1 t}\ H(x,t)}{h_{\lambda_1}(\overline{x})}$$

on déduit de (3.50) le

<u>lemme 3.8</u> :

$$(3.51) \qquad \tilde{Z}_1(x,t) = \sum_{k=o}^{\infty} {}^{\lambda_1}\overline{Q}_\zeta^k\ \tilde{H}(x,t) \qquad\qquad x \in S_{d-1}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Désignons par ${}^{\lambda_1}Q_{x,u,t}$ les probabilités sur l'espace $(S_{d-1}\times \mathbb{R}\times\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ décrivant la chaîne de Markov précédente lorsque $(X_o,U_o,T_o) = (x,u,t)$.

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.2 :

$$\sup_{(x,u,t,)\in S_{d-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} {}^{\lambda_1}E_{(x,u,t)}(\zeta_1) = \sup_{x\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_{(x,o,o)}(\zeta_1) < +\infty$$

qui sera justifiée par la suite.

Il résulte de la proposition précédente que ${}^{\lambda_1}\overline{Q}_\zeta$ est un opérateur Markovien.

Notons Φ_{λ_1} une probabilité sur S_{d-1} satisfaisant à la relation d'invariance.

$$(3.52)\qquad \int_{S_{d-1}} f(x)\,\Phi_{\lambda_1}(dx) = \int \Phi_{\lambda_1}(dx)\ {}^{\lambda_1}\overline{Q}_\zeta(f\times 1)(x,o) \quad \text{où } f\in \mathcal{C}(S_{d-1}).$$

L'existence d'une telle probabilité résulte du fait que l'opérateur ${}^{\lambda_1}T$, défini par :

$${}^{\lambda_1}T(f)(\overline{x}) = {}^{\lambda_1}\overline{Q}_\zeta(f\times 1)(x,o) \qquad f\in \mathcal{C}(S_{d-1})$$

est un opérateur markovien (proposition 3.2), continu sur $\mathcal{C}(S_{d-1})$ et du fait que S_{d-1} est compact.

Nous supposerons par la suite que Φ_{λ_1} est extrêmale parmi les probabilités satisfaisant à (3.52).

On a alors le

Lemme 3.9 : *Il existe une constante* $+\infty > \beta > 0$ *telle que :*

$$\int \Phi_{\lambda_1}(dx)\ {}^{\lambda_1}Q_{(x,o,o)}\left(\lim_n \frac{1}{n}\log||x\,A_1A_2\ldots A_{\zeta_n}|| = \beta\right) = 1$$

Preuve du lemme 3.9

Soit μ_{λ_1} la probabilité $\mu_{\lambda_1} = \int_{S_{d-1}} {}^{\lambda_1}Q_{(x,o,o)}\ \Phi_{\lambda_1}(dx)$ sur l'espace $\Omega = (S_{d-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, et considérons la suite de variables aléatoires

$L_o = \zeta_1 \qquad L_n = \zeta_{n+1} - \zeta_n \qquad n \geq 1$ définie sur cet espace.

Cette suite est stationnaire. Montrons également qu'elle est ergodique. Pour cela, considérons un élément B de la tribu des invariants de l'espace $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs entières (c'est-à-dire que B satisfait à la relation $1_B \circ \theta = 1_B$, θ désignant le décalage sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$).

Considérons la fonction Φ sur S_{d-1}, définie par :

$$(3.53) \qquad \Phi(x) = {}^{\lambda_1}Q_{(x,o,o)}\ \{1_B(L_o,L_1,\dots,L_n,\dots)\}$$

$$= {}^{\lambda_1}Q_{(x,u,t)}\ \{1_B(L_o,L_1,\dots,L_n,\dots)\} \quad (x,u,t) \in S_{d-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

La fonction Φ satisfait à la relation

$$(3.54) \qquad \Phi(x) = {}^{\lambda_1}E_{(x,o,o)}\ [\Phi(X_{\zeta_1})] \qquad x \in S_{d-1}$$

Il en résulte que la suite $\{\Phi(X_{\zeta_n})\}$ $n \geq 1$ est une martingale sur $(\Omega, \mu_{\lambda_1})$ vis à vis de la filtration $\mathcal{F}_{\zeta_n}$ $n \geq 1$ [$\mathcal{F}_{\zeta_n}$ est la ~~tribu~~ des parties A de Ω, telles que pour tout $k \in N$ $A \cap (\zeta_n = k)$ appartient à la tribu engendrée par les variables aléatoires (X_p, U_p, T_p) $0 \leq p \leq k$]

Par ailleurs, on a :

$$\Phi(X_{\zeta_n}) = \mu_{\lambda_1}\ \{1_B(L_o,L_1,\dots,L_n,\dots) \mid \mathcal{F}_{\zeta_n}\} \qquad \mu_{\lambda_1}\ \text{p s}$$

Le théorème de convergence des martingales permet alors de conclure que μ_{λ_1} ps on a : $\lim_n \Phi(X_{\zeta_n}) = 1_B(L_o,L_1,\dots,L_n,\dots)$

Comme la loi de X_{ζ_n} est Φ_{λ_1} on en conclut que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\Phi_{\lambda_1} \{x \in S_{d-1} \quad \varepsilon \leq \Phi(x) \leq 1 - \varepsilon \} = 0$$

et donc Φ_{λ_1} presque sûrement Φ ne peut prendre que les deux valeurs 0 ou 1.
Définissons les ensembles :

$$C_1 = \{x \ / \ \Phi(x) = 1\} \qquad\qquad C_2 = \{x \ ; \ \Phi(x) = 0\}$$

En raison de (3.54), on en conclut que

$$\forall \ x \in C_i \qquad {}^{\lambda_1}Q_{(x,o,o)} \ (X_{\zeta_1} \in C_i) = 1$$

c'est-à-dire que les ensembles C_i $i = 1, 2$ sont stochastiquement fermés pour la chaîne de Markov $(X_{\zeta_n})_{n \geq 1}$. Comme de plus ces ensembles sont disjoints, tels que $\Phi_{\lambda_1}(C_1) + \Phi_{\lambda_1}(C_2) = 1$, et que la probabilité Φ_{λ_1} est extrêmale, l'une des quantités $\Phi_{\lambda_1}(C_i)$ $i = 1,2$ est nulle et on a donc soit

$\mu_{\lambda_1}(1_B \ (L_o, L_1, \ldots, L_n, \ldots)) = 0$, soit $\mu_{\lambda_1} \ (1_B \ (L_o, L_1, \ldots, L_n, \ldots) = 1$

ce qui établit le résultat souhaité.

D'après le théorème ergodique et la proposition 3.2, nous pouvons donc conclure que μ_{λ_1} p s on a :

$$(3.55) \qquad \lim_n \frac{1}{n} \zeta_n = \int \Phi_{\lambda_1}(dx) \ {}^{\lambda_1}E_{(x,o,o)} \ (\zeta_1) < +\infty$$

D'autre part, on a (condition c_2)

$$(3.56) \qquad \int \Phi_{\lambda_1}(dx) \ {}^{\lambda_1}Q_{(x,o,o)} \ \{\lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} ||x \ A_1 \ A_2 \ldots A_n|| = \lim_n \log ||A_1 A_2 \ldots A_n||\}$$

$$= \alpha(\lambda_1)\} = 1 \qquad \text{où} \quad 0 < \alpha(\lambda_1) < +\infty$$

Par conséquent on a μ_{λ_1} p s

$$(3.57) \qquad \lim_n \frac{T_{\zeta_n}}{n} = \lim_n \frac{T_{\zeta_n}}{\zeta_n} \times \frac{\zeta_n}{n} = \alpha(\lambda_1) \times \int \Phi_{\lambda_1}(dx) \ {}^{\lambda_1}E_{(x,o,o)}(\zeta_1) = \beta$$

avec $0 < \beta < +\infty$ ce qui achève la preuve du lemme 3.9.

D'autre part notons $\tilde{H}_L$ $L \geq 0$ la fonction

(3.58) $\tilde{H}_L(x,t) = H(x,t)\, 1_{[-L,L]}(t) \quad (x,t) \in S_{d-1} \times \mathbb{R}$

nous pouvons alors énoncer le

Lemme 3.10 : *Pour tout* $L \geq 0$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t ds \int_{S_{d-1}} \Phi_{\lambda_1}(dx) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^{-k} Q_\zeta^k \tilde{H}_L(x,s)$$

$$= \frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{S_{d-1}} \tilde{H}_L(x,s)\, \Phi_{\lambda_1}(dx)$$

Preuve du lemme 3.10. [12]

Soit $0 < \varepsilon < 1$ un réel arbitraire ; posons alors $N_1(t) = [\frac{1}{\beta}\varepsilon t]$ et $N_2(t) = [\frac{1}{\beta}(1-\varepsilon)t]$ où $[x]$ désigne la partie entière d'un nombre positif x. Nous pouvons écrire :

(3.59) $$\frac{1}{t}\int_0^t ds \int_{S_{d-1}} \Phi_{\lambda_1}(dx) \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_1^{-k} Q_\zeta^k \tilde{H}_L(x,s) = \sum_{k=1}^{4} I_k(t)$$

où

(3.60) $$I_1(t) = \frac{1}{t}\int_{S_{d-1}} \Phi_{\lambda_1}(dx) \int_{-\infty}^{+\infty} ds \sum_{k=N_1(t)}^{N_2(t)} \lambda_1^{-k} Q_\zeta^k \tilde{H}_L(x,s)$$

(3.61) $$I_2(t) = \frac{1}{t}\int_{S_{d-1}} \Phi_{\lambda_1}(dx) \int_0^t ds \sum_{k=0}^{N_1(t)-1} \lambda_1^{-k} Q_\zeta^k \tilde{H}_L(x,s)$$

(3.62) $$I_3(t) = \frac{1}{t}\int_{S_{d-1}} \Phi_{\lambda_1}(dx) \int_0^t ds \sum_{k=N_2(t)+1}^{+\infty} \lambda_1^{-k} Q_\zeta^k \tilde{H}_L(x,s)$$

$$(3.63)\qquad I_4(t) = \frac{-1}{t}\int_{S_{d-1}} \Phi_{\lambda_1}(dx)\int_{\{s<o\}\cup\{s>t\}} ds \sum_{k=N_1(t)}^{N_2(t)} {}^{\lambda_1}\theta_\zeta^{-k}\,\tilde{H}_L(x,s)$$

Etudions chacun des termes précédents ; on a

$$I_1(t) = \frac{(N_2(t) - N_1(t) + 1)}{t}\int_{S_{d-1}} \Phi_{\lambda_1}(dx)\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{H}_L(x,s)\,ds$$

et par conséquent

$$(3.64)\qquad \lim_{t\to+\infty} I_1(t) = \frac{(1-2\varepsilon)}{\beta}\int_{S_{d-1}} \Phi_{\lambda_1}(dx)\int_{-\infty}^{+\infty} ds\ \tilde{H}_L(x,s)\,ds$$

De plus on a :

$$(3.65)\qquad 0 \le |I_4(t)| \le \frac{\tilde{M}_L}{t}(N_2(t) - N_1(t) + 1)\sup_{N_1(t)\le n\le N_2(t)}$$

$$\int_{S_{d-1}} \Phi_{\lambda_1}(dx)\ {}^{\lambda_1}Q_{(x,o,o)}\{[t - T_{\xi_n} \le L]\cup[T_{\xi_n} \le L]\}$$

où $\qquad \tilde{M}_L = \sup_{(x,t)} \tilde{H}_L(x,t) < +\infty$

Comme d'après le lemme 3.9, on a :

$$\int \Phi_{\lambda_1}(dx)\ {}^{\lambda_1}Q_{(x,o,o)}\left(\lim_n \frac{T_{\xi_n}}{n} = \beta\right) = 1$$

on en déduit que :

$$(3.66)\qquad \lim_{t\to+\infty}\ \sup_{N_1(t)\le n\le N_2(t)} \int_{S_{d-1}} \Phi_{\lambda_1}(dx)\ {}^{\lambda_1}Q_{(x,o,o)}\ \{[t - T_{\xi_n} \le L]\cup[T_{\xi_n} \le L]\} = 0$$

et donc aussi que

$$(3.67)\qquad \lim_{t\to+\infty} I_4(t) = 0.$$

Par ailleurs on a :

(3.68) $\quad 0 \leq I_2(t) \leq \dfrac{N_1(t)}{t} \; \tilde{M}_L \times 2\,L \leq \dfrac{\varepsilon}{\beta}\, 2\,L\, \tilde{M}_L$

Etudions enfin $I_3(t)$.

Pour un entier N, posons :

$$\rho_N = \operatorname{Inf}\{n \geq N \; ; \; -L \leq T_{\xi_n} \leq L\}$$

on a alors :

$$\sum_{k=N}^{+\infty} {}^{\lambda_1}\overline{Q}_\zeta^k \; \tilde{H}_L(x,s) = \int {}^{\lambda_1}Q_{(x,o,s)} \; [\rho_N < +\infty \quad X_{\rho_N} \in dx' \quad T_{\rho_N} \in dt']$$

$$\sum_{k=o}^{+\infty} {}^{\lambda_1}\overline{Q}_\zeta^k \; \tilde{H}_L(x',t')$$

d'où

$$\sum_{k=N}^{+\infty} {}^{\lambda_1}\overline{Q}_\zeta^k \; \tilde{H}_L(x,s) \leq {}^{\lambda_1}Q_{(x,o,s)} \; [\rho_N < +\infty] \times M_1$$

où

$$M_1 = \sup_{(x,t)} \tilde{Z}_1(x,t).$$

On obtient alors en posant $N = [\dfrac{(1+\varepsilon)t}{\beta}]$

(3.69) $\quad I_3(t) \leq \tilde{M}_L \; \dfrac{4\varepsilon}{\beta} + M_1 \displaystyle\int \Phi_{\lambda_1}(dx) \times {}^{\lambda_1}Q_{(x,o,o)} \Big[\bigcup_{n \geq [\frac{(1+\varepsilon)t}{\beta}]} (T_{\xi_n} \leq t + L)\Big]$

Le dernier terme de l'inégalité précédente tend vers zéro quand $t \to +\infty$ c'est-à-dire que l'on a :

(3.70) $\quad 0 \leq I_3(t) \leq \tilde{M}_1 \dfrac{4\varepsilon}{\beta} + o(t)$

Le lemme 3.9 résulte alors facilement de (3.67) (3.68) (3.69) et (3.70) en raison de l'arbitraire de ε.

Supposons que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\lambda_1^{-1}} P(x\,R>t) = \ell(x) = 0.$

On a alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \tilde{Z}_1(x,t) = 0$ et donc également d'après les lemmes 3.8 et 3.9, pour tout $L \geq 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{S_{d-1}} \Phi_{\lambda_1}(dx)\ \tilde{H}_L(x,s) = 0$$

et par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{S_{d-1}} \Phi_{\lambda_1}(dx)\ \tilde{H}(x,s) = 0.$$

On en déduit que pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\int_{S_{d-1}} \Phi_{\lambda_1}(dx) \int_{-\infty}^{+\infty} {}^{\lambda}1_{\overline{Q}_\zeta^k}\ \tilde{H}(x,s)\, ds = 0$$

et par conséquent d'après le lemme 3.8 on a :

$$\int_{S_{d-1}} \Phi_{\lambda_1}(dx) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Z}_1(x,t)\, dt = 0 \tag{3.71}$$

Il en résulte que :

$$\int_{S_{d-1}} \Phi_{\lambda_1}(dx)\ P(x\,R>0) = 0 \tag{3.72}$$

ce qui est impossible, car en contradiction avec le lemme suivant :

<u>Lemme 3.11</u> : *Pour tout* $x \in S_{d-1}$ *et* $u \in \mathbb{R}$:

$$P(x\,R \leq u) < 1.$$

Ce qui permet de conclure que $\ell(x) > 0$

Donnons maintenant la

<u>Preuve du lemme 3.11</u>

a) Commençons par établir que le support $S(R)$ de la loi de R n'est pas compact dans $\mathbb{R}^d$.

Si T_ϕ désigne le semi-groupe fermé de $\mathcal{A}$ engendré par le support de la loi ϕ de (A_1,B_1), on a pour tout $g = (A(g), B(g)) \in T_\phi$ $gS(R) \subset S(R)$.

Supposons maintenant S(R) compact. En raison de l'hypothèse (iii), il est clair que S(R) ne peut être réduit à un point. Si x_1 et x_2 désignent deux points distincts de S(R), $x_2 = x_1 + v$ $v \neq 0$, on a alors

$$\sup_{g \in T_\phi} \|A(g)v\| < +\infty.$$

L'espace vectoriel V engendré par $\{A(g)v \ ; \ g \in T_\phi\}$ est égal à $\mathbb{R}^d$, en effet sinon son orthogonal serait non réduit à $\{0\}$ et stable par T_ϕ ce qui contredit l'hypothèse d'irréductibilité (i)

Nous pouvons donc en conclure que

$$\text{(3.73)} \quad \sup_{g \in T_\phi} \|A(g)\| < +\infty.$$

On sait (condition c_2) que pour tout $x_o \in S_{d-1}$, on a $\lambda_1 p_{x_o}$ p.s $\lim_n \|x_o \, A_1 \, A_2 \ldots A_n\| = +\infty$; ceci est en contradiction avec (3.73) et donc S(R) est non compact dans $\mathbb{R}^d$.

b) Compactifions $\mathbb{R}^d$ en lui adjoignant $\tilde{S}_{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ \|x\| = 1\}$.
La topologie sur $\hat{\mathbb{R}}^d = \mathbb{R}^d \cup \tilde{S}_{d-1}$ est définie de la façon suivante :
$\mathbb{R}^d$ est un ouvert de $\hat{\mathbb{R}}^d$; et d'autre part, une suite $(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ converge vers un point $x \in \tilde{S}_{d-1}$ si $\lim_n \|x_n\| = +\infty$ et $\lim_n \frac{x_n}{\|x_n\|} = x$.
L'action de $g \in \mathcal{G}$ sur $\hat{\mathbb{R}}^d$ est définie par $gx = A(g)x + B(g)$ si $x \in \mathbb{R}^d$ et $g \cdot x = \frac{A(g)x}{\|A(g)x\|}$ si $x \in \tilde{S}_{d-1}$.

Supposons que pour un couple $(x_o,u_o) \in S_{d-1} \times \mathbb{R}$, on ait

$$P(x_o \, R \leq u_o) = 1.$$

Soit $\overline{S(R)}^c$ l'adhérence de S(R) dans $\hat{\mathbb{R}}^d$. D'après le a) $C(R) = \overline{S(R)}^c \cap \tilde{S}_{d-1}$ est un compact non vide de S_{d-1} contenu dans $\{x \in \tilde{S}_{d-1}\ ;\ x_o\, x \leq 0\}$.
Soit $y_o \in C(R)$; comme C(R) est invariant par l'action des éléments g de T_ϕ, on a pour tout $g \in T_\phi$ $x_o\, A(g) \cdot y_o \leq 0$ et donc aussi $x_o \cdot A(g)\, y_o \leq 0$ ce qui contredit l'hypothèse d'irréductibilité (i).

Par conséquent, pour tout $x \in S_{d-1}$ et $u \in \mathbb{R}$ $P(x\,R \leq u) < 1$.

La preuve du lemme 3.11 est ainsi achevée.

Pour terminer la preuve du théorème 3.1, il reste à établir la proposition 3.2. Cette proposition apparaîtra comme une conséquence de l'étude de la chaîne de Markov.

(3.74) $$M_n = \left(x.A_1\, A_2 \ldots A_n, \frac{u + x\, R_n}{\|x\, A_1 \ldots A_n\|}\right) \quad n \geq 0$$

à valeurs dans $S_{d-1} \times \mathbb{R}$, et de probabilité de transition ${}^{\lambda_1}Q_1$ définie par

(3.75) $${}^{\lambda_1}Q_1\, f(x,u) = \frac{1}{h_{\lambda_1}(\bar{x})} \int \rho^{\lambda_1}(\bar{x}, A_1)\, h_{\lambda_1}(\bar{x}.A_1)\, f\left(x.A_1, \frac{u+x\, B_1}{\|x\, A_1\|}\right) \Phi(dA_1, dB_1)$$

où f désigne une fonction continue bornée sur $S_{d-1} \times \mathbb{R}$.
Nous allons mener cette étude dans le paragraphe qui suit :

3.2 Etude de la chaine de Markov M_n $n \geq 0$

Commençons par définir deux espaces de Banach que nous utiliserons par la suite :

1°) Pour $\varepsilon > 0$ soit

$\mathcal{C}_\varepsilon = \{f \in \mathcal{C} \,;\, |f| < +\infty\}$

où $\mathcal{C}$ est l'espace des fonctions continues de $S_{d-1} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et

$$|f|_\varepsilon = \sup_{(x,u) \in S_{d-1} \times \mathbb{R}} \frac{|f(x,u)|}{1+u^{2\varepsilon}}$$

$\mathcal{C}_\varepsilon$ est un espace de Banach, muni de la norme $|\ |_\varepsilon$

2°) Posons d'autre part pour $\varepsilon > 0$

$L_\varepsilon = \{f \in \mathcal{C}_\varepsilon \,;\, |f|_\varepsilon + k_\varepsilon(f) < +\infty\}$

où

$$k_\varepsilon(f) = \sup_{\substack{x \neq y \in S_{d-1} \\ u \in \mathbb{R}}} \frac{|f(x,u) - f(y,u)|}{||x-y||^\varepsilon (1+u^{2\varepsilon})} + \sup_{\substack{u \neq v \in \mathbb{R} \\ x \in S_{d-1}}} \frac{|f(x,u) - f(x,v)|}{|u-v|^\varepsilon}$$

L_ε est un espace de Banach, muni de la norme :

$$||f||_\varepsilon = |f|_\varepsilon + k_\varepsilon(f)$$

Nous nous proposons d'établir le théorème suivant :

Théorème 3.2 : *Sous les hypothèses du théorème* 3.1, *il existe un* $0<\varepsilon_0$ *tel que* ${}^{\lambda_1}Q_1$ *soit un opérateur quasi-compact sur* L_{ε_0} *et que l'on ait pour tous* $n \geq 1$, $f \in L_{\varepsilon_0}$

$${}^{\lambda_1}Q_1^n(f) = \alpha_{\lambda_1}(f)\, e + V_{\lambda_1}^n(f)$$

où e *est la fonction identique à* 1 *sur* $S_{d-1} \times \mathbb{R}$

α_{λ_1} *est l'unique probabilité invariante par* ${}^{\lambda_1}Q_1$ *portée par* $S_{d-1}\times\mathbb{R}$.
V_{λ_1} *est un opérateur sur* L_{ε_0} *de rayon spectral strictement inférieur à* 1 *tel que pour tout* $f\in L_{\varepsilon_0}$ *on ait :*

$$\alpha_{\lambda_1}(V_{\lambda_1}(f)) = V_{\lambda_1}(\alpha_{\lambda_1}(f)e) = 0.$$

<u>Démonstration du théorème 3.2</u>

Pour établir la quasi compacité de ${}^{\lambda_1}Q_1$ dans un espace L_{ε_0} nous utiliserons le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [15]

Pour cela commençons par énoncer sous forme d'un lemme des propriétés des espaces $\mathcal{C}_\varepsilon$ et L_ε.

<u>Lemme 3.13</u> :

1) *Si* $(f_n)_{n\geq 1}\in L_\varepsilon$, *si* $f\in\mathcal{C}_\varepsilon$ *et si* $\lim\limits_n |f_n - f|_\varepsilon = 0$ *et* $||f_n||_\varepsilon \leq C$ *pour tout* n , *alors* $f\in L_\varepsilon$ *et* $||f||_\varepsilon \leq C$

2) *Si* L' *est une partie bornée de* $(L_\varepsilon, ||\ ||_\varepsilon)$ L' *est relativement compacte dans* $(\mathcal{C}_\varepsilon, |\ |_\varepsilon)$.

<u>Démonstration du lemme 3.13</u>.

La preuve du 1) est immédiate.

Pour prouver le 2) considérons une suite $(f_n)_{n\geq 1}\in L'$; on a $\sup\limits_n ||f_n||_\varepsilon = C' < +\infty$. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est équicontinue sur les compacts de $S_{d-1}\times\mathbb{R}$.

On peut donc en extraire une sous suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge vers une fonction continue $f\in\mathcal{C}$, uniformément sur tous les compacts de $S_{d-1}\times\mathbb{R}$.

De l'inégalité

$$(3.76)\qquad \sup_n \sup_{(x,u)\in S_{d-1}\times \mathbb{R}} \frac{|f_n(x,u)|}{1+u^{2\varepsilon}} \leq C'$$

on déduit que $f \in \mathscr{C}_\varepsilon$

Montrons que la suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge vers f dans $\mathscr{C}_\varepsilon$. On a pour tout $A>0$: $k\geq 1$

$$(3.77)\qquad |f_{n_k} - f|_\varepsilon = \sup_{(x,u)\in S_{d-1}\times\mathbb{R}} \frac{|f_{n_k}(x,u)-f(x,u)|}{1+u^{2\varepsilon}} \leq \sup_{\substack{x\in S_{d-1}\\ |u|\geq A}} \frac{|f_{n_k}(x,u)-f(x,u)|}{1+u^{2\varepsilon}} + \sup_{\substack{x\in S_{d-1}\\ |u|\leq A}} \frac{|f_{n_k}(x,u)-f(x,u)|}{1+u^{2\varepsilon}}$$

D'autre part on a pour tous $(x,u) \in S_{d-1}\times\mathbb{R}$ et tout $k\geq 1$

$$(3.78)\qquad |f_{n_k}(x,u)| \leq C'(1+|u|^\varepsilon)$$ d'où également :

$$(3.79)\qquad |f(x,u)| \leq C'(1+|u|^\varepsilon)$$

Par conséquent, pour tous $A\geq 1$, $k\geq 1$ on a :

$$(3.80)\qquad |f_{n_k} - f_\varepsilon| \leq \sup_{\substack{x\in S_{d-1}\\ |u|\leq A}} \frac{|f_{n_k}(x,u)-f(x,u)|}{1+u^{2\varepsilon}} + 2C' \sup_{|u|\geq A} \frac{1+|u|^\varepsilon}{1+|u|^{2\varepsilon}}$$

On déduit facilement de l'inégalité précédente (3.80) et de la convergence uniforme de la suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ vers f sur les compacts de $S_{d-1}\times\mathbb{R}$ que :

$$\lim_k |f_{n_k} - f|_\varepsilon = 0.$$

ce qui achève la démonstration du lemme 3.13.

On a par ailleurs le

<u>Lemme 3.14</u> : *Pour* $0<\varepsilon<\frac{1}{2}\operatorname{Inf}(1,\lambda_1)$ *on a*

$$\sup_{n\geq 1} \sup_{\substack{f\in\mathscr{C}_\varepsilon\\ |f|_\varepsilon\leq 1}} |{}^{\lambda_1}Q_1^n f|_\varepsilon < +\infty$$

Démonstration du lemme 3.14

On a

$$(3.81)\qquad {}^{\lambda_1}Q_1^n\, f(x,u) = \frac{1}{h_{\lambda_1}(\bar{x})} \int \rho^{\lambda_1}(\bar{x}, A_1A_2\ldots A_n)\, h_{\lambda_1}(\bar{x}.A_1A_2\ldots A_n)$$

$$f(\bar{x}.A_1A_2\ldots A_n, \frac{u + x\, R_n}{||x\, A_1\, A_2\ldots A_n||}\, d\phi(A_1,B_1)\ldots d\phi(A_n,B_n).$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon < \frac{1}{2}\,\mathrm{Inf}(1,\lambda_1)$

$$(3.82)\qquad |{}^{\lambda_1}Q_1^n\, f(x,u)| \leq |f|_\varepsilon\, [\, 1 + \frac{\sup h_{\lambda_1}}{\mathrm{Inf}\, h_{\lambda_1}}\, E\{||A_1A_2\ldots A_n||^{\lambda_1-2\varepsilon}$$

$$(u^{2\varepsilon} + \sum_{k=1}^{n} ||A_1A_2\ldots A_{k-1}||^{2\varepsilon}\, ||B_k||^{2\varepsilon})\}]$$

d'où il résulte que :

$$(3.83)\qquad \sup_{(x,u)\in S_{d-1}\times\mathbb{R}} \frac{|{}^{\lambda_1}Q_1^n\, f(x,u)|}{1+u^{2\varepsilon}} \leq [\, 1 + \frac{\sup h_{\lambda_1}}{\mathrm{Inf}\, h_{\lambda_1}}\, \{E||A_1A_2\ldots A_n||^{\lambda_1-2\varepsilon}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} E||A_1A_2\ldots A_{k-1}||^{\lambda_1}\, E(||A_k||^{\lambda_1-2\varepsilon}\, ||B_k||^{2\varepsilon})$$

$$E||A_{k+1}A_{k+2}\ldots A_n||^{\lambda_1-2\varepsilon}\}\,]\, |f|_\varepsilon$$

Or la suite $E||A_1A_2\ldots A_{k+n}||^{\lambda_1}$ $n\geq 1$ est bornée et de plus on a pour $0<\varepsilon<\frac{\lambda_1}{2}$:

$$\lim_n\, (E||A_1A_2\ldots A_n||^{\lambda_1-2\varepsilon})^{1/n} = k(\lambda_1 - 2\varepsilon) < 1.$$

Il résulte alors de (3.83) que si $0<\varepsilon<\frac{1}{2}\,\mathrm{Inf}\,(1,\lambda_1)$

$$(3.84)\qquad \sup_{n\geq 1}\ \sup_{\substack{f\in\mathscr{C}_\varepsilon\\ |f|_\varepsilon\leq 1}} |{}^{\lambda_1}Q_1^n\, f|_\varepsilon < +\infty$$. Ce qui achève la preuve du lemme 3.14.

Dans le lemme qui suit , nous établissons que l'opérateur ${}^{\lambda_1}Q_1$ est de Doeblin-Fortet.

Lemme 3.15 : *Il existe des réels* $\varepsilon_o > o$, $r'_o < 1$ *et* R'_o *et un entier* n_o *tel que pour toute* $f \in L_{\varepsilon_o}$ *on ait :*

$$|| {}^{\lambda_1}Q_1^{n_o} f||_{\varepsilon_o} \leq r'_o ||f||_{\varepsilon_o} + R'_o |f|_{\varepsilon_o}$$

Démonstration du lemme 3.15.

Etudions $k_\varepsilon({}^{\lambda_1}Q_1^n f)$ pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \operatorname{Inf}(1, \lambda_1, \delta)$

A) Pour cela commençons par estimer

(3.85) $\Delta_n(x,y,u) = {}^{\lambda_1}Q_1^n f(x,u) - {}^{\lambda_1}Q_1^n f(y,u) \qquad x,y \in S_{d-1} \qquad u \in \mathbb{R}$

On a

(3.86) $\Delta_n(x,y,u) = \Delta_{n,1}(x,y,u) + \Delta_{n,2}(x,y,u)$

où

(3.87) $$\Delta_{n,1}(x,y,u) = E\{[\theta_{\lambda_1}(\overline{x},A_1A_2\ldots A_n) - \theta_{\lambda_1}(\overline{y},A_1A_2\ldots A_n)] \\ f(x.A_1\ldots A_n, \frac{u + x\ R_n}{||x\, A_1\, A_2\ldots A_n||})\}$$

(3.88) $$\Delta_{n,2}(x,y,u) = E\{\theta_{\lambda_1}(\overline{y}.A_1A_2\ldots A_n)\ [\, f(x.A_1A_2\ldots A_n, \frac{u + x\ R_n}{||x\, A_1A_2\ldots A_n||}) \\ - f(y.A_1A_2\ldots A_n, \frac{u + y\ R_n}{||y\, A_1A_2\ldots A_n\,||})]\}$$

et

(3.89) $$\theta_{\lambda_1}(\overline{x},A_1A_2\ldots A_n) = \frac{1}{h_{\lambda_1}(\overline{x})} \quad \rho^{\lambda_1}(\overline{x},A_1A_2\ldots A_n)\ \ h_{\lambda_1}(\overline{x}.A_1A_2\ldots A_n)$$

a) Remarquons qu'il existe une constante $K(\lambda_1)$ telle que

$$(3.90)\quad |\theta_{\lambda_1}(\bar{x},A_1A_2\ldots A_n) - \theta_{\lambda_1}(\bar{y},A_1A_2\ldots A_n)| \leq K(\lambda_1)\,||A_1A_2\ldots A_n||^{\lambda_1}\,||x-y||^{\mathrm{Inf}(1,\lambda_1)}$$

pour $x,y \in S_{d-1}$

On en déduit que

$$(3.91)\quad |\Delta_{n,1}(x,y,u)| \leq K(\lambda_1)\,||x-y||^{\mathrm{Inf}(1,\lambda_1)}\,|f|_\varepsilon$$

$$\times\, E\{||A_1A_2\ldots A_n||^{\lambda_1}\,\frac{u^{2\varepsilon}+||x\,R_n||^{2\varepsilon}}{||x\,A_1A_2\ldots A_n||^{2\varepsilon}}\}$$

D'autre part on a

$$(3.92)\quad \frac{1}{(1+u^{2\varepsilon})}\quad E\{||A_1A_2\ldots A_n||^{\lambda_1}\,\frac{u^{2\varepsilon}+||x\,R_n||^{2\varepsilon}}{||x\,A_1A_2\ldots A_n||^{2\varepsilon}}\}$$

$$\leq E\,(\frac{||A_1A_2\ldots A_n||^{\lambda_1}}{||x\,A_1A_2\ldots A_n||^{2\varepsilon}}) + \sum_{k=1}^{n} E(||A_1A_2\ldots A_n||^{\lambda_1}$$

$$\times\,\frac{||B_k||^{2\varepsilon}}{||(x.A_1\ldots A_{k-1})A_kA_{k+1}\ldots A_n||^{2\varepsilon}})$$

Par ailleurs on a :

$$(3.93)\quad E(\frac{||A_1A_2\ldots A_n||^{\lambda_1}}{||x\,A_1A_2\ldots A_n||^{2\varepsilon}}) \leq C(\lambda_1)^{\lambda_1}E_{\nu_{\lambda_1}}(\frac{1}{||x\,A_1\ldots A_n||^{2\varepsilon}})$$

et

$$(3.94)\quad E\{||A_1A_2\ldots A_n||^{\lambda_1}\,\frac{||B_k||^{2\varepsilon}}{||(x.A_1A_2\ldots A_{k-1})A_kA_{k+1}\ldots A_n||^{2\varepsilon}}\}$$

$$\leq C(\lambda_1)\,\sup_{x\in S_{d-1}}\,{}^{\lambda_1}E_{\nu_{\lambda_1}}\{\frac{||B_1||^{2\varepsilon}}{||x\,A_1\ldots A_{n-k+1}||}\;2\varepsilon\}$$

En raisonnant comme dans la preuve du lemme 1.8, on voit qu'il existe un réel $0<\varepsilon'_o<\frac{1}{2}\,\mathrm{Inf}(1,\lambda_1,\delta)$ tel que si $0<\varepsilon\leq\varepsilon'_o$

$$(3.95)\quad \lim_n \{\sup_{x\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_{\nu_{\lambda_1}} (\frac{1}{||xA_1A_2\ldots A_n||^{2\varepsilon}})\}^{1/n} < 1.$$

et aussi

$$(3.96)\quad \lim_n \{\sup_{x\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_{\nu_{\lambda_1}} (\frac{||B_1||^{2\varepsilon}}{||xA_1\ldots A_2\ldots A_n||^{2\varepsilon}})\}^{1/n} < 1.$$

Des inégalités (3.91) (3.92) (3.93) (3.94) (3.95) et de (3.96), on déduit facilement qu'il existe une constante $K'(\lambda_1)<+\infty$ telle que pour $0<\varepsilon\leq\varepsilon'_o$ on ait :

$$(3.97)\quad \sup_n \sup_{\substack{x\neq y\in S_{d-1}\\ u\in\mathbb{R}}} \frac{|\Delta_{n,1}(x,y,u)|}{||x-y||^{\varepsilon}(1+u^{2\varepsilon})} \leq K'(\lambda_1)\ |f|_{\varepsilon}$$

b) Par définition de $k_\varepsilon(f)$ on obtient l'inégalité

$$(3.98)\quad |\Delta_{n,2}(x,y,u)| \leq \Delta'_{n,2,\varepsilon}(x,y,u) + \Delta''_{n,2,\varepsilon}(x,y,u)$$

où

$$(3.99)\quad \Delta'_{n,2,\varepsilon}(x,y,u) = k_\varepsilon(f)\ {}^{\lambda_1}E_y \left|\frac{u+x\,R_n}{||xA_1A_2\ldots A_n||} - \frac{u+y\,R_n}{||yA_1A_2\ldots A_n||}\right|^{\varepsilon}$$

et

$$(3.100)\quad \Delta''_{n,2,\varepsilon}(x,y,u) = k_\varepsilon(f)\ {}^{\lambda_1}E_y\{||x.A_1A_2\ldots A_n - y.A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon}$$

$$\times\ (1+\frac{(u+y\,R_n)^{2\varepsilon}}{||yA_1A_2\ldots A_n||^{2\varepsilon}})\}$$

Nous allons étudier successivement chacun des termes précédents.

Auparavant notons qu'il existe un réel $0<\varepsilon_o\leq\varepsilon'_o$, des entiers p_o et n_o $p_o<n_o$ tels que les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$(3.101)\quad \sup_{x\neq y\in S_{d-1}} \lambda_{1_{E_y}} \frac{d^{\varepsilon_o}(\bar{x}.A_1A_2\ldots A_{p_o},\bar{y}.A_1A_2\ldots A_{p_o})}{d^{\varepsilon_o}(\bar{x},\bar{y})} \times \gamma(\varepsilon_o) \leq \frac{1}{100}$$

où
$$\gamma(\varepsilon) = 1 + \sup_n \sup_{x\in S_{d-1}} \lambda_{1_{E_y}}\left\{\frac{||R_n||^{\varepsilon}}{||x\ A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon}}\right\}$$

$$+ \sup_n \sup_{x,y\in S_{d-1}} \lambda_{1_{E_y}}\left\{\frac{||x\ R_n||^{\varepsilon}\ ||A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon}}{||x\ A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon}||y\ A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon}}\right\}$$

$$(3.102)\quad \sup_{y\in S_{d-1}} \lambda_{1_{E_y}} \left\{\frac{||R_{p_o}||^{\varepsilon_o}+1}{||y\ A_1A_2\ldots A_{n_o}||^{\varepsilon_o}}\right\} \leq \frac{1}{100}$$

$$(3.103)\quad \sup_{x,y\in S_{d-1}} \lambda_{1_{E_y}} \left\{\frac{(1+||R_{p_o}||^{\varepsilon_o})\ \ ||A_1A_2\ldots A_{n_o}||^{\varepsilon_o}}{||x\ A_1A_2\ldots A_{n_o}||^{\varepsilon_o}||y\ A_1A_2\ldots A_{n_o}||^{\varepsilon_o}}\right\} \leq \frac{1}{100}$$

$$(3.104)\quad \sup_{x\neq y\in S_{d-1}} \lambda_{1_{E_y}}\left\{ \frac{d^{\varepsilon_o}(\bar{x}.A_1A_2\ldots A_{n_o},\bar{y}.A_1A_2\ldots A_{n_o})}{d^{\varepsilon_o}(\bar{x},\bar{y})}\ (1 + \frac{1}{||y\ A_1A_2\ldots A_{n_o}||^{2\varepsilon_o}}\right.$$

$$\left. + \frac{|y\ R_{n_o}|^{2\varepsilon_o}}{||y\ A_1A_2\ldots A_{n_o}||^{2\varepsilon_o}}\right\} \leq \frac{1}{100}$$

Justifions les affirmations précédentes. Désignons par α_o un réel tel que $0<\alpha_o\leq\varepsilon'_o$ et tel que pour $0<\varepsilon\leq\alpha_o$ on ait :

$$(3.105)\quad \lim_n \Big[\sup_{x\neq y\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_y\Big\{\frac{d^{\varepsilon}(\bar{x}.A_1\ldots A_n,\bar{y}.A_1A_2\ldots A_n)}{d^{\varepsilon}(\bar{x},\bar{y})}\Big\}\Big]^{1/n} = \rho_1(\varepsilon)<1$$

et

$$(3.106)\quad \lim_n \Big[\sup_{x\neq y\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_y\Big(\frac{1}{||x\, A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon}}\Big)\Big]^{1/n} = \rho_2(\varepsilon) < 1$$

(3.105) résulte du lemme 1.8, et (3.106) peut être obtenue de façon analogue.

Supposons maintenant $\varepsilon_o < \frac{\alpha_o}{4}$ et que $k(\varepsilon_o) < 1$.

Montrons que $\gamma(\varepsilon_o)$ est fini.

On a tout d'abord :

$$(3.107)\quad {}^{\lambda_1}E_x\Big\{\frac{||R_n||^{\varepsilon_o}}{||x\, A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon_o}}\Big\} \leq \sum_{k=1}^{n} {}^{\lambda_1}E_x\Big\{\frac{||A_1A_2\ldots A_{k-1}||^{\varepsilon_o}||B_k||^{\varepsilon_o}}{||x\, A_1\ldots A_n||^{\varepsilon_o}}\Big\}$$

$$\leq \frac{\sup h_{\lambda_1}}{\operatorname{Inf} h_{\lambda_1}} \times \sum_{k=1}^{n} E||A_1A_2\ldots A_{k-1}||^{\lambda_1}\ E(||A_k||^{\lambda_1-\varepsilon}||B_k||^{\varepsilon_o})E||A_{k+1}\ldots A_n||^{\varepsilon_o}$$

Or la suite $E||A_1A_2\ldots A_n||^{\lambda_1}$ $n\geq 1$ est bornée et

$$\lim_n (E||A_1\ldots A_n||^{\varepsilon_o})^{1/n} = k(\varepsilon_o) < 1$$

par conséquent :

$$(3.108)\quad \sup_n \sup_{x\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_x\Big\{\frac{||R_n||^{\varepsilon_o}}{||x\, A_1\ldots A_n||^{\varepsilon_o}}\Big\} < +\infty$$

On a également

$$(3.109)\quad {}^{\lambda_1}E_y\left\{\frac{||x\,R_n||^{\varepsilon_o}||A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon_o}}{||x\,A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon_o}||y\,A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon_o}}\right\}$$

$$\leq \frac{\sup h_{\lambda_1}}{\operatorname{Inf} h_{\lambda_1}} \times \sum_{k=1}^{n} E\{||A_1\ldots A_n||^{\lambda_1} \times \frac{||B_k||^{\varepsilon_o}}{||(x.A_1\ldots A_{k-1})A_k\ldots A_n||^{\varepsilon_o}}\}$$

$$\leq K'''(\lambda_1)\sum_{k=1}^{n}\sup_{x\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_{n_{\lambda_1}}\left\{\frac{||B_1||^{\varepsilon_o}}{||x\,A_1\ldots A_k||^{\varepsilon_o}}\right\}$$

A l'aide de l'inégalité de Schwartz et de (3.106), on déduit de l'inégalité précédente que :

$$(3.110)\quad \sup_n \sup_{x,y\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_y\left\{\frac{||x\,R_n||^{\varepsilon_o}||A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon_o}}{||x\,A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon_o}||y\,A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon_o}}\right\} < +\infty$$

c'est-à-dire que d'après (3.108) et (3.110) on a :

$$\gamma(\varepsilon_o) < +\infty$$

L'inégalité (3.105), et le fait que $\gamma(\varepsilon_o) < +\infty$ permettent alors de choisir un entier p_o suffisamment grand pour que l'inégalité (3.101) soit satisfaite.

D'autre part on peut écrire à l'aide de l'inégalité de Schwartz que :

$$(3.111)\quad \sup_{y\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_y\left\{\frac{||R_{p_o}||^{\varepsilon_o}}{||y\,A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon_o}}\right\} \leq \left(\sup_{y\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_y||R_{p_o}||^{2\varepsilon_o}\right)^{1/2}$$

$$\times \left\{\sup_{y\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_y\left(\frac{1}{||y\,A_1A_2\ldots A_n||^{2\varepsilon_o}}\right)\right\}^{1/2}$$

ainsi que

$$(3.112)\quad \sup_{x,y\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_y\left\{\frac{(1+\|R_{p_o}\|^{\varepsilon_o})\|A_1A_2\dots A_n\|^{\varepsilon_o}}{\|y\,A_1A_2\dots A_n\|^{\varepsilon_o}\|x\,A_1A_2\dots A_n\|^{\varepsilon_o}}\right.$$

$$\leq \{\sup_{y\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_y(1+\|R_{p_o}\|^{\varepsilon_o})^2\}^{1/2} \times \{\sup_{x,y\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_y\frac{\|A_1A_2\dots A_n\|^{2\varepsilon_o}}{\|y\,A_1\dots A_n\|^{2\varepsilon_o}\|x\,A_1\dots A_n\|^{2\varepsilon_o}}\}^{1/2}$$

$$\leq K_4(\lambda_1)\times\{\sup_{y\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_y(1+\|R_{p_o}\|^{\varepsilon_o})^2\}^{1/2}\times\{\sup_{x\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_{\eta_{\lambda_1}}\frac{1}{\|x\,A_1\dots A_n\|^{2\varepsilon_o}}\}^{1/2}$$

et

$$(3.113)\quad {}^{\lambda_1}E_y\{\frac{d^{\varepsilon_o}(\overline{x}.A_1\dots A_n,\overline{y}.A_1\dots A_n)}{d^{\varepsilon_o}(\overline{x},\overline{y})}\left(1+\frac{1}{\|y\,A_1\dots A_n\|^{2\varepsilon_o}}+\frac{|y\,R_{n_o}|^{2\varepsilon_o}}{\|y\,A_1\dots A_n\|^{2\varepsilon_o}}\right)\}$$

$$\leq \left[\sup_{x\neq y\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_y\left(\frac{d^{2\varepsilon_o}(\overline{x}.A_1\dots A_n,\overline{y}.A_1\dots A_n)}{d^{2\varepsilon_o}(\overline{x},\overline{y})}\right)\right]^{1/2}\times\gamma'_n(\varepsilon_o)$$

où $\quad [\gamma'_n(\varepsilon_o)]^2 = 3\left(1+\sup_y {}^{\lambda_1}E_y\left(\frac{1}{\|y\,A_1\dots A_n\|^{4\varepsilon_o}}\right)+\sup_y {}^{\lambda_1}E_y\left\{\frac{\|R_n\|^{4\varepsilon_o}}{\|y\,A_1\dots A_n\|^{4\varepsilon_o}}\right\}\right.$

Or il est clair (voir (3.106) et (3.108) que

$$(3.114)\quad \sup_n \gamma'^2_n(\varepsilon_o) < +\infty$$

Par conséquent en tenant compte de (3.111) (3.112) (3.113) (3.114) et de (3.105) (3.106), on voit qu'il est possible de choisir $n = n_o$ assez grand pour que les inégalités (3.102) (3.103) et (3.104) soient satisfaites.

b_1) Maintenant majorons $\Delta'_{n_o,2,\varepsilon_o}(x,y,u)$.

$$(3.115)\quad \Delta'_{n_o,2,\varepsilon_o} \leq k_{\varepsilon_o}(f)\ \{\ {}^{\lambda_1}E_y\left|\frac{u+x\,R_{p_o}}{||x\,A_1\ldots A_{n_o}||} - \frac{u+y\,R_{p_o}}{||y\,A_1\ldots A_{n_o}||}\right|^{\varepsilon_o}$$

$$+\ {}^{\lambda_1}E_y\left|\frac{x.A_1A_2\ldots A_{p_o}R^{n_o}_{p_o+1}}{||(x.A_1A_2\ldots A_{p_o})A_{p_o+1}\ldots A_{p_o+q}||} - \frac{y.A_1A_2\ldots A_{p_o}R^{n_o}_{p_o+1}}{||(y.A_1A_2\ldots A_{p_o})A_{p_o+1}\ldots A_{p_o+q}||}\right|^{\varepsilon}$$

$$= k_{\varepsilon_o}(f)\{\delta'_{p_o,n_o,\varepsilon_o}(x,y,u) + \delta''_{p_o,n_o,\varepsilon_o}(x,y)\}$$

Or

$$(3.116)\quad \delta'_{p_o,n_o,\varepsilon_o}(x,y,u) \leq ||x-y||^{\varepsilon_o}\ {}^{\lambda_1}E_y\left(\frac{(|u|^{\varepsilon_o}+||R_{p_o}||^{\varepsilon_o})||A_1A_2\ldots A_{n_o}||^{\varepsilon_o}}{||x\,A_1A_2\ldots A_{n_o}||^{\varepsilon_o}||y\,A_1A_2\ldots A_{n_o}||^{\varepsilon_o}}\right)$$

$$+\ ||x-y||^{\varepsilon_o}\ {}^{\lambda_1}E_y\left(\frac{||R_{p_o}||^{\varepsilon_o}}{||y\,A_1A_2\ldots A_{n_o}||^{\varepsilon_o}}\right)$$

et donc d'après (3.103) et (3.104), on a :

$$(3.117)\quad \sup_{\substack{x\neq y\in S_{d-1}\\ u\in\mathbb{R}}} \frac{\delta'_{p_o,n_o,\varepsilon_o}(x,y,u)}{||x-y||^{\varepsilon_o}(1+u^{2\varepsilon_o})} \leq \frac{2}{100}$$

On a également :

$$(3.118)\quad \delta''_{p_o,n_o,\varepsilon_o} \leq {}^{\lambda_1}E_y\left\{\frac{||x.A_1A_2\ldots A_{p_o} - y.A_1A_2\ldots A_{p_o}||^{\varepsilon_o}||R^{n_o}_{p_o+1}||^{\varepsilon_o}}{||(y.A_1A_2\ldots A_{p_o})A_{p_o+1}\ldots A_{n_o}||^{\varepsilon_o}}\right\}$$

$$+\ {}^{\lambda_1}E_y\ \{||(x.A_1A_2\ldots A_{p_o})R^{n_o}_{p_o+1}||^{\varepsilon_o}\left|\frac{1}{||(x.A_1\ldots A_{p_o})A_{p_o+1}\ldots A_{n_o}||}\right.$$

$$\left.-\ \frac{1}{||(y.A_1\ldots A_{p_o})A_{p_o+1}\ldots A_{n_o}||}\right|^{\varepsilon_o}\}$$

Posons

$$(3.119)\quad g_{p_o,n_o}(x,y) = \frac{||x.A_1A_2\ldots A_{p_o} - y.A_1A_2\ldots A_{p_o}||^{\varepsilon_o}||R^{n_o}_{p_o+1}||^{\varepsilon_o}}{||(y.A_1A_2\ldots A_{p_o})A_{p_o+1}\ldots A_{n_o}||^{\varepsilon_o}}$$

(3.120) et $h_{p_o,n_o}(x,y) = ||(x.A_1A_2\ldots A_{p_o})R_{p_o+1}^{n_o}||^{\varepsilon_o}$

$$\left|\frac{1}{||(x.A_1A_2\ldots A_{p_o})A_{p_o+1}\ldots A_{n_o}||} - \frac{1}{||(y.A_1A_2\ldots A_{p_o})A_{p_o+1}\ldots A_{n_o}||}\right|^{\varepsilon_o}$$

A l'aide de la propriété de Markov, on obtient que :

(3.121) $${}^{\lambda_1}E_y\{g_{p_o,n_o}(x,y)\} \leq {}^{\lambda_1}E_y||x.A_1A_2\ldots A_{p_o} - y.A_1A_2\ldots A_{p_o}||^{\varepsilon_o} \times \gamma_1(\varepsilon_o)$$

où $$\gamma_1(\varepsilon_o) = \sup_n \sup_{x\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_x\{\frac{||R_n||^{\varepsilon_o}}{||x.A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon_o}}\}$$

et

(3.122) $${}^{\lambda_1}E_y\{h_{p_o,n_o}(x,y)\} \leq {}^{\lambda_1}E_y||x.A_1A_2\ldots A_{p_o} - y.A_1A_2\ldots A_{p_o}||^{\varepsilon_o} \times \gamma_2(\varepsilon_o)$$

où $$\gamma_2(\varepsilon_o) = \sup_n \sup_{x,y\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_y\{\frac{||x.R_n||^{\varepsilon_o}\ ||A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon_o}}{||x\ A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon_o}||y\ A_1A_2\ldots A_n||^{\varepsilon_o}}\}$$

Remarquons alors que pour tous $x,y \in S_{d-1}$ et $A \in GL(d,\mathbb{R})$, on a :

(3.123) $||x.A - y.A|| \leq ||x-y||\ N(A)$ où $N(A) = 2\sup(||A||,||A^{-1}||)$

et également que si $x,y \in S_{d-1}$ sont tels que $||x-y|| \leq \sqrt{2}$, on a :

(3.124) $$\frac{1}{\sqrt{2}}||x-y|| \leq d(\overline{x},\overline{y}) \leq ||x-y||$$

Pour tout $t>0$, on a

$$(3.125)\quad {}^{\lambda_1}E_y\{||x.A_1A_2\ldots A_{p_o} - y.A_1A_2\ldots A_{p_o}||^{\varepsilon_o}\} = {}^{\lambda_1}E_y\{1_{[N(A_1A_2\ldots A_{n_o})\leq t]}$$

$$\times\ ||x.A_1A_2\ldots A_{p_o} - y.A_1A_2\ldots A_{p_o}||^{\varepsilon_o}\} + ||x-y||^{\varepsilon_o}\ {}^{\lambda_1}E_y\{N^{\varepsilon_o}(A_1\ldots A_{n_o})$$

$$1_{[N(A_1\ldots A_{n_o})>t]}\}$$

Choisissons $t = t_o \geq 1$ assez grand pour que :

$$(3.126)\quad [\gamma_1(\varepsilon_o) + \gamma_2(\varepsilon_o)] \times \sup_{y\in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_y(N^{\varepsilon_o}(A_1A_2\ldots A_{n_o})\ 1_{[N(A_1A_2\ldots A_{n_o}>t_o]}) \leq \frac{1}{100}$$

En raison de (3.124), on voit que si $||x-y|| < \eta_o$ où $\eta_o = \frac{\sqrt{2}}{t_o}$

$$(3.127)\quad {}^{\lambda_1}E_y(1_{[N(A_1A_2\ldots A_{n_o})\leq t_o]}\ ||x.A_1A_2\ldots A_{p_o} - y.A_1\ldots A_{p_o}||^{\varepsilon_o})$$

$$\leq (\sqrt{2})^{\varepsilon_o}\ {}^{\lambda_1}E_y(d^{\varepsilon_o}(\bar{x}.A_1A_2\ldots A_{p_o}, \bar{y}.A_1A_2\ldots A_{p_o}))$$

En tenant compte de (3.118) (3.121) (3.122) (3.126), (3.127) et (3.101) on conclut que :

$$(3.128)\quad \sup_{\substack{x\neq y\in S_{d-1}\\ ||x-y||\leq\eta_o}} \frac{\delta''_{p_o,n_o,\varepsilon_o}(x,y)}{||x-y||^{\varepsilon_o}} \leq \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{2}{100}$$

Des considérations précédentes, il résulte donc au total que :

$$(3.129)\quad \sup_{\substack{x\neq y\in S_{d-1}\\ ||x-y||\leq\eta_o\\ u\in\mathbb{R}}} \frac{\Delta'_{n_o,2,\varepsilon_o}(x,y,u)}{||x-y||^{\varepsilon_o}(1+u^{2\varepsilon_o})} \leq \frac{4}{100}\ k_{\varepsilon_o}(f)$$

b_2) Considérons maintenant $\Delta''_{n_o,2,\varepsilon_o}(x,y,u)$.

En raisonnant comme dans le paragraphe b_1) et en tenant compte de (3.104), on obtient facilement qu'il existe un réel $0 < \eta'_o \leq \eta_o$ tel que

$$(3.130) \quad \sup_{\substack{x \neq y \in S_{d-1} \\ \|x-y\| \leq \eta'_0 \\ u \in \mathbb{R}}} \frac{\Delta''_{n_o,2,\varepsilon_o}}{\|x-y\|^{\varepsilon_o}(1+u^{2\varepsilon_o})} \leq k_{\varepsilon_o}(f)\left(\frac{1}{100}+\frac{2}{100}\right) = \frac{3}{100}\, k_{\varepsilon_o}(f)$$

En rasssemblant les conclusions des paragraphes b_1) et b_2), nous voyons qu'il existe un réel η'_o tel que

$$(3.131) \quad \sup_{\substack{x \neq y \in S_{d-1} \\ \|x-y\| \leq \eta'_o \\ u \in \mathbb{R}}} \frac{|\Delta_{n_o,2}(x,y,u)|}{\|x-y\|^{\varepsilon_o}(1+u^{2\varepsilon_o})} \leq k_{\varepsilon_o}(f) \times \frac{7}{100}$$

Par ailleurs, on a

$$(3.132) \quad \sup_{\substack{x,y \in S_{d-1} \\ \|x-y\| > \eta'_o \\ u \in \mathbb{R}}} \frac{|\Delta_{n_o,2}(x,y,u)|}{\|x-y\|^{\varepsilon_o}(1+u^{2\varepsilon_o})} \leq |f|_{\varepsilon_o} \times \left(\frac{1}{\eta'_o}\right)^{\varepsilon_o} \Gamma_{n_o}(\varepsilon_o)$$

où $\Gamma_{n_o}(\varepsilon_o) = \sup_{x,y \in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_y \left\{2 + (1+\|R_{n_o}\|^{2\varepsilon_o})\left(\frac{1}{\|xA_1\ldots A_{n_o}\|^{2\varepsilon_o}} + \frac{1}{\|yA_1\ldots A_{n_o}\|^{2\varepsilon_o}}\right)\right\}$

$< +\infty$

Les résultats obtenus au paragraphe 1) peuvent donc se résumer à l'inégalité :

$$(3.133)\qquad \sup_{\substack{x\neq y\in S_{d-1}\\ u\in\mathbb{R}}} \left| \frac{{}^{\lambda_1}Q_1^{n_o} f(x,u) - {}^{\lambda_1}Q_1^{n_o} f(y,u)}{||x-y||^{\varepsilon_o}(1+u^{2\varepsilon_o})} \right| \leq k_{\varepsilon_o}(f)\times\frac{7}{100}$$

$$+\ |f|_{\varepsilon_o}\ [(\frac{1}{\eta'_o})^{\varepsilon_o}\ \Gamma_{n_o}(\varepsilon_o) + K'(\lambda_1)]$$

B) Considérons maintenant pour $f\in L_{\varepsilon_o}$

$$(3.134)\qquad D_{n_o}(x,u,v) = {}^{\lambda_1}Q_1^{n_o} f(x,u) - {}^{\lambda_1}Q_1^{n_o} f(x,v)$$

on a

$$(3.135)\qquad |D_{n_o}(x,u,v)| \leq k_{\varepsilon_o}(f)\ |u-v|^{\varepsilon_o}\ {}^{\lambda_1}E(\theta_{\lambda_1}(\bar{x},A_1\dots A_{n_o})\ \frac{1}{||x.A_1\dots A_{n_o}||^{\varepsilon_o}})$$

et donc d'après (3.135) et (3.102)

$$(3.136)\qquad \sup_{\substack{u\neq v\in\mathbb{R}\\ x\in S_{d-1}}} \frac{|{}^{\lambda_1}Q_1^{n_o} f(x,u) - {}^{\lambda_1}Q_1^{n_o} f(x,v)|}{|u-v|^{\varepsilon_o}} \leq \frac{k_{\varepsilon_o}(f)}{100}$$

De (3.133) et (3.136), il résulte donc que pour $f\in L_{\varepsilon_o}$ on a :

$$(3.137)\qquad k_{\varepsilon_o}({}^{\lambda_1}Q_1^{n_o} f) \leq \frac{8}{100}\,k_{\varepsilon_o}(f) + |f|_{\varepsilon_o}\ [(\frac{1}{\eta'_o})^{\varepsilon_o}\ \Gamma_{n_o}(\varepsilon_o) + K'(\lambda_1)]$$

Le lemme 3.15 résulte alors de l'inégalité précédente et du lemme 3.14.

Les lèmmes 3.13, 3.14 et 3.15 montrent que les hypothèses du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu sont satisfaites par les espaces $\mathcal{C}_{\varepsilon_o}$, L_{ε_o} et l'opérateur ${}^{\lambda_1}Q_1$.

Désignons par G_1 l'ensemble des valeurs propres de module 1 de ${}^{\lambda_1}Q_1$ dans L_{ε_o} et pour $\mu \in G_1$ notons

$$D_1(\mu) = \{f \in L_{\varepsilon_o} \ ; \ {}^{\lambda_1}Q_1 f = \mu f\}$$

Nous pouvons alors conclure que G_1 est fini et que dans L_{ε_o} pour tout $n \geq 1$

$$(3.128) \qquad {}^{\lambda_1}Q_1^n = \sum_{\mu \in G_1} \mu^n \, U_{\mu,\lambda_1} + V_{\lambda_1}^n$$

où U_{μ,λ_1} est le projecteur sur le sous-espace de dimension finie $\mathcal{D}_1(\mu)$

V_{λ_1} est un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à 1.

De plus on a les relations :

$$U_{\mu,\lambda_1} U_{\mu',\lambda_1} = 0 \qquad \text{si} \qquad \mu \neq \mu'$$

$$U_{\mu,\lambda_1} V_{\lambda_1} = V_{\lambda_1} U_{\mu,\lambda_1} = 0.$$

Etudions maintenant les valeurs propres de module 1 de ${}^{\lambda_1}Q_1$.

Nous pouvons énoncer le :

<u>Lemme 3.16</u> : *La seule valeur propre de module* 1 *de* ${}^{\lambda_1}Q_1$ *dans* L_{ε_o} *est* 1.

De plus les seules fonctions propres associées à la valeur propre 1 *sont de la forme* λe, $\lambda \in \mathbb{C}$

Démonstration du lemme 3.16

Soit $\mu \in G_1$, et $f_\mu \not\equiv 0$ telle $f_\mu \in D_1(\mu)$.

Remarquons tout d'abord que f est indépendante de la variable u.
On a en effet pour tout $(x,u) \in S_{d-1} \times \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$

(3.139) $$|f_\mu(x,u) - f_\mu(x,o)| = |{}^{\lambda_1}Q_1 f_\mu(x,u) - {}^{\lambda_1}Q_1^n(x,o)|$$

$$\leq |u|^\varepsilon \sup_{x \in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_x\left(\frac{1}{||x\, A_1 \ldots A_n||^{\varepsilon_o}}\right) ||f||_{\varepsilon_o}$$

Comme $\lim_n \sup_{x \in S_{d-1}} {}^{\lambda_1}E_x\left(\frac{1}{||x\, A_1 \ldots A_n||^{\varepsilon_o}}\right) = 0$, on a donc pour tout

$u \in \mathbb{R}$, $x \in S_{d-1}$:

$$f_\mu(x,u) = f_\mu(x,o)$$

et nous noterons maintenant : $f_\mu(x) = f_\mu(x,u)$

D'autre part $|f_\mu|$ est constante sur S_{d-1}.
En effet $\{x \in S_{d-1} \; ; \; |f_\mu(x)| = \sup_{y \in S_{d-1}} |f_\mu(y)|\}$ est non vide, fermé et stochastiquement fermé, d'où l'affirmation précédente d'après l'hypothèse d'irréductibilité (i).

On déduit alors de la relation

$${}^{\lambda_1}Q_1^n \, f_\mu(x) = \mu^n \, f\,(x) \qquad n \geq 1, \; x \in S_{d-1}$$

que pour p presque tous $A_1, A_2 \ldots A_n \in S_p$ et tout $x \in S_{d-1}$ on a

(3.140) $$f_\mu(x . A_1 \ldots A_n) = \mu^n \, f_\mu(x)$$

Désignons maintenant par σ la symétrie

$$\sigma(x) = - x \qquad x \in S_{d-1}$$

sur S_{d-1}

On a l'égalité :

$$f_\mu(x) = \psi_\mu(x) + \Phi_\mu(x)$$

où $\psi_\mu = \dfrac{f_\mu + f_\mu o\sigma}{2}$ et $\Phi_\mu = \dfrac{f_\mu - f_\mu o\sigma}{2}$

Les fonctions ψ_μ , Φ_μ^2 sont invariantes par σ et s'identifient à des fonctions Höldériennes d'ordre ε_o sur ${}^t\mathbb{P}_{d-1}$. De plus en raison de (3.140) on a les égalités :

$$(3.141) \qquad \int \psi_\mu(x.A_1)\, dp(A_1) = \mu\, \psi_\mu(x) \qquad x \in S_{d-1}$$

et

$$(3.142) \qquad \int \Phi_\mu^2(x.A_1)\, dp(A_1) = \mu^2\, \Phi_\mu^2(x) \qquad . \quad x \in S_{d-1}$$

L'égalité (3.141) n'est possible que si $\psi_\mu \equiv 0$ ou si $\mu = 1$ et si ψ_μ est une constante.

De même l'égalité (3.142) n'est possible que si $\Phi_\mu^2 \equiv 0$ ou si $\mu^2 = 1$ et si Φ_μ^2 est une constante.

En raison de la connexité de S_{d-1} on voit donc (3.141) et (3.142) ne sont possibles que si ψ_μ et Φ_μ^2 sont constantes sur S_{d-1} et donc aussi Φ_μ, et si $\mu = 1$.

Les conclusions du théorème 3.2 résultent immédiatement de (3.128) et du lemme (3.16).

La proposition qui suit établit l'existence d'un moment d'ordre 1 pour les temps d'entrée de la chaîne de Markov M_n dans certains ouverts.

Proposition 3.3. *Soit* O *un ouvert de* $S_{d-1} \times \mathbb{R}$ *tel que* $\alpha_{\lambda_1}(O) > 0$ *et soit* $T_O = \mathrm{Inf}\{ x \geq 1 \; ; \; M_n \in O\}$ *le temps d'entrée de la chaîne de Markov* $(M_n)_{n \geq 1}$ *dans* O.

Pour tout compact C *de* $S_{d-1} \times \mathbb{R}$ *on a :*

$$\sup_{(x,u) \in C} {}^{\lambda_1}E_{(x,u)}(T_O) < +\infty$$

Démonstration de la proposition 3.3

Elle est inspirée de [2].

Soit f une fonction infiniment dérivable à support compact dans $S_{d-1} \times \mathbb{R}$ telle que :

$$1_O \geq f \geq 0$$

et

$$\alpha_{\lambda_1}(f) > 0$$

Notons $T_f = \mathrm{Inf}\{n \geq 1 \; ; \; f(M_n) > 0\}$

il est clair que $T_f \geq T_O$ (3.143).

Soit μ_o une probabilité quelconque sur $S_{d-1} \times \mathbb{R}$.

Considérons alors la fonction ψ_ℓ : définie par

$$(3.144) \qquad \psi_\ell(j) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=\ell-j+1}^{\ell} \mu_o [{}^{\lambda_1}Q_1^k(f)] & \text{si} \quad j \leq \ell \quad j \geq 1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} \mu_o [{}^{\lambda_1}Q_1^k(f)] & \text{si} \quad j > \ell \end{cases}$$

On a alors :

$$(3.145)\qquad {}^{\lambda_1}E_{\mu_{\bar{o}}}[\psi_\ell(T_f)] = {}^{\lambda_1}E_{\mu_{\bar{o}}}\{\sum_{j=1}^{\ell} 1_{[T_f=j]} \times \sum_{k=\ell-j+1}^{\ell} \mu_{\bar{o}}[{}^{\lambda_1}Q_1^k(f)]\}$$

$$+ {}^{\lambda_1}Q_{\mu_o,1}(T_f>\ell) \sum_{k=1}^{\ell} \mu_o[{}^{\lambda_1}Q_1^k(f)]$$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} \mu_o[{}^{\lambda_1}Q_1^k(f)] - {}^{\lambda_1}E_{\mu_o}\{\sum_{j=1}^{\ell} 1_{[T_f=j]}$$

$$\times \sum_{k=1}^{\ell-j} \mu_o[{}^{\lambda_1}Q_1^k(f)]\} \quad .$$

Par ailleurs, d'après la propriété de Markov, on a l'égalité

$$(3.146)\qquad \sum_{k=1}^{\ell} \mu_o({}^{\lambda_1}Q^k(f)) = {}^{\lambda_1}E_{\mu_o}\{\sum_{j=1}^{\ell} 1_{[T_f=j]} \sum_{k=0}^{\ell-j} {}^{1}Q_1^k(f)(M_j)\} .$$

Nous déduisons donc de (3.145) que

$$(3.147)\qquad {}^{\lambda_1}E_{\mu_{\bar{o}}}\{\psi_\ell(T_f)\} = {}^{\lambda_1}E_{\mu_o}\{\sum_{j=1}^{\ell} 1_{[T_f=j]} \sum_{k=1}^{\ell-j} [\mu_o\ {}^{\lambda_1}Q_1^k(f) - {}^{\lambda_1}Q_1^k(f)(M_j)]\}$$

Si S(f) est le support de f, nous voyons donc d'après (3.147) que

$$(3.148)\qquad {}^{\lambda_1}E_{\mu_o}(\psi_\ell(T_f)) \leq \sup_{\substack{x,u \in S(f)\\ m\geq 1}} |\sum_{k=1}^{m} {}^{\lambda_1}Q_1^k(f)(x,u)-\alpha_{\lambda_1}(f)|$$

$$+ \sup_{m\geq 1} |\sum_{k=1}^{m} \mu_o[{}^{\lambda_1}Q_1^k(f)] - \alpha_{\lambda_1}(f)|$$

si la probabilité μ_o a son support dans un compact C , d'après le théorème 3.2, le second membre de c) est majoré par une constante $\beta(C)$ + ∞.

Par ailleurs, il résulte également du théorème 3.2 que pour tout $j \geq 1$

$$\lim_{\ell \to +\infty} \psi_\ell(j) = \alpha_{\lambda_1}(f) \times j.$$

Le lemme de Fatou permet donc de conclure que

(3.149) $$\alpha_{\lambda_1}(f) \times {}^{\lambda_1}E_{\mu_o}(T_f) \leq \beta(C).$$

En particulier, on a

(3.150) $$\sup_{(x,u) \in C} {}^{\lambda_1}E_{(x,u)}(T_f) \leq \frac{\beta(C)}{\alpha_{\lambda_1}(f)}$$

et donc également en raison de (3.143)

(3.151) $$\sup_{(x,u) \in C} {}^{\lambda_1}E_{(x,u)}(T_0) < +\infty$$

ce qui établit la proposition 3.3.

Démonstration de la proposition 3.2

Commençons par remarquer que $\alpha_{\lambda_1}(S_{d-1} \times]0 +\infty]) > 0$.

En effet, sinon il existerait un point $(x_o,u_o) \in S_{d-1} \times \mathbb{R}$ tel que u_o soit la borne supérieure de la projection du support de α_{λ_1} sur $\mathbb{R}$. Le support de α_{λ_1} étant un ensemble stochastiquement fermé pour la chaine de Markov $(M_n)_{n \geq 1}$, on en déduirait que pour tout $n \geq 0$

$${}^{\lambda_1}Q_{(x_o,u_o,0)}(U_n \geq u_o) = 1$$

et donc également

$$P(x_o R_n \geq 0) = 1$$

ce qui contredit le lemme 3.11.

Si l'on note A l'ouvert $S_{d-1} \times]-\infty,0]$, on a

$$(3.152) \qquad {}^{\lambda_1}E_{(x,u,t)}(\zeta_1) = {}^{\lambda_1}E_{(x,0,0)}(\zeta_1) = {}^{\lambda_1}E_{(x,0,0)}(T_A)$$

pour tout $(x,u,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

L'égalité (3.152), le fait que $\alpha_{\lambda_1}(A) > 0$ et la proposition (3.3) justifient l'énoncé de la proposition (3.2).

La démonstration du théorème 3.1 est ainsi complète.

REFERENCES

[1] L. BREIMAN : *Probability*
Addison Wesley Publ. Co 1968.

[2] R. COGBURN : *A uniform theory for sums of Markov chain transition probabilities.*
Annals of Probability 1975, Vol. 3 n°2 p.191-214.

[3] W. FELLER : *An introduction to probability theory and its applications*
Second édition Wiley New-York 1971.

[4] H. FURSTENBERG : *Non commuting random products*
A.M.S. 108, 1963, p.337-428.

[5] A.K. GRINCEVICIUS : *One limit distribution for a random walk on the line*
Lithuanian Math. Trans. 15, p.580-589.

[6] Y. GUIVARC'H : *Quelques propriétés ergodiques des produits de matrices aléatoires*
Lecture Notes in Math. 774 (1980 p.176-250.

[7] Y. GUIVARC'H : *Marches aléatoires à pas markovien*
C.R.A.S. Paris t.289 (1979).

[8] Y. GUIVARC'H : *Exposants de Lyapunoff des produits de matrices aléatoires en dépendance markovienne*
C.R.A.S. t.292 (1981) p.327-329.

[9] Y. GUIVARC'H : *Exposants caractéristiques des produits de matrices aléatoires en dépendance markovienne*
Lecture Notes in Math. Proceedings "Probability on groups" Oberwolfach 1983 - à paraitre.

[10] Y. GUIVARC'H et A. RAUGI : *Frontières de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence*
Séminaire de Rennes I (1980) - à paraitre dans Z.W.

[11] H. KESTEN : *Renewal theory for functionals of a Markov chain with general state space*
The Annals of Probability 1974, Vol. 2 n°3 p.355-386.

[12] H. KESTEN : *Random difference equations and renewal theory for products of random matrices*
Acta. Math. 131 p.207-248.

[13] J.F.C. KINGMAN : *The ergodic theory of subadditive stochastic processes*
J.R. Stat. Soc. B 30 p.499-510.

[14] E. LE PAGE : *Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires*
Springer Lecture Notes 928 (1982) p.258-303.

[15] F. NORMAN : *Markov processes and learning models*
Academic Press New-York (1972).