PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

DOMINIQUE FLAMENT

Analyse de la direction (un chapitre de l'histoire des nombres complexes)

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1982, fascicule 2
« Séminaire d'histoire des mathématiques », , p. 1-49
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1982___2_A4_0>

Caspar WESSEL :Un méconnu
(1745-1818)

Analyse de la direction

(Un chapitre de l'histoire des nombres complexes)

Dominique FLAMENT
Septembre 1982.

La recherche d'une représentation géométrique signale un des tournants les plus décisifs dans l'histoire des quantités qu'on appelait "impossibles"ou "imaginaires" et qui deviendront les nombres complexes.Du moins peut-on en mesurer l'importance aux difficultés que soulève l'analyse historique des tentatives ayant connu des succès divers, s'étant non sans erreurs ni retours approchées du but,et l'ayant finalement atteint au moment où il était en train de l'être ou l'avait été par un autre chemin,lui,plus strictement algébrique et discursif.

Le problème ainsi posé est celui des rapports de l'algèbre avec la géométrie.Nous avons montré[1] à propos de Viète et du courant d'innovations auquel il participe, comment se posait la question de savoir s'il était licite de représenter les grandeurs géométriques et les grandeurs arithmétiques exactement de la même manière.Viète lui-même ne le pense pas et,au XVIIIe siècle encore,on distingue deux signes différents pour marquer des égalités entre rapports: notre signe "=" s'il s'agit de nombres ou de quantités arithmétiques et on désigne par "::"l'égalité entre rapports de grandeurs géométriques.A cet égard donc,Descartes et ses émules n'ont pas mis fin à un débat: en étendant le recours des équations à la démonstration de problèmes géométriques,ils signalent une nouvelle manière d'utiliser l'algèbre plutôt qu'ils ne transforment radicalement cette dernière.Et l'ambiguïté entre les deux procédures-l'une plus traditionnelle,l'autre plutôt cartésienne-subsiste encore chez d'Alembert utilisant les mêmes qualificatifs que Viète pour distinguer l'algèbre numérale de l'algèbre spécieuse.Cette même distinction a sans doute paru superflue à Euler qui semble désigner par le mot d'"algèbre" la théorie des équations.Cette identification, bien qu'elle soit destinée à paraître trop restrictive,durera jusqu'au XIXe siècle.

C'est donc dans un ensemble de processus mentaux,

---

(1)D.Flament,"Contribution à l'étude historique des quantités imaginaires".Thèse de 3ème.cycle;EHESS(Paris,1982).

de recherches logiques et de préoccupations lexicales très divers que se situa la question de savoir si les nombres"imaginaires" relèvent d'une représentation géométrique.

La recherche et la découverte d'une représentation géométrique des nombres imaginaires contribueront à rendre homogène l'"Algèbre",c'est-à-dire,à en unifier sinon les définitions continuant à donner lieu à débat,du moins l'idée que l'on s'en est fait,en étendant le plus possible une même légitimité au plus grand nombre de domaines de la mathématique.La réussite acquise de nos jours est due à des symboles vidés de leur contenu concret et ne se référant plus à quelque "réalité" ou à quelque "nature propre"susceptible d'en troubler l'emploi en les spécifiant sans nécessité.Il s'agit là d'un achèvement dont les origines très anciennes seront dues à une succession d'efforts plus ou moins réussis des prédécesseurs italiens et des successeurs de Descartes pour affranchir la symbolisation des contraintes du langage ordinaire afin qu'elle gagne en éfficacité et en universalité.

La Géométrie de Descartes présente une nouveauté capitale:l'ancienne géométrie euclidienne devient analytique en multipliant les recours aux équations tant pour refaire d'anciennes démonstrations que pour en découvrir de nouvelles. Dès lors,et bien qu'il soit plus aisé de représenter toute équation déjà connue ou connaissable,que de trouver à n'importe quelle courbe l'équation qui la traduise exactement,on est en mesure d'espérer que l'identification se généralisera entre courbe et équation.Toute "construction" géométrique pouvant se traduire en formules,l'ancien fossé entre géométrie,algèbre ou arithmétique se trouvera comblé;on ne parlera plus à leur sujet d'opposition irréductible.

Pour prometteuse que soit cette symbiose,elle se heurte pourtant à des paradoxes,faisant douter que cette harmonie si parfaite puisse être indéfiniment conquérante.Non seulement n'importe quelle courbe n'est pas également transcriptible en une équation algébrique(on la qualifiera de transcendante),mais il faut se résoudre à admettre que,dans la résolution d'équations,certaines racines doivent être considérées comme exactes bien qu'on les qualifie encore de "fausses", "impossibles","irréductibles" et qu'elles ne soient pas représentables par un dessin. C'est dans ces circonstances, et donc dans un milieu intellectuel s'interrogeant sur la solidité des bases de l'édifice mathématique, qu'apparaissent simultanément les premières représentations géométriques des "quantités imaginaires". Mais alors constate-t-on aussi que même quand sont tenues pour "vraies" des représentations géométriques encore, en fait, inadéquates, cette "vérité" ne satisfait plus le mathématicien (appelé encore "Géomètre" bien qu'il fût de plus en plus un "Analyste"), qui a entre-temps accru les exigences de ses critères de certitude. Il découvre la nécessité de ces nouvelles exigences au sein même de ses raisonnements propres (même quand ceux-ci sont purement discursifs) et, donc, n'attache plus l'importance d'autrefois à ce qui faisait mesurer l'"existence" de symbolisations abstraites à leur identification avec les "réalisations" concrètes de la géométrie.

S'ouvre alors une période de recherches austères voulant élucider les paradoxes qu'une pratique souvent mal contrôlée de formalisations de toutes sortes, notamment de sériations hâtives, ne cessait de multiplier. Quand s'achève le XVIIIe siècle, les meilleurs esprits s'imposent comme première obligation de préférer la rigueur et le bien-fondé de propositions formalisées plutôt que de trouver des figures susceptibles d'en donner des images.

Bien sûr, un tel surcroît d'obligations n'est pas encore la règle d'or de tous; nombreux restent ceux qui se contentent de formules paraissant suffisamment pertinentes pour expliquer les phénomènes physiques ou mécaniques. Dans ce cas, on ne cherchera pas à fonder les raisons de cette efficacité dans les formulations elles-mêmes, mais seulement à en mesurer le caractère satisfaisant à l'ampleur de champs d'action. C'est ainsi que l'on ne se demandera pas à quelles conditions une série converge, dès lors que seuls ses premiers termes importent dans les applications pratiques. Pour ce genre de mathématicien, les préoccupations du côté de l'infini ne sont pas plus de mise que pour l'expérimentateur condamné aux approximations de ses appareillages. C'est précisément à la conjonction de deux comportements rationnels si différents-recherche de la rigueur d'un côté et recours aux pratiques de l'autre-que se situeront les inventions de constructions géométriques susceptibles de "réaliser"[2]les "quantités imaginaires":elles sont dues à des praticiens.Face à ces derniers,plus mêlés aux activités de leur temps,les théoriciens cherchant dans les propriétés des symbolisations la validité des formulations symboliques sont alors plutôt des marginaux.Pour sortir de cet isolement,ils doivent prouver leur talent ou leur génie dans des recherches secondaires par rapport à ce qu'ils jugent essentiel et qui en définitive fera leur gloire.C'est ainsi que, sur le moment,la renommée de Gauss a dû bien davantage au calcul de la trajectoire de Cérès qu'à son étude des nombres complexes,de leur représentation et redéfinition.Même si le jeune Gauss doit quelque chose de ses innovations dans ce domaine aux travaux nourriciers qu'il dut faire comme cartographe,il conserva par devers lui et pendant plus de trente ans certains des résultats qu'il avait atteint.

Pourquoi,dans sa dissertation inaugurale de 1799, ne fait-il pas état de la représentation géométrique des nombres complexes alors qu'elle y est implicite?Pourquoi intitule-t-il sa thèse:"Nouvelle démonstration,que toute fonction rationnelle entière d'une variable peut être décomposée en facteurs réels du premier ou du second degré",s'interdisant ainsi de parler explicitement des "nombres imaginaires"?Pourquoi Cauchy considère-t-il pendant si longtemps les "nombres imaginaires" comme de simples "expressions symboliques"?Autant de questions[3] soulignant combien les idées qu'on a pu se faire à l'époque sur les "nombres imaginaires" sont d'une analyse difficile.Nul doute qu'on attende une preuve de leur réalité avant d'y croire,nul doute aussi qu'on hésite à faire cas des preuves qu'on ne peut découvrir.

(2)Lorsque nous avons employé en plusieurs occasions le terme de "réalité" appliqué aux nombres "imaginaires",nous nous sommes exposé à un risque:laisser croire que nous avions fait nôtre une conception du réalisme des objets mathématiques qui fut manifeste au début de notre siècle,mais qui est aujourd'hui singulièrement dépassée.En fait,l'emploi de ce mot,de ses dérivés ou d'autres,s'est révélé essentiel pour montrer comment les mathématiques,tant dans leur contenu que dans leur forme, se sont profondément modifiées.

(3)Nous avons essayé dans notre précédent travail(Cf.note (1)) d'apporter plusieurs éléments de réponse.

Vers la fin du XVIIIe siècle et le début du XIXe s'engagèrent des réflexions dont le dynamisme devait déboucher sur une profonde réforme des mathématiques.En d'autres termes, le raisonnement s'applique bien sur un même objet mais aussi vu autrement.Par exemple,une formule ne sera plus uniquement regardée comme une machine dont l'efficacité est ou sera prouvée,mais comme un mécanisme,un ensemble de symboles et de signes présentant une structure particulière dont l'étude est susceptible d'apporter une refonte des acquis.

Les principes mêmes de la théorie deviennent des "objets" privilégiés auxquels s'applique la critique du raisonnement,l'étude se porte sur la légitimité des résultats qui en découlent en donnant ainsi naissance à une logique symbolique. Le"calcul" purement symbolique s'installe au détriment d'un calcul qui trouvait ou cherchait sa justification dans l'espace euclidien;ce dernier deviendra un simple cas particulier d'hyperespaces devenus parfaitement concevables;on ne cherchera plus la "preuve" de formulations abstraites dans l'expérience quotidienne ou dans la logique du "sens commun" ;on se fiera à la "vérité" donnée par une logique ne s'exerçant que sur des symboles vidés de leur référence naturelle.

Peu à peu et non sans difficulté,ira en se précisant l'"objet" de "la" mathématique:la structure.Les notions de "loi de composition",c'est-à-dire une relation entre trois éléments déterminant le troisième de façon univoque en fonction des deux autres,et d'"isomorphisme",permettront ce dénouement actuel et momentané de "la" mathématique.Les"axiomes",ces vérités premières,évidentes et indémontrables,deviendront des règles ou des définitions,les conditions que doivent vérifier certaines relations entre certains êtres abstraits pour appartenir à une structure donnée.Comme le précise Bourbaki:

> "Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure,<u>en s'interdisant toute autre hypothèse</u> sur les éléments considérés(en particulier,toute hypothèse sur leur "nature" propre)"[4]

---

(4)N.Bourbaki,"L'architecture des mathématiques",in "Les grands courants de la pensée mathématique"(pp.35-47),présentés par F.Le Lionnais(Paris,1962),p.41.

Mais si cette tendance essaie d'écarter l'"intuition sensible vulgaire" au profit d'une intuition plus professionnelle,elle n'isole en rien la(ou les)mathématique du contexte social et mental qui l'entoure comme nous le confirme incidemment Bourbaki:

> "Dans la conception axiomatique,la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de formes abstraites-les structures mathématiques;et il se trouve-sans qu'on sache très bien pourquoi-que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes,comme par une sorte de pré-adaptation"[5].

On citera pour finir une déclaration de E.Borel:

> "Il faudrait toutefois ajouter,pour ne pas risquer de confondre les mathématiques,ni avec la logique,ni avec des jeux tels que le jeu d'échecs,que ces définitions (au sens précédent)arbitraires ont été tout d'abord suggérées par des analogies avec des objets réels;tel est le cas pour la ligne droite,pour le cercle,pour le corps solide de la mécanique rationnelle,etc.,mais les nombres imaginaires,les nombres transfinis,bien d'autres êtres mathématiques,sont de pures créations de l'esprit humain.Elles sont justifiées par le fait qu'elles ont permis de résoudre plus facilement des problèmes que se posaient les mathématiciens et les physiciens,et d'éclaircir les difficultés qu'ils avaient rencontrées"[6].

C'est en ayant présent à l'esprit un tel développement propre aux XIXe et XXe siècles que nous nous sommes cru obligé de parler des diverses transformations qui donneront naissance aux représentations géométriques des "quantités imaginaires".On ne saurait réduire à néant le rôle fondamental qu'elles jouèrent pour faire accepter enfin ces "nombres".Les travaux de R.Argand,J.F.Français,C.F.Gauss,J.Warren,C.V.Mourey,A.Q. Buée et A.L.Cauchy sont aujourd'hui bien connus.A la lumière des nombreux ouvrages historiques existant il nous est apparu nécessaire de remettre en valeur l'extraordinaire modernité de la contribution d'un auteur longtemps ignoré:Caspar WESSEL.

\+ + + +

---

(5)N.Bourbaki,op.cit.,pp.46-47.
(6)E.Borel,"La définition en mathématiques",in "Les grands courants de la pensée mathématique"(pp.24-34),présentés par F.Le Lionnais(Paris,1962),p.24.

On a souvent trouvé dans les écrits de nombreux historiens que C.Wessel[7] était un "obscur" arpenteur ayant,après de très courtes études universitaires,offert ses services à l'Académie des Sciences du Danemark.Il s'y employa à dresser des cartes,établir des relevés topographiques,délimiter des frontières géographiques(par exemple,celles du Slesvig et du Holstein que lui demandait la France).On nous place donc un personnage dans un milieu modestement informé,éloigné des foyers où règne une intense activité scientifique et dont le métier fait fi des théories mathématiques alors existantes.Puis,soudain,à l'âge de cinquante-deux ans(1797),il présente un Mémoire à l'Académie des Sciences,le seul document mathématique que l'Histoire retiendra de lui(il semble ne pas en exister d'autre). Ainsi,cet Arpenteur étonne:en effet,c'est la première fois que cette Académie retient un Mémoire qui n'ait pas été écrit par l'un de ses membres!L'ouvrage,nous l'avons dit,est l'unique oeuvre mathématique de Wessel.

Une telle présentation ne peut que surprendre,laisser croire que Wessel fut un "génie" ignoré de son époque.Pour accentuer ce point de vue surprenant,le premier préfacier de l'"Essai"[8]de Wessel,H.Valentiner,va même jusqu'à préciser que, dans l'"Histoire de l'Académie des Sciences"publiée à Copenhague en 1843 par Molbech,on ne fait aucune allusion au Mémoire de Wessel.La situation ainsi développée repose sur deux erreurs d'appréciation.L'idée qu'on se fait du mot "métier" est trop moderne,on oublie qu'au XVIIIe siècle et encore assez longtemps au XIXe n'existe pas au sens strict le métier de scientifique; cette activité restait très souvent marginale,une occupation non lucrative.La seconde erreur de perspective est de croire que la recherche d'une représentation géométrique des "quantités imaginaires" était "le" problème essentiel des mathématiciens de cette période révolutionnaire.Or,redisons-le,une transforma-

---

(7) On pourra avoir une idée relativement précise de la vie de Wessel en consultant la biographie faite par Phillip S. Jones (Article "Wessel,Caspar",in: "Dictionnary of Scientific Biography",par Ch.Coulston Gillipsie,Princeton University(N.Y.,1970-1978))et l'article de Viggo Brun(in Rev. Hist.Scie.,1959,vol.12,pp.19-24)intitulé:"Caspar Wessel et l'introduction géométrique des nombres complexes".

(8)C.Wessel,"Om directionens analytiske betegning,et forsög anvendt fornemmelig til plane og sphaeriske polygoners oplösning(Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter,Femte Del.,Kjöbenhavn,1799).

.../...

tion s'opère à la fin du XVIIIe siècle;on constate qu'elle va en se précisant au cours du XIXe siècle.La "représentation géométrique" constitua pendant longtemps le "critère d'existence" des concepts algébriques.Mais les nombreux paradoxes auxquels ont conduit les calculs formels sur les expressions mathématiques amenèrent à une interrogation et à une remise en forme des bases de l'édifice arithmético-algébrique.Ce retour sur elles-mêmes des mathématiques conduisit à définir plus rigoureusement les objets de la Géométrie,de l'Algèbre et de l'Arithmétique,à préciser de façon stricte leurs champs respectifs. une fois mise en valeur cette restructuration,on s'autorisera à reconnaître les mille chemins qui réunissent ces domaines qu'on a voulu autonomes pour des raisons de méthodologie .

.L'Algèbre se défendra d'utiliser les "images causales" tirées de la Géométrie qui lui auraient servi de "critères de vérité".On se révoltera pendant un certain temps contre ce "principe de continuité" qui sent trop l'Analyse pour être digne de figurer légitimement en Géométrie.Même l'Analyse,dans le premier XIXe siècle,marquera une réticence à l'emploi de la représentation "géométrique" des nombres complexes;elle octroiera pendant longtemps à ces derniers le statut de purs symboles,propres à simplifier les calculs mais indignes de figurer en tant que nombres(Les premières attitudes de Gauss et de Cauchy illustrent très bien cet état d'esprit peu durable mais significatif).Pour clore cette parenthèse et revenir à Wessel,citons l'exemple de L.Carnot,grand savant que nul n'ignore et qui contribua parallèlement à Monge au progrès de la géométrie synthétique:il se refusait à considérer dans ses résultats les nombres négatifs!

Dans son souci d'"Historien impartial" à vouloir rétablir les mérites de Wessel,H.Valentiner ne semble pas avoir accordé toute l'attention voulue à l'"Essai" de son auteur:Comment comprendre ce qu'il entend par les mots

> "Il(l'essai)a aussi sur celui d'Argand l'avantage de renfermer une théorie des opérations algébriques faites avec des lignes dans l'espace,ce qui fait qu'à peu près cinquante ans avant les théories d'Hamilton,il donne la première application des quaternions"(9)?

---

(8)(suite)"Essai sur la représentation analytique de la direction" par Caspar Wessel,trad.par H.G.Zeuthen avec préfaces de MM.H. Valentiner et T.N.Thiele,Köbenhavn,Andr.-Fred Höst og sön Kgl Hof-Boghandel,1897.

(9)C.Wessel,<u>ibid</u>.,préface de H.Valentiner,p.III.

L'affirmation est erronée; Wessel ne cherche pas les quaternions, ni ne les trouve. La forme de la ligne qu'il utilise dans l'espace n'est absolument pas celle que définira W.R.Hamilton pour représenter les quaternions. Seule la poursuite d'un calcul développé aux paragraphes 24 et 35 de son "Essai" peut conduire aux quaternions. Cette "extension" suppose de nombreuses difficultés d'interprétation que Wessel n'entreprend pas car il n'en a pas besoin: nous reviendrons plus en détail sur ces points capitaux. Une telle correspondance appartient au courant mathématique qui donnera une pleine légitimité à l'emploi d'opérations, alors propres aux nombres, appliquées à des objets d'une autre "nature".

L'ouvrage de Wessel sera oublié pendant un siècle, il reviendra à la connaissance des mathématiciens et surtout à la mémoire des historiens grâce à la thèse de S.A.Christensen[10] (qui en fera une courte mention) et au mathématicien danois C.Juel qui en fera un compte rendu[11] en 1895. Cet "Essai" n'a donc eu, semble-t-il, aucune influence directe sur l'évolution des mathématiques au cours du XIXe siècle. Cependant, il constitue un bon témoignage historique d'une réflexion mathématique née dans un pays qui, sur les mêmes lieux, donnera quelques décennies plus tard naissance à un Niels H. Abel.

Le propos de Wessel est clairement exprimé dès le départ:

> "Savoir comment la direction doit être représentée analytiquement, c'est-à-dire comment on devrait exprimer les segments de droites, si l'on voulait, au moyen d'une équation unique entre un seul segment inconnu et d'autres segments donnés, trouver une expression représentant à la fois la longueur et la direction du segment inconnu"[12].

Une telle traduction non littérale suscite une remarque immédiate à propos du vocabulaire employé:

Le traducteur fait usage du mot "segment" en lui donnant le sens du mot "strecke"; ce dernier signifie "vecteur". Wessel, quant à lui, employait l'expression "ligne droite" (ou tout simplement "ligne") en lui conférant les conditions propres aux dénominations précédentes.

---

(10) S.A.Christensen, "Mathematikens udvikling i Danmark og Norge i del 18 aarh.", Odense, 1895 (ref. V.Brun).

(11) C.Juel, "Redegjörelse for en Afhandling af Landmaaler Caspar Wessel fra 1799" (Nyt Tidsskrift for Mathematik, 6e année, Copenhague, 1895). (Ref. V.Brun).

(12) C.Wessel, ibid., p.1.

Pour atteindre son but il s'appuiera sur deux considérations qui lui paraissent évidentes:

1. "La variation de la direction qu'on peut produire par des opérations algébriques doit être représentée aussi par leur symbole"[12]

et :

2. "On ne peut soumettre la direction à l'algèbre qu'en faisant dépendre ses variations d'opérations algébriques"[12].

D'entrée de jeu,on constate que Wessel ne cherchait pas,contrairement à ce qui se fera au XIXe siècle,à isoler l'algèbre de la géométrie.Mais cette attitude est plus moderne, même si elle constitue dans son essence une fidélité à l'esprit cartésien dans la mesure où,pour lui,la "géométrie analytique" est encore cette "application de l'algèbre à la géométrie",c'est-à-dire :

> "Une technique de structure algébrique,adaptée à la résolution de problèmes d'essence géométrique qui n'entrent pas dans le champ normal d'application des propriétés classiques tirées des Eléments d'Euclide"[13].

En effet,Wessel fait observer que jusqu'à présent les définitions permettant l'usage d'opérations algébriques en géométrie n'ont pu expliquer que la direction positive et son opposée,la négative,et réciproquement.

Ainsi,une infinité de cas particuliers,les directions intermédiaires,se trouvent privés d'interprétation du fait que les opérations définies les rendent impossibles.Aucune formule algébrique dans l'état actuel de la théorie ne pourra exprimer une direction quelconque:

> "C'est probablement pour cette raison que personne ne s'est occupé de cette matière.Sans doute,on ne s'est pas cru permis de rien changer à la définition une fois adoptée des opérations"[14].

Dès lors,l'"équation unique" cherchée par lui ne pourra exister que si l'on étend la définition des opérations. Si l'on interdit de toucher ou de modifier les définitions existantes:

---

(13)R.Taton,"Histoire générale des sciences",vol.2("La science moderne"),Paris,1958,p.460.

(14)C.Wessel,ibid.,p.3.

> "à celà il n'y a rien à objecter,tant que la définition est appliquée à des quantités ordinaires;mais il existe des cas spéciaux où la nature propre des quantités semble nous inviter à donner aux opérations des définitions particulières"[15]

Celles-ci,s'empresse de dire l'auteur,s'adaptent fort bien pour expliquer les directions"impossibles",il ne faut donc pas les rejeter.Plutôt doit-on essayer de montrer qu'elles constituent une vraie extension de celles que l'on utilise ordinairement, dans la mesure où elles

> "s'appliquent,non seulement aux mêmes cas qu'auparavant, mais encore à une infinité d'autres cas"[15].

Le passage de l'"arithmétique à l'analyse géométrique,c'est-à-dire des opérations relatives à des nombres abstraits aux opérations sur des segments de droite"nous conduira à prendre en considération des quantités dont la "nature" nous permettra à la fois de conserver les "relations" qu'ont les nombres ordinaires entre eux et d'en acquérir "un grand nombre" de nouvelles.Cette extension légitime caractérise un esprit moderne et nous montre combien les préoccupations de Wessel s'apparentent aux nôtres.

> "Si en même temps qu'on prend cette liberté [de généraliser la signification des opérations] on respecte les règles ordinaires des opérations,on ne tombe point en contradiction avec l'ancienne théorie des nombres,mais on la développe seulement,on s'accommode à la nature des quantités et on observe la règle générale qui commande de rendre,petit à petit,plus aisée à comprendre une théorie difficile"[15].

Les opérations plus générales que Wessel propose de caractériser permettront de représenter les "quantités imaginaires" par des "vecteurs" et

> "par là on réussit,non seulement à éviter toutes les opérations impossibles et à expliquer ce paradoxe qu'il faut quelquefois avoir recours à l'impossible pour chercher le possible,mais encore on parvient à exprimer la direction de toutes les lignes du même plan d'une manière aussi analytique que leur longueur sans que la mémoire soit embarrassée de nouveaux symboles ou de nouvelles règles"[15].

Le respect de la "structure" propre à des nombres arithmétiques dans un premier temps,puis étendue à des segments,nous autorise donc à appeler "somme" ou "multiplication" des opérations s'ef-

---

(15)C.Wessel,<u>ibid</u>.,p.4.

fectuant sur des objets géométriques.

A la vue de telles considérations on peut s'accorder avec H.Valentiner pour dire que Wessel expose une théorie "plus correcte" que celle d'Argand.

La théorie de Wessel n'a rien d'abstrait ,c'est un outil que se forge l'"arpenteur" pour simplifier sa tâche(en particulier la triangulation);la géométrie par cet apport algébrique accroît son domaine et gagne en facilité,elle s'affranchit encore plus qu'auparavent des limites contraignantes des Eléments d'Euclide.Elle setrouve simplifiée par l'apport de cette vision dynamique qui ramasse en une figure unique les nombreuses constructions n'exprimant que des cas particuliers.On s'affranchit de l'errement d'avant en arrière auquel nous condamnait la droite pour aborder le plan en toute sécurité.La "Géométrie de position" gagnera ainsi un nouveau degré de liberté

> "Je cherchais une méthode qui permît d'éviter les opérations impossibles:l'ayant découverte,je l'ai employée pour me convaincre de la généralité de certaines formules connues"[16].

Venons-en maintenant au contenu de son "Essai sur la représentation de la direction"(présenté le 10 mars 1797)en nous arrêtant un instant sur les propos introductifs du premier chapitre:

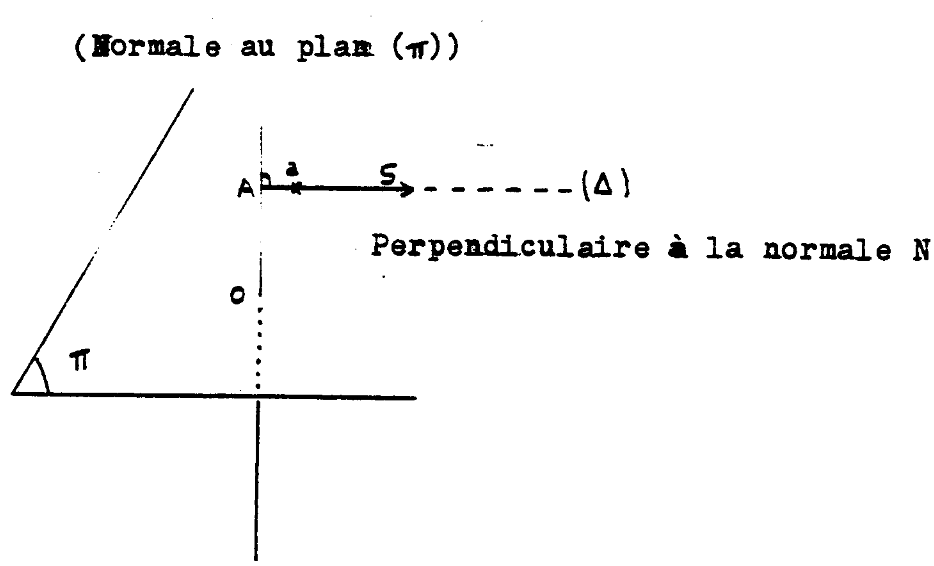
> "Sur une méthode servant à obtenir,par des opérations algébriques,des segments de droites au moyen d'autres segments,et en particulier sur la direction qu'il faut leur attribuer et le symbole propre à les désigner"[17].

La conception dynamique qu'introduit Wessel dans ses considérations géométriques ne manque pas d'apparaître dès les premières lignes:

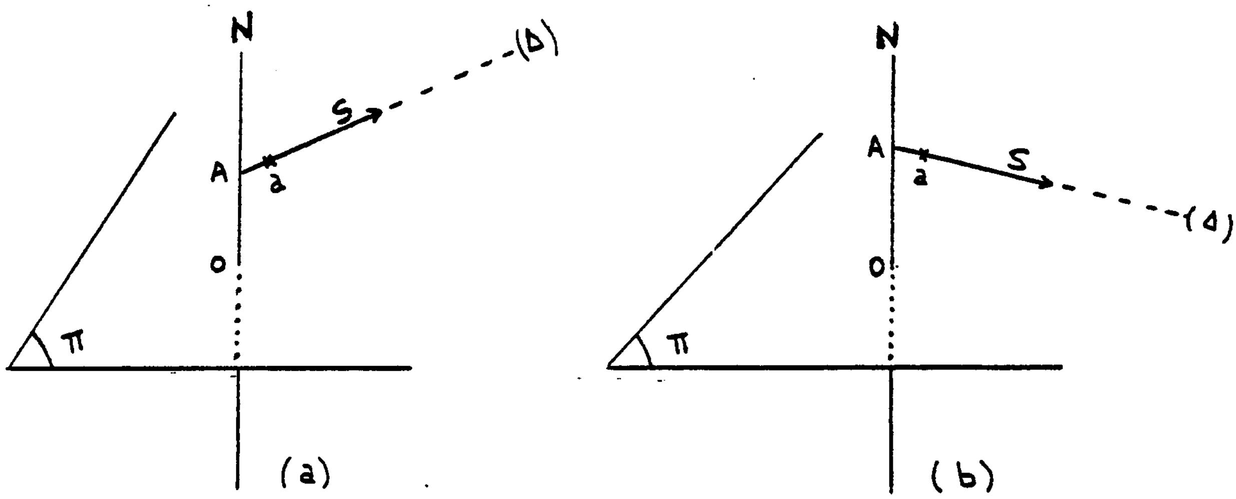
> "Il existe des grandeurs homogènes qui,lorsqu'elles s'appliquent au même sujet,ne produisent les unes sur les autres d'autres modifications que de simples augmentations ou diminutions.
> Il y en a d'autres qui,dans le même cas,peuvent se modifier les unes les autres d'une infinité d'autres manières.Les segments de droites appartiennent à **la dernière** classe"[17].

L'exemple qu'il donne pour faire comprendre ce qu'il entend repose sur des notions accessibles à tous:La distance d'un point à un plan fixe peut être modifiée d'une infinité de manières "en faisant parcourir au point une droite plus ou moins inclinée sur le plan".Nous résumerons ces diverses possibilités par quelques figures commentées avec le vocabulaire de Wessel:

(16)C.Wessel,<u>ibid</u>.,p.5.
(17)C.Wessel,<u>ibid</u>.,p.6.

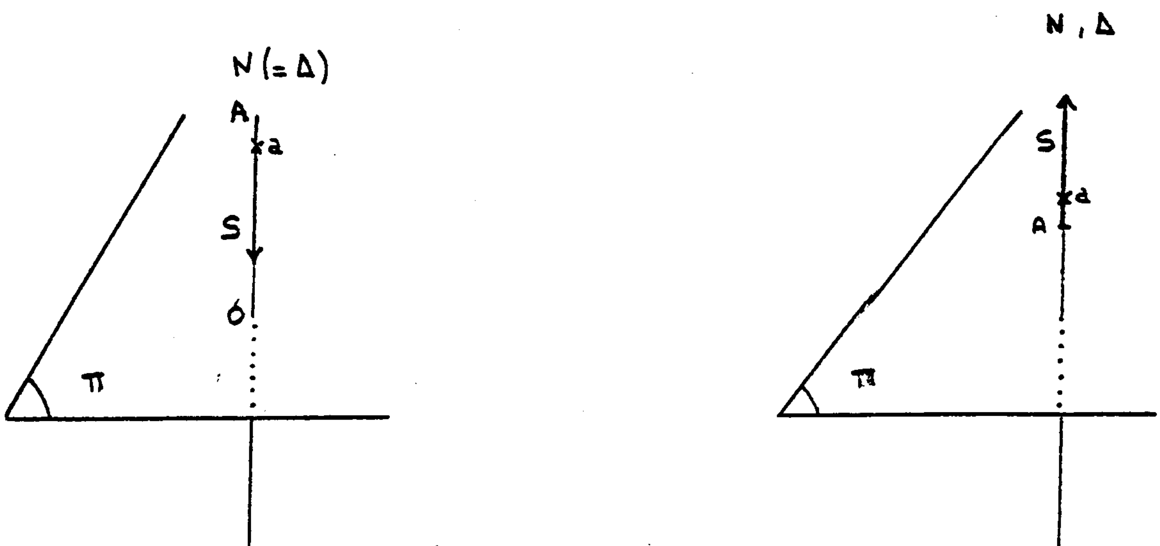


- (α) -



Δ est "indirecte"

- (β) -



Δ est "directe"

(Pour simplifier nous avons fait coïncider Δ avec N)

- (γ) -

Trois situations distinctes se présentent : la droite (Δ) que décrit le point a peut être :

1. perpendiculaire à la normale (N), dans ce cas, le point a n'altère nullement la distance au plan lors de son déplacement ;

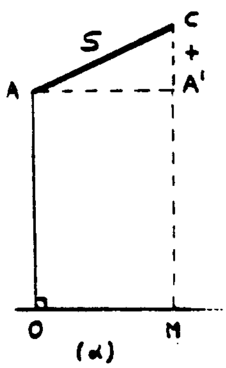
2. "indirecte", c'est-à-dire qu'elle fait un angle aigü ou obtus avec la normale ; la distance au plan se trouve alors modifiée par le chemin parcouru : elle augmentera (cas (a)) ou diminuera (cas (b)) d'une longueur plus petite que celle parcourue par le point a ;

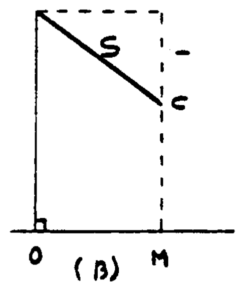
3. "directe", c'est-à-dire que la droite (Δ) a même direction que la normale (N) au plan fixe. De nouveau, deux situations existent ((c) et (d)) : le point a se déplace d'une longueur que l'on retranchera ou ajoutera à la distance initiale au plan fixe, suivant que celui-ci va vers le plan ou s'en éloigne. On dira alors dans le premier cas que la longueur du "segment" (S) est négative et dans le second qu'elle est positive. Ainsi lorsque la distance au plan (OA) diminuera, on dira que la quantité ajoutée est négative, positive dans le cas contraire.

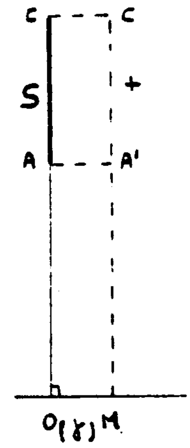
> "Tous les segments de droite qui peuvent être décrits par un point mobile sont donc, eu égard à leur effet sur la distance donnée du point à un plan fixe, soit directes, soit indirectes, soit perpendiculaires suivant qu'ils ajoutent ou retranchent à la distance une quantité égale à toute la longueur du segment donné, à une partie de ce segment, ou à 0".[18]

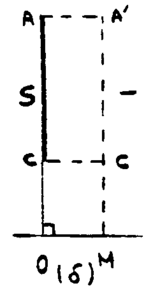
Bien que ces précisions soient amplement suffisantes, une schématisation supplémentaire nous permettra de parfaire notre compréhension. Bien sûr, pour saisir cette représentation dynamique conçue par l'auteur, nous serons contraints de représenter par plusieurs figures les différentes situations existantes. Le plan fixe (π) que nous utilisions précédemment sera considéré comme étant perpendiculaire à celui de notre page :

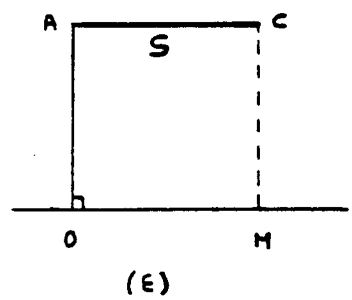
(18) C. Wessel, ibid., pp.6-7.











OA : "segment absolu"

AC = : "segment relatif"

(α) et (β) : S : segment indirect

(γ) et (δ) : S : segment direct

(ε) : S : segment perpendiculaire

CM : distance au plan après que le point ait parcouru le "segment relatif" S

\+ distance positive (ie : A'C $>$ 0 dans (α) et (γ)

\- distance négative (ie : A'C $<$ 0 dans (β) et (δ)

La modification de la longueur du "segment absolu" s'appelle "l'effet du segment relatif". Cet "effet" est la valeur de A'C dans les cas (α), (β), (γ), (δ) et 0 dans le cas (ε).

Wessel constate, bien qu'il ne dise rien de plus à ce sujet, qu'

"il y a d'autres quantités que les segments, qui sont sus-

> ceptibles des relations que je viens d'indiquer. Il ne serait pas inutile d'expliquer ces relations d'une manière générale et d'en faire entrer la notion générale dans la définition des opérations. Mais puisque l'avis des connaisseurs d'une part, de l'autre le cadre du présent mémoire, et enfin la clarté de l'exposition, exigent qu'on n'embarrasse pas le lecteur de notions si abstraites, je me placerai seulement au point de vue géométrique".[19]

La dernière expression ne laisse pas de nous surprendre ; elle nous fait croire que Wessel eut certainement pu expliquer de nombreuses conceptions mathématiques qui ne virent le jour que longtemps après sa mort (1818). Comment ne pas s'étonner qu'une Académie des Sciences, lieu où il présente son mémoire, puisse imposer une quelconque restriction sur le contenu d'une théorie ? Où se trouve donc cet endroit susceptible de pouvoir accueillir des considérations "abstraites" sans que les auditeurs en soient gênés ? On ne peut qu'être surpris par une telle déclaration affirmant que l'auteur a mutilé volontairement son exposé, mutilation qui à nos yeux laisse supposer qu'une fantastique extension du "calcul" proposé par Wessel (en fait, ce qui aurait été la plus grande originalité du texte) s'est vue privée d'existence. On soupçonne une vision très moderne de la "structure" mathématique ; en effet, dans une telle déclaration :

> "Il y a d'autres quantités que les segments, qui sont susceptibles de relations que je viens d'indiquer",[19]

on conçoit que l'objet du calcul n'a plus la même place qu'il occupait alors, car d'autres objets obéissent au même calcul ; il semble que ce sont les "relations", les "règles" ou les "axiomes" qui deviennent à leur tour objet. Cette situation nous montre à quel point le rôle d'une Académie des Sciences était alors différent de celui qu'elle a de nos jours ; nous renvoyons le lecteur à la déclaration que fit à ce sujet Leibniz lorsqu'il fonda l'Académie des Sciences de Berlin.[20]

(19) C. Wessel, ibid., p.7.
(20) "Cette institution doit songer à la fois à la science et à l'application à la fois, en imaginant des objets qui puissent tout ensemble honorer son illustre fondateur et profiter au monde. Qu'elle allie la pratique à la théorie..." (Ref. R. Taton, op.cit. note (13), p.593).

Le souci de faire et d'exposer une théorie pratique peut à lui seul justifier ce refus d'une abstraction plus poussée. D'ailleurs, il l'annonce lui-même dans ses premières pages ; il vise une extension des définitions propres aux nombres ordinaires dans le but de pouvoir ainsi justifier l'emploi quotidien qu'il fait des nombres "impossibles". Par là, il montre que les opérations "impossibles" ne sont en fait que des opérations mal comprises et que l'"impossible" est en fait un "possible" mal défini.

Fidèle à ce qu'il annonce dans son introduction - et ceci est un point capital - il n'abordera pas immédiatement les nombres imaginaires en leur donnant des règles d'utilisation en géométrie. Il commencera donc par introduire ses "segments de droite" en caractérisant leurs opérations et en définissant ce que nous devrons entendre par "somme" et "produit" de "segments". Nous allons voir qu'ainsi les nombres imaginaires deviendront parfaitement explicites et "dignes" d'emploi ; leur "mystère" se dissipera.

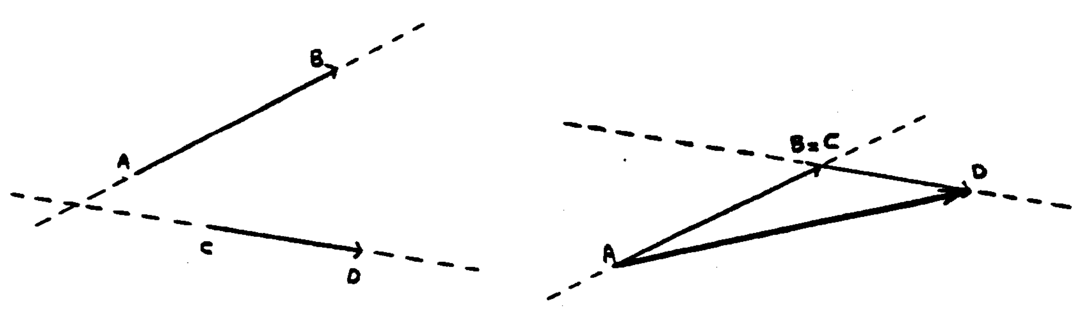
Nous conserverons la terminologie employée par Wessel pour ne pas travestir sa pensée et éviter que sa théorie soit mal comprise. A titre d'exemple, expliquons notre attachement au mot "segment". Pour lui, ce mot représente "une ligne dont on connaît la direction, le sens et la grandeur". Nous voyons donc à quel point il serait fâcheux de lui substituer le mot "vecteur" . En effet, si l'image que s'en fait le lecteur non mathématicien se résume au dessin d'une "flèche" dans un plan ou éventuellement dans un espace à trois dimensions, il ne pourra en aucune façon saisir ce que peut être un vecteur dans un espace de dimension supérieure, faute de pouvoir s'en faire une représentation graphique. A l'opposé, un lecteur mathématicien ne pourra manquer de s'enthousiasmer. Pour lui, un "vecteur" est un élément d'un espace vectoriel", donc, s'il n'est pas doublé d'un historien, il s'imaginera que Wessel était en possession des concepts fondamentaux nécessaires à l'explication formelle de cette notion abstraite ; il s'imaginera qu'il connaissait les notions de "structure mathématique", "loi de composition", "congruences", "relation d'équivalence" et enfin de "classe d'équivalence" ; or, ces dernières s'élaboreront à la fin du XIXè siècle et au début du XXè, grâce en particulier à la théorie des groupes et à l'algèbre linéaire.[21]

Addition de deux segments

Partant de deux "segments",

(£.1)"on les combine en faisant partir l'un du point où l'autre se termine ; puis on joint par un nouveau segment les deux bouts de la ligne brisée ainsi obtenue ; ce nouveau segment s'appelle alors la somme des segments donnés".[21bis]

C.A.D.



-1- (Avant) · -2- (Après)

Cette définition nous fait comprendre ce qu'est la somme entre deux "segments", mais sous-entend les notions d'"invariance par translation" et d'"équipolence" de "segments", alors que celles-ci ne sont pas claire-

(21) On reconnaîtra néanmoins que Wessel a une intuition extrêmement précise de la notion de "vecteur", même si l'opposition entre espace affine et espace vectoriel associé n'est pas clairement mise en lumière.

(21bis) C. Wessel, ibid., p.7.

ment exprimées. En effet, l'auteur n'exprime pas son "geste" : il part d'une situation donnée "deux segments" (1) et arrive à leur "somme" (2), mais le passage de l'une à l'autre de ces figures est mathématiquement non défini.

Pour appuyer cette définition, il donne deux exemples :

1. "Si un point avance de trois pieds, puis recule de deux pieds, la somme des deux chemins ne s'obtiendra pas en ajoutant aux trois premiers pieds les deux derniers ; elle sera égale à un pied en avant, puisque ce dernier chemin parcouru par le point a le même effet que l'ensemble des deux autres chemins"[22].

Cet exemple n'ajoute rien, comparé à ce qui existait déjà avant Wessel (Cf. Descartes); de plus, il ne confirme que très partiellement sa définition de l'addition car, si l'on peut s'exprimer ainsi, les "segments" sont déjà aboutés.

2. "De même, quand l'un des côtés d'un triangle va de <u>a</u> à <u>b</u>, le second de <u>b</u> à <u>c</u>, on doit appeler le troisième, qui va de <u>a</u> à <u>c</u>, la somme de deux autres, et le désigner par ab + bc, en sorte que ac et ab + bc ont la même signification, ou que ac = ab + bc, = - ba + bc, si ba signifie le segment opposé à ab".[22]

Ce second exemple est plus important que le précédent, bien qu'il souffre de la même restriction déjà signalée : la situation finale nous est donnée comme achevée sans que nous ayons pu assister à sa construction. Wessel s'interroge ici sur un donné géométrique, le triangle, qu'il <u>interprète</u> comme une ligne brisée fermée faite de trois "segments indirects", dont l'un est la somme des deux autres. Cet exemple lui permet d'introduire un symbolisme donnant accès à la notation de l'opération inverse de l'addition. Il ne fait aucune mention spéciale à ce qu'aurait pu lui suggérer l'exemple suivant : (I) ab + bc + ca = aa = 0.

Ce dernier l'aurait conduit à la possibilité d'introduire le "segment" nul ; mais on peut être sûr que cette notion était connue de lui, car

(22) C. Wessel, <u>ibid</u>., pp. 7-8.

il parle de sommes nulles de "segments", et que l'écriture de l'équation précédente est de lui. Bien sûr, cette équation suppose une extension de la "somme" à plus de deux "segments" ; il ne manque pas alors de préciser :

> "Pour ajouter plus de deux segments, on suit la même règle : on les combine de façon que l'extrémité du premier coïncide avec le premier point du second, l'extrémité de celui-ci avec le premier point du troisième, etc. ; on joint par un segment le point où le premier segment commence au point où le dernier se termine, et on appelle ce dernier segment la somme de tous les segments donnés".23

Les "axiomes" fondamentaux de l'addition sont mis en relief immédiatement après :

> "Peu importe quel segment on prend pour le premier, quel pour le second, le troisième, etc., car si un point décrit un segment de droite, ce segment aura le même effet sur les distances du point à trois plans perpendiculaires entre eux, quelle que soit sa situation par rapport aux plans ; par conséquent, lorsqu'on ajoute plusieurs segments, la contribution de l'un d'eux à la détermination de la position de l'extrémité de la somme reste la même, que ce segment soit le premier, qu'il soit le dernier, ou qu'il occupe un autre rang quelconque. Par conséquent, dans l'addition de segments, l'ordre des termes est arbitraire et la somme reste toujours la même parce que, supposé donné son premier point, le dernier aura toujours la même position".23

Ainsi : $ab + bc = bc + ab$ $\quad (ab + bc) + cd = ab + (bc + cd)$; et ces relations se généralisent à plus de deux "segments".

Avant de faire un premier bilan sur l'addition, précisons ce que notre auteur entend représenter par le signe "+" :

> "La signification que j'ai attribuée au symbole + n'a rien non plus d'extraordinaire ; par exemple, dans l'expression $ab + \frac{ba}{2} = \frac{1}{2}\,ab$, le terme $\frac{ba}{2}$ ne fait pas partie de la somme. Il est donc permis aussi de poser $ab + bc = ac$ sans qu'il soit nécessaire de se figurer bc comme une partie de ac ; $ab + bc$ est seulement le symbole par lequel on désigne ac". 23

Symbole servant à montrer comment la somme a été effectuée. L'expression précédente soulignée par Wessel nous laisse supposer qu'il avait déjà une

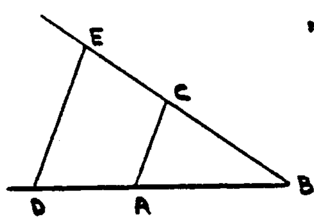
(23) C. Wessel, *ibid.*, p.8.

vision relativement précise de ce que l'on appelle "opération extérieure", c'est-à-dire de l'action d'un élément du corps de base sur les éléments de l'ensemble explicitement considéré. Sinon, comment devons-nous comprendre la différence scripturale qu'il marque entre "$\frac{ba}{2}$" et "$\frac{1}{2}$ ab" ? Le premier est en quelque sorte, bien que la "nature" de l'objet rentre alors en compte, un "segment" deux fois moindre que le "segment ba", tandis que le second exprime l'action ou la mise en relief du bilan de celle-ci, d'un "scalaire" (le mot n'est pas de lui) sur le "segment ab". Le premier n'exige aucunement l'apport d'une nouvelle notion, sinon celle de pouvoir comparer des "segments" entre eux ; le second implique que l'on doit définir préalablement une nouvelle opération nous permettant d'affirmer qu'un "segment" multiplié par un "scalaire" reste toujours un "segment". On laissera cette hypothèse car, nous l'avons déjà dit, Wessel limite volontairement la portée de son mémoire et ne fait aucune allusion supplémentaire qui eut permis d'en dire plus en la matière. Venons-en au premier bilan :

Wessel nous montre qu'à deux "segments", on peut en associer un troisième, unique, appelé "somme" des deux premiers (loi de composition) ; que la "somme" ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend les "segments" (associativité, commutativité) ; qu'à un "segment" donné, on peut en associer un autre qui lui est opposé (existence de l'élément symétrique) et que leur "somme" est nulle (existence de l'élément neutre ; "segment" n'ayant aucun "effet" sur la "somme"). Précisons que cette structure de "groupe abélien" ainsi obtenue et les "axiomes" mis entre parenthèses ne sont pas nommés par l'auteur ; il montre tout simplement que les "quantités" utilisées vérifient les mêmes "relations" que celles des nombres "ordinaires" dans le cas de l'addition. Le caractère objectuel de ces "relations" n'est souligné à aucun moment ; nous savons qu'il aurait pu en être tout autrement.

L'opération que l'on s'accorde à appeler "multiplication" a toujours constitué un problème délicat.

La règle pour multiplier deux "segments de droite" n'est pas compliquée lorsqu'on considère des "segments" non "qualifiés", c'est-à-dire des "segments" qui ne représentent pas des grandeurs"positives" ou "négatives" (Wessel les appelle des "segments absolus"). Il suffit pour cela de se reporter à Descartes :



"La multiplication :
Soit, par exemple, AB l'unité, et qu'il falle multiplier BD par BC ; je n'ay qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication".[24]

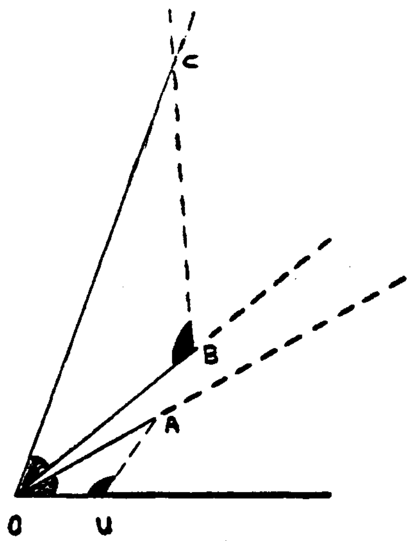
Mais, si l'on sait faire un tel produit, comment rendre "intuitif" le produit $(-1).(-1) = 1$ par exemple ?

Produit de deux segments

(£.4) "Le produit de deux segments de droite doit, sous tous les rapports, être formé avec l'un des facteurs de la même manière que l'autre facteur est formé avec le segment positif ou absolu qu'on a pris égal à 1 ; c'est-à-dire que :
1°) les facteurs doivent avoir une direction telle qu'ils puissent être placés dans le même plan que l'unité positive ;
2°) quant à la longueur, le produit doit être à l'un des facteurs comme l'autre est à l'unité ;
3°) en ce qui concerne la direction du produit, si l'on fait partir de la même origine l'unité positive, les facteurs et le produit, celui-ci doit être dans le plan de l'unité et des facteurs, et doit dévier de l'un des facteurs d'autant de degrés et dans le même sens que l'autre facteur dévie de l'unité, en sorte que l'angle de direction du produit ou sa déviation par rapport à l'unité positive soit égale à la somme des angles de direction des facteurs".[25]

Ainsi, si DA et OB sont deux "segments" donnés, leur produit OC se représentera facilement par la figure suivante :

(24)R.Descartes,"La Géométrie",Paris,1664,p.4.
(25)C.Wessel,ibid.,p.9.



La multiplication, pour être parfaitement définie, impose le choix d'une "unité absolue", c'est-à-dire le choix d'un "segment absolu" égal à 1. Une fois précisé ce point fondamental, le produit des "segments" OA et OB se construit simplement en ne faisant appel qu'à des notions de la Géométrie des "Eléments". On construit sur OB un triangle OBC directement semblable au triangle OUA. On serait arrivé au même résultat en construisant sur OA un triangle OAC directement semblable au triangle OUB. Ces deux possibilités se ramènent à écrire que : OC = OA.OB = OB.OA, or ceci est vrai quels que soient les "segments" choisis, la "multiplication" ainsi caractérisée est donc une opération commutative. Ce que Wessel résume en disant que la "multiplication de deux segments" ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les prend.

De la construction précédente, on peut alors tirer le point 3 de Wessel. On constate <u>de visu</u> que le "segment" OC est déterminé de la façon suivante :

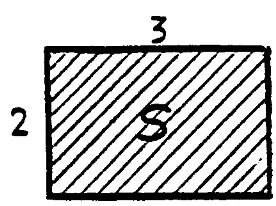
1°) la mesure de sa longueur est le produit des mesures correspondantes aux longueurs des "segments" OA et OB ;

2°) sa direction s'obtient en faisant tourner, autour du point O et dans le sens trigonométrique, la demi-droite OU d'un angle égal à la somme des angles dont il faudrait faire tourner (toujours dans le même sens) la demi-droite OU pour l'amener respectivement en coïncidence avec les demi-droites OA et OB.

Cette construction est plus facile à utiliser de nos jours que la précédente, mais nous voyons bien qu'elle ne pouvait pas être conçue indépendamment de la première et ne peut être appréhendée qu'après de nombreuses observations faites à partir de celle-ci.

Cette remarque nous conduit elle aussi à un nouveau constat. Si les géomètres grecs surent construire sans difficulté des triangles semblables (théorème de Thales par exemple), ils ne pouvaient en aucune manière faire l'interprétation précédente ; il faudra attendre, en particulier, les conceptions cartésiennes pour pouvoir y parvenir. Il faut, en effet, tenir compte que, pratiquement jusqu'à Descartes, un tel produit ne pouvait engendrer qu'une surface. Plusieurs étapes nous conduiront à la conception de Wessel.

Le "nombre" représenta une "grandeur" géométrique, mais se plia aux contraintes de la géométrie. Prenons à titre d'exemple la figure suivante :



Le produit $2 \times 3 = 6$ nous donne la surface hachurée. Une première généralisation nous permettra d'écrire les "nombres" 2 et 3 au moyen de symboles a et b. Le produit a.b continuera pendant une période, cette fois plus courte, à représenter une surface S (Viète), ici en l'occurrence celle d'un rectangle de côtés a et b. Ces symboles deviendront à leur tour capables de représenter n'importe quel "nombre", ainsi par exemple, a.b, suivant les valeurs que l'on donnera aux symboles a et b, représentera la surface d'un carré ou d'un rectangle (i.e., $a = b$ ou $a \neq b$) ; on est amené à comparer des symboles représentant des "nombres", non les "nombres" eux-mêmes. Une nouvelle conception viendra à son tour accentuer la généralisation ainsi élaborée :

> "Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction de racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division ; ainsi n'a-t-on d'autre chose à faire en géométrie, touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que de leur en ajouter d'autres, ou en ôter ; ou bien en ayant une, que je nommerais l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième, qui soit à l'une de ces deux, comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division ; ou enfin trouver une ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité, et quelque autre ligne ; ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrais pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie afin de me rendre plus intelligible".[26]

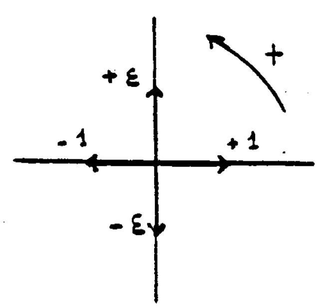
On pourra, compte tenu de ces prolégomènes, écrire : (I) $ab = c$ (cette transformation n'est pas encore très nette chez Descartes : on constate encore dans son symbolisme mathématique une fidélité scripturale aux "principes d'Homogénéité" de Viète). Cette égalité qui se distingue fondamentalement de celle qu'aurait pu donner Viète : (II) $ab = C$; dans cette dernière, on voit une différence d'écriture entre les deux membres, le second (C) représente un nombre qui ne peut être conçu que comme le produit de deux nombres (on reste profondément attaché à l'univers géométrique, le produit des deux "côtés" d'un rectangle correspond à sa "surface") ; dans la première égalité les symboles ne se distinguent pas ; ils représentent des "objets" de même "nature".

---

(26) R. Descartes, ibid., pp. 3-4.

Ce détachement de l'univers géométrique ne va pas sans heurts. Rappelons-nous que ces symboles, alors originellement attachés à des "nombres", plongeront de nombreux mathématiciens dans des abîmes de perplexité quand il s'agira, par un juste retour, de représenter géométriquement $a^2 = -1$; comment un carré peut-il avoir une "surface" négative ? Comment la longueur du côté peut-elle être égale à $\sqrt{-1}$? L'égalité (I) conduira alors à "constater" que le produit d'une droite par une autre est encore une droite. Il serait intéressant de pouvoir accentuer l'influence du milieu intellectuel propre à donner lieu à cette découverte. Le XVIIIè siècle ne cesse de parler de "forces" s'exerçant sur un corps, il compose leurs actions, se réfère explicitement à la géométrie en utilisant, par exemple, le "parallélogramme des forces" ; la dynamique et la mécanique conduisent presque naturellement à cette conception.

(£.5) "Désignons par + 1 l'unité positive, par + ε une autre unité perpendiculaire à la première et ayant la même origine : alors l'angle de direction de + 1 sera égal à 0°, celui de − 1 à 180°, celui de + ε à 90° et celui de − ε à − 90° ou à 270°".[27]



Ainsi toutes les égalités suivantes grâce à ce qui a été défini précédemment se trouvent parfaitement justifiées :

(+ 1) . (+ 1) = + 1 (la somme des angles est nulle et le produit des longueurs est égal à 1)

(27) C. Wessel, <u>ibid.</u>, p.9.

$(+1) \cdot (-1) = -1$ (la somme angulaire) $0° + 180° = 180°$, le produit des longueurs : $1 \times 1 = 1$)

$(-1) \cdot (-1) = +1$ (la somme angulaire $= 180° + 180° = 360°$ (1 révolution complète $= 0°$), le produit des longuers $= 1 \times 1 = 1$)

$(+1) \cdot (+\varepsilon) = +\varepsilon$ ($0° + 90° = 90°$; $1 \times 1 = 1$)

$(+1) \cdot (-\varepsilon) = -\varepsilon$ ($0° + 270° = 270°$; $1 \times 1 = 1$)

$(-1) \cdot (+\varepsilon) = -\varepsilon$ ($180° + 90° = 270°$; $1 \times 1 = 1$)

$(-1) \cdot (-\varepsilon) = +\varepsilon$ ($180° + 270° = 360° + 90° \simeq 90°$; $1 \times 1 = 1$)

$(+\varepsilon) \cdot (+\varepsilon) = -1$ ($90° + 90° = 180°$; $1 \times 1 = 1$)

$(+\varepsilon) \cdot (-\varepsilon) = +1$ ($90° + 270° = 360° \simeq 0°$; $1 \times 1 = 1$)

$(-\varepsilon) \cdot (-\varepsilon) = -1$ ($270° + 270° = 360° + 180° \simeq 180°$; $1 \times 1 = 1$)

Wessel en déduisit alors que $\varepsilon = \sqrt{-1}$, facile conséquencede la comparaison des expressions: $(\pm\sqrt{-1})^2 = -1$ et $(\pm \varepsilon)^2 = -1$.

(£.6) "Le cosinus d'un arc de cercle ayant pour origine l'extrémité de son rayon + 1 est le segment de ce rayon ou du rayon diamétralement opposé qui commence au centre et se termine à la projection orthogonale de l'autre bout de l'arc. Le sinus du même arc est mené perpendiculairement de l'extrémité du cosinus à l'extrémité de l'arc".[28]

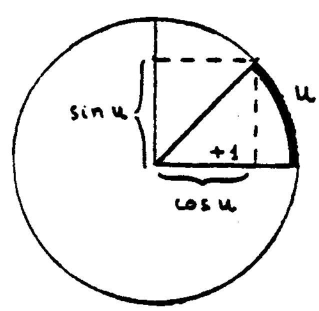


fig -a-

Notons qu'à l'époque de Wessel et encore dans une grande partie du XIXe siècle, on continue à ne pas faire de distinction entre "arc de cercle" et "angle" pour les fonctions trigonométriques. C'est ce qui explique que l'on puisse parler de sinus ou de cosinus d'un arc de cercle.

(28) C. Wessel, ibid., p. 10.

Une fois ce rappel fait, Wessel montre alors que d'après les paramètres précédents, on est conduit sans aucune incohérence à poser :

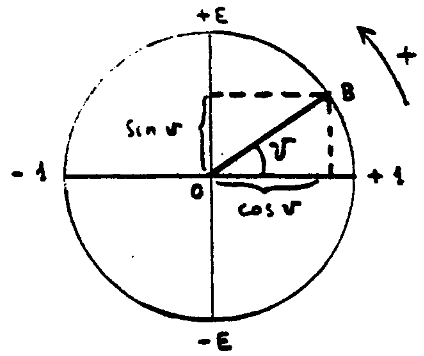


fig -b-

"D'après le §. 5 , le sinus d'un angle droit est donc égal à $\sqrt{-1}$. Posons $\sqrt{-1} = \varepsilon$; désignons par v un angle quelconque et par sin v un segment de la même longueur que le sinus de l'angle, mais positif lorsque l'arc qui mesure l'angle se termine sur la première demi-circonférence, négatif lorsqu'il se termine sur la dernière demi-circonférence. Alors d'après les §. 4 et 5, sin v exprimera le sinus de l'angle v en direction et en grandeur".[28]

Ne manquons pas d'observer que si Wessel nous a montré que "ε" est en fait "$\sqrt{-1}$", il s'empresse de retourner à ce premier comme s'il ressentait une certaine gêne visuelle à utiliser ce dernier ; symbole beaucoup trop évocateur du résultat "impossible" d'une opération hâtivement généralisée.[29]

Si l'on tient compte de ce que Wessel nous a appris dans les précédents paragraphes, on déduit à partir de la figure (b) :

$$OB = OA + AB = \cos v + \varepsilon \sin v ;$$

ainsi, un "segment indirect" unitaire u faisant un angle v avec l'"unité positive ou absolue" s'exprime tout simplement par une formule qui, pour nous, est devenue classique et intuitive (au symbole "ε" près que nous écrivons "i"). Nous avons vu que le produit de deux "segments" s'exprimait très simplement. Le produit de deux "segments indirects" unitaires, dont l'un fait un angle u et l'autre v avec l'"unité absolue", s'écrira donc :

$$\cos (u + v) + \varepsilon \sin (u + v)$$

---

(29) On peut aussi faire une autre observation, celle-la beaucoup plus moderne: Il semble que si Wessel choisit cette notation plutôt que $\sqrt{-1}$, c'est qu'effectivement $\sqrt{-1}$ serait traité comme un nombre, alors que ε est un vecteur unité.

d'où la formule classique :

$$(\cos u + \varepsilon \sin u)(\cos v + \varepsilon \sin v) =$$

$$= \cos(u + v) + \varepsilon \sin(u + v).$$

L'auteur constate que cette dernière égalité peut aussi s'écrire :

$$(\cos u + \varepsilon \sin u)(\cos v + \varepsilon \sin v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$+ \varepsilon (\cos u \sin v + \sin u \cos v)$$

grâce aux formules trigonométriques :

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\sin(u + v) = \cos u \sin v + \sin u \cos v.$$

> "On peut, dit-il, et sans aucune difficulté, démontrer ces formules dans tous les cas, que les deux angles ou seulement l'un d'eux soient positifs ou négatifs, plus grands ou plus petits qu'un angle droit. Donc les théorèmes qu'on en peut déduire sont exacts dans toute leur généralité".[30]

Jusqu'à présent, nous avons eu à faire à des "segments indirects unités", Wessel étend donc lesremarques qu'il vient de faire à des "segments" quelconques :

> (£.9)"Le segment de droite représenté par $\cos v + \varepsilon \sin v$ est un rayon de cercle dont la longueur est égale à 1 et dont la déviation par rapport à $\cos 0°$ est égal à l'angle v. Il s'ensuit que $r. \cos v + r.\varepsilon \sin v$ désigne un segment de droite dont la longueur est égal à r et dont l'angle de direction est v".[31]

En effet, dit-il, il nous suffit d'observer que si l'on s'arrange pour rendre r fois plus grands les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, l'hypothénuse sera elle aussi r fois plus grande et ce, sans que les angles du triangle en soient modifiés. Cette affirmation est parfaitement légitime puisqu'elle découle directement de la définition qu'il a donnée au £.1 de la somme de deux "segments indirects". L'hypothénuse d'un

(30)C.Wessel, ibid., pp.10-11.
(31)C.Wessel, ibid., p.11.

triangle est égale à la somme des deux autres côtés. Donc on conclut sans rien introduire de nouveau que : r. cos v + r. ε sin v = r (cos v + ε sin v) ;

> "Voilà l'expression générale d'un segment de droite quelconque, qui est situé dans le plan de cos 0° et de ε sin 90°, qui dévie de v degrés par rapport à cos 0° et dont la longueur est r". 31

Nous observons par cette ultime déclaration que le propos de Wessel est déjà atteint : il justifie l'emploi de "nombres imaginaires" dans le calcul et y parvient en leur donnant droit de cité dans la géométrie par l'intermédiaire de "segments indirects", ces derniers contenant comme cas particuliers les "segments directs".

Mais tout n'est pas dit ; il reste à montrer que ce calcul répond bien à certaines sollicitations géométriques et à préciser l'opération inverse de la multiplication entre des "segments indirects".

> (£.10) "Si nous désignons par a, b, c, d, des segments de droite directs (c'est-à-dire que leurs "longueurs" contribuent entièrement à la diminution ou à l'augmentation de la distance "absolue" d'un point à un plan fixe) d'une longueur quelconque, positifs ou négatifs, et que les deux segments indirects a + ε b et c + ε d se trouvent dans le même plan que l'unité absolue, on pourra trouver leur produit même dans le cas où leurs déviations par rapport à l'unité absolue sont inconnues". 31

Il suffit pour cela que l'égalité

$$(a + \varepsilon\, b)\ (c + \varepsilon\, d) = ac - bd + \varepsilon\ (ad + bc)$$

soit toujours vraie.

> "Démonstration :
> Soit A la longueur du segment a + ε b et v degrés sa déviation par rapport à l'unité absolue ; soit C la longueur du segment c + ε d et u sa déviation ; alors, d'après le £ 9, on aura : a + ε b = A. cos v + A. ε sin v
> c + ε d = C. cos u + C. ε sin u

et par conséquent : a = A cos v
b = A sin v
c = C cos u
d = C sin u (£.3)

Or, d'après le & 4, on aura :
(a + ε b) (c + ε d) = A.C. [cos (v + u) + ε sin (v + u)] =
A.C. (cos v cos u - sin v sin u + ε (cos v sin u + cos u sin v))
Donc, en remplaçant A.C. cos v cos u par ac et A.C. sin v sin u par bd, etc., on obtiendra les résultats qu'il fallait démontrer"[32]

Dans ce qui précède, plusieurs points appellent l'attention : Wessel impose comme condition au départ que les "segments indirects" soient dans le même plan ; il souligne donc d'une part que la théorie qu'il élabore est propre au plan et d'autre part nous informe qu'il s'est posé le problème de son extension à l'espace. A la page suivante, il précise de plus :

"Mais si l'on avait à multiplier des segments de droite qui ne se trouvent pas tous les deux dans un plan passant par l'unité absolue, on ne pourrait appliquer la règle précédente. C'est pour cette raison que je ne m'occupe pas de la multiplication de tels segments"[33]

Il accentue dans sa démonstration le caractère fondamental de l'égalité entre deux "segments indirects" :

$$a + \varepsilon b = c + \varepsilon d \Longrightarrow a = c \text{ \underline{et} } b = d,$$

qu'il tire du & 3. En effet, il dit dans ce dernier :

"Si la somme de plusieurs longueurs, largeurs et hauteurs, est égale à zéro, la somme des longueurs, celle des largeurs et celle des hauteurs, prises séparément, seront aussi égales à zéro". [34]

Il serait ici intéressant de mettre en relief un point soulevé par W.F. Floyd.[35] Ce dernier fait remarquer que l'écriture utilisée pour le "segment indirect" est incorrecte. Il considère que la forme a + ε b est inconsistante dans son symbolisme. Ce point de vue est parfaitement légitime, mais repose néanmoins sur une connaissance approfondie du calcul vectoriel,

(32) C. Wessel, ibid., pp. 11-12.
(33) C. Wessel, ibid., p. 12.
(34) C. Wessel, ibid., p. 9.
(35) W.F. Floyd, "Graphical representation of complex numbers", in Nature (August 10, 1935), p. 224.

même si l'écriture qu'il propose à la place , a . 1 + b . ε , peut sembler plus "intuitive". Le caractère dynamique que l'on trouve dans le travail de Wessel corrobore la remarque de Floyd, mais dans le cas présent, le reproche n'a pas lieu d'être. En effet, si l'on considère un élément d'un espace vectoriel de dimension 2 et que nous prenions comme base les "vecteurs" 1 et ε, cet élément s'écrira sous la forme unique : a.1 + b. ε , où a et b sont des "scalaires" (c'est-à-dire des éléments du corps de base); or, dans l'expression a + ε b, a et b sont aussi des "segments" ; Wessel prend soin de dire en énonçant son problème :

"Si nous désignons par a, b, c, d des segments de droite...".

On peut donc aisément comprendre qu'il écrive a. (+ 1) = a, comme le résultat d'une opération <u>interne</u>, non <u>externe</u>, telle que l'a cru Floyd.

Les paragraphes 11 à 15 exposent la division et l'extraction des racines.

(£.11) "Le quotient multiplié par le diviseur doit reproduire le dividende. Il n'est donc pas nécessaire de démontrer que les trois segments doivent se trouver dans un plan passant par l'unité absolue, car cela résulte immédiatement de la définition donnée au £. 4". 33

Ainsi, si l'on se propose de diviser

A (cos v + ε sin v) par B (cos u + ε sin u)

le quotient sera égal à : $\frac{A}{B}\left[\cos(v-u) + \varepsilon \sin(v-u)\right]$;

c'est-à-dire qu'il correspondra à un "segment indirect" faisant un angle v − u avec l'"unité absolue" et dont la "longueur" est égale à $\frac{A}{B}$. En effet,

$\frac{A}{B}\left[\cos(v-u) + \varepsilon \sin(v-u)\right]$. B (cos u + ε sin u) correspond, d'après & 7 à : $\frac{A}{B} . B . \left[\cos(v-u+u) + \varepsilon \sin(v-u+u)\right]$

d'où le résultat : $A\ (\cos v + \varepsilon \sin v)$.

(£.12) "Si a, b, c, d sont des segments directs et que $a + \varepsilon\ b$ et $c + \varepsilon\ d$ se trouvent dans un même plan passant par l'unité absolue, on aura :

$$\frac{1}{c + \varepsilon d} = \frac{c - \varepsilon d}{c^2 + d^2}$$

et le quotient sera égal à :

$$\frac{a + \varepsilon b}{c + \varepsilon d} = (a + \varepsilon b) \cdot \frac{1}{c + \varepsilon d} = (a + \varepsilon b) \cdot \frac{c - \varepsilon d}{c^2 + d^2}$$

$$= [ac + bd \quad \varepsilon (bc - ad)] \quad : (c^2 + d^2)."$$

La démonstration se déduit des paragraphes précédents sans faire appel à de nouvelles notions :

$$a + \varepsilon b = A\ (\cos v + \varepsilon \sin v) \qquad (£.9)$$

et $\quad c + \varepsilon d = C\ (\cos u + \varepsilon \sin u)$

d'où : $\quad c - \varepsilon d = C\ (\cos u - \varepsilon \sin U) \qquad (£.3)$

On a : $\quad (c + \varepsilon d)\ (c - \varepsilon d) = c^2 + d^2 = C^2\ ; \qquad (£.10)$

d'où : $\quad \frac{c - \varepsilon d}{c^2 + d^2} = \frac{1}{C}\ (\cos u - \varepsilon \sin u)$;

soit encore: (£.11)

$$\frac{c - \varepsilon d}{c^2 + d^2} = \frac{1}{C}\ [\cos(-u) + \varepsilon \sin(-u)] = \frac{1}{C(\cos u + \varepsilon \sin u)} = \frac{1}{c + \varepsilon d}$$

et finalement :

$$\frac{c - \varepsilon d}{c^2 + d^2} \cdot (a + \varepsilon b) = \frac{A}{B}\ [\cos (v - u) + \varepsilon \sin (v - u) = \frac{a + \varepsilon b}{c + \varepsilon d} \qquad (£.11$$

"Les quantités indirectes de cette nature partagent donc avec les quantités directes la propriété que, si le dividende est une somme, on obtient, en divisant chaque terme de cette somme par le diviseur, plusieurs quotients dont la somme est le quotient cherché".36

Le rapport de deux "segments indirects" est encore un "segment indirect" ; le produit de deux "segments" $a + \varepsilon b$ et $a - \varepsilon b$ nous montre que leur "longueur" commune A est égale à $\sqrt{a^2 + b^2}$. Remarquons au passage que la substitution de "segments indirects" par "grandeurs indi-

(36) C. Wessel, *ibid.*, p. 13.

rectes" met l'accent sur le souci qu'a l'auteur d'identifier des "objets géométriques" à des "objets algébriques", justifiant de cette manière la légitimité de l'emploi de "nombres impossibles".

Les précédents calculs et ceux des £. 13 à 16 ne sont pas nouveaux, plutôt présentent-ils un certain recul par rapport à ceux obtenus par ses proches prédécesseurs. Très tôt, la résolution de l'équation du troisième degré et, plus généralement, l'étude des expressions de la forme $\sqrt[n]{a+\sqrt{-1}\,b} + \sqrt[n]{a-\sqrt{-1}\,b}$ firent appel à l'utilisation de ces formules mises définitivement en forme par Euler et Moivre (en particulier). L'intérêt de l'apport de Wessel est fondamental et original dans la mesure où toutes ces relations trigonométriques s'inscriront dans une figure géométrique. Ainsi, par exemple, "$\sqrt[3]{4\sqrt{3}+4\sqrt{-1}}$" se représentera par un "segment indirect" de "longueur 2", faisant avec l'"unité absolue" un angle de 10°. Il suffit pour cela de faire le calcul suivant :

$$\sqrt[3]{4\sqrt{3}+4\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)} = \sqrt[3]{8(\cos 30^\circ+\sqrt{-1}\sin 30^\circ)}$$

$$= 2(\cos 30^\circ+\sqrt{-1}\sin 30^\circ)^{\frac{1}{3}} = 2(\cos 10^\circ+\sqrt{-1}\sin 10^\circ)$$

Le lecteur pourra constater que l'on n'a pas fait usage de "π" pour rendre le calcul précédent plus "esthétique". L'emploi de cette lettre nous eut conduit à expliquer que Wessel lui octroie la valeur de 360°. Une précision a été faite précédemment quant à l'usage indistinct fait par lui et beaucoup de ses contemporains des notions d'"arc de cercle" et d'"angle". On comprend mieux dès lors pourquoi l'abréviation "π" du mot grec "περιφερία", qui veut dire : "périmètre d'une circonférence", puisse être amenée à représenter 360 degrés.

Si la découverte de Wessel est fondamentale par le fait qu'elle rendra de nombreux services en analyse, elle peut être vue comme la cause d'une certaine perte d'intérêt des mathématiciens à l'égard de la géométrie "classique". En s'offrant à la traduction algébrique, la construction géométrique, qui nous affranchissait alors du calcul arithmétique, se trouvera à son tour, à cause de son incapacité à traduire le mouvement, délaissée au profit de l'algèbre - "sorte de mécanique qui, après avoir été pensée, inventée par la raison, dispense ensuite de raisonner" - qui nous épargnera de la "nécessité de construire".[37]

Plutôt que de nous intéresser aux deux seuls exemples que donne Wessel nous enseignant l'efficacité de sa théorie,
nous porterons nos réflexions sur quelques points caractéristiques de son symbolisme mathématique et sur la troisième partie de son essai intitulée "Sur la représentation de la direction d'un rayon dans une sphère".[38]

A propos des côtés d'un polygone plan :

1. Leurs "longueurs" sont désignées par les nombres pairs II, IV, VI, VIII, etc... ;

2. leurs déviations (en degrés), relativement au côté précédent qu'on aura prolongé, seront notées par les nombres impairs I, III, V, VII, etc... ;

3. I', III', V', VII', etc. sont les expressions :
cos I + ε sin I, cos III + ε sin III, cos V + ε sin V, etc... ;

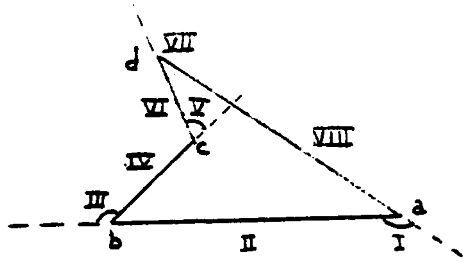
4. $I^{-\prime}$, $III^{-\prime}$, $V^{-\prime}$, etc. représentent respectivement :
cos (- I) + ε sin (- I), cos III - ε sin III, cos V - ε sin V, etc.
Cette dernière notation se retient assez facilement en observant que :

$$\frac{1}{I'} = \frac{1}{\cos I + \varepsilon \sin I} = \cos I - \varepsilon \sin I = I^{-\prime} \;;$$

$I^{-\prime}$ s'appelle la "quantité réciproque" de I'. Les déviations (2.) sont positives ou négatives "suivant qu'elles ont le même sens que le mouvement diurne du soleil ou le sens inverse".

(37) A.Rey,"L'Apogée de la science technique grecque:L'essor de la Mathématique"(Paris,1948),p.IX.
(38) C. Wessel, ibid., p.23.

Si l'on prend comme polygone plan particulier un quadrilatère abcd :



alors, de l'égalité ab + bc + cd + da = 0, et compte tenu des points 1. - 4., on a : II + IV.III' + VI.III'. V' + VII.III'.V'. VII' = 0 (la somme des "angles" du polygone est nulle ou égale à un nombre entier de révolutions).

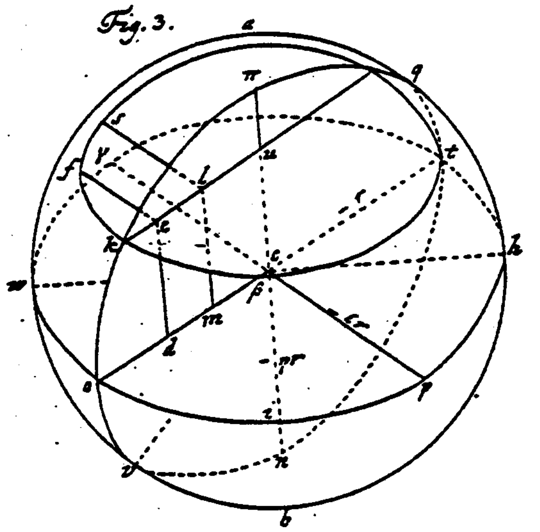
Sa méthode, "qui n'est pas algébrique", pour déterminer "la direction des segments situés dans des plans différents" n'est pas une "extension" de la théorie qu'il développe dans le plan. Pour nous convaincre, il suffirait de dire que Wessel, implicitement et explicitement, nous met constamment en garde dans les vingt premières pages de son "Essai" contre l'affirmation contraire ; l'occasion nous sera donnée plus tard de revenir sur ce point.

Laissons-le tout d'abord s'exprimer de façon à avoir un échantillon significatif du "style" qui le caractérise :

(£.24) "Supposons que dans une sphère deux rayons horizontaux fassent des angles droits et que tous deux soient perpendiculaires à un troisième rayon. Supposons encore que l'un des rayons horizontaux aille du centre à gauche et soit égal à r, que l'autre aille du centre en avant et soit égal à ε r, que le rayon vertical aille du centre en haut et soit égal à η r, et que les rayons diamétralement opposés soient - r, - ε r, - η r. La lettre r désigne la longueur du rayon ; les unités ε et η sont toutes deux perpendiculaires au rayon + 1 et, par rapport à celui-ci η^2 et ε^2 seront toutes deux égales à - 1 (£. 5)"[38]

(£.25) "Le plan déterminé par les quatre rayons r, $-r$, ηr, $-\eta r$ et le plan déterminé par r, $-r$, εr, $-\varepsilon r$, font un angle droit et coupent la sphère suivant deux grands cercles dont j'appelle celui qui passe par r et ηr le cercle vertical et celui qui passe par les rayons horizontaux r et εr l'horizon. Nous compterons les arcs du cercle vertical et ceux de ses parallèles à partir du point d'intersection à gauche avec l'horizon, positifs en haut, négatifs en bas. Les arcs horizontaux seront comptés à partir du cercle vertical, positifs dans le sens du mouvement du soleil et négatifs dans le sens inverse. Désignons par exemple l'horizon (fig. 3) par $ow\gamma hpi$, un cercle parallèle par $kfs\beta$, le cercle vertical par $ok\eta qnv$, les pôles de l'horizon par π et n, et ceux du cercle vertical par p et γ (...)".[39]

Fig. 3.



$$co = r,\ ct = -r,\quad c\gamma = \varepsilon r,\ cp = -\varepsilon r,\ c\pi = \eta r$$

$$cn = -\eta r,\ o\gamma = +90°,\ op = -90°,\ o\pi = +90°\ ;\ on = -90°\ ;$$

"Les arcs du cercle parallèle doivent être comptés à partir de k, positifs à gauche et négatifs à droite".[40]

(£.26) "Menons un segment de droite cd du centre c de la sphère (fig. 3) à un point d du rayon commun aux plans de l'horizon et du cercle vertical ; menons un autre segment de

(39) C. Wessel, ibid., pp. 23-24.
(40) C. Wessel, ibid., p. 24.

> droite de du point extrême de cd parallèlement à l'axe π n de l'horizon, et enfin de l'extrémité de de un troisième segment de droite ef parallèle à l'axe p γ du cercle vertical. Ces trois segments seront les coordonnées du point f où se termine ce dernier segment ef. Le premier cd est l'abcisse du point f et sera désigné par x ; il a même direction soit que le rayon + r, soit que le rayon - r. Le second et le troisième segment, de et ef, seront les coordonnées du point f. Le second de représente la distance du point f au plan de l'horizon ; il sera désigné par η y, parce qu'il est parallèle à η r ou à - η r. Le troisième ef est la distance du point f au plan du cercle vertical et nous le désignerons par ε z, parce qu'il est parallèle au rayon ε r ou à - ε r. Le troisième ef (= ε z) fait un angle droit avec le second de (= η y) et celui-ci, η y, un angle droit avec le premier cd (= x)".[40]

On est donc conduit à poser tout naturellement qu'un point ayant pour "coordonnées x, η y et ε z", est le "point extrême" d'un rayon que l'on écrira, conformément à la théorie faite dans le plan, x + η y + ε z. Bien sûr, l'auteur ne marque aucun temps d'arrêt en écrivant que $\varepsilon^2 = \eta^2 = -1$. Pourquoi le ferait-il ? Le "théorème fondamental de l'Algèbre", qui assure qu'une équation a autant de racines que l'indique son degré, n'est pas vérifié ; en effet, une simple équation comme $x^2 + 1 = 0$ devrait avoir deux racines ; or, ici, elle en admet quatre : + ε , - ε , - η et + η ! Wessel ne se serait-il pas rendu compte d'une telle évidence ruinant sa méthode ? Une telle question ne peut être posée ; elle n'a pas lieu d'être. L'avertissement de Wessel est on ne peut plus clair : sa méthode "*géométrique*" n'a rien à voir avec "l'algèbre".

Prétendre qu'il ignorait le "théorème de d'Alembert" reviendrait à affirmer qu'il n'avait aucune compétence en matière d'algèbre ; son mémoire nous prouve amplement le contraire.

Le point devenant alors mobile amène l'auteur à décomposer une rotation sur la sphère en rotations verticales et horizontales dont les axes respectifs sont ceux portant les "unités absolues" ε et η.

Une rotation d'un angle I autour de l'axe vertical aura pour effet de laisser invariante la composante "η y" du rayon x + η y + ε z, car la distance d'un point décrivant un cercle parallèle au grand cercle horizontal restera inchangée. Le raisonnement est le même pour une rotation d'un angle II autour de l'axe portant "l'unité absolue ε ", mais cette fois, c'est la composante " ε z" qui n'est pas modifiée.

De telles rotations sont représentées par l'unique symbole ",,". ainsi, les deux opérations effectuées précédemment s'écriront :

- 1 - $(x + \eta y + \varepsilon z)$,, $(\cos I + \varepsilon \sin I)$ (rotation horizontale)
- 2 - $(x + \eta y + \varepsilon z)$,, $(\cos II + \eta \sin II)$ (rotation verticale),

Après avoir remarqué que : ηy ,, $(\cos I + \varepsilon \sin I) = \eta y$,

εz ,, $(\cos II + \eta \sin II) = \varepsilon z$,

et que les opérations : $(x + \varepsilon z)$,, $(\cos I + \varepsilon \sin I)$

$(x + \eta y)$,, $(\cos II + \eta \sin II)$

se comportent comme les multiplications définies dans sa théorie du plan, c'est-à-dire qu'elles s'écrivent respectivement :

$(x + \varepsilon z)(\cos I + \varepsilon \sin I)$ et

$(x + \eta y)(\cos II + \eta \sin II)$,

Wessel en vient ensuite à poser, compte tenu de la distributivité (qu'il ne nomme pas) de l'opération (,,) :

- 1'- $(x + \eta y + \varepsilon z)$,, $(\cos I + \varepsilon \sin I) =$

$= (x + \varepsilon z)$,, $(\cos I + \varepsilon \sin I) + \eta y$,, $(\cos I + \varepsilon \sin I) =$

$= (x + \varepsilon z)(\cos I + \varepsilon \sin I) + \eta y =$

$= (x \cos I - z \sin I) + \eta y + \varepsilon (x \sin I + z \cos I)$

- 2' - $(x + \eta y + \varepsilon z)$;, $(\cos II + \eta \sin II) =$

$= (x \cos II - y \sin II) + \eta (x \sin II + y \cos II) + \varepsilon z$.

Les coordonnées initiales x, y, z, du point mobile deviennent alors, une fois le déplacement effectué, dans le premier cas :

$$\begin{cases} x' = x \cos I - z \sin I \\ y' = y \\ z' = x \sin I + z \cos I \ ; \end{cases}$$

et dans le second :

$$\begin{cases} x'' = x \cos II - y \sin II \\ y'' = x \sin II + y \cos II \\ z'' = z. \end{cases}$$

Wessel connaît la notation exponentielle, mais n'en fait pas usage dans cette méthode ; il aurait pu utiliser, par exemple, $e^{+\varepsilon I}$ au lieu de $\cos I + \varepsilon \sin I$. Nous avons respecté cette notation malgré sa lourdeur car elle appartient à son style. D'autre part, il se peut fort bien que ce refus de simplification soit directement lié à son souci d'exposer une méthode qui se veut géométrique (néanmoins, il utilise $e^{a + \sqrt{-1}\, b}$, au £. 16).

Deux rotations successives autour d'un même axe se composent très simplement : si la première correspond à un déplacement le long d'un "arc de cercle" de I degrés et la seconde de III degrés, leur composition correspondra à une rotation de I + III degrés (rappelons que ces angles peuvent être indépendamment positifs, négatifs ou nuls) ; d'où :

$$(x + \eta y + \varepsilon z) \;,,\; (\cos I + \varepsilon \sin I) \;,,\; (\cos III + \varepsilon \sin III) =$$
$$= (x + \eta y + \varepsilon z) \;,,\; (\cos (I + III) + \varepsilon \sin (I + III)\ ).$$

L'exemple considéré ici correspond à des rotations autour de l'axe vertical porteur de l'"unité absolue η" ; deux rotations successives de II degrés et IV degrés autour de l'axe horizontal correspondant à l'"unité absolue ε", conduiraient au même constat, soit :

$$(x + \eta y + \varepsilon\ z) \,,, (\cos II + \eta \sin II) \,,, (\cos IV + \eta \sin IV) =$$
$$= (x + \eta y + \varepsilon z) \,,, (\cos (II + IV) + \eta \sin (II + IV).$$

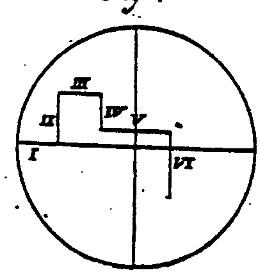
Ces résultats généraux nous permettent de prendre en considération les deux résultats significatifs (particuliers) suivants :

$$x + \eta y + \varepsilon z = (x + \eta y + \varepsilon z) \,,, (\cos I + \varepsilon \sin I) \,,, (\cos I - \varepsilon \sin I)$$
$$\text{"} \qquad = (x + \eta y + \varepsilon z) \,,, (\cos II + \eta \sin II) \,,, (\cos II - \eta \sin II).$$

Sachant comment se déplace un point sur des cercles verticaux et horizontaux, il nous reste à savoir comment ce même point se déplace d'une manière générale sur une sphère ; pour cela, il suffira de combiner alternativement les déplacements qui viennent d'être caractérisés :

> "Déplaçons un même point sur les parallèles à l'horizon et sur les parallèles au cercle vertical, en lui faisant décrire alternativement un arc horizontal et un arc vertical, et désignons les arcs décrits par I, II, III, IV, V, VI, dans l'ordre où ils se suivent ; représentons encore par s le rayon qui va du centre de la sphère à l'origine du premier arc (fig. 4) et par S le rayon qui va du centre à l'extrémité du dernier arc ; (...)".[41]

Fig. 4



Les arcs de cercle horizontaux sont donc représentés par les chiffres romains impairs ; les verticaux par les pairs. En réutilisant le symbolisme qui lui est cher et ce, pour éviter un calcul trop développé, Wessel exprime tout simplement le résultat de ce déplacement par l'équation :

$$S = s \,,, I' \,,, II' \,,, III'' \,,, IV' \,,, V' \,,, VI'.$$

Cette dernière peut être modifiée, mais en ne perdant pas de vue que cette fois l'ordre n'est plus quelconque, pour aboutir aux suivantes :

(41)C.Wessel,<u>ibid</u>.,p.26.

$$S\ ,,\ \mathrm{VI}^{-\prime}\ ,,\ \mathrm{V}^{-\prime}\ ,,\ \mathrm{IV}^{-\prime} = s\ ,,\ \mathrm{I}'\ ,,\ \mathrm{II}'\ ,,\ \mathrm{III}'\ ,$$

$$s\ ,,\ \mathrm{I}'\ ,,\ \mathrm{II}' = S\ ,,\ \mathrm{VI}^{-\prime}\ ,,,\ \mathrm{V}^{-\prime}\ ,,\ \mathrm{IV}^{-\prime}\ ,,\ \mathrm{III}^{-\prime}\ \text{etc...},$$

d'où : "en supposant $s = S$ et $s = \eta\, r$, on aura $s\ ,,\ \mathrm{I}' = \eta\, n$.

1° $s\,,,\mathrm{I}'\,,,\mathrm{II}' = r(\eta\cos\mathrm{II} - \sin\mathrm{II}) = S\,,,\mathrm{VI}^{-\prime}\,,,\mathrm{V}^{-\prime}\,,,\mathrm{IV}^{-\prime}\,,,\mathrm{III}^{-\prime}$

$$= r\left\{\begin{array}{lll} c\mathrm{III}\cdot c\mathrm{IV}\cdot c\mathrm{V}\cdot s\mathrm{VI} + \eta\cdot c\mathrm{IV}\cdot c\mathrm{VI} & & -\varepsilon\cdot s\mathrm{III}\cdot c\mathrm{IV}\cdot c\mathrm{V}\cdot s\mathrm{VI} \\ + c\mathrm{III}\cdot s\mathrm{IV}\cdot c\mathrm{VI} & -\eta\cdot s\mathrm{IV}\cdot c\mathrm{V}\cdot s\mathrm{VI} & -\varepsilon\cdot s\mathrm{III}\cdot s\mathrm{IV}\cdot c\mathrm{VI} \\ - s\mathrm{III}\cdot s\mathrm{V}\cdot s\mathrm{VI} & & -\varepsilon\cdot c\mathrm{III}\cdot s\mathrm{V}\cdot s\mathrm{VI} \end{array}\right\}.$$

2° $s\,,,\mathrm{I}'\,,,\mathrm{II}'\,,,\mathrm{III}' = r(\eta\cdot c\mathrm{II} - s\mathrm{II}\cdot c\mathrm{III} - \varepsilon\cdot s\mathrm{II}\cdot s\mathrm{III}) = S\,,,\mathrm{VI}^{-\prime}\,,,\mathrm{V}^{-\prime}\,,,\mathrm{IV}^{-\prime}$

$$= r\left\{\begin{array}{ll} c\mathrm{IV}\cdot c\mathrm{V}\cdot s\mathrm{VI} - \varepsilon\cdot s\mathrm{V}\cdot s\mathrm{VI} & + \eta\cdot c\mathrm{IV}\cdot c\mathrm{VI} \\ + s\mathrm{IV}\cdot c\mathrm{VI} & - \eta\cdot s\mathrm{IV}\cdot c\mathrm{V}\cdot s\mathrm{VI} \end{array}\right\}$$

3° $s\,,,\mathrm{I}'\,,,\mathrm{II}'\,,,\mathrm{III}'\,,,\mathrm{IV}'$

$$= r\left\{\begin{array}{ll} \eta\cdot c\mathrm{II}\cdot c\mathrm{IV} & - c\mathrm{II}\cdot s\mathrm{IV} - \varepsilon\cdot s\mathrm{II}\cdot s\mathrm{III} \\ -\eta\cdot s\mathrm{II}\cdot c\mathrm{III}\cdot s\mathrm{IV} & - s\mathrm{II}\cdot c\mathrm{III}\cdot c\mathrm{IV} \end{array}\right\}$$

$$= S\,,,\mathrm{VI}^{-\prime}\,,,\mathrm{V}^{-\prime} = r\cdot(c\mathrm{V}\cdot s\mathrm{VI} - \varepsilon\cdot s\mathrm{V}\cdot s\mathrm{VI} + \eta\cdot c\mathrm{VI}).$$

4° $s\,,,\mathrm{I}'\,,,\mathrm{II}'\,,,\mathrm{III}'\,,,\mathrm{IV}'\,,,\mathrm{V}'$

$$= r\left\{\begin{array}{lll} \eta\cdot c\mathrm{II}\cdot c\mathrm{IV} & - c\mathrm{II}\cdot s\mathrm{IV}\cdot c\mathrm{V} & -\varepsilon\cdot c\mathrm{II}\cdot s\mathrm{IV}\cdot s\mathrm{V} \\ -\eta\cdot s\mathrm{II}\cdot c\mathrm{III}\cdot s\mathrm{IV} & - s\mathrm{II}\cdot c\mathrm{III}\cdot c\mathrm{IV}\cdot c\mathrm{V} & -\varepsilon . s\mathrm{II}\cdot c\mathrm{III}\cdot c\mathrm{IV}\cdot s\mathrm{V} \\ & + s\mathrm{II}\cdot s\mathrm{III}\cdot s\mathrm{V} & -\varepsilon\cdot s\mathrm{II}\cdot s\mathrm{III}\cdot c\mathrm{V} \end{array}\right\}$$

$$= S\,,,\mathrm{VI}^{-\prime} = r(\eta\cdot c\mathrm{VI} + s\mathrm{VI}).\text{"}\ 42$$

et, "en posant $s = S = \varepsilon\, r$, on aura les équations suivantes

1° $s\,,,\mathrm{I}' = r(\varepsilon\cdot c\mathrm{I} - s\mathrm{I}) = S\,,,\mathrm{VI}^{-\prime}\,,,\mathrm{V}^{-\prime}\,,,\mathrm{IV}^{-\prime}\,,,\mathrm{III}^{-\prime}\,,,\mathrm{II}^{-\prime}$

$$= r\left\{\begin{array}{lll} \varepsilon\cdot c\mathrm{III}\cdot c\mathrm{V} & + c\mathrm{II}\cdot s\mathrm{III}\cdot c\mathrm{V} & -\eta\cdot s\mathrm{II}\cdot s\mathrm{III}\cdot c\mathrm{V} \\ -\varepsilon\cdot s\mathrm{III}\cdot c\mathrm{IV}\cdot s\mathrm{V} & + c\mathrm{II}\cdot c\mathrm{III}\cdot c\mathrm{IV}\cdot s\mathrm{V} & -\eta\cdot s\mathrm{II}\cdot c\mathrm{III}\cdot c\mathrm{IV}\cdot s\mathrm{V} \\ & - s\mathrm{II}\cdot s\mathrm{IV}\cdot s\mathrm{V} & -\eta\cdot c\mathrm{II}\cdot s\mathrm{IV}\cdot s\mathrm{V} \end{array}\right\}.$$

2° $s\,,,\mathrm{I}'\,,,\mathrm{II}' = r(-s\mathrm{I}\cdot c\mathrm{II} - \eta\cdot s\mathrm{I}\cdot s\mathrm{II} + \varepsilon\cdot c\mathrm{I})$

$$= S\,,,\mathrm{VI}^{-\prime}\,,,\mathrm{V}^{-\prime}\,,,\mathrm{IV}^{-\prime}\,,,\mathrm{III}^{-\prime}$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \varepsilon\cdot c\mathrm{III}\cdot c\mathrm{V} - \eta\cdot s\mathrm{IV}\cdot s\mathrm{V} & + s\mathrm{III}\cdot c\mathrm{IV} \\ -\varepsilon\cdot s\mathrm{III}\cdot c\mathrm{IV}\cdot s\mathrm{V} & + c\mathrm{III}\cdot c\mathrm{IV}\cdot s\mathrm{V} \end{array}\right\}.$$

3° $s\,,,\mathrm{I}'\,,,\mathrm{II}'\,,,\mathrm{III}' = r\left\{\begin{array}{ll} - s\mathrm{I}\cdot c\mathrm{II}\cdot c\mathrm{III} & - \varepsilon\cdot s\mathrm{I}\cdot c\mathrm{II}\cdot s\mathrm{III} - \eta\cdot s\mathrm{I}\cdot s\mathrm{II} \\ - c\mathrm{I}\cdot s\mathrm{III} & + \varepsilon\cdot c\mathrm{I}\cdot c\mathrm{III} \end{array}\right\}$

$$= S\,,,\mathrm{VI}^{-\prime}\,,,\mathrm{V}^{-\prime}\,,,\mathrm{IV}^{-\prime} = r(\varepsilon\cdot c\mathrm{V} + c\mathrm{IV}\cdot s\mathrm{V} - \eta . s\mathrm{IV} . s\mathrm{V}).$$

4° $s\,,,\mathrm{I}'\,,,\mathrm{II}'\,,,\mathrm{III}'\,,,\mathrm{IV}' = r\left\{\begin{array}{lll} \varepsilon\cdot c\mathrm{I}\cdot c\mathrm{III} & - s\mathrm{I}\cdot c\mathrm{II}\cdot c\mathrm{III}\cdot c\mathrm{IV} & - \eta\cdot s\mathrm{I}\cdot s\mathrm{II}\cdot c\mathrm{IV} \\ -\varepsilon\cdot s\mathrm{I} . c\mathrm{II}\cdot s\mathrm{III} & - c\mathrm{I}\cdot s\mathrm{III}\cdot c\mathrm{IV} & - \eta\cdot s\mathrm{I}\cdot c\mathrm{II}\cdot c\mathrm{III}\cdot s\mathrm{IV} \\ & + s\mathrm{I}\cdot s\mathrm{II}\cdot s\mathrm{IV} & - \eta\cdot c\mathrm{I}\cdot s\mathrm{III}\cdot s\mathrm{IV} \end{array}\right\}$

$$= S\,,,\mathrm{VI}^{-\prime}\,,,\mathrm{V}^{-\prime} = r(\varepsilon\cdot c\mathrm{V} + s\mathrm{V}).\text{"}\ 43$$

(42) C. Wessel, ibid., p.24 (E.34) où "c" et "s" sont les abréviations
(43) C. Wessel, ibid., p.28 (E.35) de "cosinus" et "sinus".

C'est avec ces calculs que Wessel termine l'exposition de sa méthode "sur la représentation de la direction d'un rayon dans une sphère". Son Mémoire s'achève sur les "polygones sphériques"(pp:28 à 33) et sur une étude longuement développée des "propriétés principales des triangles sphériques"(pp:33 à 60).

Nous n'avons pas voulu traiter de façon exhaustive ces deux dernières parties du Mémoire de Wessel, de peur de trop déborder du cadre du présent article. Précisons néanmoins que ces deux parties ont été largement influencées dans leur conception par l'activité d'"arpenteur praticien"[44] exercée par Wessel.

Il est impossible de nier qu'il existe dans le travail de Wessel de nombreux éléments, des "conditions toutes spéciales", qui lui auraient permis de faire certaines découvertes que Gauss et Hamilton, par exemple, feront après lui. Mais à quoi nous conduit un tel constat? Peut-on pour cela conclure que Wessel les a devancés sur la voie de leurs inventions? Ce jugement ne peut être donné à la simple vue de son unique travail connu. Voyons de plus près pourquoi.

Wessel ne considère, on l'a remarqué, que des rotations autour des axes perpendiculaires porteurs des "unités absolues" ε et η. Il ne s'interroge pas explicitement sur ce que serait la rotation autour de l'axe réel. Or, ce calcul eût été primordial: Une rotation autour de l'axe "réel" d'un point mobile le long d'un "arc de cercle" de II degrés doit transformer le rayon $x + \eta y + \varepsilon z$, dont il est la "point extrême", de la façon suivante:

On a vu qu'une rotation autour de l'axe "η", de I degrés s'écrivait:

$$-1- \quad (x + \eta y + \varepsilon z) \;,, \; (\cos I + \varepsilon \sin I)$$

---

(44) Expression qu'utilise C.Juel (Cf. note (11); référence due à V.Brun (Cf. note (7)), p.21).

et qu'une rotation autour de l'axe horizontal " ε ", de II degrés s'écrivait :

$$-2- \quad (x + \eta y + \varepsilon z) \,,, (\cos II + \eta \sin II).$$

Nous pouvons supposer que les termes opérant sur le rayon $x + \eta y + \varepsilon z$ s'écrivant :

$$-a- \quad 1.\cos I + \varepsilon.\sin I$$

$$-b- \quad 1.\cos II + \eta.\sin II \;;$$

On met ainsi de façon claire en relief une remarque précise : une rotation autour de l'axe "η" est l'action d'un "opérateur" exprimé comme "combinaison linéaire" des deux autres unités 1 et ε ; une rotation autour de l'axe "ε" est l'action d'un "opérateur" exprimé comme "combinaison linéaire" des deux autres unités 1 et η .

On peut donc se demander si une rotation autour de l'axe "1", de IV degrés, s'exprimera par l'action d'un "opérateur" de la forme :

$$-3- \quad \varepsilon.\cos IV + \eta.\sin IV$$

ou

$$-4- \quad \varepsilon.\sin IV + \eta.\cos IV,$$

c'est-à-dire que la rotation s'écrirait :

$$-3'- \quad (x + \eta y + \varepsilon z),, (\varepsilon.\cos IV + \eta.\sin IV) \text{ ou}$$

$$-4'- \quad (x + \eta y + \varepsilon z),, (\varepsilon.\sin IV + \eta.\cos IV) \;;$$

d'où :

$$-3''- = x + (\eta y + \varepsilon z)(\varepsilon.\cos IV + \eta.\sin IV) =$$

$$= x - y \sin IV - z \cos IV + \eta\varepsilon.y\cos IV + \varepsilon\eta.z \sin IV.$$

Un problème crucial se pose alors : comment s'expriment $\eta\varepsilon$ et $\varepsilon\eta$?

Plusieurs choix sont possibles :

1. On suppose que $\eta\varepsilon = \varepsilon\eta$ (c'est la plus"naturelle") ; on a alors dans l'égalité précédente le résultat intermédiaire suivant :

$$x - y \sin IV - z \cos IV \pm \varepsilon\,(y \cos IV + z \sin IV).$$

Les solutions $\eta\varepsilon = \pm\,\varepsilon$ ou $\eta\varepsilon = \pm\,\eta$

ne peuvent être retenues car alors les résultats :

$$x - y \sin IV - z \cos IV \pm \varepsilon\,(y \cos IV + z \sin IV)$$

ou $$x - y \sin IV - z \cos IV \pm \eta\,(y \cos IV + z \sin IV)$$

font disparaître d'une part la composante, respectivement, en η et en ε et, d'autre part, la composante dite "réelle" a varié.

2 - $\eta\varepsilon = -\,\varepsilon\eta$, conduit à la même impasse.

Le bilan de ce calcul montre que l'on ne peut pas tenir compte du raisonnement précédent. C'est-à-dire que l'"opérateur" agissant sur le rayon $x + \eta\, y + \varepsilon\, z$ ne peut s'écrire comme "combinaison linéaire" des "unités absolues" ε et η.

Autre raisonnement :

On veut que le résultat de la rotation s'exprime en conservant la forme générale adoptée et qu'il laisse la coordonnée "réelle" x inchangée. Conformément aux résultats obtenus pour les rotations - 1 - et - 2 - autour des axes η et ε, le résultat d'une rotation de IV degrés autour de l'axe "réel" aura pour effet de transformer $x + \eta\, y + \varepsilon\, z$ en :

$$3 - x + \eta\,(y \cos IV - z \sin IV) + \varepsilon\,(y \sin IV + z \cos IV).$$

Celui-ci peut être considéré suivant l'opération (,,) de Wessel ; c'est-à-dire :

$$(x + \eta\, y + \varepsilon\, z),,(\cos IV + \zeta \sin IV) = x + (\eta\, y + \varepsilon\, z)(\cos IV + \zeta$$

$$\sin IV)$$

ou encore, du fait de l'unicité du résultat :

$$x + \eta (y \cos IV - z \sin IV) + \varepsilon (y \sin IV + z \cos IV) =$$

$$= x + (\eta y + \varepsilon z)(\cos IV + \zeta \sin IV) =$$

$$= x + \eta y \cos IV + \varepsilon z \cos IV + \eta\zeta\, y \sin IV + \varepsilon\zeta\, z \sin IV$$

d'où : $-\eta\, z \sin IV + \varepsilon\, y \sin IV = \eta\zeta\, y \sin IV + \varepsilon\zeta\, z \sin IV$

soit encore : $-\eta z + \varepsilon y = (\eta\zeta) y + (\varepsilon\zeta) z$.

Enfin : et : $\begin{cases} -\eta = \varepsilon\zeta \\ \varepsilon = \eta\zeta \end{cases}$

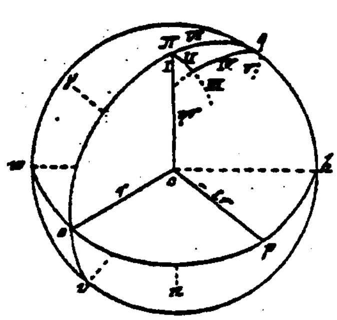
Multipliant la première expression par ε et la seconde par η et se rappelant que $\varepsilon^2 = \eta^2 = -1$, on obtient : $-\varepsilon\eta = -\zeta$ et $\eta\varepsilon = -\zeta$, d'où finalement $\varepsilon\eta = -\eta\varepsilon$.

On voit ici l'importance du résultat quand on pense à Hamilton, mais on ne peut que s'associer au désarroi qu'a dû ressentir Wessel après cette tentative malheureuse pour lui. Les paragraphes suivants nous montrent qu'il a tenté l'expérience :

(£.10) "... si l'on avait à multiplier des segments de droite qui ne se trouvent pas tous les deux dans un plan passant par l'unité absolue, on ne pourrait appliquer la règle précédente [c'est-à-dire $(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = ac - bd + \varepsilon (ad + bc)$]. C'est pour cette raison que je ne m'occupe pas de la multiplication de tels segments".45

(£.37) "... b/ Le point fixe 0 (fig. 6) a décrit un autre polygone, dont les angles sont égaux soit à − 90°, soit à + 90° ; les côtés I, II, III, IV, ..., N, et l'équation du polygone est :
s,,I',,,(− ε),,II',, ε ,,III',,(− ε),,IV',, ε ,,...
...,,(− ε),,N',,ε = s.
Ceci suffira, puisque nous ne nous servirons pas de cette équation dans ce qui suit".46

Fig. 6



(45) C. Wessel, ibid., p. 12.
(46) C. Wessel, ibid., p. 31.

Ce dernier paragraphe est important. La sphère étant en mouvement, le point O décrit le polygone précédent. Or, ce point appartient à l'axe réel ; on voit par là qu'il connaissait certaines propriétés caractéristiques de la rotation autour de celui-ci.

> (§.71) "... Le signe ,, n'a qu'imparfaitement la signification d'un signe de multiplication, car l'opération représentée par ce signe laisse inaltéré celui des segments figurant dans le multiplicande qui est au dehors du plan correspondant à la rotation indiquée par le multiplicateur. Considérons par exemple les trois segments 2, 3ε et 4η ;
> alors :
> $(2 + 3\varepsilon + 4\eta)$,,II' signifie $3\varepsilon + (2 + 4\eta).(\cos \mathrm{II} + \eta.\sin \mathrm{II})$.
> De même : $(2 + 3\varepsilon + 4\eta)$,,I' signifie :
> $4\eta + (2 + 3\varepsilon).(\cos \mathrm{I} + \varepsilon.\sin \mathrm{I})$.
> Il faut observer que l'opération se fait dans l'ordre où les facteurs se suivent de gauche à droite. Par exemple, si l'on veut trouver la valeur de $(2 + 3\varepsilon + 4\eta)$,,I',,II', il faut commencer par trouver celle de $(2 + 3\varepsilon + 4\eta)$,,I', qui est $(4\eta + 2 \cos \mathrm{I} + 2\varepsilon.\sin \mathrm{I} - 3 \sin \mathrm{I} + 3\varepsilon.\cos \mathrm{I})$,,II' ".[47]

Dans ce paragraphe, les deux difficultés qui gênent Wessel sont présentes : l'ordre des exposants n'est pas quelconque, donc on perd la commutativité de l'opération ",," ; le dernier résultat ne pourra être obtenu que si l'on peut exprimer la signification du produit $\varepsilon\eta$.

On comprend pourquoi Wessel n'a pas été plus loin dans sa méthode, de telles difficultés auraient plongé ses auditeurs dans la plus profonde perplexité. Il voulait exposer une théorie "pas trop abstraite", de peur de gêner les académiciens, et pratique. Il a parfaitement atteint son but par une méthode exacte qui rend enfin "possibles" des opérations dites "impossibles" ; et qui donne la liberté d'utiliser les nombres "imaginaires" avec toute sérénité.

Il est difficile de croire qu'une telle découverte soit restée inconnue de tous. N'a-t-elle pas eu une influence secrète mais qui peut-être un jour sera mise en évidence sur Gauss ? Wessel meurt en 1818 ;

---

(47) C. Wessel, *ibid.*, p. 58.

> "En 1819, lorsqu'on commença de traiter de surannées les cartes de l'Académie (de Danemark), on excepta expressément les déterminations trigonométriques de Wessel". [48]

Or, en 1821, Gauss devint conseiller scientifique du Danemark pour l'établissement géodésique du cadastre;[49] poste qu'il conservera jusqu'en 1848 (ajoutons pour mémoire que le dernier tome de ses Oeuvres complètes rassemble tous ses travaux de Géodésie).

Cette hypothèse est séduisante, mais il ne nous a pas été permis encore de voir si elle était fondée.[50]

Que cette découverte de la première représentation géométrique des "quantités imaginaires" soit le fruit d'un mathématicien de "second plan", comme aurait pu écrire Cauchy, met l'accent sur la marginalité de cette nouveauté. Malgré la lecture des pages qui précèdent, on ne saurait adhérer qu'avec une certaine réticence aux vues de G.Loria qui considère que Wessel:

> - "parvint à donner aux nombres imaginaires un contenu réel, à bannir les opérations en apparence impossibles et à expliquer le paradoxe logique en vertu duquel l'imaginaire constitue très souvent la voie la plus sûre pour arriver à un résultat réel"[51]

Les grands foyers où se font les mathématiques ne pouvaient se suffire d'une telle preuve tirant ses arguments de la géométrie pour expliquer des concepts algébriques. D'autre part, le "segment" de Wessel peut certes servir de "contenant réel", mais qu'en est-il du "contenu"? Wessel crée un nouvel objet mathématique, mais, si l'on peut s'exprimer ainsi, il ne démontre pas l'<u>existence</u> du <u>nombre imaginaire</u>. La "quantité imaginaire" n'est pas encore l'entité arithmétique que nous connaissons sous le nom de "nombre complexe". Malgré sa perfection, la théorie de Wessel

---

(48) H.Valentiner (premier préfacier de l'"Essai" de Wessel), <u>op.cit</u> note (8), Préface, p.V.

(49) E.T.Bell, "Les grands mathématiciens" (Paris, 1950), p.287.

(50) On peut trouver une étude faite sur la cartographie de Wessel (malheureusement introuvable en France) due à Otto Harms: "Die amtliche Topographischen im Oldenburg und ihre kartographischen Ergebenisse", in <u>Oldenburger Jahrbuch</u>, 60, pt.1 (1961) pp.1-38.

(51) G.Loria, "L'énigme des nombres imaginaires à travers les siècles", in Scientia, 21 (1917), p.51.

aurait été exposée,si elle avait été connue,aux mêmes critiques faites à la théorie de C.F.Gauss par J.Bolyai.[52]

L'ouvrage de Wessel ne fut connu du public érudit que cent ans plus tard;il est difficile de croire qu'un tel sort lui ait été fatalement réservé du fait qu'il était écrit par un modeste arpenteur au service d'une Académie méconnue et que seuls les écrits de grands mathématiciens pouvaient être publiés.

On pourrait,en effet,s'en tenir à cette trop facile réponse;mais nous sommes tentés de croire que,si cet ouvrage avait vraiment constitué la réponse à une question vainement cherchée,il aurait forcément connu une plus large diffusion.Un exemple assez clair d'une telle situation nous est donné par le manuscrit de N.Chuquet[53] qui,bien que publié au XIXe siècle alors qu'il fut conçu au XVe siècle,ne manqua pas d'influencer son époque et la suivante.Un autre argument en faveur de cette hypothèse est qu'au XVIIIe siècle on écrit beaucoup d'ouvrages et de manuels dont le but est de faire comprendre et de répandre les mathématiques mises à la disposition des savants;de ce fait,on assiste à un accroissement sans précédent de l'auditoire scientifique;les petits groupes d'érudits forgeant la science font place à un public mieux informé.

\+ \+ \+ \+

(52)Dans un mémoire publié par P.Stäckel [Math.-Naturw.Ber.Ungarn 16 (1899)] (Notes 63) et 74) de E.Study :"Les nombres complexes",in Ency.Sci.Math.,Ed.Franç.,t.1,fasc.3,1908).

(53)N.Chuquet,"Triparty en la science des nombres"(1484),Bull. Biblio.Storia,Math.,tome XIII,1880,pp.555-659 et 698-814.