Publications mathématiques et informatiques de Rennes

Marie-France Allain

Mesures stochastiques et décomposition de Doob

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1983, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-39
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1983___1_A1_0>

MESURES STOCHASTIQUES ET DECOMPOSITION DE DOOB

Marie- France ALLAIN
Laboratoire de Probabilités
U.E.R MATHEMATIQUES - INFORMATIQUE
Université de RENNES I
Campus de Beaulieu 35042 RENNES FRANCE

1 - INTRODUCTION.

Soient $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé, T un espace topologique, $\mathcal{S}$ une tribu prévisible sur $(T\times\Omega)$ et μ une mesure stochastique définie sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $L_1(P)$.

Le but de ce travail est de prouver que, sous certaines hypothèses, (hypothèses qui sont satisfaites dans les cas classiques), la mesure stochastique μ admet une décomposition de la forme :

$\mu = \mu_1 + \mu_2$

où μ_2 est la différence de deux mesures stochastiques définies sur $\mathcal{S}$, à valeurs dans $L_1^+(P)$, et, μ_1 est une mesure stochastique définie sur $\mathcal{S}$, à valeurs dans $L_1(P)$ et vérifiant : $\forall D \in \mathcal{S}$ $E(\mu_1(D)) = 0$.

2 - HYPOTHESES ET NOTATIONS.

Soient $(\Omega,\mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et T un espace topologique. (Dans les situations classiques T est un ensemble d'indices, en général $\mathbb{N}^d$ ou $\mathbb{R}_+^d$). $\mathcal{A}$ désigne une famille de parties de T, on suppose que $\mathcal{A}$ est une semi-algèbre et que pour tout A élément de $\mathcal{A}$ il existe une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts et une suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A_n \subseteq C_n \subseteq A$ et $\bigcup_n A_n = A$.

On se donne $(\mathcal{G}_A)_{A \in \mathcal{A}}$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{F}$ vérifiant :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \qquad \forall B \in \mathcal{A} \qquad A \subseteq B \implies \mathcal{G}_B \subseteq \mathcal{G}_A$$

Soit $\mathcal{R} = \{A \times F,\ A \in \mathcal{A},\ F \in \mathcal{G}_A\}$; $\mathcal{R}$ est une semi-algèbre de parties de $T \times \Omega$; les éléments de $\mathcal{R}$ sont appelés rectangles prévisibles. On note $\mathcal{R}'$ l'algèbre sur $T \times \Omega$ engendrée par $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}$ la tribu sur $T \times \Omega$ engendrée par $\mathcal{R}$; $\mathcal{P}$ est appelée tribu prévisible.

Un processus prévisible est une application $\mathcal{P}$-mesurable de $T \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des processus prévisibles simples, et par $\mathcal{H}_b(\mathcal{P})$ l'espace vectoriel des processus prévisibles bornés. Pour des exemples d'une telle situation voir [1] et [2].

Pour tout réel p positif ou nul, on pose $L_p(P) = L_p^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (espace vectoriel de variables aléatoires à valeurs réelles de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable). $L_p(P)$ est muni de sa topologie usuelle.

Enfin pour f élément de $L_p(P)$ on définit $||f||_p$ par :

$$||f||_p = \begin{cases} \left(\int |f|^p \, dP\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p \\ \int |f|^p \, dP & \text{si } 0 < p \leq 1 \\ E^P(|f| \wedge 1) & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

3 - RAPPELS SUR LES MESURES STOCHASTIQUES.

La notion de mesure stochastique a été étudiée en particulier, par METIVIER et PELLAUMAIL [11]. Rappelons-en la définition.

3.1 - DEFINITION.

On appelle $L_p(P)$-mesure stochastique, une application μ, simplement additive, définie sur $\mathcal{R}'$, à valeurs dans $L_p(P)$ et vérifiant :

3.1.1. $\forall\, A \times F \in \mathcal{R}$ $\quad \mu(A \times F) = 1_F\, \mu(A \times \Omega)$

3.1.2. $\mu(\mathcal{R}')$ est une partie bornée de $L_p(P)$.

3.1.3. μ s'étend en une application σ-additive définie sur $\mathcal{S}$, à valeurs dans $L_p(P)$.

L'extension est également notée μ. Notons que dans le cas où $p > 0$, 3.1.3. implique 3.1.2.

Le théorème (3.2) qui suit donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une application μ simplement additive, définie sur $\mathcal{R}'$, à valeurs dans $L_p(P)$ soit une $L_p(P)$-mesure stochastique.

3.2 - THEOREME.

Soit μ *une application simplement additive, définie sur* $\mathcal{R}'$, *à valeurs dans* $L_p(P)$.

Alors μ *est une* $L_p(P)$-*mesure stochastique si et seulement si* μ *vérifie* 3.1.1., 3.1.2. *et* :

3.2.1 $\forall (R_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $R_n \in \mathcal{R}$, $R_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \lim_n ||\mu(R_n)||_p = 0$.

Pour la démonstration voir [11].

Une $L_p(P)$-mesure stochastique jouit de la propriété suivante ([11]) :

3.3 - PROPRIETE.

Soit μ *une* $L_p(P)$-*mesure stochastique, soit* F *un élément de* $\mathcal{F}$ *et* G *un ensemble prévisible tel que* : $1_G = 1_G \cdot 1_{T\times F}$

Alors :

3.3.1. $\mu(G) = 1_F\, \mu(G)$

On peut définir une notion d'intégration par rapport à une mesure stochastique (intégrale stochastique). L'existence et les propriétés de l'intégrale stochastique des processus prévisibles bornés sont données par le théorème 3.4 qui suit (pour la démonstration voir [11]). Cette notion d'intégrale stochastique s'étend à une classe plus vaste de processus prévisibles, en utilisant la méthode de Bichteler [3].

3.4 - THEOREME.

Soit μ *une* $L_p(P)$ *-mesure stochastique.*
Il existe alors une application unique, notée également μ, *définie sur* $\mathcal{H}_b(\mathcal{P})$, *à valeurs dans* $L_p(P)$ *et vérifiant :*

3.4.1. $\forall\, h \in \mathcal{E} : h = \sum_i \alpha_i\, 1_{A_i \times F_i} \Rightarrow \mu(h) = \sum_i \alpha_i\, \mu(A_i \times F_i)$

3.4.2. *Si* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* $\mathcal{H}_b(\mathcal{P})$, *uniformément bornée et qui converge simplement vers* h, *alors la suite* $(\mu(h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\mu(h)$ *dans* $L_p(P)$.

3.4.3. *Si* h *appartient à* $\mathcal{H}_b(\mathcal{P})$ *l'application qui à* G *élément de* $\mathcal{P}$ *associe* $\mu(1_G\, h)$ *est également une* $L_p(P)$*-mesure stochastique.*

La notion de fonctionnelle linéaire stochastique a été introduite par METIVIER et PELLAUMAIL ([11]). Voici la définition.

3.5 - DEFINITION.

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel de processus prévisibles bornés. On suppose que $\mathcal{H}$ muni de la norme uniforme est un espace de Banach et que les éléments de $\mathcal{H}$ engendrent $\mathcal{P}$.

Soit ν une application linéaire et continue de $\mathcal{H}$ dans $L_p(P)$.

ν est une $L_p(P)$-fonctionnelle linéaire stochastique, si elle vérifie :

3.5.1 $\forall\, h \in \mathcal{H}$, $\forall\, F \in \mathcal{A}$ *tels que* $1_F\, h \in \mathcal{H}$

$$\nu(1_F\, h) = 1_F\, \nu(h).$$

Le théorème suivant qui est du type théorème de Riesz établit le lien entre mesure stochastique et fonctionnelle linéaire stochastique. (La démonstration se trouve dans [11]).

3.6 THEOREME.

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel de processus prévisibles bornés dont les éléments engendrent $\mathcal{P}$. On suppose que $\mathcal{H}$ muni de la norme uniforme est un espace de Banach.

Alors :

3.6.1 *Si μ est une $L_p(P)$-mesure stochastique, l'application ν définie sur $\mathcal{H}$ par : $\nu(h) = \mu(h)$ est une $L_p(P)$-fonctionnelle linéaire stochastique.*

3.6.2 *Si ν est une $L_p(P)$-fonctionnelle linéaire stochastique, il existe une unique $L_p(P)$-mesure stochastique μ vérifiant :*

$$\nu(h) = \mu(h) \quad \forall\, h \in \mathcal{H}$$

3.6.3 *Quand $p>1$, toute partie bornée de l'espace des $L_p(P)$-fonctionnelles linéaires stochastiques est relativement compacte pour la topologie de la convergence simple, $L_p(P)$ étant muni de sa topologie faible.*

Le théorème suivant ([3]) permet de se ramener du cas d'une $L_o(P)$-mesure stochastique à celui d'une $L_2(P)$-mesure stochastique ; sa démonstration utilise un théorème de factorisation de Maurey et Rosenthal.

3.7. THEOREME

Soit μ *une* $L_o(P)$*-mesure stochastique. Il existe alors une probabilité* Q *équivalente à* P*, à dérivée* $\frac{dQ}{dP}$ *bornée et telle que* μ *soit une* $L_2(Q)$*-mesure stochastique.*

Pour d'autres propriétés des $L_p(P)$-mesures stochastiques, voir ([2]).

4 - RELATION ENTRE PROCESSUS ET MESURES STOCHASTIQUES.

Examinons d'abord le cas où T est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}_+$ et

$\mathcal{A} = \{]s,t],\ s\leq t,\ s\in T,\ t\in T\}$.

Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ un processus sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

A ce processus nous pouvons associer une application μ^X définie sur $\mathcal{R}$, simplement additive, à valeurs dans $L_o(P)$ en posant, pour h élément de $\mathcal{R}$ de la forme : $\sum_i \alpha_i\ 1_{]s_i,t_i]\times F_i}$, $\mu^X(h) = \sum_i \alpha_i\ 1_{F_i}(X_{t_i} - X_{s_i})$

μ^X vérifie évidemment 3.1.1.

Réciproquement, à toute $L_p(P)$-mesure stochastique μ (ou à toute fonction μ définie sur $\mathcal{R}'$, à valeurs dans $L_p(P)$ et simplement additive), nous pouvons associer un processus X en posant :

$X_t = \mu(]o,t]\cap T)\times\Omega)$,

on a alors :

$\mu = \mu^X$.

Cette correspondance s'étend au cas où $T = \prod_{i=1}^{d}]a^i,b^i] \subseteq \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{A} = \{A = \prod_{i=1}^{d}]s^i,t^i],\ a^i \leq s^i \leq t^i \leq b^i,\ i=1\ldots d\}$.

Afin de préciser cette correspondance, nous introduisons les notations suivantes (notations utilisées dans [2]):

- pour $a = (a^i)_{i=1\ldots d}$ et $b = (b^i)_{i=1..d}$, on pose : $]\!]a,b]\!] = \prod_{i=1}^{d}]a^i,b^i]$
- pour $I \subseteq \{1..d\}$ on pose : $\varepsilon^I = (-1)^{d-\mathrm{card}\, I}$
- pour $I \subseteq \{1\ldots d\}$ et $A =]\!]s,t]\!]$, on pose :

$$\alpha^i(I,A) = \begin{cases} s^i & \text{si } i \notin I \\ t^i & \text{si } i \in I \end{cases} \qquad \text{et} \quad \alpha(I,A) = (\alpha^i(I,A))_{i=1\ldots d}.$$

Enfin pour $X = (X_t)_{t\in\overline{T}}$ et $A =]\!]s,t]\!]$ on définit $\Delta_A X$ par :

$$\Delta_A X = \sum_I \varepsilon^I(X(\alpha(I,A)) - X(\alpha(\emptyset,A))).$$

$\Delta_A X$ représente la "variation" de X sur l'ensemble A ; pour d = 1 et $A =]s,t]$ on a $\Delta_A X = (X_t - X_s)$.

Au processus X on peut alors associer une application μ^X définie sur $\mathcal{E}$, simplement additive, à valeurs dans $L_o(P)$ en posant, pour h élément de $\mathcal{E}$ de la forme : $\sum_i \alpha_i 1_{A_i\times F_i}$, $\mu^X(h) = \sum_i \alpha_i 1_{F_i} \Delta_{A_i} X$

μ^X vérifie évidemment 3.1.1.

Réciproquement, à toute $L_p(P)$-mesure stochastique μ (ou même à toute application μ définie sur $\mathcal{R}'$, à valeurs dans $L_p(P)$, et, simplement additive), on peut associer un processus X en posant :

$X_t = \mu(]\!]a,t]\!] \times \Omega)$ $(t \in]\!]a,b]\!])$.

Dans ce qui précède on peut, bien sûr, se restreindre aux "sous intervalles" de T dont les extrémités appartiennent à un sous ensemble dénombrable de T . Le processus X associé à une mesure stochastique par la méthode précédente apparaît donc comme un "processus de répartition". (D'après 3.2.1 ce processus est continu à droite dans $L_p(P)$).

Supposons maintenant que $T = \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ordonné ou non et que $\mathcal{A} = \{\{t_n\}, n\in\mathbb{N}\}$.

La correspondance qui paraît naturelle est la suivante :

- à $X = (X_t)_{t\in T}$ on associe μ^X telle que :

$\mu^X(\{t_n\} \times F) = 1_F \ X_{t_n}$

- à μ mesure stochastique, on associe le processus X tel que :

$X_{t_n} = \mu^X(\{t_n\} \times \Omega)$.

Le processus X est alors un processus de densité de masse.

La question qui se pose est alors la suivante : étant donnés $(\Omega,\mathcal{F},P)$, l'ensemble T, la tribu $\mathcal{G}$ et la mesure stochastique μ, peut-on caractériser les processus X (de répartition ou de densité), associés ?

Le théorème 3.2 permet évidemment de donner une réponse à cette question ; mais plus précisément ? Quand d = 1 et $T \subseteq \bar{\mathbb{R}}_+$, le théorème de DELLACHERIE-MOKOBODZKI ([4] p. 400) donne une réponse à cette question.

4.2 THEOREME DE DELLACHERIE-MOKOBODZKI.

Soit $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+},P)$ *vérifiant les conditions habituelles.*

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un processus adapté continu à droite, on pose* $X_\infty = 0$.

Soit $(t_i)_{i=1\ldots n}$: $0 \leq t_o < t_1 \ldots < t_n = +\infty$

Soit $h = \sum_{i=o}^{n-1} H_i \ 1_{]t_i,t_{i+1}]}$ (élément de $\mathcal{E}$)

Soit $J(h) = \sum_{i=o}^{n-1} H_i(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$

Alors X *est une semi-martingale jusqu'à l'infini si et seulement si* J *est une application linéaire et continue de* $\mathcal{E}$ *dans* $L_p(P)$.
$\mathcal{E}$ *étant muni de la topologie de la convergence uniforme.*

La démonstration peut être adaptée au cas des semimartingales ordinaires. Quand $d \geq 2$ le problème est plus complexe. Les exemples les plus simples de processus définissant des mesures stochastiques sont : le drap brownien et les processus à variation bornée continus à droite. (Pour plus de détails et d'exemples voir [2],[6],[9],[10] et l'additif).

Mentionnons enfin que, sous les hypothèses habituelles ($(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, et, pour $A =]]s,t]]$, $\mathcal{G}_A = \mathcal{F}_s$), un processus X adapté, qui définit une $L_p(P)$-mesure stochastique est un $L_p(P)$-intégrateur au sens de Bichteler et Hürzeller ([3],[8]) ; ceci résulte immédiatement des propriétés des $L_p(P)$-mesures stochastiques rappelées au paragraphe 3.

5 - QUASI-MARTINGALES ET FONCTION DE DOLEANS.

5.1. DEFINITION ET NOTATION

On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des familles finies d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$, un élément de $\mathcal{C}$ est noté τ .

Soit μ une fonction d'ensemble simplement additive, définie sur $\mathcal{D}_0'$, à valeurs dans $L_p(P)\,(p \geq 1)$.

Soit $\tau = \{A_i \quad i = 1 \dots n, \quad A_i \in \mathcal{A} , \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j\}$

et soit $V^\tau(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \left| E(\mu(A_i \times \Omega)/\mathcal{G}_{A_i}) \right|$

μ est une quasi-martingale si : $V(\mu) = \sup_{\tau \in \mathcal{C}} E(V^\tau(\mu)) < +\infty$

Il est facile de vérifier que cette définition donne bien la notion habituelle de quasi-martingale.

5.2. PROPOSITION.

Soit μ *une* $L_p(P)$ *-mesure stochastique* $(p\geq 1)$ *alors* μ *est une quasi-martingale.*

Démonstration.

Soit $\tau = \{(A_i)_{i=1\ldots n},\quad A_i \in \mathcal{A},\quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i\neq j\}$

et soient $\alpha_i^+ = 1_{\{E(\mu(A_i\times\Omega)/\mathcal{G}_{A_i}) > 0\}}$

$$\alpha_i^- = -1_{\{E(\mu(A_i\times\Omega)/\mathcal{G}_{A_i}) < 0\}}$$

On a, en posant $h^\tau = \sum_i (\alpha_i^+ + \alpha_i^-)\, 1_{A_i}$,

$$E(\mu(h^\tau)) = \sum_i E(|E(\mu(A_i\times\Omega)/\mathcal{G}_{A_i})|) \Rightarrow E(V^\tau(\mu)) = E(\mu(h^\tau)) \leq 2 \sup_{D\in\mathcal{R}'} ||\mu(D)||_p$$

$$\Rightarrow \sup_{\tau\in\mathcal{C}} E(V^\tau(\mu)) < +\infty.$$

5.3. DEFINITION.

Soit m *une mesure à valeurs réelles, sur* $(T\times\Omega,\mathcal{S})$. m *est une mesure admissible si elle vérifie :*

5.3.1 m *est finie*

5.3.2 m *ne charge pas les ensembles évanescents.*

5.4. DEFINITION.

Soit μ *une fonction d'ensemble simplement additive définie sur* $\mathcal{R}'$ *à valeurs dans* $L_p(P)\,(p\geq 1)$. *La fonction* m^μ *définie sur* $\mathcal{R}'$, *à valeurs réelles, telle que :* $m^\mu(D) = E(\mu(D))\quad (D\in\mathcal{R}')$

est appelée fonction de Doléans de μ.

5.5. PROPOSITION

Soit μ *une* $L_p(P)$*-mesure stochastique* $(p\geq 1)$ *alors la fonction de Doléans de* μ *s'étend en une mesure admissible.*

Démonstration.

μ étant définie sur $\mathcal{S}$ soit $m^{\mu}(D) = E(\mu(D))$ pour D élément de $\mathcal{S}$.
m^{μ} est évidemment σ-additive et finie et d'après 3.3 ne charge pas les ensembles évanescents.

6 - MESURES STOCHASTIQUES A VARIATION BORNEE.

6.1 - NOTATIONS ET DEFINITIONS

Nous noterons $\mathcal{V}_+(L_p(P))$ l'ensemble des $L_p(P)$-mesures stochastiques telles que : $\mu(A \times \Omega) \in L_p^+(P)\ \forall\ A \in \mathcal{A}$ et nous noterons $\mathcal{V}(L_p(P))$ l'ensemble des $L_p(P)$-mesures stochastiques qui sont des différences d'éléments de $\mathcal{V}_+(L_p(P))$.
Nous dirons qu'un élément de $\mathcal{V}(L_p(P))$ est une mesure stochastique à variation bornée.

L'énoncé du théorème 3.2, qui donne un critère pour qu'une fonction d'ensemble simplement additive, définie sur $\mathcal{R}'$, à valeurs dans $L_p(P)$ soit une $L_p(P)$-mesure stochastique, se simplifie dans le cas où la fonction prend ses valeurs dans $L_p^+(P)$. On peut en particulier énoncer les corollaires suivants :

6.2 - COROLLAIRE.

Soit μ *une application simplement additive définie sur* $\mathcal{R}'$*, à valeurs dans* $L_p^+(P)$ *alors* μ *est une* $L_p(P)$*-mesure stochastique si et seulement si* μ *vérifie* 3.1.1. *et*

6.2.1. $\begin{cases} \text{i) } \{\mu(D),\ D \in \mathcal{R}_o',\ D = \sum_{i=1}^{n} (A_i \times \Omega)\ \ A_i \in \mathcal{A}\} \textit{ est une partie bornée de } \\ \quad L_p(P). \\ \text{ii) } \forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}},\ A_n \in \mathcal{A}\quad A_n \downarrow \emptyset \implies \lim_n \|\mu(A_n \times \Omega)\|_p = 0. \end{cases}$

De plus si $T \in \mathcal{A}$ i) *est automatiquement satisfaite.*

Démonstration.

Si μ est une $L_p(P)$-mesure stochastique la propriété 6.2.1. est évidemment satisfaite.

Passons à la réciproque.

Nous montrons d'abord que 3.1.1. et 6.2.1.i) impliquent 3.1.2. c'est-à-dire que $\mu(\mathcal{R}_o')$ est une partie bornée de $L_p(P)$; soit D élément de $\mathcal{R}_o'$, D peut se mettre sous la forme : $D = \sum_{i=1}^{n} (A_i \times F_i)$, $A_i \in \mathcal{A}$, $F_i \in \mathcal{G}_{A_i}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et on a par suite de la positivité de μ

$0 \leq \mu(D) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \times F_i) = \sum_{i=1}^{n} 1_{F_i}\ \mu(A_i \times \Omega) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \times \Omega)$

ces inégalités impliquent la bornitude de $\mu(\mathcal{R}_o')$.

Puis nous vérifions que 3.1.1., 6.2.1.ii) et la positivité de μ impliquent 3.2.1.

Pour cela, soit $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{R}_o$ qui tend en décroissant vers le vide. Soit $R_n = A_n \times F_n$, on a alors $A_n \searrow \emptyset$ ou $F_n \searrow \emptyset$

Si $A_n \downarrow \emptyset$ 3.2.1. résulte des inégalités :

$0 \leq \mu(R_n) = 1_{F_n}\ \mu(A_n \times \Omega) \leq \mu(A_n \times \Omega)$.

Si $F_n \downarrow \emptyset$ 3.2.1. résulte des inégalités

$0 \leq \mu(R_n) = 1_{F_n}\ \mu(A_n \times \Omega) \leq 1_{F_n}\ \mu(A_1 \times \Omega)$

Si T appartient à $\mathcal{A}$ on a $0 \leq \mu(D) \leq \mu(T \times \Omega)$ pour tout élément D de $\mathcal{R}_o'$ ce qui implique évidemment 6.2.1.i).

Dans le cas où $T =]\!]a,b]\!] \subseteq \mathbb{R}_+^d$ et $\mathcal{A} = \{]\!]s,t]\!] , a \leq s \leq t \leq b\}$ la condition 6.2.1.ii) est une condition de continuité à droite pour le processus de répartition X associé à μ.

(Noter que dans ce cas le processus X est croissant au sens où $\Delta_A X \geq 0$ Pps. Pour plus de détails sur les processus croissants continus à droite, voir l'additif.

6.3. <u>COROLLAIRE</u>.

Soient $T = \{a_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ *et* $\mathcal{A} = \{\{a_n\}_{n\in \mathbb{N}}\}$

Soit μ *une application simplement additive définie sur* $\mathcal{D}'$, *à valeurs dans* $L_p^+(P)$.

Alors μ *est une* $L_p(P)$*-mesure stochastique si et seulement si* μ *vérifie* 3.1.1. *et* :

6.3.1. $\sum_n \mu(\{a_n\} \times \Omega)$ *appartient à* $L_p(P)$.

<u>Démonstration</u>.

Si μ est une $L_p(P)$-mesure stochastique, elle vérifie évidemment 3.1.1. et 6.3.1..

Réciproquement, soit D élément de $\mathcal{D}'$ alors on a

$0 \leq \mu(D) \leq \sum_n \mu(\{a_n\} \times \Omega)$

ce qui implique que $\mu(\mathcal{D}')$ est une partie bornée de $L_p(P)$.

Pour prouver 3.2.1., il suffit de remarquer que $R_n \downarrow \emptyset$, $R_n \in \mathcal{R}$.

$\Longrightarrow R_n = \{a\} \times F_n$, $F_n \in \mathcal{G}_{\{a\}}$ $F_n \downarrow \emptyset$

et $0 \leq \mu(R_n) = 1_{F_n} \mu(\{a\} \times \Omega)$.

Remarque : 6.2.1. et 6.3.1. ne font pas intervenir les tribus $(\mathcal{G}_A)_{A\in\mathcal{A}}$; on peut donc supposer que $\mathcal{G}_A = \mathcal{H}$.

Nous abordons maintenant le problème de la relation entre mesures admissibles et mesures stochastiques à variation bornée.

On a vu (Proposition 5.5) que pour toute $L_p(P)$-mesure stochastique ($p\geq 1$) la fonction de Doléans de μ s'étend en une mesure admissible.

Nous allons voir que, sous certaines hypothèses, toute mesure admissible est la mesure de Doléans d'une $L_1(P)$-mesure stochastique à variation bornée. Ces résultats nous permettrons ensuite d'aborder le problème de la décomposition de Doob des $L_1(P)$-mesures stochastiques.

Le théorème 6.4 qui suit est très général, nous verrons ensuite (corollaires 6.5 et 6.6) que ces hypothèses sont satisfaites dans les cas habituellement rencontrés.

6.4. <u>THEOREME</u>.

Soit m *une mesure admissible sur* $(T\times\Omega,\mathcal{P})$.

On suppose de plus l'existence d'une famille $(\mathcal{H}_t)_{t\in T}$ *de sous-tribus complètes de* $\mathcal{H}$ *vérifiant :*

6.4.1 $t\in A \Longrightarrow \mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{H}_t$

6.4.2 $\forall F\in\mathcal{H}$ *on peut définir un processus prévisible* $Y=(Y_t)_{t\in T}$ *en posant* $Y_t = E(1_F/\mathcal{H}_t)$ *et deux modifications du processus* $Y=(E(1_F/\mathcal{H}_t))_{t\in T}$ *sont indistinguables.*

Alors il existe un élément μ *de* $\mathcal{V}(L_1(P))$ *vérifiant:*

6.4.3 $\forall F\in\mathcal{H}$, $\forall A\in\mathcal{A}$

$$E(1_F\,\mu(A\times\Omega)) = \int E(1_F/\mathcal{H}_s)1_A(s)dm.$$

6.4.4 *si* ν *est un élément de* $\mathcal{V}(L_1(P))$ *vérifiant* 6.4.3 *alors* $\mu(A\times\Omega) = \nu(A\times\Omega)$ P.ps *pour chaque élément* A *de* $\mathcal{A}$.

De plus, 6.4.3 *implique que* $\mu(A\times\Omega)$ *est mesurable pour la tribu* $\bigvee_{s\in A}\mathcal{F}_s$ *et que la mesure de Doléans de* μ *est* m .

Démonstration.

La mesure admissible m admet la décomposition $m = m^+ - m^-$ où m^+ et m^- sont des mesures admissibles positives. Il suffit donc de prouver le théorème pour une mesure admissible positive.

Soit donc m mesure admissible positive et soit A un élément de $\mathcal{A}$; pour F élément de $\mathcal{F}$, on définit $\nu_A(F)$ par

$$\nu_A(F) = \int E(1_F/\mathcal{F}_s)1_A(s)dm$$

(6.4.2 implique que $\nu_A(F)$ a bien un sens).

A étant fixé, ν_A est une mesure positive bornée sur $(\Omega,\mathcal{F})$, de plus ν_A est absolument continue par rapport à P.

Soit alors $\overline{\mu}_A = \frac{d\nu_A}{dP}$

$\overline{\mu}_A$ est un élément de $L_1^+(P)$ et $\forall\, F\in\mathcal{F}$, on a :

$$E(1_F\,\overline{\mu}_A) = \nu_A(F) = \int E(1_F/\mathcal{F}_s)1_A(s)dm$$

Pour D élément de $\mathcal{R}'$, $D = \sum_i A_i\times F_i$ on pose $\mu(D) = \sum_i 1_{F_i}\;\overline{\mu}_{A_i}$

ceci a bien un sens et définit une fonction, simplement additive de $\mathcal{R}'$ dans $L_1^+(P)$ car, pour $A = \sum_i A_i$, $A_i\in\mathcal{A}$, $A\in\mathcal{A}$ et $F\in\mathcal{F}$ on a :

$$E(1_F\,\overline{\mu}_A) = \int E(1_F/\mathcal{G}_s)1_A(s)dm$$

$$= \sum_i \int E(1_F/\mathcal{G}_s)1_{A_i}(s)dm$$

$$= \sum_i E(1_F\,\overline{\mu}_{A_i})$$

mais $\mu(A\times\Omega) = \overline{\mu}_A$ par définition

d'où $E(1_F\,\mu(A\times\Omega)) = E(1_F\,\sum_i \mu(A_i\times\Omega))\quad \forall\, F\in\mathcal{G}$

en conséquence $\mu(A\times\Omega) = \sum_i \mu(A_i\times\Omega)$.

μ ainsi définie vérifie évidemment 3.1.1, de plus pour $A\times F$ élément de $\mathcal{R}$ on a d'après 6.4.1 :

$$E(\mu(A\times F)) = E(1_F\,\overline{\mu}_A) = \int E(1_F/\mathcal{G}_s)1_A(s)dm = \int 1_F\,1_A\,dm = m(A\times F)$$

ce qui implique que $\forall\, D\in\mathcal{R}'$;

$E(\mu(D)) = m(D)$

m étant une mesure bornée et μ étant positive l'égalité précédente implique que μ est une $L_1(P)$-mesure stochastique positive de mesure de Doléans m (voir corollaire 6.2).

Le passage au cas de m mesure admissible signée est immédiat ; à m^+ et m^- on associe μ^+ et μ^- éléments de $\mathcal{V}_+(L_1(P))$ vérifiant 6.4.3 ; à m on associe alors $\mu = \mu^+ - \mu^-$, μ appartient à $\mathcal{V}(L_1(P))$ et vérifie évidemment 6.4.3, il est évident que m est la mesure de Doléans de μ.

6.4.4 découle immédiatement de 6.4.3, car si μ et ν vérifie 6.4.3 on a pour chaque A

$E(1_F\,\mu(A\times\Omega)) = E(1_F\,\nu(A\times\Omega))\quad \forall\, F\in\mathcal{G}$

$\Longrightarrow \mu(A\times\Omega) = \nu(A\times\Omega)$ (dans $L_1(P)$).

Enfin, nous examinons le problème de la mesurabilité.

6.4.3 implique que pour toute variable aléatoire Y $\mathcal{A}$-mesurable bornée on a :

$$E(Y\ \mu(A\times\Omega)) = \int E(Y/\mathcal{A}_s)1_A(s)dm$$

en particulier pour $Y = E(1_F/\bigvee_{s\in A}\mathcal{A}_s)$, $F\in\mathcal{A}$

mais pour $s\in A$, on a

$$E(Y/\mathcal{A}_s) = E(1_F/\mathcal{A}_s)$$

d'où

$$E(1_F\ \mu(A\times\Omega)) = E(E(1_F/\bigvee_{s\in A}\mathcal{A}_s)\ \mu(A\times\Omega))$$

ce qui implique que $\mu(A\times\Omega)$ est $\bigvee_{s\in A}\mathcal{A}_s$-mesurable.

6.5 COROLLAIRE.

Supposons que $T = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *et que* $\mathcal{T} = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}$; *soit* m *une mesure admissible sur* $(T\times\Omega,\mathcal{P})$. *Alors il existe un processus prévisible* V , *unique à l'indistinguabilité près et vérifiant :*

6.5.1 $\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \forall\, F\in\mathcal{A}\quad \int 1_F\, V_{a_n} dP = \int E(1_F/\mathcal{G}_{\{a_n\}})m(\{a_n\},d\omega)$

Ce processus définit une $L_1(P)$-*mesure stochastique* μ *appartenant à* $\mathcal{V}(L_1(P))$, *par la relation :*

$$\mu(\{a_n\}\times F) = 1_F\, V_{a_n}.$$

La mesure de Doléans de μ *est* m .

Démonstration.

On prend $\mathcal{A}_{a_n} = \mathcal{G}_{\{a_n\}}$, 6.4.1 est évidemment satisfaite.

D'autre part, le processus $Y = \sum_n E(1_F|\mathcal{G}_{\{a_n\}})\ 1_{\{a_n\}}$ est prévisible et deux versions de ce processus sont indistinguables.

Les hypothèses du théorème 6.4 sont donc satisfaites. On pose alors $V_{a_n} = \overline{\mu}_{\{a_n\}} = \mu(\{a_n\} \times \Omega)$ d'où 6.5.1 en réécrivant 6.4.3.

$\mathcal{A}$ étant dénombrable 6.5.1 implique l'unicité à l'indistinguabilité près. Enfin 6.4.3 implique que $V_{a_n} = \mu(\{a_n\} \times \Omega)$ est mesurable pour la tribu $\bigvee_{s \in \{a_n\}} \mathcal{F}_s = \mathcal{G}_{\{a_n\}}$ ce qui implique que V est prévisible.

6.6. <u>COROLLAIRE</u>.

Soit $T =]\!] 0,1]\!] \subseteq \mathbb{R}^d$

Soit $\mathcal{A} = \{]\!] s,t]\!] \ , \ 0 \leq s \leq t \leq 1 \}$

On suppose donnée une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t \in \overline{T}}$ *de sous tribus complètes de* $\mathcal{F}$ *; on suppose également que pour* $A =]\!] s,t]\!]$, $\mathcal{G}_A = \mathcal{F}_s$. *Soit* m *une mesure admissible. Il existe alors un processus continu à droite adapté à* $(\mathcal{F}_{t-})_{t \in T}$, *unique à l'indistinguabilité près et vérifiant :*

6.6.1. $\forall \ F \in \mathcal{F} \quad \forall \ t \in T$

$$E(1_F \ V_t) = \int E(1_F / \mathcal{F}_{s-}) \ 1_{]\!]0,t]\!]}(s) \ dm.$$

Ce processus est le processus de répartition d'une $L_1(P)$*-mesure stochastique* μ *appartenant à* $\mathcal{V}(L_1(P))$. *La mesure de Doléans de* μ *est* m.

<u>Démonstration</u>.

Les hypothèses du théorème 6.4 sont satisfaites pour la famille $(\mathcal{F}_{t-})_{t \in T}$.

En effet si $t \in A =]\!] a,b]\!]$ on a $\mathcal{G}_A = \mathcal{F}_a \subseteq \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad \forall \ s : \ a < s < t$

$$\Rightarrow \mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{F}_{t-} \qquad \text{d'où 6.4.1.}$$

D'autre part, le processus $Y = E(1_F / \mathcal{F}_{t-})_{t \in T}$ est continu à gauche et adapté à $(\mathcal{G}_{t-})_{t\in T}$ et d'après [1], cela implique qu'il est prévisible; il est facile de vérifier que la continuité à gauche et la structure de T impliquent l'indistinguabilité de 2 versions de ce processus (même raisonnements et mêmes résultats que dans le cas où $d = 1$).

D'après 6.4 il existe donc $\overline{\mu}$ élément de $\mathcal{V}^{\rho}(L_1(P))$ vérifiant :

$\forall F \in \mathcal{G} \quad \forall A \in \mathcal{A}$

$E(1_F\ \overline{\mu}(A\times\Omega)) = \int E(1_F/\mathcal{G}_{s-})\ 1_A(s)\ dm$ où $\overline{\mu}(A\times\Omega) = \dfrac{d\nu_A}{dP}$, ν_A étant la mesure signée et bornée telle que :

$\forall F\in\mathcal{G}\quad \nu_A(F) = \int E(1_F/\mathcal{G}_{s-})\ 1_A(s)\ dm.$

Comme m est la différence de deux mesures admissibles positives, nous supposons d'abord que m est positive.

Soit $\overline{V}_t = \overline{\mu}(]\!]0,t]\!]\times\Omega)$ $(t\in T)$, il existe alors $\Omega_0 \in \mathcal{G}$ tel que $P(\Omega_0^c) = 0$

et $\forall\omega\in\Omega_0$, $\forall t$, $\forall t' \in \mathbb{Q}^d \cap]\!]0,1]\!] = T_0$ avec $t \le t'$ $\Rightarrow$

$\Delta_{]\!]t,t']\!]}\ \overline{V}(\omega) \ge 0.$

Définissons alors $(V_t)_{t\in\overline{T}}$ en posant :

$$V_t(\omega) = \lim_{\substack{s\downarrow t\\ s\in T_0}} \overline{V}_s(\omega) \quad \text{si } \omega\in\Omega_0$$

$$V_t(\omega) = 0, \quad \text{sinon.}$$

V ainsi défini est continu à droite, intégrable. Il vérifie $\Delta_A V \ge 0$ Pps $\forall A\in\mathcal{A}$, et,

$$E(1_F\ V_t) = \lim_{\substack{s\downarrow t\\ s\in T_0}} E(1_F\ \overline{V}_s) = \lim_{\substack{s\downarrow t\\ s\in T_0}} \int E(1_F/\mathcal{G}_{u-})\ 1_{]\!]0,s]\!]}(u)\ dm$$

$$= \int E(1_F/\mathcal{G}_{u-})\ 1_{]\!]0,t]\!]}(u)\ dm = E(1_F\ \overline{V}_t).$$

Toujours d'après 6.4 $\mu(A\times\Omega) = \Delta_A V$ est mesurable pour la tribu $\bigvee_{s\in A}\mathcal{G}_{s-}$, soit alors $A =]\!]0,t]\!]$, on a $\bigvee_{s\in A}\mathcal{G}_{s-} = \mathcal{G}_{t-}$ donc V est adapté à $(\mathcal{G}_{t-})_{t\in T}$.

L'unicité à l'indistinguabilité près provient de la structure de T et de la continuité à droite.

6.7. COMMENTAIRES

6.7.1. La prévisibilité de V n'est pas immédiate. Quand d = 1, elle se prouve en utilisant des temps d'arrêts ; quand d = 2, en utilisant des lignes d'arrêts et l'hypothèse F_4([4],[9]). Si V est continu, les hypothèses de [1], impliquent la prévisibilité.

6.7.2. On peut toujours trouver $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$ satisfaisant à 6.4.1. en posant $\mathcal{G}_t = \bigvee_{\substack{A\in\mathcal{A}\\ t\in A}} \mathcal{G}_A$ (voir [1])

6.7.3. Si on peut se restreindre à $\mathcal{A}$ dénombrable, 6.4.4. devient :
6.4.4.' si ν est un élément de $\mathcal{V}(L_1(P))$ vérifiant 6.4.3., alors $\mu(A\times\Omega) = \nu(A\times\Omega)$ P.ps $\forall A\in\mathcal{A}$. (Les processus $(\mu(A\times\Omega))_{A\in\mathcal{A}}$ et $(\nu(A\times\Omega))_{A\in\mathcal{A}}$ sont indistinguables).

Le théorème 6.8 qui suit ne nécessite pas la régularité de l'espérance conditionnelle par rapport à une famille $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$ de sous-tribus de $\mathcal{G}$, par contre on utilise une hypothèse d'équiintégrabilité.
La méthode utilisée est à rapprocher de celle de Orey pour les F-processus [13].

6.8 <u>THEOREME</u>.

Soit m *une mesure admissible. On suppose qu'il existe une suite* $\tau^n = \{(A^n_i)\ i = 1\ldots i(n)\}$ *de partitions de plus en plus fines de* T *par des éléments de* $\mathcal{A}$ *et que* $\mathcal{A} = \{A^n_i \quad i = 1\ldots i(n),\ n \in \mathbb{N}\}$

On suppose également que :

6.8.1. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \eta_\varepsilon\ :\ \forall\ F \in \mathcal{F} :\ P(F) \leq \eta_\varepsilon$

$$\Rightarrow\ |m|\ \Big(\sum_{i=1}^{i(n)} E^P(1_F/\mathcal{G}_{A^n_i})\,1_{A^n_i}(s)\Big) \leq \varepsilon$$

Alors il existe un élément μ *de* $\mathcal{V}(L_1(P))$ *de mesure de Doléans* m , *de plus* $\forall\ A \in \mathcal{A}\ \mu(A \times \Omega)$ *est* $\bigvee_{\substack{n,i \\ A^n_i \subseteq A}} \mathcal{G}_{A^n_i}$ *-mesurable.*

<u>Démonstration</u>.

Nous supposons d'abord que m est positive. Et pour $F \in \mathcal{F}$ et $A \in \mathcal{A}$ on pose :

$$\nu^n_A(F) = \int \sum_{i=1}^{i(n)} E\,(1_F/\mathcal{G}_{A^n_i})\ 1_{A^n_i}(s)\ \ 1_A(s)\ dm.$$

Afin d'alléger les notations, nous introduisons Φ^n :

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\Phi^n} \mathcal{H}_b(\mathcal{G})$$

$$F \longmapsto \Phi^n(F) = \sum_{i=1}^{i(n)} E\,(1_F/\mathcal{G}_{A^n_i})\ \ 1_{A^n_i}(s)$$

donc $\nu^n_A(F) = \int \Phi^n(F)\ 1_A(s)\ dm.$

$\nu^n_A(F)$ a bien un sens puisque $\Phi^n(F)$ est prévisible borné, $\Phi^n(F)$ est définie à un processus évanescent près et 1_A est prévisible borné.

De plus ν^n_A est une mesure positive bornée sur $(\Omega, \mathcal{F})$, absolument continue par rapport à P.

Soit alors $g^n_A = \dfrac{d\,\nu^n_A}{dP}$

On a : $\forall F \in \mathcal{A}$ $\quad E(g^n_A\, 1_F) = \nu^n_A(F) = \int \Phi^n(F)\, 1_A\, dm.$

et 6.8.1. implique que : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta_\varepsilon : P(F) \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow \int \Phi^n(F)\, dm \leq \varepsilon$

donc : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta_\varepsilon : P(F) \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow E(g^n_A\, 1_F) \leq \varepsilon$.

Comme $E(g^n_A) \leq m(A \times \Omega) \leq m(T \times \Omega)$, on peut affirmer que $\{g^n_A\}_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ A \in \mathcal{A}}}$ est équi-intégrable.

Alors pour chaque $A \in \mathcal{A}$, il existe une sous-suite qui converge faiblement, mais $\mathcal{A}$ étant dénombrable, on peut, par un procédé diagonal, trouver une sous-suite $\{g^{n_k}_A\}_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement pour tout A élément de $\mathcal{A}$.

Soit $g_A = \lim\limits_k g^{n_k}_A$.

Pour D élément de $\mathcal{R}'$, $D = \sum\limits_{i=1}^{r} A_i \times F_i$, on pose : $\mu(D) = \sum\limits_{i=1}^{r} 1_{F_i}\, g_{A_i}$.

On a évidemment pour $A \times F$ élément de $\mathcal{R}$: $\mu(A \times F) = 1_F\, g_A = 1_F\, \mu(A \times \Omega)$

D'autre part, l'application qui à A associe g^n_A vérifie

$$g^n_A = \sum_{i=1}^{r} g^n_{A_i} \quad \text{si } A = \sum_{i=1}^{r} A_i \qquad A_i \in \mathcal{A} \quad A \in \mathcal{A}$$

en effet on a $\forall F \in \mathcal{A}$

$$E(g^n_A\, 1_F) = \int \Phi^n(F)\, 1_A\, dm = \sum_{i=1}^{r} \int \Phi^n(F)\, 1_{A_i}\, dm$$
$$= \sum_{i=1}^{r} E(g^n_{A_i}\, 1_F) = E\Big(\sum_{i=1}^{r} g^n_{A_i}\, 1_F\Big)$$

ce qui implique que

$$E(g_A\, 1_F) = \sum_{i=1}^{r} E(g_{A_i}\, 1_F).$$

Alors μ est bien définie sur $\mathcal{R}'$ et est additive.

μ est positive, pour vérifier que μ est un élément de $\mathcal{V}(L_1(P))$, il suffit donc de vérifier 6.2.1.

mais on a pour $D = \sum_{i=1}^{r} (A_i \times \Omega)$; $A_i \in \mathcal{A}$

$E(\mu(D)) = \sum_{i=1}^{r} E(g_{A_i})$

et $E(g_{A_i}) = \lim_n E^P(g^n_{A_i}) = m(A_i \times \Omega)$

d'où $E(\mu(D)) \leq m(T \times \Omega)$

et $\forall A \in \mathcal{A}$ $E(\mu(A \times \Omega)) = m(A \times \Omega)$

m étant une mesure bornée, les inégalités précédentes impliquent 6.2.1.

Soient maintenant A élément de $\mathcal{A}$ et F élément de $\mathcal{F}$, alors on a

$E(1_F\, g^n_A) = \int \Phi^n(F)\, 1_A\, dm$

il est facile de voir que cette relation s'étend à Y variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable bornée et en particulier à $Y = E(1_F \mid \vee \mathcal{G}_{A^n_i},\ A^n_i \subseteq A)$.

On remarque alors que, A étant fixé, $\exists\, n_o$ tel que $\forall\, n \geq n_o$, on a $A^n_i \subseteq A$ ou $A^n_i \cap A = \emptyset$, alors pour $n \geq n_o$ on a

$$E(Y\, g^n_A) = \int \sum_i E(Y/\mathcal{G}_{A^n_i}) 1_{A^n_i}\, 1_A\, dm$$

$$= \int \sum_i E(1_F/\mathcal{G}_{A^n_i}) 1_{A^n_i}\, 1_A\, dm$$

$$= E(1_F\, g^n_A)$$

et par suite de la convergence faible

$E(Y\, \bar{g}_A) = E(1_F\, g_A)$

ce qui implique que g_A est mesurable pour $\vee(\mathcal{G}_{A^n_i},\ A^n_i \subseteq A.)$

Enfin si $F \in \mathcal{G}_A$, on a $\forall\, n \geq n_o$ $E(1_F\, g^n_A) = m(A \times F)$

d'où $E(1_F\, g_A) = m(A \times F)$ et $m^\mu = m$.

Remarquons que l'hypothèse 6.8.1. est un renforcement de l'hypothèse : m ne charge pas les ensembles évanescents.

D'autre part, si $m = \nu \otimes P$, 6.8.1. est automatiquement satisfaite, m est de cette forme quand c'est la mesure de Doléans d'une $L_1(P)$-mesure stochastique μ' telle que $\mu'(A \times \Omega)$ soit indépendante de $\mathcal{G}_A$.

7 - DECOMPOSITION DE DOOB DES $L_p(P)$-MESURES STOCHASTIQUES $(p \geq 1)$

7.1 NOTATIONS ET DEFINITIONS

Pour $p \geq 1$, nous notons $\mathcal{M}(L_p(P))$ l'ensemble des $L_p(P)$-mesures stochastiques de mesure de Doléans nulle.

Si une mesure stochastique μ est définie par un processus X, au sens du paragraphe 4, nous dirons que X appartient à $\mathcal{M}(L_p(P))$, (resp $\mathcal{P}(L_p(P))$) si μ appartient à $\mathcal{M}(L_p(P))$ (resp. ($\mathcal{P}(L_p(P))$).

Le but de ce paragraphe est de montrer que, sous des hypothèses assez générales , une $L_1(P)$-mesure stochastique μ admet une décomposition de la forme $\mu = \mu_1 + \mu_2$ où μ_1 appartient à $\mathcal{M}(L_1(P))$ et μ_2 appartient à $\mathcal{P}(L_1(P))$ (on a donc $m^{\mu} = m^{\mu_2}$).

Les théorèmes et corollaires 7.2 à 7.6 établissent cette décomposition en utilisant la mesure de Doléans m et les résultats du paragraphe 6 (théorèmes 6.4 et 6.8).

Le théorème 7.7 établit la décomposition en utilisant $\{V^{\tau}(\mu)\}_{\tau \in \mathcal{C}}$.

Dans le cas où il existe une correspondance entre mesures stochastiques et processus stochastiques, nous donnerons la décomposition correspondante des processus.

Notons que, pour $d = 1$, $T =]0,a]$, un élément de $\mathcal{H}(L_1(P))$ correspond, sous les hypothèses habituelles à une martingale ; pour $d = 2$, $T =]0,a]]$ un élément de $\mathcal{H}(L_1(P))$ correspond, sous les hypothèses habituelles également, à une martingale faible.

7.2. THEOREME

Soit μ *une* $L_1(P)$*-mesure stochastique sur* $(T\times\Omega;\mathcal{P})$.
On suppose qu'il existe une famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in\overline{T}}$ *, de sous-tribus complètes de* $\mathcal{F}$ *vérifiant* 6.4.1 et 6.4.2.
Alors $\mu = \mu_1 + \mu_2$ *où* μ_1 *appartient à* $\mathcal{H}(L_1(P))$, μ_2 *appartient à* $\mathcal{V}(L_1(P))$. *De plus,* μ_2 *possède les propriétés suivantes :*

7.2.1 $\forall\ F\in\mathcal{F}$, $\forall\ A\in\mathcal{A}$

$E(1_F\ \mu_2(A\times\Omega)) = \int E(1_F/\mathcal{F}_s)1_A(s)\ dm^{\mu}$

ce qui implique :

7.2.2 *si* ν *est un élément de* $\mathcal{V}(L_1(P))$ *vérifiant* 7.2.1 *alors* $\mu_2(A\times\Omega) = \nu(A\times\Omega)$ *P.ps pour chaque* A *élément de* $\mathcal{A}$.

7.2.3 $\mu_2(A\times\Omega)$ *est mesurable pour la tribu* $\bigvee_{s\in A}\mathcal{F}_s$ *et la mesure de Doléans de* μ_2 *est* m^{μ}.

Démonstration.

μ étant une $L_1(P)$-mesure stochastique, sa fonction de Doléans m^{μ} s'étend en une mesure admissible sur $(T\times\Omega,\mathcal{P})$ (5.5). Il suffit alors d'appliquer le théorème 6.4 à m^{μ} pour obtenir μ_2 et les propriétés 7.2.1, 7.2.2 et 7.2.3 .

Il est évident que $\mu - \mu_2 = \mu_1$ appartient à $\mathcal{M}(L_1(P))$.

Notons également que 7.2.1 peut s'écrire sans utiliser m^{μ} . Soit $\phi(F)$ le processus tel que :

$\phi(F)_t = E(1_F/\mathcal{F}_t)$

alors 7.2.1 est équivalent à

7.2.1' $\forall\, F \in \mathcal{F}$, $\forall\, A \in \mathcal{A}$

$E(1_F\, \mu_2(A \times \Omega)) = E(\mu(\phi(F) 1_A))$.

7.3 <u>COROLLAIRE.</u>

Soit $T = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}\}$ *et* $\mathcal{A} = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}\}$. *Soit* μ *une* $L_1(P)$*-mesure stochastique sur* $(T \times \Omega, \mathcal{G})$.

Alors il existe un processus prévisible V *unique à l'indistinguabilité près et vérifiant :*

7.3.1 $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, F \in \mathcal{F}$ $\int 1_F\, V_{a_n}\, dP = \int E(1_F/\mathcal{G}_{\{a_n\}}) m^{\mu}(\{a_n\}, d\omega)$.

Ce processus définit une $L_1(P)$ *-mesure stochastique* μ_2 *appartenant à* $\mathcal{P}(L_1(P))$, *par la relation :*

$\mu_2(\{a_n\} \times \Omega) = V_{a_n}$

De plus la mesure de Doléans de μ_2 *est* m^{μ} , *ce qui implique que* $\mu_1 = \mu - \mu_2$ *appartient à* $\mathcal{M}(L_1(P))$.

Démonstration : évidente.

7.4 COROLLAIRE

Soit $T = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *et* $\mathcal{A} = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}\}$. *Soit* $X = (X_t)_{t \in T}$ *un processus de densité de masses définissant une* $L_1(P)$*-mesure stochastique.*

Alors $X = M + V$

où $V \in \mathcal{V}(L_1(P))$, $M \in \mathcal{M}(L_1(P))$.

De plus il existe une décomposition, unique à l'indistinguabilité près, telle que V *soit prévisible, et on a* $V_{a_n} = E(X_{a_n}/\mathcal{G}_{\{a_n\}})$

Démonstration

Soit μ la mesure stochastique associée à X.

Le corollaire 7.3 implique l'existence de V prévisible appartenant à $\mathcal{V}(L_1(P))$ et de M élément de $\mathcal{M}(L_1(P))$ tels que $X = M + V$.

D'autre part, $\forall F \in \mathcal{G}_{\{a_n\}}$ on a

$E(1_F X_{a_n}) = E(1_F V_{a_n})$

V étant prévisible cela implique que

$V_{a_n} = E(X_{a_n}/\mathcal{G}_{\{a_n\}})$

Ce qui implique (comme dans le cas $T = \mathbb{N}$) l'unicité à l'indistinguabilité près.

7.5 COROLLAIRE.

Soit $T =]\!]0,1]\!] \subseteq \mathbb{R}^d$

Soit $\mathcal{A} = \{]\!]s,t]\!]\ ,\ 0 \leq s \leq t \leq 1\}$.

On suppose donnée une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t \in \overline{T}}$ *, de sous-tribus complètes de* $\mathcal{F}$ *; on suppose également que, pour* $A =]\!]s,t]\!]$ $\mathcal{G}_A = \mathcal{F}_s$ *.*
Soit μ *une* $L_1(P)$*-mesure stochastique et* X *son processus de répartition.*
Alors $X = M + V$
où V *appartient à* $\mathcal{V}(L_1(P))$ *et* M *appartient à* $\mathcal{M}(L_1(P))$.

De plus, il existe une décomposition unique à l'indistinguabilité près telle que V *soit continu à droite, adapté à* $(\mathcal{F}_{t-})_{t \in \overline{T}}$ *et vérifie :*

6.6.1 $\forall F \in \mathcal{F}$, $\forall t \in T$

$$E(1_F V_t) = \int E(1_F | \mathcal{F}_{s-}) 1_{]\!]0,t]\!]}(s)\, dm^{\mu}$$

<u>Démonstration</u>.
D'après 6.6, il existe un processus V appartenant à $\mathcal{V}(L_1(P))$, continu à droite, adapté à $(\mathcal{F}_{t-})_{t \in T}$, vérifiant 6.6.1 et tel que la mesure de Doléans associée à V soit égale à m^{μ} .

Il est alors évident que $M = X - V$ est un élément de $\mathcal{M}(L_1(P))$.

L'unicité est immédiate d'après 6.6.

Remarquons que 6.6.1 s'écrit également 6.6.1' $\forall F \in \mathcal{F}$, $\forall t \in T$

$$E(1_F V_t) = E[\mu(\phi(F) 1_{]\!]0,t]\!]})]$$

où $\phi(F)$ est le processus prévisible tel que $\phi(F)_t = E(1_F / \mathcal{F}_{t-})$.

7.6 COROLLAIRE

Soit μ *une* $L_1(P)$*-mesure stochastique. On suppose qu'il existe une suite* $(\tau^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de partitions de plus en plus fines de* T *satisfaisant aux hypothèses du théorème* 6.8.

On suppose également que m^μ *la mesure de Doléans de* μ *satisfait à* 6.8.1.

Alors $\mu = \mu_1 + \mu_2$ *où* μ_1 *appartient à* $\mathcal{M}(L_1(P))$ *et* μ_2 *appartient à* $\mathcal{V}(L_1(P))$.

De plus $\forall\, A \in \mathcal{A}$, $\mu(A \times \Omega)$ *est* $\left(\bigvee_{n,i;A_i^n \subseteq A} \mathcal{G}_{A_i^n}\right)$*-mesurable.*

Démonstration immédiate à partir de 6.8.

7.7 THEOREME

Soit μ *une* $L_1(P)$*-mesure stochastique. On suppose qu'il existe une suite* $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de partitions finies de plus en plus fines de* T *et que* $\mathcal{A}$ *est l'ensemble des éléments de ces partitions.*

On suppose également que $\{V^{\tau_n}(\mu)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est équiintégrable.*

Alors $\mu = \mu_1 + \mu_2$ *où* μ_1 *appartient à* $\mathcal{M}(L_1(P))$ *et* μ_2 *appartient à* $\mathcal{V}(L_1(P))$.

De plus $\mu(A\times\Omega)$ *est mesurable pour la tribu :* $\bigvee_{n,i\,;\,A_i^n\subseteq A} \mathcal{G}_{A_i^n}$

$(\tau_n = \{A_i^n, i = 1\ldots i(n)\})$.

Avant d'aborder la démonstration, nous allons faire quelques remarques.

7.8 REMARQUES.

7.8.1. Si $T =]]0,1]] \subseteq \mathbb{R}^d$, sous les conditions habituelles, la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir des dyadiques convient.

7.8.2. Si μ est une $L_1(P)$-mesure stochastique, on sait que c'est également une quasi-martingale (5.2) et donc $\{V^{\tau_n}(\mu)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans $L_1(P)$. Si μ est une $L_p(P)$-mesure stochastique avec $p>1$, alors $V^{\tau_n}(\mu)$ appartient à $L_p(P)$ et $\{V^{\tau_n}(\mu)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équiintégrable dès qu'il est borné dans $L_p(P)$.

7.8.3. Si $T =]0,a] \subseteq \mathbb{R}$ et si μ est une $L_1(P)$-mesure stochastique telle que le processus de répartition X associé à μ soit un F-processus borné, alors $\{V^{\tau_n}(\mu)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équiintégrable [13].

7.8.4. Soit μ telle que $E(\mu(A\times\Omega)/\mathcal{G}_A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$ et soit m sa mesure de Doléans, alors $\forall F \in \mathcal{F}$, $\forall A \in \mathcal{A}$

$$|m|\ (E(1_F/\mathcal{G}_A).1_A) = m(E(1_F/\mathcal{G}_A).1_A) = E(E(1_F/\mathcal{G}_A)\ \mu(A\times\Omega))$$
$$= E(E(1_F/\mathcal{G}_A)\ E(\mu(A\times\Omega)/\mathcal{G}_A))$$
$$= E(1_F\ \ E(\mu(A\times\Omega)/\mathcal{G}_A))$$

d'où

$$|m|\ \Big(\sum_{i=1}^{i(n)} E^P(1_F/\mathcal{G}_{A_i^n})\ 1_{A_i^n}(s)\ \Big) = E(1_F.\ \sum_{i=1}^{i(n)} E(\mu(A_i^n\times\Omega)/\mathcal{G}_{A_i^n}))$$
$$= E(1_F\ \ V^{\tau_n}(\mu)).$$

Dans ce cas l'hypothèse : $\{V^{\tau_n}(\mu)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, est équivalente à l'hypothèse 6.8.1.

7.8.5. Si $T = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et μ $L_1(P)$-mesure stochastique, alors d'après 5.2, on a : $E(\sum_n |E(\mu(\{a_n\}\times\Omega)/\mathcal{G}_{\{a_n\}})| < +\infty$.

d'où l'équiintégrabilité de $\{V^{\tau}(\mu), \tau\in\mathcal{C}\}$ (voir 5.1).

On montre alors, directement que $\nu^{(+)}$ et $\nu^{(-)}$ définies par :

$$\begin{cases} \nu^{(+)}(\{a_n\}\times\Omega) = (E(\mu(\{a_n\}\times\Omega)/\mathcal{G}_{\{a_n\}}))^+ \\ \nu^{(-)}(\{a_n\}\times\Omega) = (E(\mu(\{a_n\}\times\Omega)/\mathcal{G}_{\{a_n\}}))^- \end{cases}$$

définissent des $L_1(P)$-mesures stochastiques (6.3), que $\nu^{(+)} - \nu^{(-)} \in \mathcal{V}(L_1(P))$ et que $\mu - (\nu^{(+)} - \nu^{(-)}) \in {}_v\mathcal{Y}(L_1(P))$.

Démonstration du théorème 7.7.

Soit $\mathcal{R}_n = \{A\times F,\ A\in\tau_n,\ F\in\mathcal{G}_A\}$

On note $\mathcal{R}'_n$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{R}_n$.

Il est facile de vérifier que $\mathcal{R}' = \bigvee_n \mathcal{R}'_n$.

En effet, on a $\mathcal{R}_n \subseteq \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R}'_n \subseteq \mathcal{R}' \Rightarrow \bigcup_n \mathcal{R}'_n \subseteq \mathcal{R}'$.

Réciproquement, soit D élément de $\mathcal{R}'$, alors D est une réunion finie, disjointe, d'éléments de $\mathcal{R}$, on peut même écrire que $D = \sum_{i=1}^{n} A_i\times F_i$, $A_i\in\mathcal{t}, F_i\in\mathcal{G}_{A_i}$ et $A_i\cap A_j = \emptyset$ si $i\neq j$. Il existe alors un indice n_o tel que $A_i\times F_i$ appartienne à $\mathcal{R}'_{n_o}$ pour tout i appartenant à $\{1\ldots r\}$. En conséquence D appartient à $\mathcal{R}'_{n_o}$ et $\mathcal{R}' \subseteq \bigcup_n \mathcal{R}'_n$.

n étant fixé ; soient $A\times F \in \mathcal{R}_n$ et $\mu^n(A\times F) = 1_F[E(\mu(A\times\Omega)|\mathcal{G}_A)]^+$

Pour D élément de $\mathcal{R}'_n$, $D = \sum_i (A_i^n\times F_i)$ on pose : $\mu^n(D) = \sum_i \mu^n(A_i^n\times F_i)$

Soit $h_n = \sum_i 1_{\{(E(\mu(A_i^n\times\Omega)|\mathcal{G}_{A_i^n}) \geq 0\}}\, 1_{A_i^n}$

h_n est un processus prévisible, positif, borné par 1, et, pour D élément de $\mathcal{R}'_n$, $D = \sum_i (A_i^n\times F_i)$, on a : $h_n 1_D = \sum_i 1_{F_i}\, 1_{\{E(\mu(A_i^n\times\Omega)|\mathcal{G}_{A_i^n})\geq 0\}}\, 1_{A_i^n}$

et $\mu(h_n 1_D) = \sum_i 1_{F_i} 1_{\{E(\mu|A_i^n \times\Omega)|\mathcal{G}_{A_i^n})\geq 0\}} \mu(A_i^n \times\Omega)$

d'où

$$E(\mu(h_n 1_D)) = \sum_i E(1_{F_i} 1_{\{E(\mu(A_i^n\times\Omega)|\mathcal{G}_{A_i^n} \leq 0\}} E(\mu(A_i^n\times\Omega)/\mathcal{G}_{A_i^n}))$$

$$= \sum_i E(1_{F_i}(E(\mu(A_i^n \times\Omega)|\mathcal{G}_{A_i^n}))^+) = E(\mu^n(1_D))$$

En conséquence, comme $\mu^n(D) \geq 0$, on a :

$E(|\mu^n(D)|) = E(\mu^n(D)) = E(\mu(h_n 1_D)) \leq |m^\mu| \quad (D)$.

Soit maintenant D éléments de $\mathcal{R}'$ de la forme : $D = \sum_{i=1}^{r} (A_i\times\Omega)$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i\neq j$.

Il existe un plus petit indice n_o tel que, pour tout $n\geq n_o$, D appartienne à $\mathcal{R}'_n$ et $\mu^n(D) = \sum_i 1_{F_i} \mu^n(A_i^n \times\Omega)$ avec $F_i = \emptyset$ ou Ω

On convient que $\mu^n(D) = 0$ si $n<n_o$. Alors on a : $0 \leq \mu^n(D) \leq V^{\tau_n}(\mu)$.

Ce qui implique que $\{\mu^n(D)\}_{\substack{n\in N \\ D\in\mathcal{R}'}}$ est équiintégrable.

L'ensemble des éléments D de la forme précédente est dénombrable. On peut alors, par un procédé diagonal, trouver une sous-suite, notée également $(\mu^n)_{n\in N}$, telle que, pour chaque D de la forme précédente, la suite $(\mu^n(D))_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers une limite que nous notons $\nu^{(+)}(D)$.

Soit maintenant $D = \sum_{i=1}^{r} A_i \times F_i$, un élément quelconque de $\mathcal{R}'$, et, soit $\nu^{(+)}(D) = \sum_{i=1}^{r} 1_{F_i} \nu^{(+)}(A_i\times\Omega)$, on a évidemment $\nu^{(+)}(D) = \lim_{n\to+\infty} \mu^n(D)$ (avec la convention que $\mu^n(D) = 0$ si $D \notin \mathcal{R}'_n$.

Vérifions que $\nu^{(+)}$ est une $L_1(P)$-mesure stochastique positive (c.à.d. un élément de $\mathcal{V}_+(L_1(P))$.

Il suffit de vérifier que les hypothèses du théorème 3.2 sont satisfaites.

Commençons par l'additivité de $\nu^{(+)}$. Soient D et D' éléments de $\mathcal{R}'$ tels que $D \cap D' = \emptyset$. Il existe alors un indice n_o tel que : $\forall\, n \geq n_o$, D et D' appartiennent à $\mathcal{R}'_n$ et $\mu^n(D \cup D') = \mu^n(D) + \mu^n(D')$, ce qui implique, en vertu de l'unicité de la limite faible que :

$\nu^{(+)}(D \cup D') = \nu^{(+)}(D) + \nu^{(+)}(D')$.

Comme l'hypothèse 3.1.1 est trivialement satisfaite, nous passons à 3.1.2. (bornitude dans $L_1(P)$ de $\nu^{(+)}(\mathcal{R}')$) et 3.2.1.

Par suite de la positivité de $\nu^{(+)}$ et de la convergence faible, on a :

$$\forall\, D \in \mathcal{R}' \qquad E(|\nu^{(+)}(D)|) = E(\nu^{+}(D)) \leq \varliminf_{n\to+\infty} E(\mu^n(D))$$

d'où

$$E(|\nu^{(+)}(D)|) \leq |m^{\mu}|(D) \leq |m^{\mu}|\,(T\times\Omega) < +\infty .$$

Ces inégalités impliquent évidemment 3.1.2. et 3.2.1.

Soit maintenant, pour $A\times F \in \mathcal{R}_n$

$$\overline{\mu}^n(A\times F) = 1_F\,(E(\mu(A\times\Omega)/\mathcal{G}_A))^-$$

Nous définissons $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$k_n = \sum_i 1_{\{E(\mu(A^n_i\times\Omega)/\mathcal{G}_{A^n_i}) \leq 0\}}\; 1_{A^n_i}$$

Le même raisonnement que précédemment s'applique à la suite $(\overline{\mu}^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il est facile de voir qu'on peut trouver une sous-suite extraite de la suite $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une sous-suite extraite de la suite $(\overline{\mu}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant même ensemble d'indices I et telles que :

$\forall\, D \in \mathcal{R}'$, $(\mu^n(D))_{n\in I}$ converge faiblement vers $\nu^{(+)}(D)$,

$(\overline{\mu}^n(D))_{n\in I}$ converge faiblement vers $\nu^{(-)}(D)$,

ν^{+} et ν^{-} étant des éléments de $\mathcal{V}_+(L_1(P))$.

Comme on a de plus :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \forall\, D \in \mathcal{R}' : \begin{cases} E(\mu(h_n 1_D)) = E(\mu^n(D)) \\ E(\mu(k_n 1_D)) = -E(\overline{\mu}^n(D)) \end{cases} \Rightarrow E(\mu(1_D)) = E(\mu^n(D) - \overline{\mu}^n(D))$$

on a : $m^{\mu}(D) = E(\mu(1_D)) = E(\nu^{(+)}(D) - \nu^{(-)}(D))$.

On pose alors $\mu_2 = \nu^{(+)} - \nu^{(-)}$.

Pour la mesurabilité, on remarque que, si A est un élément de $\mathcal{T}$, alors pour n assez grand, on a :

$$\mu^n(A \times \Omega) = \sum_i \mu^n((A \cap A_i^n) \times \Omega) = \sum_{\substack{i \\ A_i^n \subseteq A}} \left(E(\mu((A \cap A_i^n) \times \Omega) / \mathcal{G}_{A^n})\right)^+$$

$\mu^n(A \times \Omega)$ est donc mesurable pour $\bigvee_{\substack{n,i \\ A_i^n \subseteq A}} \mathcal{G}_{A_i^n}$ ce qui implique que $\nu^{(+)}(A \times \Omega)$ est mesurable pour $\bigvee_{\substack{n,i \\ A_i^n \subseteq A}} \mathcal{G}_{A^n_i}$

7.9. DEFINITION.

Pour $p \geq 1$ *soit* $\mathcal{SM}(L_p(P)) = \mathcal{M}(L_p(P)) + \mathcal{V}(L_p(P))$

($\mathcal{SM}$ *correspond à : semi-martingale !*)

7.10. THEOREME.

Sous les hypothèses des théorèmes 7-2 ou 7-7 ou du corollaire 7-6, on a équivalence entre

7-10-1 μ *est une* $L_1(P)$ *-mesure stochastique*

et :

7-10-2 $\mu \in \mathcal{SM}(L_1(P))$.

ADDITIF. - PROCESSUS CROISSANTS -

Nous supposons, pour fixer les idées, que $T =]]0,1]] \subseteq \mathbb{R}^d$

(les résultats restent valables pour tout intervalle $]] a,b]] \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d$,

a et b finis ou non).

Nous supposons que $\mathcal{A} = \{]]s,t]] , s,t \in \overline{T}\}$.

Nous rappelons d'abord la définition usuelle d'un processus croissant.

A.1 - DEFINITION.

Un processus $V = (V_t)_{t\in\overline{T}}$ *à valeurs réelles est appelé processus croissant s'il vérifie :*

i) V *est nul sur les axes ;*

ii) $\Delta_A V \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

Le processus est dit continu à droite (en abrégé : c.a.d.) s'il vérifie :

iii) $\forall t \in [[0,1]] \qquad V_t = \lim\limits_{\substack{t' \to t \\ t' > t}} V_{t'}$

A.2 - PROPRIETE.

Soit V *un processus croissant c.a.d., alors pour toute suite décroissante* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$, *telle que* $\bigcap\limits_n A_n = \emptyset$ *on a :* $\lim\limits_n \Delta_{A_n} V = 0$.

Démonstration.

soit $A_n =]] s_n, t_n]]$, la suite $(A_n)_{n\in N}$ étant décroissante, on a :

$]]s_1,t_1]] \supseteq \dots \supseteq]] s_n, t_n]] \supseteq]] s_{n+1}, , t_{n+1}]]$

La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée, la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée ; ces deux suites sont donc convergentes, soient a et b leurs limites respectives, on a $a\leq b$.

Supposons que $a<b$ et plus précisément que $a^i < b^i$ $\forall$ $i = 1\ldots d$, alors $]]a,b]] \neq \emptyset$ et $]]a,b]] \subseteq \bigcap_n]]s_n,t_n]]$ ce qui est contradictoire en conséquence $\exists j \in \{1\ldots d\}$ tel que $a^j = b^j$.

Supposons que $s_n^j < a^j = b^j$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ alors $b \in]]s_n,t_n]]$ et $b \in \bigcap_n]]s_n,t_n]]$, ce qui est contradictoire donc $a^j = b^j$ implique que $s_n^j = a^j = b^j$ à partir d'un certain rang.

On a alors $0 \leq \Delta_{A_n} V \leq V_{t_n} - V_b$.

En effet, si $s \in A_n$, on a, $\forall$ $i \in \{1\ldots d\}$ $s^i \leq t_n^i$ et donc $s \in]]o,t_n]]$, et, si $a^j = b^j$ $s_n^j = a^j = b^j$ à partir d'un certain rang donc $s^j > b^j$, ce qui implique que $s \notin]]o,b]]$, on en déduit que $A_n \subseteq]]o,t_n]] -]]o,b]]$, la positivité de V implique alors l'inégalité.

Par suite de la continuité à droite de V, on a : $\lim_n V_{t_n} = V_b$ d'où $\lim_n \Delta_{A_n} V = 0$.

A.3. PROPRIETE.

Soit V *un processus croissant c.a.d.*

Alors :

i) Si V *est fini Pps,* V *est le processus de répartition d'une* $L_o(P)$-*mesure stochastique.*

ii) Si V *est intégrable,* V *est le processus de répartition d'une* $L_1(P)$ -*mesure stochastique.*

Démonstration.

i) résulte immédiatement du corollaire 6.2 (la convergence simple implique la convergence dans $L_o(P)$.

ii) résulte également du corollaire 6.2. (la convergence simple dominée par V_1 implique la convergence dans $L_1(P)$).

Notons que la condition 6.2.1. ii) devient, pour V processus de réparti-tion d'une $L_p(P)$-mesure stochastique :

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad A_n \in \mathcal{A} \qquad A_n \searrow \emptyset \qquad \lim_n \; ||\Delta_{A_n} V||_p = 0.$$

condition qui est plus faible que A1 iii).

Notons également que, deux modifications c.a.d. d'un même processus sont indis-tingables (démonstration identique au cas où $d = 1$).

A.4. PROPOSITION.

Soit μ un élément de $\mathcal{V}_+(L_p(P))$ il existe alors un processus V croissant, c.a.d., unique à l'indistinguabilité près, tel que :

$V_t = \mu(]]o,t]] \times \Omega)$ *Pps pour chaque* t.

Démonstration.

Soit $W_t = \begin{cases} \mu(]]o,t]] \times \Omega) & \text{si } t \in T \\ o & \text{si } t \in [[o,1]] -]]o,1]] \end{cases}$

Soit D l'ensemble des éléments de $\overline{T}$ à composantes dyadiques.

Soit μ élément de $\mathcal{V}_+(L_p(P))$, on a $\Delta_A W \geq 0$ Pps pour chaque A élément de $\mathcal{C}$.

Il est alors facile de voir qu'il existe Ω_o tel que $P(\Omega_o) = 0$ et $\Delta_A W \geq 0$ pour tout A élément de $\mathcal{A}$ de la forme $]]s,t]]$, $s\in D$, $t\in D$.

Soit alors $V_t = \lim_{\substack{t' \searrow t \\ t' \in D}} W_{t'} \; 1_{\Omega_o}$

(On pose $V_1 = W_1 \, 1_{\Omega_o}$)

V est bien défini. De plus, si $A =]] s,t]]$, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $A_n =]] s_n,t_n]]$, $s_n,t_n \in D$ et $\alpha(A_n,I) \to \alpha(A,I)$ $\forall \; I \subseteq \{1\ldots d\}$,

$\alpha(A_n,I) \in D$ et $(\alpha(A_n,I))_{n\in\mathbb{N}}$ suite décroissante,

alors $\Delta_{A_n} W = \sum_I \varepsilon^I \; (W_{\alpha(A_n,I)} - W_{\alpha(A_n,\emptyset)})$

et $\lim_n 1._{\Omega_o} \Delta_{A_n} W = 1_{\Omega_o} . \Delta_A V$ d'où $\Delta_A V \geq 0$.

D'autre part, on a : $\lim_n \; ||\Delta_{A_n} W||_p = 0$ quand $A_n \searrow \emptyset$ en particulier si

$A_n =]]o,t_n]]$ avec $t_n \in D$, $t_n \searrow t$, $t \in [[0,1]] -]]0,1]]$.

Ce qui implique que : $\lim_n \; \|W_{t_n}\|_p = 0$

quand $t_n \in D$, $t_n \searrow t$, $t \in]]o,t]] -]]o,1]]$, donc $(W_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0

dans $L_p(P)$, comme $(W_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, on a nécessairement

$\lim_n W_{t_n} = 0$ Pps. d'où $V_t = 0$ pour $t \in [[o,1]] -]]o,1]]$.

Examinons maintenant le problème de la continuité à droite de V

on a, si $t_n \searrow t$ et $\omega \in \Omega_o$

$0 \leq V_{t_n}(\omega) - V_t(\omega) \leq W_{t'_n}(\omega) - V_t(\omega)$ où $t'_n \in D$ et $t_n + h_n > t'_n > t_n$

mais $W_{t'_n}(\omega) \to V_t(\omega)$ d'où $V_{t_n}(\omega) \to V_t(\omega)$

$((h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $h_n \searrow 0$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLAIN M.F. Tribus prévisibles et espaces de processus à trajectoires continues indexés par un espace localement compact et métrisable. Séminaire de Rennes (1979).

[2] ALLAIN M.F. Semi-martingales indexées par une partie de $\mathbb{R}^d$ et formule de Itô. Cas continu. Z.W. 65 p. 421-444 (1984)

[3] BICHTELER K. Stochastic integration and L_p-theory of semi-martingales Annals of Proba. Vol 9 n°1 p.49-89 (1981)

[4] DELLACHERIE C. et MEYER P.A. Probabilités et potentiel - chapîtres V à VIII. Théorie des martingales. Hermann (1980).

[5] FOLLMER H. Quasi-martingales à deux indices. C.R.A.S. Paris t. 288 8 janvier 1979. série A p. 61-64.

[6] GUYON X et PRUM B. Semi-martingales à indices dans $\mathbb{R}^2$ - Thèse - Université de Paris Sud - centre d'Orsay (juin 1980).

[7] HÜRZELLER H. Intégrateurs stochastiques à deux indices - C.R.A.S. Paris Tome 292. 25 mai 1981. Série I p. 917-920.

[8] HÜRZELLER H. Quasi-martingale und stochastische integratoren mit halbgeordneten index mengen. Diss. ETHNR 7088 Zürich (1982).

[9] MERZBACH E. Processus stochastiques à indices partiellement ordonnés Rapport interne n° 55 Ecole Polytechnique.

[10] MERZBACH E. et ZAKAI M. Bimeasures and measures induced by planar stochastic integrators. (1983).

[11] METIVIER M. et PELLAUMAIL J. Mesures stochastiques à valeurs dans les espaces L_o Z.W. 40 p. 101-114 (1979).

[12] METIVIER M. et PELLAUMAIL J. Stochastic integration. New-York Academic Press (1980).

[13] OREY S. F-process. Proceedings of the fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. II Part I Probability theory p. 301-313 (1965).