PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

NICOLAS BALACHEFF

Construction des connaissances mathématiques, l'approche de Imre Lakatos

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1982, fascicule 2
« Séminaire d'histoire des mathématiques », , p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1982___2_A1_0>

CONSTRUCTION DES CONNAISSANCES MATHEMATIQUES, L'APPROCHE DE IMRE LAKATOS

Nicolas BALACHEFF
Laboratoire IMAG
BP : 53 X
38041 GRENOBLE CEDEX

Ce n'est pas en tant qu'historien mais comme chercheur en Didactique des Mathématiques que je prends la parole dans le cadre de ce "Séminaire d'Histoire et de Didactique des Mathématiques".

L'intérêt que je porte aux travaux de Imre LAKATOS a son origine dans mes préoccupations de chercheur liées à l'étude des conditions de l'enseignement et de l'apprentissage de la notion de preuve mathématique dans le premier cycle de l'enseignement du second degré (c'est-à-dire dans les actuels collèges où les élèves sont âgés de 11 à 16 ans).

Les preuves sont à la charnière de l'action engagée dans la résolution de problèmes, et, de la constitution et l'identification du savoir mathématique. Cependant, si l'on s'accorde à reconnaître aux preuves, et aux processus qui y conduisent, un rôle central dans la construction des connaissances mathématiques, là s'arrête l'unanimité : la place des processus de preuve, leur fonctionnement, la validité des preuves sont autant de questions ouvertes ; leur fermeture par certains n'est qu'une attitude de défense de nature idéologique. Les problèmes épistémologiques de la preuve ne sont pas réglés ; en particulier les travaux de didactique expérimentale sur la preuve les soulignent aussi bien dans la définition des dispositifs expérimentaux que dans la détermination des outils d'analyse des expériences.

Par ailleurs, de même que la constitution de la didactique théorique conduit à une prise de position relativement aux théories du développement des connaissances chez l'enfant, de même elle conduit à se situer par rapport à des modèles du développement des connaissances mathématiques. En effet l'histoire d'un concept est constitutive de son identité, de sa signification, en permettant de lui rattacher les problèmes qui l'ont fait naître et lui ont donné sa puissance. Ce rapprochement, sans les confondre, de la phylogenèse et de l'ontogenèse est fait avec l'idée que la première permettra d'identifier les "difficultés" attachées en propre au concept ; ce que G. BACHELARD (1938) appelle les obstacles épistémologiques.

Enfin, toute conception du développement des connaissances mathématiques est essentiellement liée à celle que l'on peut avoir de l'activité du mathématicien, ou encore de la méthode en mathématique. Cette dernière conception elle-même a des conséquences directes sur l'enseignement dont la formation à la méthode en mathématique est l'un des objectifs.

La communauté des mathématiciens français est actuellement largement dominée par une conception formaliste et déductiviste dans laquelle le développement des connaissances mathématiques apparaît comme un processus linéaire qui ne connaît ni crises, ni contradictions ; même s'il ne s'agit pas de le réduire à un processus déductif déterministe producteur de théorèmes. Ce développement est constitué d'une part par l'augmentation fiable, grâce à la méthode déductive, du nombre des théorèmes, d'autre part par la réorganisation des connaissances déjà acquises ; en quelque sorte une restructuration majorante qui englobe les connaissances antérieures ou les théories anciennes.

Quant à elle, dans le même contexte, l'activité du mathématicien est classiquement organisée en deux temps ; d'une part l'invention, de l'autre la vérification. La meilleure illustration en reste la conférence de H. POINCARE (1908) sur l'invention mathématique. La création mathématique, "apanage de certains êtres humains"(1), apparaît comme un phénomène irrationnel ; sur lequel du reste les mathématiciens professionnels sont très discrets. Quant à la vérification, ou élaboration de la démonstration, c'est là le véritable terrain de la méthode en mathématique : identification des objets, de leurs relations, organisation des résultats et des conclusions sur le modèle axiomatico-déductif. Le dogmatisme

(1) DIEUDONNE, 1978, p. 2.

déductiviste réside dans la croyance à l'infaillibilité de cette méthode : "... mis à part les cas d'erreurs matérielles (tels qu'une faute de signe ou une confusion de lettres), un théorème une fois démontré n'a jamais donné lieu à une contestation. Et cela, à un tout petit nombre d'exceptions près, est vrai des milliers de résultats obtenus dans tous les domaines mathématiques depuis 1940, grâce aux exigences de précision [...] qui sont devenues universellement admises" (DIEUDONNE, 1980, p. 7). Le fondement d'un tel dogme est l'idée, encore défendue par certains mathématiciens, qu' "en mathématiques, le support de la notion de vérité s'est déplacée des propositions vers les implications : de nos jours, ce qui suscite le consensus des mathématiciens, c'est la vérité des implications, plus que la vérité des propositions qu'elles relient." (LOI, 1982, p. 120).

L'effet le plus spectaculaire de cette conception des mathématiques est la disparition de l'erreur, son effet le plus sournois serait la disparition du contenu(2) - à cause de cela vouloir distinguer "mathématiques vides et mathématiques significatives"(3) est une préoccupation tout à fait pertinente.

Le dogme de l'infaillibilité des mathématiques ne fait pas l'unanimité, ainsi dans un article récent peut on lire : "Stanislaw ULAM estime que les mathématiciens publient 200.000 théorèmes chaque année. Nombre d'entre eux sont par la suite contredits ou bien rejetés, d'autres sont mis en doute, et la plupart sont ignorés. Seulement une toute petite fraction d'entre eux est comprise et crue par un nombre acceptable de mathématiciens. Les théorèmes qui sont ignorés ou discrédités sont rarement le fruit du travail de fantaisistes ou d'incompétents" (De MILLO et al., 1980).

---

(2) P. BOUTROUX dans "l'idéal scientifique des mathématiciens" (Alcan, 1920) dénonce déjà cet effet du formalisme-déductiviste ("école synthétiste"), en particulier lorsqu'il se penche sur le problème de l'enseignement des mathématiques (p. 262-72)

(3) DIEUDONNE, 1982, titre

Mais cela n'est pas assez. En effet, l'observation de l'activité du mathématicien ou de l'élève montre non seulement que l'erreur existe, mais qu'elle peut être féconde. L'analyse didactique nous conduit à soutenir qu'elle joue un rôle positif et même central dans l'apprentissage des mathématiques(4). L'identification de l'erreur, son analyse, la reconnaissance de sa résistance et par là la remise en cause des connaissances qui lui sont associées, son dépassement sont constitutifs de l'apprentissage.

C'est dans ce contexte que le modèle de développement des mathématiques qu'I. LAKATOS présente dans son ouvrage "Proofs and Refutations" (1976), prend pour le didacticien tout son intérêt. LAKATOS introduit l'idée d'une mathématique faillible, ou plutôt il considère l'erreur autrement que comme contingente et lui donne un statut majeur dans le développement des connaissances. L'un des révélateurs de l'erreur est la contradiction, et en particulier le <u>contre-exemple</u>. G. POLYA, déjà, nous en a montré toute la richesse heuristique, I. LAKATOS dans son "essai sur la logique de la découverte mathématique"(5) nous en montre la valeur épistémologique à propos d'une étude de cas : la preuve de la formule de DESCARTES-EULER sur les polyèdres. Dans les rapports dialectiques de la preuve et du contre-exemple, le contre-exemple ne dénonce pas seulement l'erreur, il conduit à une reprise et à une compréhension nouvelle des concepts, à la mise en évidence de la pluralité des significations du langage, à la remise en question de la rigueur des preuves.

Dans ce qui suit nous allons donner les grandes lignes de l'analyse faite par I. LAKATOS de la place du contre-exemple. Le thème mathématique sous-jacent est celui de la preuve de la conjecture d'EULER(6) selon laquelle pour tout polyèdre : $S-A+F = 2$, où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces.

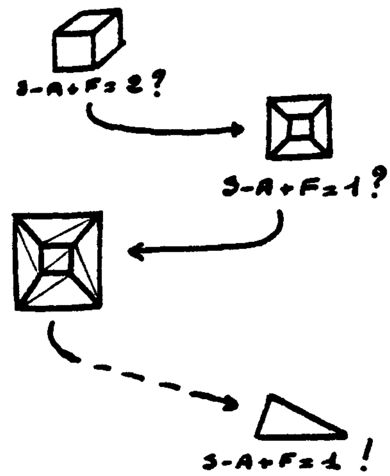
---

(4) l'hypothèse théorique sous-jacente, que les travaux de Piaget ou Bachelard confortent, est qu'une connaissance se construit <u>contre</u> un état antérieur de connaissance dont l'inadéquation est manifestée par l'erreur.

(5) il s'agit là du titre (mis en français) du mémoire de thèse de LAKATOS (1961). On remarquera, pour ma part en le regrettant, que le mot "essai" ne figure plus dans le titre de la publication posthume de cet ouvrage en 1976.

(6) EULER L. (1758) Elementa doctrinae solidorum, <u>Novi commentarii academiae scientiarum petropolitanae</u>, 4, p. 109-40

LAKATOS part de la preuve (ou expérience de pensée), inspirée de CAUCHY (1813)[7], suivante :



1) on met le polyèdre à plat (en découpant une face), on se ramène ainsi à établir S-A+F = 1 pour un graphe planaire.

2)on triangule le graphe plan en traçant des diagonales dans les faces polygonales qui ne sont pas des triangles. Dans cette opération on ajoute, à chaque pas, à la fois une face et une arête ; donc S-A+F reste constant.

3)On enlève, un par un, les triangles du graphe triangulé à l'aide d'une des deux opérations suivantes :

. ôter un côté ;
. ôter deux côtés et un sommet.

Si S-A+F = 1 avant l'une des deux opérations, alors S-A+F = 1 après.

A la fin de cette procédure de destruction il reste un triangle pour lequel S-A+F = 1, donc la conjecture est prouvée.

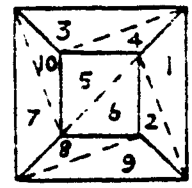
Si aucun contre-exemple ne vient réfuter la conjecture, ou sa preuve, alors elle doit être acceptée comme théorème. C'est là le critère (pragmatique) de rigueur que donne LAKATOS.

Si un contre-exemple est produit, il peut être une réfutation de la conjecture ou de sa preuve. Dans le premier cas il s'agit d'un contre-exemple global, dans le second cas d'un contre-exemple local. Un contre-exemple global peut être en même temps local, c'est-à-dire réfuter un lemme (ou sous-conjecture) de la preuve ; il peut apparaître qu'il ne réfute que la conjecture, cela est plus problématique et LAKATOS s'attarde particulièrement sur ce cas. J'y viendrai plus loin.

---

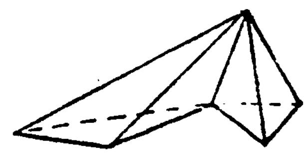
(7) CAUCHY A.L. (1813) Recherches sur les polyèdres, Journal de l'Ecole Polytechnique, 9, p. 68-86, (lu en 1811).

Exemple de contre-exemple local :



Ce contre-exemple rejette le troisième lemme de la preuve, mais pas la conjecture initiale ; il montre que l'on peut trouver une destruction du graphe triangulé dont le dernier pas ne fournit pas un triangle. C'est le cas pour le cube avec une destruction suivant l'ordre indiqué par le numérotage ci-dessus.

Exemple de contre-exemple global :



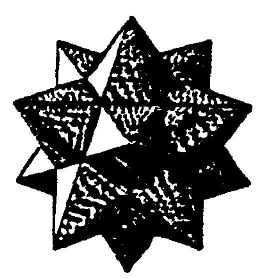
Le contre-exemple ci-contre rejette à la fois la conjecture, car il vérifie 6-11+8 = 3, et sa preuve : il ne peut être mis à plat.

L'existence d'un contre-exemple global peut avoir pour conséquence radicale le rejet de la conjecture, d'autres issues sont possibles et sont quoiqu'il en soit plus fécondes :

Précision sur l'énoncé de la conjecture ; le contre-exemple est écarté en précisant la signification de "polyèdre", en fait il s'agit moins de préciser le sens d'un mot que de la détermination d'un concept :

Un polyèdre est un système de polygones tel que :

- à chaque arête soient adjacents exactement deux polygones ;
- pour aller d'une face à une autre il existe un chemin qui ne passe par aucun sommet.

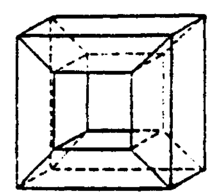


Le petit dodécaèdre étoilé ci-contre est encore un contre-exemple global à la conjecture d'Euler si on considère que ses faces sont des pentagones étoilés : il a 12 faces, 12 sommets et 30 arêtes : 12-30+12 = -6. Ce contre-exemple est écarté en précisant ce que l'on entend par polygone, il peut aussi être écarté en mettant en évidence qu'il ne repose que sur une interprétation fallacieuse.

Le petit dodécaèdre étoilé n'est plus un contre-exemple si on le considère comme constitué de faces triangulaires ; on a : 32-90+60 = 2.

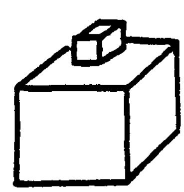
Dans la terminologie de LAKATOS, ces contre-exemples qui reposent sur l'interprétation de termes dans l'expression de la conjecture ou sur celle de leur propre structure (comme dans le dernier cas) sont des <u>monstres</u> ; il s'agit de les mettre à l'écart (monster-barring).

<u>Précision sur le domaine de validité de la conjecture</u> ; considérons par exemple le contre-exemple ci-contre. Il s'agit d'un cube avec un tunnel, il vérifie 16-32+16 = 0 ; c'est aussi un contre-exemple local car il ne peut être mis à plat. Cependant c'est bien un polyèdre selon la définition donnée plus haut. LAKATOS appelle un tel contre-exemple une <u>exception</u>, il peut être mis à l'écart (exception-barring) en précisant le <u>domaine de validité de la conjecture</u>, en même temps que celui du lemme réfuté. Ici, la conjecture d'Euler devient : "pour tout polyèdre qui n'a pas de tunnel S-A+F = 2".



<u>Amélioration de la conjecture en incorporant une condition</u> ; si le contre-exemple est à la fois global et local on peut, après avoir identifié le lemme réfuté, l'incorporer à l'énoncé de la conjecture sous forme d'une condition. On réduit ainsi le domaine de la conjecture au domaine de sa preuve.

En voici une illustration, le contre-exemple est à la fois global, 16-24+11 = 3, et local car il réfute le lemme 2 sur la possibilité de trianguler le graphe planaire obtenu. (on constate que cet objet est bien un polyèdre). Le lemme réfuté est en fait : ajouter une arête partage une face en deux nouvelles faces (propriété de simple connexité), qui est implicite dans l'énoncé de la preuve. Pour écarter ce contre-exemple on incorpore ce lemme sous forme d'une condition : "pour tout polyèdre dont les faces sont simplement connexes : S-A+F = 2".



Amélioration de la preuve ; sous la critique d'un contre-exemple local non global (par exemple celui sur la destruction du graphe triangulé) le lemme réfuté est remplacé par un lemme amélioré qui écarte le contre-exemple sans modifier le domaine de la conjecture initiale.

En reprenant l'exemple cité plus haut, le lemme 3 est remplacé par l'énoncé suivant :

> le graphe triangulé peut être détruit en
> enlevant les triangles un à un de telle
> façon que l'identité soit conservée,
> jusqu'à obtenir un triangle.

Le cas d'un contre-exemple global non local est d'une importance particulière. LAKATOS souligne qu'il est de nature logique car il oblige à examiner la preuve pour découvrir le lemme resté jusque là caché, ou encore implicite, qu'il réfute. Il peut être ensuite écarté en incorporant à l'énoncé sous forme de condition le nouveau lemme mis en défaut. La nature logique de ce contre-exemple provient de ce qu'il met en évidence que la preuve était incomplète, ou encore parce qu'il permet d'en augmenter la rigueur.

L'exemple donné par LAKATOS de la preuve fournie par CAUCHY dans son cours d'Analyse du théorème[8] :
"Lorsque les différents termes de la série $u_o, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$ sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme S de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x".
et du contre-exemple global non local que constitue la série de Fourier $\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \ldots$, illustre à la fois la difficulté et la fécondité du travail sur l'erreur. Ici seul est manifeste le contre-exemple, symptôme d'une erreur qui ne

(8) CAUCHY A.L. (1821) Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, Oeuvres complètes, 1847, Paris Gauthier-Villars, p. 120.

sera définitivement identifiée que plusieurs années après l'apparition de l' "exception" de Fourier et dépassée par la constitution du concept de convergence uniforme(9).

Ainsi c'est dans l'analyse critique du couple (théorème, preuve) que I. LAKATOS situe la clé du développement des mathématiques ; parce qu'elle permet une amélioration de la rigueur des preuves, mais surtout parce qu'elle est à l'origine d'une réelle construction des connaissances : la révélation d'aspects conceptuels cachés ou implicites sous la pression des monstres, émergence de concepts nés-de-la-preuve (proof-generated) dans la recherche de la rigueur (par exemple la simple-connexité, la convergence uniforme). La mathématique formaliste et axiomatique ne va pas constituer du point de vue qui nous intéresse ici, un cas particulier. L'analyse critique y trouvera pour terre d'élection les questions du choix du bon formalisme, dont LOI souligne qu' "il est devenu la caractéristique de la pensée mathématique contemporaine" (1982, p. 112), et les problèmes liés à l'usage du code symbolique : codage-décodage, effets producteurs et réducteurs de la représentation. Quoiqu'il en soit la mathématique axiomatique ne peut rester que naïve (au sens que Bourbaki donne à ce mot) et donc le problème de la rigueur reste ouvert. L'analyse critique des preuves garde son sens et sa fécondité potentielle.

L'évaluation d'un théorème, et donc de sa preuve, ne peut se réduire à un calcul ; elle implique la connaissance et par là le sujet connaissant : le mathématicien. L'analyse d'une preuve passe par sa compréhension, elle engage donc des modèles de connaissance subjectifs, des conceptions individuelles. La validité pragmatique d'un théorème est le résultat d'un processus d'évaluation mis en oeuvre par la communauté mathématique, et en général délégué à quelques individus (comité de lecture de revues, congrès, ...). L'erreur qui ne peut être écartée définitivement des productions individuelles ne saurait l'être des productions collectives, ni même des jugements collectifs.

---

(9) La série de Fourier en question apparaît dans l'ouvrage de cet auteur : "théorie analytique de la chaleur" (1822). Ce contre-exemple est d'abord considéré comme une exception ; la contradiction ne sera reconnue puis levée que vers le milieu du siècle avec l'énoncé de la condition de convergence uniforme. Voir à ce sujet LAKATOS (1976) p. 127-141 et LAKATOS (1978) p. 43-60.

Comme le souligne F. ROSTAND (1960) en conclusion d'un des rares travaux systématiques sur l'erreur chez le mathématicien : "il n'apparaît donc pas que le mathématicien soit privilégié par rapport aux autres penseurs, en ce qui concerne la recherche de la certitude".

Ainsi LAKATOS replace les mathématiques au côté des autres sciences dans le cadre d'une épistémologie dialectique dont on pourra examiner les rapports avec celle de G. BACHELARD fondée sur la notion d'obstacle ou, celle de K. POPPER fondée sur la notion de falsification.

Une difficulté importante subsiste néanmoins dans ce que l'on pourrait identifier comme une tentative de normalisation épistémologique : un processus dialectique suppose l'existence de deux termes, pour les sciences expérimentales c'est clairement la connaissance et le réel (c'est dans le réel que se trouvent les falsifications potentielles des théories scientifiques) ; pour les mathématiques qu'en est-il ? I. LAKATOS nous ramène à la question, vieille comme la mathématique elle-même, de savoir, en dehors d'un système de signes, quels sont les "objets" des théories mathématiques informelles ?[10] Autrement dit les mathématiques ont-elles un intérieur et un extérieur ? De quoi les mathématiques sont-elles la connaissance ? Si la pertinence des théories mathématiques peut être cherchée dans leur rapport au réel, ce n'est certainement pas le cas de leur vérité.

I. LAKATOS était bien conscient de ce que son analyse le ramenait à cette question (ancienne et classique), mais il en fournit une formulation et une approche nouvelle : "Quelle est la nature des falsifications potentielles des théories informelles ?" (1978, p. 40). Et là il nous laisse malheureusement sur notre faim, nous invitant seulement à des analyses historico-critiques "minutieuses" (ibid.).

(10) LAKATOS (1978) p. 35.

C'est bien dans cette direction que déjà s'est constituée notre épistémologie moderne, saisissant les "objets mathématiques" dans leur construction historique. "Ici le réel est du déjà théorique" (P. RAYMOND, 1973, p. 331). Le travail du mathématicien est ainsi une théorisation de la mathématique elle-même, une rectification des concepts, leur étirement plus que leur généralisation (Ibid. p. 330-335) ; travail dans lequel, souligne C. HOUZEL (1977), les "savoirs déjà théorisés ... jouent le rôle de l'instance expérimentale".

Brève notice biographique (d'après G. GIORELLO qui a préparé l'édition italienne "Dimostrazioni e confutazioni" (Ed. Feltrinelli, 1979) de "Proofs and Refutations").

Imre LAKATOS est né en 1922 en Hongrie, son nom d'origine est LIPSCHITZ. Il en change une première fois sous l'occupation nazie pour le nom de Imre MOLNAR, puis une seconde fois à la fin de la guerre pour le nom de Imre LAKATOS (en entrant en possession de vêtements marqués I.L.). Communiste militant il ira jusqu'à occuper un poste important du ministère de l'éducation, tombé par la suite en disgrâce il sera arrêté et incarcéré en 1950. C'est en 1956 qu'il passe en Angleterre. Sa carrière universitaire commence à Cambridge où en 1961 il soutient une thèse préparée sous la direction de R.B. BRAITHWAITE. Par la suite, son activité se développera dans le cadre du département de philosophie de la London School of Economics, où il enseignera jusqu'à sa mort en avril 1974. On trouvera une bibliographie des travaux de I. LAKATOS, centrés sur le développement de la connaissance scientifique et le problème de la falsification, à la fin d'un ouvrage dont la publication a été préparée par WORRALL et CURRIE (cf. infra LAKATOS (1978)).

BIBLIOGRAPHIE

BACHELARD G. (1938), La formation de l'esprit scientifique Paris, Vrin, 1975

BOUTROUX P. (1920), L'idéal scientifique des mathématiciens Paris, Alcan

DE MILLO R.A., LIPTON R.J., PERLIS A.J. (1979), Social processes and proofs of theorems and programms, The mathematical intelligencer, 1980, vol. 3 n° 1, p. 31-40

DIEUDONNE J. (Dir. de publ.) (1978), Abrégé d'histoire des mathématiques (1700-1900), 2 Vol, Paris, Hermann

DIEUDONNE J. (1980), Les grandes lignes de l'évolution des mathématiques, Coll. philosophie-mathématiques, Paris, I.R.E.M. de Paris-Nord

DIEUDONNE J. (1982), Mathématiques vides et mathématiques significatives, in Penser les mathématiques, Paris, Seuil p. 15-38

HOUZEL C. (1977), Histoire des mathématiques et enseignement des mathématiques, Bulletin Inter-IREM, 1979, n° 18, p. 3-6.

LAKATOS I. (1961) Essays in the logic of mathematical discovery Ph. D. non publié, Cambridge

*LAKATOS I. (1976), Proofs and Refutations : the logic of mathematical discovery. Edité par J. WORRALL et E.G. ZAHAR, Cambridge University Press

LAKATOS I. (1978) Mathematics, science and epistemology. Edité par J. WORRAL et G. CURRIE, Cambridge University Press

LOI M. (1982), Rigueur et ambiguïté, in Penser les mathématiques Paris, Seuil, p. 108-122

RAYMOND P. (1973), Le passage au matérialisme, Paris, Maspéro

ROSTAND F. (1960), Souci d'exactitude et scrupules des mathématiciens, Paris, Vrin

* Cet ouvrage est en cours de traduction en français. La publication en est prévue pour 1983 (Ed. Hermann).