EMILE LE PAGE

Répartition d’état d’un opérateur de Schrödinger aléatoire Distribution empirique des valeurs propres d’une matrice de Jacobi

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1982, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-60
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1982___1_A8_0>

REPARTITION D'ETAT

D'UN OPERATEUR DE SCHRÖEDINGER ALEATOIRE

DISTRIBUTION EMPIRIQUE DES VALEURS PROPRES

D'UNE MATRICE DE JACOBI

Emile LE PAGE

I - INTRODUCTION

Soit $(X_n)_{n\in Z}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ à support compact définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Considérons l'opérateur aux différences aléatoires défini sur

$$\ell^2(Z) = \{u = (u_n) \in C^Z / \sum_{n\in Z} |u_n^2| < +\infty\}$$

$$(H(\omega)\ u)_n = -u_{n+1} - u_{n-1} + x_n(\omega)\ u_n \qquad n \in Z.$$

L'opérateur $H(\omega)$ est auto-adjoint. Notons E_t^ω la résolution de l'identité de $H(\omega)$.

D'autre part, pour tout entier $L\geq 0$, soit ${}^L H(\omega)$ l'opérateur défini sur $\ell^2(Z)$ par la restruction de la matrice de $H(\omega)$ à $[-L,L]$ c'est-à-dire pa la matrice de Jacobi :

$$J_L(\omega) = \begin{pmatrix} X_{-L} & -1 & & & (0) \\ -1 & X_{-L+1} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & & -1 & X_L \end{pmatrix}$$

Notons alors $N_L^{(\omega)}$ la fonction de répartition de la distribution empirique des valeurs propres $(\lambda_i^L(\omega))_{-L\leq i\leq L}$ de la matrice $J_L(\omega)$:

$$N_L^{(\omega)}(t) = \frac{1}{2L+1} \sum_{i=-L}^{L} 1_{[\lambda_i^L(\omega)\leq t]}$$

On peut alors énoncer en notant $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la base économique de $\ell^2(\mathbb{Z})$, et $<u,v> = \sum_{n\in Z} u_n v_n$ où $u = (u_n)_{n\in Z} \in \ell^2(Z)$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ le

<u>théorème (1-1)</u>

1) Il existe un ensemble $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ tel que $P(\Omega_0) = 1$ et tel que pour tout $\Omega \in \Omega_0$ on ait :

$$\lim_L \sup_{t\in\mathbb{R}} |N_L^{(\omega)}(t) - N(t)| = 0$$

où $N(t) = E < E_t\, e_o, e_o >$, est continue.

2) Le spectre de presque tout opérateur $H(\omega)$ est égal au support de la probabilité de fonction de répartition $N(t) = E < E_t\, e_o, e_o >$ et ce support est $[-2,2]$ + support de μ.

La fonction de répartition $N(t)$ figurant dans l'énoncé précédent est appelée répartition d'état de l'opérateur H.
Les résultats figurant dans le théorème (1-1) sont contenus dans [15] et [7].

Soit J un intervalle compact de $\mathbb{R}$ tel que $[-2,2]$ + support $\mu \subset \overset{\circ}{J}$.
Considérons la suite de processus $Y_L(t) = \sqrt{2L+1}\, [N_L(t)-N(t)]$ $L\geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $L \geq 1$, $t \notin J$ on a $Y_L(t) = 0$.
L'objet du présent travail est de préciser la convergence figurant au 1) du théorème (1-1), en étudiant la suite de processus $Y_L(t)$ $L\geq 1$ $t\in J$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{D}(J)$ des fonctions de J dans $\mathbb{R}$ continues à

droite et possédant une limite à gauche, muni de la topologie de skorokhod [2] ?

Cette étude est menée au paragraphe 1, sous l'hypothèse supplémentaire que μ admette une densité continue : on établit la convergence en loi de la suite de processus $(Y_L)_{L\geq 1}$ vers un processus gaussien Y, presque sûrement à trajectoire continue. Notons que le résultat obtenu est analogue au théorème classique concernant la distribution empirique de variables aléatoires réelles indépendantes, qui correspond à l'étude de la distribution empirique d'une matrice diagonale.

La méthode utilisée pour établir le résultat précédent nécessite l'étude de certains produits de matrices aléatoires indépendantes 2×2 de déterminant un dépendant d'un paramètre, et de chaînes de Markov définies à partir de ces produits. Les techniques mises en place à cette occasion nous permettront de prouver la formule de Thouless [6] au paragraphe 2. L'étude de la suite de processus $(Y_L)_{L\geq 0}$ a été abordée dans [15].

Paragraphe 2 - DISTRIBUTION EMPIRIQUE DES VALEURS PROPRES D'UNE MATRICE de Jacobi :

2-1 Avec les notations définies au paragraphe 1, et en appelant de plus S_μ le support de μ nous pouvons énoncer le :

Théorème (2-1) : *Si μ admet une densité continue p à support compact :*
La suite de processus $(Y_L)_{L\geq 0}$ converge en loi dans $\mathfrak{D}(J)$ vers un processus gaussien centré Y.

De plus si $t_1<t_2<\ldots<t_k\in\,]-2,2[\,+S_\mu$
la matrice de covariance de $(Y(t_1),Y(t_2),\ldots,Y(t_k))$ est positive non dégénérée.
Enfin pour tout $\gamma<1/2$ on a : $$\text{p s}\ \lim_{h\downarrow 0} h^{-\gamma} \sup_{\substack{|t-s|\leq h\\ t,s\in J}} |Y(t)-Y(s)| = 0$$

et en particulier Y est presque sûrement à trajectoires continues.

2-2) Démonstration du théorème (2-1) :

Il est clair que l'étude des distributions empiriques des valeurs propres des matrices $J_L(\omega)$ $L \geq 1$ est équivalente à l'étude des distributions empiriques des matrices

$$\tilde{J}_{L+1}(\omega) = \begin{pmatrix} X_0(\omega) & -1 & & (0) \\ -1 & X_1(\omega) & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & X_L(\omega) \end{pmatrix} \qquad L \geq 0$$

Nous nous placerons désormais dans ce cadre, les notations adoptées précédemment étant modifiées de façon convenable par l'adjonction d'un tilde.

Soit $p_{L+1}(t)$ le polynome caractéristique de $\tilde{J}_{L+1}$ on a la relation :

$$p_{L+1}(t) = (X_L - t)\, p_L(t) - p_{L-1}(t) \qquad L \geq 0$$

avec $p_{-1}(t) = 0$ $\qquad p_0(t) = 1$

c'est-à-dire que pour tout $L \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} p_{L+1}(t) \\ p_L(t) \end{pmatrix} = g_L^t \; g_{L-1}^t \cdots g_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $g_k^t = \begin{pmatrix} X_k - t & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad 0 \leq k \leq L$.

Les valeurs propres de $\tilde{J}_{L+1}$ sont les zéros de $p_{L+1}(t)$. De plus nous pouvons énoncer la proposition suivante dont la justification figure dans [1].

<u>Proposition (2-1)</u> :

a) $p_{L+1}(t)$ *possède* $(L+1)$ *zéros réels deux à deux distincts* $t_o<t_1<..\leq t_L$

b) Le nombre de changements de signes de la suite $\{p_o(t),p_1(t),..,p_{L+1}(t)\}$ *est égal à* 0 *si* $t<t_o$, $r+1$ *si* $t_r<t<t_{r+1}$ $0\leq t\leq L$, *et à* $(L+1)$ *si* $t>t_L$.

Si l'on note $P(\mathbb{R}^2)$ l'espace projectif de $\mathbb{R}^2$,

$I = \{\bar{x}\in P(\mathbb{R}^2) \quad x = (\cos\theta,\sin\theta) - \frac{\Pi}{2}< \theta\leq 0\}$

et $\overline{x_o}$ l'image dans $P(\mathbb{R}^2)$ du vecteur $x_o = (1,o)$. On en déduit le :

<u>corollaire (2-1)</u> :

1) $\forall t \in \mathbb{R}$

$$|\tilde{N}_L(t) - \frac{1}{L+1}\sum_{k=0}^{L} 1_I(g_k^t\, g_{k-1}^t \quad g_o^t.\overline{x_o})| \leq \frac{1}{L+1}$$

2) Dans le cas où la loi de μ *est diffuse, on a de plus :*

$$\forall t\in\mathbb{R} \quad ps \quad \tilde{N}_L(t) = \frac{1}{L+1}\sum_{k=0}^{L} 1_I(g_k^t \dots g_o^t.\bar{x}_o)$$

où $g_\circ\bar{x}$ désigne l'action de la matrice g de $SL(2,\mathbb{R})$ sur l'élément $\bar{x}$ de $P(\mathbb{R}^2)$.

L'assertion 2 du corollaire (2-1) est une conséquence immédiate de la proposition (2-1), et l'assertion 2 résulte du fait que si la loi de μ est diffuse, on a pour tout $k\in\mathbb{N}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$ $P(p_k(t)=0) = 0$

Remarquons que les énoncés précédents sont analogues au théorème d'oscillation de Sturm dans la théorie des équations différentielles du second ordre.

Le corollaire 1 permet de ramener l'étude du comportement asymptotique de $\tilde{N}_L(t), L\geq 1$ à celui d'une fonctionnelle additive des états d'une chaîne de Markov.

Nous allons scinder la preuve du théorème (2-1) en deux parties :

I) On commence par étudier pour un nombre fini de réels $t_1<t_2<\ldots<t_k$ le comportement en loi de la suite de vecteurs aléatoires $(\tilde{Y}_n(t_1), \tilde{Y}_n(t_2),\ldots,\tilde{Y}_n(t_k))$, où $\tilde{Y}_n(t) = \sqrt{n+1}\,[\tilde{N}_n(t) - N(t)]$ $n\geq 1$, $t\in\mathbb{R}$.

II) On établit la relative compacité faible des lois de la suite de processus $\tilde{Y}_n(t)$ $t\in J$, $n\geq 1$, à valeurs dans $\mathfrak{D}(J)$ muni de la métrique de Skorokhod [2].

2-2-1) PREMIERE PARTIE :

On étudie pour $t_1<t_2<\ldots<t_k$ le comportement en loi de la suite de vecteurs aléatoires $(\tilde{Y}_n(t_1), \tilde{Y}_n(t_2), \ldots, \tilde{Y}_n(t_k))$ qui en raison du corollaire (2-1) est le même que celui du vecteur aléatoire.

$$\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1_I\,(g_j^{t_i}\, g_{j-1}^{t_i} \cdots g_1^{t_i}.\, x_0) - (n+1)\, N(t_i)}{\sqrt{n+1}}\right)_{1\leq i\leq k}$$

Pour cela considérons la chaîne de Markov $(\tilde{x}_j^t)$ $j\geq 0$, à valeurs dans $X^k = [P(\mathbb{R}^2)]^k$ de probabilité de transition définie de la façon suivante :

si $\underline{t} = (t_1,t_2,\ldots,t_k)$ $\mathbb{R}^k$ et $\overline{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_k) \in X^k$

$$P_{\underline{t}}\, f(\overline{x}) = \int f(g_1^{t_1}(\omega).x_1,\, g_1^{t_2}(\omega).x_2,\ldots,g_1^{t_k}(\omega).x_k)\, dP(\omega)$$
$$= \int f(g.\overline{x})\, d\mu_{\underline{t}}(g)$$

où $\mu_{\underline{t}}$ désigne la loi du vecteur aléatoire $(g_{t_1}(\omega),g_{t_2}(\omega),\ldots,g_{t_k}(\omega)) \in [SL(2,\mathbb{R})]^k$ et f une fonction borélienne bornée sur X^k.

Nous noterons $P_{x,\underline{t}}$ $x \in X$, (resp. $P_{\nu,\underline{t}}$ où ν est une probabilité sur X) la loi sur $X^{\mathbb{N}}$ des trajectoires de $(\tilde{X}_j^{\underline{t}}$ $j \geq 0)$ issues de x (resp. de loi de départ ν).

Soit $\mathcal{C}(X^k)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur X^k muni de la norme de la convergence uniforme sur X^k $|f| = \sup_{x \in X^k} |f(x)|$
$P_{\underline{t}}$ opère sur $\mathcal{C}(X^k)$ et possède les propriétés suivantes :

Proposition (2-2) *Si* μ *admet une densité, l'opérateur* $P_{\underline{t}}$ *est quasi compact sur* $\mathcal{C}(X^k)$ *et l'on a :*

$$\forall n \geq 1 \qquad \forall f \in \mathcal{C}(X^k)$$

$$P_{\underline{t}}^n f = \nu_{\underline{t}}(f) + Q_{\underline{t}}^n(f)$$

où $\nu_{\underline{t}}$ *est l'unique probabilité* $P_{\underline{t}}$ *invariante portée par* X^k *et* $Q_{\underline{t}}$ *est un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à 1 et tel que*

$$\nu_{\underline{t}} Q_{\underline{t}} = 0$$

Démonstration de la proposition (2-2) :

Commençons par énoncer des résultats utiles pour cette preuve :

a)
Proposition (2-3) *Si* μ *admet une densité, il existe un entier* $n_o \geq 1$ *tel que la probabilité* $\mu_{\underline{t}}^{n_o}$ *obtenue en convolant* n_o *fois* $\mu_{\underline{t}}$ *dans le groupe* $[SL(2,\mathbb{R})]^k$ *possède une densité dans* $[SL(2,\mathbb{R})]^k$
qui sera justifiée à la fin du paragraphe (2-2-1).

b)
Proposition (2-4) *Si* μ *charge au moins 2 points ;* $\mu_{\underline{t}}$ *admet une unique probabilité invariante* $\nu_{\underline{t}}$ *sur* X^k *et l'on a*

$$\forall f \in \mathcal{C}(X^k) \sup_{\bar{x} \in X^k} |P_{\underline{t}}^n f(\bar{x}) - \nu_{\underline{t}}(f)| = 0$$

Démonstration de la proposition (2-4) :

Pour $1 \leq j \leq k$ notons μ_{t_j} la loi de la matrice aléatoire $g^{t_j}(\omega) \in SL(2, \mathbb{R})$. Si μ charge au moins deux points, le sous-groupe fermé H_j de $SL(2, \mathbb{R})$ engendré par le support de μ_j est non compact et ne contient pas de sous-groupe d'indice fini ayant une action irréductible sur $\mathbb{R}^2$ [13]. Munissons $\mathbb{R}^2$ de la structure euclidienne définie par la norme $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, et définissons la distance d sur $P(\mathbb{R}^2)$ par

$$d(x,y) = |\sin \theta(\tilde{x},\tilde{y})|$$

où $\tilde{x},\tilde{y}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de norme 1, d'image x,y dans $P(\mathbb{R}^2)$, et $\theta(\tilde{x},\tilde{y})$ est l'angle de ces deux vecteurs.

On a alors : [9]

$$\forall \; 1 \leq j \leq k \quad \lim_n \sup_{x,y \in P(\mathbb{R}^2)} \int d(g.x,g.y)\, \mu_{t_j}^n(dg) = 0$$

Par conséquent si maintenant d_k est la distance sur X^k définie par

$$d_k(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k} d(x_i,y_i) \qquad \text{où } \bar{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_k) \in X^k$$
$$\bar{y} = (y_1,y_2,\ldots,x_k) \in X^k$$

il en résulte que

$$\lim_n \delta_n = \lim_n \sup_{\bar{x},\bar{y} \in X^k} \int d_k(g.\bar{x},g.\bar{y})\, \mu_{\underline{t}}^n(dg) = 0$$

Pour toute fonction f Lipschitzienne sur X^k et toute suite $(\bar{x}_n)_{n\geq 1}$ de X^k on a : $\forall\, n,m \geq 1$

$$|P_{\underline{t}}^{n+m} f(\bar{x}_{n+m}) - P_{\underline{t}}^n f(\bar{x}_n)| \leq 2\, \delta_n$$

Il en résulte que pour toute fonction f Lipschitzienne, la suite de fonctions $(P_{\underline{t}}^n f)_{n \geq 1}$, converge uniformément vers une constante $I(f)$ sur X^k. Par densité, le résultat reste vrai pour toute fonction f de $\mathcal{C}(X^k)$. Clairement la fonctionnelle $f \to I(f)$ de (X^k) dans $\mathbb{R}$ définit l'unique probabilité $P_{\underline{t}}$ invariante portée par X^k ; d'où la proposition (2-4).

c)

X^k est un espace homogène compact de $[SL(2,\mathbb{R})]^k$; comme $\mu_{\underline{t}}^{no}$ admet une densité dans $[SL(2,\mathbb{R})]^k$, il en résulte que l'opérateur P_t^{no} est un opérateur compact sur (X^k) [17] ; par conséquent, $P_{\underline{t}}$ est une contraction, quasi-compacte sur $\mathcal{C}(X^k)$. Les seules valeurs spectrales de $P_{\underline{t}}$ de module 1 sont alors des pôles simples. Le résultat de la proposition (2-4) montre que 1 est la seule valeur spectrale de module 1. Les autres valeurs spectrales de $P_{\underline{t}}$ ayant toutes un module - majoré par un nombre strictement inférieur à 1, on en déduit la proposition (2-2).
La chaîne de Markov définie par $P_{\underline{t}}$ satisfait donc à la condition de Doeblin.

Adoptons maintenant les notations : pour $\lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$

$\lambda' = (\lambda'_i)_{1 \leq i \leq k} \in \mathbb{R}^k$ $\qquad$ $<\lambda,\lambda'> = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \lambda'_i$

et pour $\bar{x} \in X^k$, $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_k)$ $\qquad$ $F_I(\bar{x}) = (1_I(x_1), 1_I(x_2),\ldots,1_I(x_k))$

et considérons alors l'opérateur $P_t^{no}(\lambda)$ défini par

$$P_{\underline{t}}^{no}(\lambda)\, f(\bar{x}) = \int e^{i<\lambda, F_I(g\bar{x})>} f(g\bar{x})\, p_{\underline{t}}^{no}(dg) \quad \text{où} \quad f \in \mathcal{C}(X^k),\ \lambda \in \mathbb{R}^k$$

$P_{\underline{t}}^{no}$ opère sur $\mathcal{C}(X^k)$ car p^{no} a une densité dans $[SL(2,\mathbb{R})]^k$.

Par ailleurs $P^{no}_{\underline{t}}(X)$ est un opérateur qui est obtenu par perturbation analytique de l'opérateur $P^{no}_{\underline{t}}(o) = P^{no}_{t}$. Si l'on désigne par r(L) le rayon spectral d'un opérateur L sur $\mathcal{C}(X^k)$, on peut alors en tenant compte de la proposition (2-2) et des résultats de la théorie des perturbations analytiques d'opérateurs [3], [10] conclure que : il existe un voisinage V de o dans $\mathbb{R}^k$ tel que :

$$\forall\ f \in \mathcal{C}(X^k) \qquad \forall\ \lambda \in V \qquad \forall\ p \geq 1$$

(1) $$[P^{no}_{\underline{t}}(\lambda)]^p f = \tilde{k}^p_{\underline{t}}(\lambda)\ \tilde{N}_{\underline{t}}(\lambda) f + \tilde{Q}^p_{\underline{t}}(\lambda) f$$

où $\tilde{k}_t(\lambda)$ est l'unique valeur propre de plus grand module de $P^{no}_{\underline{t}}(\lambda)$ et vérifie $|\tilde{k}_t(\lambda)| > \frac{2+r(Q^{no})}{3}$

$\tilde{N}_{\underline{t}}(\lambda)$ est la projection sur le sous-espace propre de dimension 1 correspondant à $\tilde{k}_t(\lambda)$

$\tilde{Q}_{\underline{t}}(\lambda)$ est un opérateur de $\mathcal{C}(X^k)$ de rayon spectral $r(\tilde{Q}_t(\lambda)) \leq \frac{1+r(Q^{no})}{3}$ vérifiant $\tilde{Q}_{\underline{t}}(\lambda)\ \tilde{N}_{\underline{t}}(\lambda) = 0$.

De plus les applications $\lambda \to \tilde{k}_{\underline{t}}(\lambda)$, $\lambda \to \tilde{N}_t(\lambda)$, $\lambda \to \tilde{Q}_t(\lambda)$ sont analytiques.

La décomposition précédente va nous permettre de justifier la

<u>Proposition (2-5)</u> :

Sous les hypothèses du théorème (2-1) *pour tout* $x = (x_1, x_2, .., x_k) \in X^k$ *on a* :

1) $$\text{ps} \lim_n \left(\frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} 1_I(g_p^{t_j}\ g_{p-1}^{t_j} \cdots g_1^{t_j}\ x_j)\right)_{1 \leq j \leq k} = (\nu_{t_j}(I))_{1 \leq j \leq k} = (N(t_j))_{1 \leq j \leq k}$$

$$= \left(\frac{1}{n_o}\left[\frac{1}{i}\ \frac{\partial}{\partial \lambda_j}\ [k_{\underline{t}}]\ (o)\right]\right)_{1 \leq j \leq k}$$

2) *Le vecteur aléatoire* $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=1}^{n} 1_I(g_p^{t_j} g_{p-1}^{t_j} \cdots g_1^{t_j} x_j) - n\, N(t_j)\right)_{1 \leq j \leq k}$ *converge en loi vers une loi de Gauss* $Y_{\underline{t}}$ *centrée portée par* $\mathbb{R}^k$ *et de matrice de covariance* $\Sigma = (\sigma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$ *définie par :* $1 \leq i,j \leq k$

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{n_o 2} \left\{ - \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} [k_{\underline{t}}](o) + \frac{\partial}{\partial \lambda_i} [k_{\underline{t}}](o) \frac{\partial [k_{\underline{t}}]}{\partial \lambda_j}(o) \right\}$$

$$= \int_{X^2} [f_i\, f_j - P_{t_i} f_i P_{t_j} f_j]\, d\nu_{t_i,t_j}$$

où $f_i = \sum_{n=o}^{\infty} P_{t_i}^n (1_I - \nu_{t_i}(I)) = (I - P_{t_i})^{-1} (1_I - \nu_{t_i}(I))$

<u>Démonstration de la proposition (2-5).</u>

L'existence des limites précédentes se déduisent de résultats connus [10] concernant le comportement asymptotique des fonctionnelles additives d'états de chaînes de Markov satisfaisant à la condition de Doeblin. Par ailleurs l'expression de ces limites à l'aide de dérivées de $k_{\underline{t}}(\lambda)$ s'obtient en passant à la limite selon la sous-suite $(n\ no)_{n \geq 1}$ et en utilisant la décomposition (1) : (voir [10] et [17] pour une étude détaillée).

Nous achèverons la première partie en prouvant la

<u>proposition (2-6)</u> :

Sous les hypothèses du théorème (2-1) *pour tous* $t_1 < t_2 < \ldots < t_k \in]-2,2[+ S\mu$ $Y_{\underline{t}}$ *est non dégénérée.*

<u>Démonstration de la proposition (2-6) :</u>

Elle repose sur plusieurs lemmes.

1) <u>lemme (2-1)</u> :

Sous les hypothèses du théorème (2-1), *si* $t_1<t_2<..<t_k \in]-2,2[+ S_\mu$ *le support de* $\nu_{\underline{t}}$ *est égal à* X^k.

dont nous donnerons la preuve à la fin du paragraphe 2-2-1.

2) <u>lemme (2-2)</u> :

sous les hypothèses du théorème (2-1), *si* $t_1<t_2<..<t_k \in]-2,2[+ S_\mu$ *il existe une boule* B *centrée en* o *dans* $\mathbb{R}^k$ *telle que pour* $\lambda \in B - \{o\}$ *on ait* $|k_{\underline{t}}(\lambda)|<1$.

<u>Démonstration du lemme (2-2)</u> :

Pour tout $\lambda \in V$, il existe une fonction $\Phi_\lambda \in \mathcal{C}(X^k)$ telle que pour tout $n \geq 1$:

(2) $\quad [P_{\underline{t}}^{no}(\lambda)]^n \Phi_\lambda = [k_{\underline{t}}(\lambda)]^n \Phi_\lambda \qquad\qquad \Phi_\lambda \neq 0.$

Supposons que $\lambda \neq 0$ et $|k_t(\lambda)| = 1$; il résulte alors de (2) que pour tout $n \geq 1$

$$P_{\underline{t}}^{n\,no} |\Phi_\lambda| \geq |\Phi_\lambda|$$

d'où l'on obtient en faisant tendre n vers $+\infty$, que :

(3) $\quad \nu_{\underline{t}}|\Phi_\lambda| \geq |\Phi_\lambda|$

De (3) il résulte puisque $|\Phi_\lambda| \in \mathcal{C}(X^k)$ et que $\mathrm{supp}\,\nu_{\underline{t}} = X^k$ d'après le lemme (2-1) que :

(4) $\quad \forall\ \overline{x} \in X^k \qquad |\Phi_\lambda(\overline{x})| = \sup\limits_{\overline{y} \in X^k} |\Phi_\lambda(\overline{y})| > 0$

en tenant compte de (2) et (4) on a :

$$\forall\ \overline{x} \in X^k, \quad \forall n \geq 1 \qquad \forall\ g \in \sup \mu_{\underline{t}}^{n\,no}$$

$$e^{i<\lambda, F_I(g.\overline{x})>}\ \Phi_\lambda(g\overline{x}) = [k_{\underline{t}}(\lambda)]^n \Phi_\lambda(\overline{x})$$

soit

$$(5) \qquad \frac{\Phi_\lambda(g\bar{x})}{\Phi_\lambda(x)} = [k_{\underline{t}}(\lambda)]^n \; e^{-i<\lambda F_I(g\bar{x})>}$$

En utilisant le fait que le premier membre de (5) est un cocycle multiplicatif sur $[SL(2,\mathbb{R})]^k \times X^k$, on voit que

$$\forall\, n \geq 1, \quad \forall \bar{x} \in X^k, \quad \forall g \in \text{supp } P_{\underline{t}}^{n\, no}$$

$$e^{i<\lambda\; F_I(g\bar{x})>} = 1$$

ce qui dès que $\|\lambda\| < \frac{\Pi}{2\sqrt{k}}$ entraîne que $<\lambda, F_I(g\bar{x})> = 0$.
c'est-à-dire que $\forall \bar{x} \in X^k \qquad <\lambda, F_I(\bar{x})> = 0$,
ce qui est impossible si $\lambda \neq 0$, d'où le lemme (2-2).

3) <u>Lemme (2-3)</u> :

Si $\lambda \in \mathbb{R}^k - \{o\}$ *et si* ${}^t\lambda\, \Sigma\, \lambda = 0$ *il existe une mesure de probabilité* $\theta_\lambda^{\underline{t}}$ *sur* $\mathbb{R}$ *telle que pour toute fonction* Φ *continue bornée sur* $\mathbb{R}$ *on ait :*

$$\lim_n \; E_{\nu_{\underline{t}}} [\Phi(S_n^{\underline{t}}(\lambda))] = \theta_\lambda^{\underline{t}} * \overset{v}{\theta}{}_\lambda^{\underline{t}} (\Phi)$$

où $$S_n^{\underline{t}}(\lambda) = \sum_{j=1}^n \{<\lambda, F_I(\tilde{X}_j^{\underline{t}})> - \int <\lambda, F_I(\bar{x})> \nu_{\underline{t}}(d\bar{x})\}$$

et $\overset{v}{\theta}{}_\lambda^{\underline{t}}$ *est la probabilité symétrique de* $\theta_\lambda^{\underline{t}}$

<u>Démonstration du lemme (2-3)</u> :

Posons $F_\lambda = <\lambda, F_I> - \int <\lambda, F_I(\bar{x})> \nu_{\underline{t}}(d\bar{x})$;

comme $\nu_{\underline{t}}(F_\lambda) = 0$ et en raison du fait que $P_{\underline{t}}$ satisfait à la condition de Doeblin, nous pouvons également définir :

$$h_\lambda = \sum_{n \geq o} P_{\underline{t}}^n(F_\lambda) = (I - P_{\underline{t}})^{-1}(F_\lambda)$$

On a alors :

$$\sigma_\lambda^2 = {}^t\lambda\Sigma\lambda = \int \{P_{\underline{t}}(h_\lambda)^2(\bar{x}) - [P_t h_\lambda(\bar{x})]^2\} \quad \nu_{\underline{t}}(d\bar{x})$$

D'autre part on a : pour tout $\bar{x} \in X^k$ et tout $j \geq 0$:

$$E_{\bar{x}} \, [h_\lambda(\tilde{x}_{j+1}) - P_{\underline{t}} \, h_\lambda(\tilde{x}_j)]^2 = P_{\underline{t}}^j \, [P_{\underline{t}} \, h_\lambda^2 - (P_t h_\lambda)^2] \; (\bar{x})$$

Par conséquent si $\sigma^2_\lambda = 0$, il existe une constante $K>0$ telle que pour tout $j \geq 0$:

$$\sup_{\bar{x} \in X^k} E_{\bar{x}} \, [h_\lambda^\bullet(\tilde{x}_{j+1}) - P_{\underline{t}} h_\lambda(\tilde{x}_j)]^2 \leq K \rho^j$$

c'est-à-dire que pour tout $j \geq 0$

$$\sup_{\bar{x} \in X^k} E_{\bar{x}} \, [h_\lambda(\tilde{x}_{j+1}) - h_\lambda(\tilde{x}_j) + F_\lambda(\tilde{x}_j)]^2 \_ \; K \rho^{j}.$$

d'où l'on déduit à l'aide de l'inégalité de Schwarz que pour tout $j \geq 0$

$$(6) \quad \sup_{\bar{x} \in X^k} E_{\bar{x}} \, |h(\tilde{X}_{j+1}) - h_\lambda(\tilde{X}_j) + F_\lambda(\tilde{X}_j)| \leq \sqrt{K} \, \rho^{j/2}$$

Posons alors $T_{n,n} = \sum_{j=n}^{2n-1} F_\lambda(\tilde{X}_j)$

De (6) il résulte que :

$$\sup_{\bar{x} \in X^k} E_{\bar{x}} \, |T_{n,n} + [h_\lambda(\tilde{X}_{2n+1}) - h_\lambda(\tilde{X}_n)]| \leq \sqrt{K} \sum_{j=n}^{2n} \rho^{j/2}$$

On en déduit que la suite de variables aléatoires $(T_{n,n} - [h_\lambda(\tilde{X}_n) - h_\lambda(\tilde{X}_{2n})])$ $n \geq 0$ converge vers 0 en $P_{\nu_{\underline{t}}}$ probabilité quand n tend vers $+\infty$.

Par ailleurs, $\forall \, k,m \in \mathbb{N}$ on a

$$\int h_\lambda^k(\tilde{X}_{2n}(\omega)) \, h^m(\tilde{X}_n(\omega)) \quad P_{\nu_t}(d\omega) = \int P_{\underline{t}}^n \, (h_\lambda^k)(\bar{x}) h_\lambda^m(\bar{x}) \quad \nu_{\underline{t}}(d\bar{x})$$

d'où $\forall \, k,m \in \mathbb{N}$.

$$\lim_n \int h_\lambda^k(\tilde{X}_{2n+1}(\omega))\, h^m(\tilde{X}_n(\omega))\, dP_{\nu_t}(\omega) = \nu_{\underline{t}}(h_\lambda^k)\, \nu_t(h^m).$$

La fonction h_λ étant bornée, il existe sur $\mathbb{R}$ une unique probabilité $\theta_\lambda^{\underline{t}}$ telle que pour tout $k \geq 0$ $\int x^k\, \theta^{\underline{t}}(dx) = \nu_{\underline{t}}(h_\lambda^k)$ et la suite des lois par rapport à P_{ν_t} de la suite des variables aléatoires

$(h_\lambda(\tilde{X}_n) - h_\lambda(\tilde{X}_{2n}))$ $\quad n \geq 1$ converge vers $\theta_\lambda^{\underline{t}} * \check{\theta}_\lambda^{\underline{t}}$.

L'assertion du lemme (2-5) résulte immédiatement de ce qui précède car les variables aléatoires $T_{n,n}$ et $S_n^{\underline{t}}(\lambda)$ ont même loi par rapport à P_{ν_t}.

4) Terminons maintenant la démonstration de la proposition (2-6).

Soit ψ la fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \frac{1}{\Pi}\frac{1-\cos x}{x^2}$; elle a pour transformée de Fourier

$$\hat{\psi}(u) = \frac{1}{\Pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\,\psi(x)\,dx = \begin{cases} 1 - |u| & \text{si } |u| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$E_{\nu_{\underline{t}}}(\psi(S^{\underline{t}}_{mno}(\lambda))) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{X^k}(1-|u|)\, e^{-iunn_o\nu_{\underline{t}}(<\lambda,F_I>)}\,(P_{\underline{t}}^{n_o}(\lambda u))^n e(\bar{x})\,du\,d\nu_{\underline{t}}(\bar{x})$$

où e est la fonction identique à 1 sur X^k.

Si $\lambda \in B-\{o\}$ et si $u \in [-1,1]-\{0\}$, on a en raison du lemme (2-2) et de (1) :

$$\forall\, \bar{x} \in X^k \qquad \lim_n [P_{\underline{t}}^{n_o}(\lambda u)]^n e(\bar{x}) = 0.$$

En utilisant le théorème de Lebesgue, on peut alors conclure que si $\lambda \in B-\{o\}$

$$\lim_n E_{\nu_{\underline{t}}}(\psi(S^{\underline{t}}_{n\,n_o}(\lambda))) = 0.$$

Comme pour toute probabilité θ sur $\mathbb{R}$, on a $\theta * \check{\theta}(\psi)>0$, le lemme (2-3) montre alors que si $\lambda \in B-\{o\}$

$${}^t\lambda\, \Sigma\, \lambda \neq 0$$

ce qui établit la proposition (2-6).

Les conclusions des propositions (2-5) et (2-6) justifient toutes les assertions contenues dans (2-1) concernant le comportement en loi du vecteur aléatoire $(Y_n(t_1),Y_n(t_2),\dots,Y_n(t_k))_{n\geq 1}$ lorsque $n \to +\infty$ où $t_1<t_2<\dots< t_k$.

Il nous reste cependant à donner les démonstrations de la proposition (2-3), et du lemme (2-1).

Démonstration de la proposition (2-3)

Elle repose sur les lemmes suivants :

1) lemme (2-4) :

Si μ admet une densité, le sous groupe fermé $G_{\underline{t}}$ de $[SL(2,\mathbb{R})]^k$ engendré par le support de $\mu_{\underline{t}}$ est égal à $[SL(2,\mathbb{R})]^k$

Démonstration du lemme (2-4) :

On raisonne par récurrence sur k.

a) Supposons que $k=1$;

pour $t \in \mathbb{R}$, $q \in \operatorname{supp}\mu$ on a

$$g_t(q) = \begin{pmatrix} q-t & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \exp(q-t)x \;\; g_o$$

où $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $g_o = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On en déduit que si $q, q' \in \text{supp}\, \mu$

$g_t^{-1}(q)\ g_t(q') = \exp(-q'+q)Y \in G_t$

où $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $g_t(q)\ g_t^{-1}(q') = \exp(q-q')\ x \in G_t$

Comme le support de $\mu * \check{\mu}$ ($\check{\mu}$ étant le probabilité symétrique de μ) contient un voisinage ouvert de 0, l'algèbre de Lie de G_t contient X et Y. Or X et Y engendrent l'algèbre de Lie de $SL(2,\mathbb{R})$ qui est connexe, par conséquent $G_t = S\,L(2,\mathbb{R})$.

b) Supposons le résultat du lemme (2-4) établi pour tout entier $1 \leq k \leq k_o$
Soient alors $t_1 < t_2, .. < t_{k_o+1} \in \mathbb{R}^{k_o+1}$;
notons $\underline{t}^{(k_o+1)} = (t_1, t_2, .., t_{k_o+1})$ et pour $1 \leq p \leq k_o+1$
$H_p = I_{p-1} \times SL(2,\mathbb{R}) \times I_{k_o+1-p} \cap G_{\underline{t}}(k_o+1)$ où $I_k = (I, I, ., I)$ I étant la matrice identité de $SL(2,\mathbb{R})$. H_p est un sous-groupe distingué de $G_{\underline{t}}(k_o+1)$ et en raison du a) également du groupe $I_{p-1} \times SL(2,\mathbb{R}) \times I_{k_o+1-p}$.

Or ce dernier groupe est semi simple, donc on a :

soit : $H_p = I_{k_o+1}$

soit : $H_p = I_{p-1} \times SL(2,\mathbb{R}) \times I_{k_o+1-p}$

Distinguons deux cas :

α) S'il existe un entier p_o tel que $H_{p_o} = I_{p_o-1} \times SL(2,\mathbb{R}) \times I_{k_o+1-p_o}$, on peut affirmer compte-tenu du fait que grâce à l'hypothèse de récurrence $G_{\underline{t}}(k_o+1)$ se projette surjectivement sur le groupe

$[SL(2,\mathbb{R})]^{p_o-1} \times I \times [SL(2,\mathbb{R})]^{k_o+1-p_o}$

que $G_{\underline{t}(k_o+1)} = [SL(2,\mathbb{R})]^{k_o+1}$

β) Si $\forall p$, $1 \leq p \leq k_o+1$ H_p est l'identité de $[SL(2,\mathbb{R})]^k$, alors compte-tenu de a), il existe des isomorphismes (χ_{t_i}) $2 \leq i \leq k_o+1$ de $SL(2,\mathbb{R})$ sur lui-même tels que tout élément g de $G_{\underline{t}}(k_o+1)$ s'écrive sous la forme :

$$(g_1, \chi_{t_2}(g_1), \chi_{t_z}(g_1) \;,\; t_{k_o+1}(g_1)) \qquad g_1 \in SL(2,\mathbb{R})$$

Montrons que ceci n'est pas possible, ce qui assurera que seule la situation α) se présente et achèvera la preuve du lemme (2-4).

Pour tout $q \in S_\mu$ on a nécessairement

$$(7) \quad \chi_{t_2}(g_{t_1}(q)) = \exp(t_1 - t_2) X \, g_{t_1}(q)$$

il en résulte que pour tous $q, q' \in S_\mu$ on a :

$$\chi_{t_2}(g_{t_1}(q) \; g_{t_1}^{-1}(q') = \chi_{t_2}(\exp\,(q-q')X) = \exp(q-q')X$$

$$\chi_{t_2}(g_{t_1}^{-1}(q) \; q_{t_1}(q')) = \chi_{t_2}(\exp\,(q-q')Y) = \exp(q-q')Y$$

Le support de $\mu * \check{\mu}$ contient un voisinage ouvert de o, par conséquent pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\chi_{t_2}(\exp hx) = \exp hx\,, \qquad \chi_{t_2}(\exp hy) = \exp hy$$

d'où il résulte que pour tout $g \in SL(2,\mathbb{R})$ $\chi_{t_2}(g) = g$, ce qui en contradiction avec (7) puisque $t_1 \neq t_2$.

2) Soit $\mathfrak{g}_k$ l'algèbre de Lie de $[SL(2,\mathbb{R})]^k$ et notons Ad l'action adjointe de $[SL(2,\mathbb{R})]^k$ sur $\mathfrak{g}_k$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_k$ est égale à la puissance kième de l'algèbre de Lie de $SL(2,\mathbb{R})$.

Appelons $\tilde{X}$ l'élément $(X, X, .., X)$ de $\mathfrak{g}_k$.

Nous pouvons alors énoncer le

Lemme (2-5) :

Soit U *une partie de* $[SL(2,\mathbb{R})]^k$ *engendrant topologiquement* $[SL(2,\mathbb{R})]^k$ *, il existe alors un entier* n_o *et des éléments* $g_1, g_2 \cdots g_{n_o}$ *de* U *tels que le sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{g}_k$ *engendré par les éléments* $\{Ad(g_1 . g_2 . g_p)(\tilde{X}) \quad 1 \leq p \leq n_o\}$ *soit égal à* $\mathfrak{g}_k$.

Démonstration du lemme (2-5):

Pour $n \geq 1$ et $\omega = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in U^n$ notons $H_n(\omega)$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}_k$ engendré par les éléments $(Ad(g_1 . g_2 \cdots g_p)(\tilde{X}) \quad 1 \leq p \leq n)$.

On a pour tous $m, n \geq 1$ la relation :

(8) $H_{n+m}(\omega\omega') = H_n(\omega) + Ad(g_1 . g_2, \ldots, g_n)(H_m(\omega'))$ où $\omega' \in U^m$.

Si $\omega_o = (g_1, g_2, \ldots, g_{n_o}) \in U^{n_o}$ est tel que la dimension de $H_{n_o}(\omega_o)$ soit maximum il résulte alors de la relation (8) que $Ad(g_1 . g_2, \ldots g_{n_o})(H_{n_o}(\omega_o)) = H_{n_o}(\omega_o)$ en faisant $\omega = \omega' = \omega_o$; de plus en faisant $\omega = \omega_o$ on voit que $Ad(g_1 . g_2, \ldots, g_{n_o})(H_n(\omega') \subset H_{n_o}(\omega_o)$ et donc d'après la remarque précédente on a $H_n(\omega') \subset H_{n_o}(\omega_o)$.

Par conséquent pour tout $g \in U$, on a $Ad(g)(H_{n_o}(\omega_o)) \subset H_{n_o}(\omega_o)$.

Comme U engendre $[SL(2,\mathbb{R})]^k$, $H_{n_o}(\omega_o)$ est un idéal de $\mathfrak{g}_k$; de plus $H_{n_o}(\omega_o)$ a une projection non réduite à 0 sur chacun des facteurs de $\mathfrak{g}_k$ et donc $H_{n_o}(\omega_o) = \mathfrak{g}_k$

3) Terminons maintenant la démonstration de la proposition (2-3) :

Soit $q \to g_{\underline{t}}(q)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $[SL(2,\mathbb{R})]^k$ définie par

$g_{\underline{t}}(q) = (g_{t_1}(q), g_{t_2}(q), \ldots, g_{t_k}(q))$

Pour tout $n \geq 1$ l'application M_n analytique de $\mathbb{R}^n$ dans $[SL(2,\mathbb{R})]^k$ définie par

$$M_n(q_1,q_2,..,q_n) = g_{\underline{t}}(q_1)\ g_{\underline{t}}(q_2)..g_{\underline{t}}(q_n)$$

a en tout point $(q_1,q_2,..,q_n) \in \mathbb{R}^n$ un rang égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les éléments

$\{Ad\ [g_{\underline{t}}(q_1)\ g_{\underline{t}}(q_2)..g_{\underline{t}}(g_p)]^{-1}\ (\tilde{X}) \quad 1 \leq p \leq n\}$ de $\mathcal{G}_k$.

En appliquant le lemme (2-5) à $U = [g_{\underline{t}}(S_\mu)]^{-1}$, ce qui est possible d'après le lemme (2-4), il existe un entier n_o et des réels $q_1,q_2,..,q_{n_o} \in S_\mu$ tels que le rang de M_{n_o} au point $(q_1,q_2,...,q_{no}) \in S_\mu$ soit égal à la dimension de $\mathcal{G}_k$. L'ensemble des points où le rang de M_{n_o} est strictement inférieur est, puisque M_{n_o} est analytique, une réunion dénombrable de sous-variétés de $\mathbb{R}^{no}$ de dimension inférieure ou égale à $n_o - 1$, et donc négligeable. On en déduit que si μ a une densité, il en est de même pour $\mu_{\underline{t}}^{n_o}$

Donnons maintenant la :

<u>Démonstration du lemme (2-1)</u> :

Si x_o est un point de support de $\nu_{\underline{t}}$, en raison du fait que $\nu_{\underline{t}}$ est l'unique probabilité invariante par $\mu_{\underline{t}}$, le support de $\nu_{\underline{t}}$ est égal à $\overline{T_{\mu_{\underline{t}}}.x_o}$ où $T_{\mu_{\underline{t}}}$ est le semi-groupe fermé engendré par le support de $\mu_{\underline{t}}$. La démonstration du lemme (2-1) sera donc achevée si l'on prouve que pour tout élément x de X^k on a $\overline{T_{\mu_{\underline{t}}}.\ x} = X^k$.

Justifions ce dernier résultat en raisonnant par récurrence sur k.

1) La propriété est vraie si k=1 ; en effet sous les hypothèses du lemme (2-1), il existe un élément q de S_μ tel que la matrice $g_{t_1}(q)$ soit elliptique et possède pour valeurs propres $e^{i2\pi\alpha}$ et $e^{-i2\pi\alpha}$ avec $\alpha \notin Q$, et l'on a alors $\overline{T_{\mu_{t_1}}.x} \supset \overline{\{g^n_{t_1}(q).x \quad n \geq o\}} = X$ d'où le résultat.

2) Supposons le résultat établi jusqu'à l'ordre k_o, et montrons qu'il reste alors vrai à l'ordre $k = k_o+1$.

Soit $q_o \in \overset{\circ}{S}_\mu - F$ où $F = \{q /\ \exists 1 \leq i \leq k_o+1 \ ;\ |q-t_i| = 2\}$

et soient $T(q_o) = \{i \ ;\ 1 \leq i \leq k_o+1 \quad |q_o-t_i| < 2\}$ et

$T'(q_o) = \{i \ ;\ 1 \leq i \leq k_o+1 \quad |q_o-t_i| > 2\}$.

On peut supposer que $T(q_o) \neq \phi$ d'après les hypothèses du lemme ; on peut également admettre sans restriction que les matrices $g_{t_i}(q_o)$ $t_i \in T(q_o)$ possèdent les valeurs propres $e^{i2\pi\alpha_i}$, et $e^{-i2\pi\alpha_i}$ telles que $(1,\alpha_i)$ $i \in T(q_o)$ soient linéairement indépendants sur les rationnels (en effet sinon il suffit de substituer à q_o un élément $q \in S_\mu$ voisin de q_o, choisi de sorte que $T(q) = T(q_o)$, $T'(q) = T'(q_o)$.)

Notons $\mathrm{card}(T(q_o))$ (resp card $T'(q_o)$) le cardinal de $T(q_o)$ (resp de $T'(q_o)$).

L'orbite de tout élément de $X^{\mathrm{card}(T(q_o))}$ sous les puissances positives de $(g_{t_i}(q_o))_{i \in T(q_o)} \in [SL(2,\mathbb{R})]^{\mathrm{card}(T(q_o))}$ est dense dans $X^{\mathrm{card}(T(q_o))}$.

D'autre part si card $T'(q_o) \neq o$ pour tout $y = (y_i)_{i \in T'(q_o)} \in X^{\mathrm{card}(T'(q_o))}$ la suite $(g^n_{t_i(q_o)} \cdot y_i)_{i \in T'(q_o)}$ $n \geq 0$ converge vers un point z_o.

Si card $T'(q_o) = o$ le résultat cherché est obtenu immédiatement en raisonnant comme dans le 1) ; si card $T'(q_o) \neq o$ les considérations précédentes montrent que pour tout $x \in X^{k_o+1}$ $\overline{T_{\mu_{\underline{t}}} . x}$ contient la fibre $z_o \times X^{\mathrm{card} T(q_o)}$ L'hypothèse de récurrence montre de plus que $\overline{T_{\mu(\underline{ti})_{i \in T'(q_o)}} . z_o} = X^{\mathrm{card}(T'(q_o))}$, d'où le résultat cherché.

La démonstration du lemme (2-1) est ainsi achevée.

2-2-2) DEUXIEME PARTIE :

A) Pour terminer la démonstration du théorème (2-1), il reste à établir la relative compacité faible des lois de la suite de processus $\tilde{Y}_n(t) \quad t \in J \quad n \geq 1$ à valeurs dans $\mathcal{D}(J)$.

Précisons une condition suffisante permettant d'assurer cette compacité [2].

Donnons tout d'abord quelques notations :

Pour tout intervalle K de $\mathbb{R}$ et toute fonction α de J dans $\mathbb{R}$ on pose :

$$W(\alpha,K) = \sup_{s,t \in K} |\alpha(s) - \alpha(t)|$$

et l'on définit alors pour toute fonction α de J dans $\mathbb{R}$ et $\delta > o$

$$W_J(\alpha,\delta) = \mathrm{Sup}\ \{W(\alpha,[t,t+\delta]) \ ; \ [t,t+\delta] \subset I\}$$

si les conditions (i) et (ii) suivantes sont vérifiées :

(i) il existe un réel $t_o \in I$, tel que quel que soit $\varepsilon > o$, on puisse trouver un réel $a > o$ tel que : pour tout $n \geq 1$

$$P(|\tilde{Y}_n(t_o)| > a) \leq \varepsilon$$

(ii) Pour tous $\eta > o$, et $\varepsilon > o$ il existe un δ, $o < \delta < 1$ et un entier n_o tels que pour $n \geq n_o$

$$P(W_J(\tilde{Y}_n,\delta) \geq \eta) \leq \varepsilon$$

alors les lois de la suite $(\tilde{Y}_n)_{n \geq 1}$ sont relativement compactes pour la topologie de la convergence faible sur $\mathcal{D}(J)$; de plus toute valeur d'adhérence de cette suite est une loi de processus continu.

La condition (i) résulte immédiatement de la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $\tilde{Y}_n(t)$ $n \geq 1$, $t \in \mathbb{R}$, établie dans la première partie.

D'après le corollaire (2-1), on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ $n \geq 1$

P_s $\tilde{Y}_n(t) = \tilde{Z}_n(t)$

où $\tilde{Z}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\sum_{j=1}^{n+1} 1_I (\tilde{X}_j^t) - (n+1)\, N(t)\right).$

Pour démontrer (ii), nous utiliserons en outre les deux propositions suivantes qui seront justifiées ultérieurement.

Proposition (2-7) :

Pour tous $o<\alpha<1$ *et* $p=1,2$ *il existe une constante* $A_k(\alpha)$ *telle que pour tous* $n \geq 1$ *et* $t,s \in J$

$$E(\tilde{Z}_{2^{n-1}}(t) - \tilde{Z}_{2^{n-1}}(s) \leq A_p(\alpha)\left(|t-s|^{p\alpha} + \frac{|t-s|^{\alpha}}{2^{n-1}}\right)$$

Proposition (2-8) :

Sous les hypothèses du théorème (2-1) *la répartition d'état* N *admet une densité continue.*

ainsi que lemme suivant [2].

lemme (2-6) :

Soient $(\xi_i)_{1 \leq i \leq m}$ *des variables aléatoires,* $S_k = \xi_1+\xi_2+..+\xi_k$ $1 \leq k \leq m$

et $M_m = \sup_{1 \leq k \leq m} |S_k|$

S'il existe des réels positifs $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ $, \gamma \geq 0$ *et* $\beta>1$ *tels que*

$$E|S_i - S_j|^{\gamma} \leq \left(\sum_{i \leq \ell \leq j} u_\ell\right)^{\beta} \qquad 1 \leq i \leq j \leq m$$

alors pour tout $\lambda>0$ *on a*

$$P(M_m \geq \lambda) \leq \frac{K(\gamma,\beta)}{\lambda^{\gamma}} (u_1+u_2+..+u_m)^{\beta}$$

où $K(\gamma,\beta)$ *est une constante.*

Pour tout $n \geq 1$ l'application $t \to \tilde{Y}_{2n-1}(t) + \sqrt{2n}\, N(t)$ est croissante ; donc pour $s \leq t \leq s+h \in \mathbb{R}$ on a

$$-\sqrt{2n}\,[N(s+h) - N(s)] \leq \tilde{Y}_{2n-1}(t) - \tilde{Y}_{2n-1}(s) \leq \tilde{Y}_{2n-1}(s+h) - \tilde{Y}_{2n-1}(s) + \sqrt{2n}\,[N(s+h) - N(s)] .$$

On en déduit, en tenant compte du fait (proposition (2-8)) que N a une densité continue à support compact, qu'il existe une constante $c>o$ telle que pour $s \leq t \leq s+h \in \mathbb{R}$, on ait :

$$|\tilde{Y}_{2n-1}(t) - \tilde{Y}_{2n-1}(s)| \leq |\tilde{Y}_{2n-1}(s+h) - \tilde{Y}_{2n-1}(s)| + c\sqrt{2n}\, h$$

et par conséquent pour tous $m \geq 1$ $h>o$ $s \in \mathbb{R}$

$$(9) \quad \sup_{t \in [s,s+mh]} |\tilde{Y}_{2n-1}(t) - \tilde{Y}_{2n-1}(s)| \leq 3 \sup_{i \leq m} |\tilde{Y}_{2n-1}(s+ih) - \tilde{Y}_{2n-1}(s) + c\, h \sqrt{2n}$$

soit $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; posons $\varepsilon_1 = (\frac{\eta}{3+c})^{\alpha}$

De la proposition (2-7) on déduit que

si $\frac{|t-s|^{\alpha}}{2n-1} \leq \frac{1}{\varepsilon_1} |t-s|^{2\alpha}$ et si $t,s \in J$

$$(10) \quad E[\tilde{Y}_{2n-1}(t) - \tilde{Y}_{2n-1}(s)]^4 = E[\tilde{Z}_{2n-1}(t) - \tilde{Z}_{2n-1}(t)]^4 \leq A_2(\alpha)(1+\frac{1}{\varepsilon_1})|t-s|^{2\alpha}$$

Par conséquent si h vérifie les inégalités $(\frac{\varepsilon_1}{2n-1})^{1/\alpha} \leq h \leq \frac{(\varepsilon_1)^{1/\alpha}}{\sqrt{2n}}$,

si $[s,s+m\,h] \subset J$ où m est un entier ≥ 1, il vient en tenant compte du (9) et de (10) et en appliquant le lemme (2-6) aux variables aléatoires $\xi_k = \tilde{Y}_{2n-1}(s+k\,h) - \tilde{Y}_{2n-1}(s+(k-1)h)$ $\quad 1 \leq k \leq m$:

$$(11)\quad P(\sup_{t\in[s,s+mh]} |\tilde{Y}_{2n-1}(t)-\tilde{Y}_{2n-1}(s)| \geq (3+c)(\varepsilon_1)^{1/\alpha})$$

$$\leq P(\sup_{i\leq m} |\tilde{Y}_{2n-1}(s+ih) - \tilde{Y}_{2n-1}(s)| > (\varepsilon_1)^{1/\alpha})$$

$$\leq K(4,2\alpha)\ A_2\ (\alpha)(1+\frac{1}{\varepsilon_1})\ \frac{(mh)^{2\alpha}}{\varepsilon_1^{4/\alpha}}$$

Choisissons maintenant $0<\delta<1$ de sorte que

$$(12)\qquad K(4,2\alpha)A_2(\alpha)\ (1+\frac{1}{\varepsilon_1})\ \frac{\delta^{2\alpha}}{\varepsilon_1^{4/\alpha}} < \varepsilon$$

Comme $\alpha>1/2$ il existe un entier n_1 tel que pour $n\geq n_1$ il existe un réel h_n et un entier m_n tels que $m_n h_n = \delta$ et $\frac{(\varepsilon_1)^{1/\alpha}}{(2n-1)^{1/\alpha}} \leq h_n \leq \frac{(\varepsilon_1)^{1/\alpha}}{\sqrt{2n}}$

Donc d'après (11) et (12) pour $n\geq n_1$ on a

$$P(W_J\ (\tilde{Y}_{2n-1})\delta) > \eta) < \varepsilon$$

Comme pour tous $n\geq 1$ $t\in\mathbb{R}$ on a de plus :

$$\tilde{Y}_{2n}\ (t) = \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}}\ \tilde{Y}_{2n-1}(t) + \frac{\Delta_n(t)}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{où} \quad |\Delta_n(t)| \leq 2$$

on en déduit facilement (ii).

Les résultats de lapremière partie et la relative compacité pour la topologie de la convergence faible sur $\mathcal{D}(J)$, des lois $(\tilde{Y}_n)$ de la suite de processus $(\tilde{Y}_n(t)\ t \in J)\ n\geq 1$ permettent de conclure que la suite $(\tilde{Y}_n)\ n\geq 1$ converge faiblement vers la loi d'un processus gaussien Y, centré presque sûrement à trajectoire continue et ayant les propriétés de non-dégénérescence précisés dans l'énoncé du théorème (2-1).

De plus, de la proposition (2-8), il résulte que pour tous $s,t \in J$ $0<\alpha<1$, on a :

$$E\,[Y(s) - Y(t)]^2 \leq A_2(\alpha)\ |t-s|^\alpha$$

d'où découle [12] la dernière affirmation du théorème (2-1).
La suite de ce paragraphe va être consacrée à la preuve des propositions (2-7) et (2-8). Pour cela il nous sera nécessaire d'introduire et d'étudier les propriétés de certains opérateurs :

B) Pour toute fonction f mesurable bornée sur X^2 tout $u \in \mathbb{R}$, $s,t \in J$, $x = (x_1,x_2) \in X^2$ on définit :

$$P_{s,t}(u)\ f(x_1,x_2) = \int e^{i\,u[1_I(g^s(\omega).x_1)-1_I(g^t(\omega).x_2)]}\ f(g^s(\omega).x_1,\ g^t(\omega).x_2)\ P(d\omega)$$

Notons que $P_{t,t}(o)$ n'est plus un opérateur quasi-compact sur $\mathcal{C}(X^2)$ ainsi que l'est $P_{s,t}(o)$ $s\neq t$. Nous ferons donc agir $P_{s,t}(u)$ ou les puissances de $P_{s,t}(u)$ sur un autre espace de Banach.

Pour $0<\alpha\leq 1$ et $f \in \mathcal{C}(X^2)$

soit $$m_\alpha(f) = \sup_{\substack{x,y\in X^2\\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d_2^\alpha(x,y)}$$

et $$\mathcal{L}_\alpha = \{f \in (X^2)\ ;\ \|f\|_\alpha = |f| + m_\alpha(f) < +\infty\}$$

$\mathcal{L}_\alpha$ est une algèbre de Banach unitaire munie de la norme $\|\ \ \|_\alpha$.

Désignons par $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha,\mathcal{L}_\alpha)$ l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{L}_\alpha$ dans $\mathcal{L}_\alpha$. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha,\mathcal{L}_\alpha)$ on note $\|T\|_\alpha = \sup_{\|f\|_\alpha=1} \|Tf\|_\alpha$. Nous pouvons alors énoncer les deux propositions suivantes :

Proposition (2-9)

1) *Pour tout* $0<\alpha<1$ $P^2_{s,t}(u)$ *est un opérateur continu de* $\mathcal{L}_\alpha$ *dans* $\mathcal{L}_\alpha$ *l'application* $u \to P^2_{s,t}(u)$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha,\mathcal{L}_\alpha)$ *est analytique ; de plus on a pour tout* $k\geq 0$

$$\sup_{\substack{s,t\in J\\ u\in\mathbb{R}}} \left\|\frac{d^k}{du^k}(P^2_{s,t}(u))\right\|_\alpha < +\infty$$

et il existe une constante $C(\alpha)$ *telle que*

$$\sup_{s,t\in J} \|P^2_{s,t}(u) - P^2_{s,t}(u_1)\|_\alpha \leq C(\alpha)\ |u-u_1| \quad u,u_1 \in \mathbb{R}.$$

2) *Pour tous* $0<\alpha<1$ $0<r<1$ *il existe une constante* $C'(\alpha)$ *telle que pour toute fonction* $\Phi \in \mathcal{L}_\alpha$ *et tous* $s,t \in J$ *on ait pour* $u \in \mathbb{R}$, $k\geq 0$

$$\left\|\frac{d^k}{du^k}[P^2_{s,t}(u)]\Phi - \frac{d^k}{du^k}[P^2_{s,s}(u)]\Phi\right\|_{(1-r)\alpha} \leq C'(\alpha)\ |t-s|^{r\alpha}\|\Phi\|_\alpha$$

Proposition (2-10)

Pour tout $0<\alpha<1$, $P^2_{s,t}(u)$ *est un opérateur quasi-compact de* $\mathcal{L}_\alpha$ *dans* $\mathcal{L}_\alpha$. *Il existe de plus un voisinage compact* W *de* o *dans* $\mathbb{R}$ *tel que : pour tous* $u \in W, f \in \mathcal{L}_\alpha$, $n\geq 1$ *on ait :*

$$P^{2n}_{s,t}(u)f = [k_{s,t}(u)]^n \quad N_{s,t}(u)f + Q^n_{s,t}(u)f$$

où $k_{s,t}(u)$ *est l'unique valeur propre de plus grand module de* $P^2_{s,t}(u)$
$N_{s,t}(u)$ *est la projection sur le sous-espace propre de dimension* 1 *correspondant à* $k_{s,t}(u)$
$Q_{s,t}(u)$ *est un opérateur de* $\mathcal{L}_\alpha$ *dans* $\mathcal{L}_\alpha$ *vérifiant* $Q_{s,t}(u)\ N_{s,t}(u) = 0$.

Il existe par ailleurs une constante $o<\rho_2'(\alpha)<1$ *telle que* $Q_{s,t}(u)$ *ait un rayon spectral* $r_\alpha(Q_{s,t}(u))$ *satisfaisant à*

$$\sup_{\substack{(s,t)\in J\times J\\ u\in W}} r_\alpha(Q_{s,t}(u)) \leq \frac{1+2\rho_2'(\alpha)}{3} < 1$$

et telle que

$$\operatorname*{Inf}_{\substack{(s,t)\in J\times J \\ u\in W}} |k_{s,t}(u)| \geq \frac{2+\rho_2'(\alpha)}{3}$$

Par ailleurs les applications $u \to k_{s,t}(u)$, $u \to N_{s,t}(u)$ $u \to Q_{s,t}(u)$ *sont analytiques sur* W

Donnons tout d'abord la

<u>démonstration de la proposition (2-9)</u> :

Soient R_k $k = 1,2,3,4$ les sous-ensembles de X^2 définis par

$R_1 = I \times CI$, $R_2 = CI \times I$, $R_3 = CI \times CI$, $R_4 = I \times I$

Pour toute fonction f mesurable bornée sur X^2, $s,t \in J$, $u \in \mathbb{R}$ on a l'égalité :

$$P_{s,t}(u)f(s) = e^{iu}\, T_{1,s,t}f(x) + e^{-iu}T_{2,s,t}f(x) + T_{3,s,t}f(x) + T_{4,s,t}f(x)$$

$x \in X^2$

où $T_{k,s,t}f(x) = \int 1_{R_k}(gx)f(gx)\,\mu^2_{s,t}(dg)$ $\quad k = 1,2,3,4.$

Pour établir la proposition (2-9) il suffit de montrer que pour tout $k = 1,2,3,4$ $T_{k,s,t}$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $0<\alpha<1$, $T^2_{k,s,t}$ est un opérateur borné sur $\mathcal{L}_\alpha$, et
$\sup_{s,t\in J\times J} \|T^2_{k,s,t}\|_\alpha < +\infty$

(ii) Pour tout $0<\alpha<1$, il existe une constante $C_k(\alpha)$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{L}_\alpha$, tout $0<r<1$ $s,t \in J$, on ait :
$\|T^2_{k,s,t} - T^2_{k,s,s}f\|_{(1-r)\alpha} \leq C_k(\alpha)\ |t-s|^\alpha \|f\|_\alpha$

Nous nous contenterons d'établir (i) et (ii) dans le cas où k=4, la démonstration étant analogue pour les autres valeurs de k. Nous nous appuierons pour cela sur le lemme (2-6).

Lemme (2-6) :

1) Il existe une constante C_4 *telle que pour* $x,y \in X^2$

$$\sup_{s,t\in J} \int |1_{R_4}(gx) - 1_{R_4}(gy)|\ \mu^2_{s,t}(dg) \le C_4\ d_2(x,y)$$

2) Il existe une constante $C'_4(\alpha)$ *telle que pour* $f \in \mathcal{L}_\alpha$, $s,t \in J$ *on ait :*

$$\sup_{x\in X^2} |T^2_{4,s,t} f(x) - T^2_{4,s,s} f(x)| \le C'_4(\alpha)\ \|f\|_\alpha\ |s-t|^\alpha$$

que nous prouverons par la suite.

Soit $f \in \mathcal{L}_\alpha$ on a facilement : pour $x,y\in X^2$, $s,t\in J$

$$|T^2_{4,s,t}f(x) - T^2_{4,s,t}f(y)| \le m_\alpha(f)\int d_2^\alpha(gx,gy)\ \mu^2_{s,t}(dy)$$

$$+ |f| \int |1_{R_4}(gx) - 1_{R_4}(gy)|\ \mu^2_{s,t}(dg)$$

d'où il résulte puisque $K(\alpha) = \sup_{\substack{x,y\in X^2\\ s,t\in J}} \int \frac{d_2^\alpha(gx,gy)}{d_2^\alpha(x,y)}\ \mu^2_{s,t}(dg) < +\infty$

et en raison du lemme (2-6) que pour $s,t \in J$

(13) $m_\alpha\ (T^2_{4,s,t}(f)) \le \|f\|_\alpha\ (K(\alpha) + C_4)$

Comme d'autre part on a:

$|T^2_{4,s,t}f| \le |f|$

la propriété (i) est démontrée pour $T_{4,s,t}$.

Prouvons maintenant (ii). Pour $x,y \in X^2$ $s,t \in J$ on a, en tenant compte de (13) et du lemme (2-6) 2)

$$|[T^2_{4,s,t}f(x) - T^2_{4,s,s}f(x)] - [T^2_{4,s,t}f(y) - T^2_{4,s,s}f(y)]|$$

$$\leq 2 \|f\|_\alpha \operatorname{Inf}(C'_4(\alpha)\ |s-t|^\alpha\ ,\ (K(\alpha) + C_4)\ d_2^\alpha(x,y))$$

$$\leq 2 \|f\|_\alpha \sup(C'_4(\alpha),\ K(\alpha) + C_4) \operatorname{Inf}(|s-t|^\alpha,\ d_2^\alpha(x,y))$$

d'où il résulte que pour $0<r<1$

$$(14) \quad m_{(1-r)\alpha}(T^2_{4,s,t}f - T^2_{4,s,s}f) \leq 2\|f\|_\alpha \sup(C'_4(\alpha),\ K(\alpha) + C_4)\ |s-t|^{r\alpha}$$

Cette inégalité, jointe au 2) du lemme (2-6) permet de conclure.

Pour terminer, donnons la

<u>démonstration du lemme (2-6)</u>

Pour $x \in P(\mathbb{R}^2)$ notons $\theta(x)$ l'angle de l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2]$ tel que le vecteur $\binom{\cos\theta(x)}{\sin\theta(x)} \in \mathbb{R}^2$ ait pour image x dans $P(\mathbb{R}^2)$. Soit de plus $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(q)\,dq$ la fonction de répartition de μ.

On a alors : si $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2) \in X^2$

$$\int |1_{R_4}(gx) - 1_{R_4}(gy)|\ \mu^2_{s,t}(dg) = \iint |1_{\{q_1 \leq \operatorname{Inf}(s + \frac{1}{q_2-s-tg\theta(x_1)},\, t + \frac{1}{q_2-t-tg\theta(x_2)})\}}$$

$$- 1_{\{q_1 \leq \operatorname{Inf}(s + \frac{1}{q_2-s-tg\theta(y_1)},\ t + \frac{1}{q_2-t-tg\theta(y_2)})\}}|\ p(q_1)p(q_2)dq_1dq_2$$

d'où il résulte que

$$\int |1_{R_4}(gx) - 1_{R_4}(gy)\ |\mu^2_{s,t}(dg)$$

$$= \int p(q_2)\ |\ \mathrm{Inf}\{F(s + \frac{1}{q_2-s-tg\vartheta(x_1)}),\ F(t + \frac{1}{q_2-t-tg\theta(x_2)})\}$$

$$- \mathrm{Inf}\ \ \{F(s + \frac{1}{q_2-s-tg\theta(y_1)}),\ F(t + \frac{1}{q_2-t-tg\theta(y_2)})\}|\ dq_2$$

$$\leq \int\ |F(s + \frac{1}{q_2-s-tg\theta(x_1)}) - F(s + \frac{1}{q_2-s-tg\theta(y_1)})|\ p(q_2)\ dq_2$$

$$+ \int |F(t + \frac{1}{q_2-t-tg\theta(x_2)}) - F(t + \frac{1}{q_2-t-tg\theta(y_2)})|\ p(q_2)\ dq_2$$

Or on a :

$$\int\ |F(s + \frac{1}{q_2-s-tg\theta_1}) - F(s + \frac{1}{q_2-s-tg\theta'_1})|\ \ p(q_2)\ dq_2$$

$$= \int\ |\int_{tg\theta_1}^{tg\theta_2}\ p(s + \frac{1}{u-y})\ \frac{du}{(u-y)^2}|\ p(y+s)\ ds$$

d'où l'on déduit, puisque p est à support compact, qu'il existe une constante K_1 telle que :

$$\sup_{s\in S}\ \int |F(s + \frac{1}{q_2-s-tg\theta_1}) - F(s + \frac{1}{q_2-s-tg\theta'_1})|p(q_2)\ dq_2 \leq K_1\ |\sin(\theta_1-\theta'_1)|$$

On a donc :

$$(15)\quad \sup_{s,t\in J}\ \int |1_{R_4}(gx) - 1_{R_4}(gy)|\ d\mu^2_{s,t}(g) \leq K_1\quad d(x,y)$$

d'où le 1) du lemme (2-6).

Par ailleurs, on a pour $x = (x_1,x_2)\in X^2$ $s,t\in J$, $f \in \mathcal{L}_\alpha$

$$|T^2_{4,s,t}f(x) - T^2_{4,s,s}f(x)| \leq m_\alpha(f)\ \int d^\alpha_1(g^t_2(\omega)g^t_1(\omega).x_2,g^s_2(\omega)g^s_1(\omega)x_2)P(d\omega)$$

$$+\ |f|\ \int |1_I(g^t_2(\omega)g^t_1(\omega)x_2) - 1_I(g^s_2(\omega)g^s_1(\omega)x_2)|\ P(d\omega).$$

Or il existe une constante K_2 telle que

$$\sup_{x_2 \in X} \int d_1^{\alpha}(g_2^t(\omega)\; g_1^t(\omega)\; x_2, g_2^s(\omega) g_1^s(\omega) x_2) P(d\omega) \leq K_2 |t-s|^{\alpha}$$

et une constante K_3 telle que

$$\sup_{x_2 \in X} \int | 1_I(g_2^t(\omega) g_1^t(\omega) x_2) - 1_I(g_2^s(\omega) g_1^s(\omega) x_2) \mid P(d\omega)$$

$$= \sup_{x_2 \in X} \int p(q\;) \left| F(t + \frac{1}{q-t-tg\theta(x_2)}) - F(s + \frac{1}{q-s-tg\theta(x_2)}) \right| dq$$

$$\leq K_3 \; |t-s|$$

F admettant une dérivée p à support compact.

Par conséquent on a :

$$(16) \quad \sup_{x \in X^2} |T^2_{4,s,t} f(x) - T^2_{4,s,s} f(x)| \leq \|f\| \quad (K_2 |t-s|^{\alpha} + K_3 \; |t-s|)$$

ce qui achève la preuve du lemme (2-6) et de la proposition (2-9).

Démonstration de la proposition (2-10) :

1) On commence par établir que les conclusions de la proposition (2-10) sont vérifiées pour la valeur $u=0$.
Pour cela, on utilise le

lemme (2-7) : *Pour tout* $0<\alpha<1$ *il existe une constante* $0<\rho(\alpha)<1$ *telle que*

$$\lim_{n} \left[\sup_{\substack{s,t \in J \\ x \neq y \in X^2}} \int \frac{d_2^{\alpha}(gx,gy)}{d_2^{\alpha}(x,y)} \; \mu^n_{s,t}(dg) \right]^{1/n} = \rho(\alpha).$$

<u>démonstration du lemme (2-7)</u> :

on a l'inégalité :

$$(17)\quad \sup_{\substack{s,t\in J\\ x\neq y\in X^2}} \int \frac{d_2^\alpha(gx,gy)}{d_2^\alpha(x,y)}\, \mu_{s,t}^n(dy) \leq 2 \sup_{\substack{s\in J\\ x_1\neq y_1\in X}} \int \frac{d_1^\alpha(gx_1,gy_1)}{d_1^\alpha(x_1,y_1)}\, \mu_s^n(dy)$$

et de plus

$$(18)\quad \sup_{\substack{s\in J\\ x_1\neq y_1\in X}} \int \frac{d_1^\alpha(gx_1,gy_1)}{d_1^\alpha(x_1,y_1)}\, \mu_s^n(d\ ) \leq \sup_{\substack{s\in J\\ x_1\in X}} \int \frac{1}{\|gx_1\|^{2\alpha}}\, \mu_s^n(dg)$$

Considérons alors l'opérateur $T_s(2\alpha)$ sur $\mathcal{C}(X)$ défini par

$$(19)\quad T_s(2\alpha)f(\bar{x}) = \int \sigma^{2\alpha}(g,\bar{x})\, f(g.\bar{x})\, \mu_s(dg) \qquad \bar{x}\in X,\ f\in\mathcal{C}(X),\ s\in J$$

où $\sigma(g,\bar{x}) = \frac{1}{\|gx\|}$, $\|\ \|$ étant la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$, et x un vecteur de norme 1 d'image $\bar{x}$ dans $P(\mathbb{R}^2)$.

Pour $0<\alpha<1$, l'opérateur $T_s(2\alpha)$ est de rayon spectral $r_s(2\alpha)$ strictement inférieur à 1 (voir l'appendice). L'application $s \to T_s(2\alpha)$ est de plus continue ; il en résulte alors que l'application $s \to r_s(2\alpha)$ est semi-continue supérieurement et donc que pour $0<\alpha<1$

$$\sup_{s\in J} r_s(2\alpha) < 1$$

d'où l'on déduit que (20) $\lim_n \big[\sup_{\substack{s\in J\\ x\in X}} T_s^n(2\alpha)e(x)\big]^{1/n} < 1.$

On obtient le lemme (2-7) en tenant compte de (17), (18), (19), (20).

Nous en déduirons alors immédiatement le

<u>lemme (2-8)</u> : *Pour tout* $0<\alpha<1$ *il existe un entier* $n_o(\alpha)\geq 1$ *et une constante* $0<\rho_1(\alpha)<1$ *tels que* :

$\forall f\in \mathcal{L}_\alpha$, $\forall$ $s,t\in J$

$$\|P^{n_o(\alpha)}_{s,t}(0)\ f\|_\alpha \leq \rho_1(\alpha)\ \|f\|_\alpha + |f|$$

Par ailleurs si L est une partie bornée de $(\mathcal{L}_\alpha, \|\ \|_\alpha)$ $P^n_{s,t}(0)(L)$ est une partie bornée et équicontinue de $\mathcal{C}(X^2)$ et donc d'après le théorème d'Ascoli une partie compacte de $(\mathcal{C}(X^2), |\ |)$.

En tenant compte du fait que $P_{s,t}(0)$ est une contraction de $(X^2,|\ |)$, on déduit alors du lemme (2-8), et de la remarque précédente, à l'aide du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [13] que $P_{s,t}(0)$ est un opérateur quasi-compact sur $\mathcal{L}_\alpha$. Comme d'après la proposition (2-4), 1 est la seule valeur propre de module 1 de $P_{s,t}(0)$, nous pouvons conclure que

$$(21)\qquad \forall n\geq 0 \quad P^n_{s,t}(0) = \nu_{s,t} + (Q'_{s,t})^n$$

où $Q'_{s,t}$ est un opérateur de $(\mathcal{L}_\alpha,\|\ \|_\alpha)$ de rayon spectral strictement inférieur à 1, et tel que $Q'_{s,t}1 = 0$.

Nous achèverons la première partie de la démonstration de la proposition (2-10) en montrant que $\sup\limits_{s,t\in J} r_\alpha(Q'_{s,t})<1$.

Pour λ tel que $|\lambda| = 1$ et $t,s\in J$ notons $R(\lambda,Q'_{s,t})$ la résolvante $(I - \lambda Q'_{s,t})^{-1}$ sur $\mathcal{L}_\alpha$. On a alors le

<u>lemme (2-9)</u> :

$$\sup_{\substack{t,s\in J\times J\\ |\lambda|=1}} \|R(\lambda,Q'_{s,t})\|_\alpha = C_5(\alpha) < +\infty$$

<u>démonstration du lemme (2-9)</u> :

Il suffit d'établir que pour toute suite $(\lambda_n, s_n t_n)_{n\geq 1} \in U\times J\times J$ où $U = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z|=1\}$ on a $\sup\limits_{n\geq 1} \|R(\lambda_n, Q_{s_n,t_n}\|_\alpha < +\infty$

Soit $g \in \mathcal{L}_\alpha - \{0\}$; comme aucun nombre complexe de module 1 n'est dans le spectre de Q'_{s_n,t_n}, pour tout $n\geq 1$ il existe une fonction $f_n \in \mathcal{L}_\alpha$ telle que :

$\lambda_n f_n - Q_{s_n,t_n} f_n = g.$

Posons $f'_n = \dfrac{f_n}{|f_n|}$; on a :

$$(22)\quad f'_n = \frac{1}{\lambda_n} Q_{s_n,t_n} f'_n + \frac{g}{|f_n|}$$

d'où il résulte d'après le lemme (2-8) et (21) :

$$\|f'_n\|_\alpha \leq \rho_1(\alpha)\, \|f'_n\|_\alpha + 2 + \frac{\|g\|_\alpha}{|f_n|}$$

c'est-à-dire :

$$(23)\quad \|f'_n\|_\alpha \leq \frac{2 + \dfrac{\|g\|_\alpha}{|f_n|}}{1-\rho_1(\alpha)} \qquad n \geq 1.$$

Montrons que $\sup\limits_n |f_n| < +\infty$. Sinon d'après (23), la suite $\|f'_n\|_\alpha$ $n\geq 1$ est bornée, et il existe une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ de $\mathbb{N}$ telle que la suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $\mathcal{L}_\alpha$ converge vers une fonction f de $\mathcal{L}_\alpha$. On peut de plus supposer sans inconvénient que $\lim\limits_k \lambda_{n_k} = \lambda_o \in U$ et $\lim\limits_k (s_{n_k}, t_{n_k}) = (s_o, t_o) \in J\times J$.

On a alors :

$$(2\text{-}4)\quad \lim_k |Q'_{s_{n_k}, t_{n_k}} f_{n_k} - Q'_{so,to} f| = 0.$$

En effet, on peut écrire :

$$|Q'_{s_{n_k}, t_{n_k}} f_{n_k} - Q'_{s_o,t_o} f| \leq |Q'_{s_{n_k} t_{n_k}} f - Q'_{s_o,t_o} f| + |Q'_{s_{n_k},t_{n_k}} (f_{n_k} - f)|$$

$$\leq |P_{s_{n_k},t_{n_k}}(o)\, f - P_{s_o,t_o} f| + |\nu_{s_{n_k},t_{n_k}}(f) - \nu_{s_o,t_o}(f)| + 2|f_{n_k} - f|$$

Comme $\lim_k |P_{s_{n_k},t_{n_k}}(0)\, f - P_{s_o,t_o}\, f| = 0$ et que puisque pour tous $s,t \in J$ $\mu_{s,t}$ admet une unique probabilité invariante $\nu_{s,t}$ sur X^2 on a également $\lim_k |\nu_{s_{n_k},t_{n_k}}(f) - \nu_{s_o,t_o}(f)| = 0.$

(24) est donc établie.

En passant à la limite suivant la sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ dans l'égalité (22) on obtient alors :

$f = \frac{1}{\lambda_o}\, Q'_{t_o,s_o} f$ avec $|f| = 1$, ce qui est impossible car $r(Q'_{t_o,s_o}) < 1$

Par conséquent on a $d = \sup_{n\geq 1} |f_n| < +\infty$

L'inégalité (23) peut alors s'écrire :

$$||f_n||_\alpha \leq \frac{2d + ||g||_\alpha}{1 - \rho_1(\alpha)} \quad n\geq 1$$

ou encore

$$||R(\lambda_n, Q'_{s_n,t_n}) g||_\alpha \leq \frac{2d + ||g||_\alpha}{1 - \rho_1(\alpha)} \quad n\geq 1$$

Le théorème de Banach-Steinhaus permet alors de conclure que :

$$(25) \quad \sup_{n\geq 1} ||R(\lambda_n, Q'_{s_n,t_n})||_\alpha < +\infty$$

ce qui établit le lemme (2-9).

Du lemme (2-9), il résulte que pour tout $\lambda \in \Pi$ et tout $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $|\mu| < \frac{1}{C_5(\alpha)}$ $\lambda + \mu$ appartient à l'ensemble résolvant de $Q'_{s,t}$ pour tous $s,t \in J$. Il existe donc un réel $\rho'_2(\alpha) < 1$ tel que pour tous $s,t \in J$, le spectre de $Q'_{s,t}$ soit contenu dans $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leq \rho'_2(\alpha)\}$. Les conclusions de la proposition (2-10) sont donc prouvées pour la valeur $u=0$ (on pose $Q_{s,t} = Q'^2_{s,t}$).

2) La théorie des perturbations analytiques d'opérateurs [10], [18] va nous permettre de terminer la preuve de la proposition (2-10).

Soit $N_{1,s,t}$ l'opérateur défini par $N_{1,s,t}(f) = \nu_{s,t}(f)\, e$. $f \in \mathcal{L}_\alpha$, où e est la fonction identique à 1 sur X^2.

Pour $|z| > \rho'_2(\alpha)$ et $z \neq 1$, la résolvante de $P^2_{s,t}(0)$ est :

(26) $R_{s,t}(z) = \frac{1}{z-1} N_{1,s,t} + \sum_{n \geq 0} \frac{Q^{n+1}_{s,t}}{z^{n+1}}$

(27) Si $\|P^2_{s,t}(0) - P^2_{s,t}(u)\| < \frac{1}{\|R_{s,t}(z)\|_\alpha}$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} R_{s,t}(z) \{[P^2_{s,t}(u) - P^2_{s,t}(0)]\, R_{s,t}(z)\}^k$ converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ et détermine la résolvante $R_{s,t}(z,u)$ de $P^2_{s,t}(u)$.

Considérons alors les cercles I_1 et I_2 de centre 1, et 0 respectivement et de rayons :

$$r_1(\alpha) = \frac{1 - \rho'_2(\alpha)}{3},$$

$$r_2(\alpha) = \frac{1 + 2\,\rho'_2(\alpha)}{3}$$

De plus soit $\delta > 0$ tel que $\delta < r_1(\alpha)$ et $\rho'_2(\alpha) + \delta < r_2(\alpha)$; et soit $M_\delta = \sup_{s,t \in J} \ \sup_{z \in \{z;\, |z| > \rho'_2(\alpha) + \delta;\ |z-1| > \delta\}} \|R_{s,t}(z)\|_\alpha < +\infty$ d'après (26).

D'après la proposition (2-9) 1) si $|u| < \frac{1}{C(\alpha) M_\delta}$

on a $\|P^2_{s,t}(u) - P^2_{s,t}(0)\| < \frac{1}{M_\delta}$ pour $s,t \in J$ et donc les cercles I_1 et I_2 appartiennent à l'ensemble résolvant de $P_{s,t}(u)$ $s,t \in J$.

Considérons alors les projections :

(28) $N_{1,s,t}(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{I_1} R_{s,t}(z,u)\, dz$

(29) $N_{2,s,t}(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{I_2} R_{s,t}(z,u)\, dz$

Dès que (30) $\|N_{1,s,t}(u) - N_{1,s,t}(0)\| < 1$ l'image $E_{s,t,u}$ de $N_{1,s,t}(u)$ est comme celle $N_{1,s,t}(0)$ de dimension 1 [10] et on a :

(31) $P_{s,t}(u)\ N_{1,s,t}(u)\ e_{s,t,u} = N_{1,s,t}(u)\ P_{s,t}(u)\ e_{s,t,u} = k_{s,t}(u)\ e_{s,t,u}$
où $e_{s,t,u} \in \mathcal{L}_\alpha$ engendre $E_{s,t,u}$

D'après (26), (28) et la proposition (29) 1) on a pour $s,t \in J$ et $|u| < \frac{1}{C(\alpha)M_\delta}$

$$||N_{1,s,t}(u) - N_{1,s,t}(0)||_\alpha \leq r_1(\alpha) \sum_{k\geq 1} M_\delta (C_\alpha |u| M_\delta)^k = r_1(\alpha) M_\delta \frac{C_\alpha |u| M_\delta}{1 - C_\alpha |u| M_\delta}$$

et donc (30) est réalisée dès que $u \in W$ où :

$$W = \{u \in \mathbb{R} \ ; \ |u| < \frac{1}{C(\alpha) M_\delta [2 r_1(\alpha) M_\delta + 1]}\}$$

Par ailleurs on a pour tout $n \geq 1$ $s,t \in J$ $u \in W$

$$(P^2_{s,t}(u))^n = [P^2_{s,t}(u)]^n N_{1,s,t}(u) + [P^2_{s,t}(u)]^n N_{2,s,t}(u)$$

$$= [k_{s,t}(u)]^n N_{1,s,t}(u) + Q^n_{s,t}(u)$$

où $Q^n_{s,t} = \frac{1}{2i\pi} \int_{I_2} z^n R_{s,t}(z,u)\, dz$

et où donc $r_\alpha(Q_{s,t}(u)) \leq r_2(\alpha) < 1$

En outre $k_{s,t}(u) = \dfrac{P^2_{s,t}(u)\ N_{1,s,t}(u)\ e(x_o,x_o)}{N_{1,s,t}(u)\ \ e\ \ (x_o,x_o)}$

et $|k_{s,t}(u)| > 1 - r_1(\alpha) = \dfrac{2 + \rho_2(\alpha)}{3}$

L'analyticité des applications $u \to N_{1,s,t}(u)$, $u \to Q_{s,t}(u)$, $u \to k_{s,t}(u)$ résulte de l'analyticité de l'application $u \to P_{s,t}(u)$ de $\mathring{W}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$, qui entraîne celle de $u \to R_{s,t}(z,u)$, et des formules précédentes.

La preuve de laproposition (2-10) est ainsi terminée.

Donnons maintenant la

C) <u>DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION (2-7)</u>.

Considérons la famille d'opérateurs

$$\tilde{P}_{s,t}(u) = e^{-iu[N(s)-N(t)]}\, P_{s,t}(u) \qquad s,t \in J \qquad u \in W$$

En raison de la proposition (2-8) (admise pour le moment mais indépendante de la proposition (2-7)) l'application $s \to N(s)$ est Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que les opérateurs $\tilde{P}_{s,t}(u)$ possèdent les mêmes propriétés que celles décrites dans les propositions (2-9) et (2-10) pour les opérateurs $P_{s,t}(u)$. On modifie les notations adoptées pour décrire les propriétés des opérateurs $P_{s,t}(u)$ en leur adjoignant un tilde. On a alors :

(32) $$\tilde{k}'_{s,t}(0) = 0$$

De plus la transformée de Fourier de $Z_{2n-1}(t) - Z_{2n-1}(s)$

$n \geq 1 \quad t,s \in J$ est :

(33) $$E(e^{iu(\tilde{Z}_{2n-1}(t) - \tilde{Z}_{2n-1}(s))}) = \tilde{P}^{2n}_{s,t}\left(\frac{u}{\sqrt{2n}}\right) e(x_o,x_o) \qquad n \geq 1$$

d'où il résulte que :

(34) $$E(\tilde{Z}_{2n-1}(t) - \tilde{Z}_{2n-1}(s))^{2p} = \frac{1}{(2n)^p} \frac{d^{2p}}{du^{2p}} [P^{2n}_{s,t}(0)]\, e\,(x_o,x_o)$$

Pour terminer la preuve de la proposition (2-7), nous utiliserons le

<u>lemme (2-10)</u> : *Soient* $0<\alpha<1$, $0<r<1$, $p \geq 0$ *et* K *un compact dans l'ensemble résolvant de* $\tilde{P}^2_{s,t}(u)$ *opérant sur* $\mathcal{L}_\alpha$ *et* $\mathcal{L}_{(1-r)\alpha}$. *Il existe alors une constante* $C_p(\alpha,r,K)$ *telle que pour toute fonction* $\Phi \in \mathcal{L}_\alpha$ *on ait l'inégalité :*

$$\sup_{\substack{s,t \in J \\ z \in K}} \left\| \frac{d^p}{du^p} (\tilde{R}_{s,t}(z,0))\Phi - \frac{d^p}{du^p} (\tilde{R}_{s,s}(z,o))\Phi \right\|_{(1-r)\alpha}$$

$$\leq C_p(\alpha,r,K)\, |t-s|^{r\alpha}\, \|\Phi\|_\alpha$$

<u>démonstration du lemme (2-10)</u> :

a) On traite tout d'abord le cas $p=0$.

Dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ et $\mathcal{L}(\mathcal{L}_{(1-r)\alpha}, \mathcal{L}_{(1-r)\alpha})$ on a la relation :

(35) $\tilde{R}_{s,t}(z,o) - \tilde{R}_{s,s}(z,o) = \tilde{R}_{s,t}(z,o)\ [\tilde{P}^2_{s,t}(o) - \tilde{P}^2_{s,s}(o)]\ \tilde{R}_{s,s}(z,o)$

$s,t \in J, \quad z \in K$

D'autre part en raisonnant comme dans la preuve du lemme (2-9) on a :

(36) $\displaystyle\sup_{\substack{s,t\in J\\ z\in K}} \| \tilde{R}_{s,t}(z,o) \|_{(1-r)\alpha} < \infty$ et

$$\sup_{\substack{s,t\in J\\ z\in K}} \| \tilde{R}_{s,t}(z,o) \|_{\alpha} < +\infty$$

De (35) et de l'analogue de la proposition (2-9) pour $\tilde{P}_{s,t}(u)$ on déduit alors que si $\Phi \in \mathcal{L}_\alpha$, $s,t \in J$ et $z \in K$, on a :

(37) $\| \tilde{R}_{s,t}(z,o)\Phi - \tilde{R}_{s,s}(z,o)\Phi \|_{(1-r)\alpha}$

$$\leq \sup_{\substack{s,t\in J\\ z\in K}} \| \tilde{R}_{s,t}(z,o) \|_{(1-r)\alpha}\ \tilde{C}'(\alpha)\ |t-s|^{r\alpha} \times \sup_{\substack{s,t\in J\\ z\in K}} \| \tilde{R}_{s,t}(z,o) \|_{\alpha}$$

c'est-à-dire le résultat souhaité.

b) Pour $\| \tilde{P}^2_{s,t}(u) - \tilde{P}^2_{s,t}(o) \|_\alpha < 1$ et $\| \tilde{P}^2_{s,t}(u) - \tilde{P}^2_{s,t}(0) \|_{(1-r)\alpha} < 1$ on a l'égalité suivante valable dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ et $\mathcal{L}(\mathcal{L}_{(1-r)\alpha}, \mathcal{L}_{(1-r)\alpha})$

(38) $\tilde{R}_{s,t}(z,u) = \sum_{n\geq 0} \tilde{R}_{s,t}(z)\ \{[\tilde{P}^2_{s,t}(u) - \tilde{P}^2_{s,t}(0)]\ \tilde{R}_{s,t}(z)\}^n \quad z \in K$

On en déduit que $\frac{d^k}{du^k}(\tilde{R}_{s,t}(z,o))$ est une somme finie d'opérateurs de la forme :

$$\tilde{R}_{s,t}(z)\ \left(\frac{d^{i_1}}{du^{i_1}}(\tilde{P}^2_{s,t}(o))\ \tilde{R}_{s,t}(z)\right) \left(\frac{d^{i_2}}{du^{i_2}}(\tilde{P}^2_{s,t}(o)\ \tilde{R}_{s,t}(z)\right) \ldots$$
$$\left(\frac{d^{i_j}}{du^{i_j}}(\tilde{P}_{s,t}(o))\ \tilde{R}_{s,t}(z)\right)$$

où $i_1 \geq 1$, $i_2 \geq 1$, .. $i_j \geq 1$ $\qquad i_1+i_1+..+i_j = p$, $\qquad 1 \leq j \leq k$.

Les considérations de la partie a) et l'analogue de la proposition (2-9) pour $\tilde{P}_{s,t}(u)$ permettent alors de conclure immédiatement à la validité du lemme (2-10) pour $p \geq 1$.

Soient $0<\alpha<1$, $0<r<1$. L'analogue de la proposition (2-10) pour $\tilde{P}_{s,t}(u)$ permet d'obtenir la décomposition suivante de $\tilde{P}^{2n}_{s,t}(u)$ $s,t \in J$, $u \in W$, valable dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ et $\mathcal{L}(\mathcal{L}_{(1-r)\alpha}, \mathcal{L}_{(1-r)\alpha})$.

$$(39) \quad \tilde{P}^{2n}_{s,t}(u) = [\tilde{k}_{s,t}(u)]^n \, \tilde{N}_{s,t}(u) + \tilde{Q}^n_{s,t}(u) \qquad n \geq 1$$

où
$$(40) \quad \tilde{N}_{s,t}(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\Upsilon}_1} \tilde{R}_{s,t}(z,u)\, dz$$

$$(41) \quad \tilde{Q}^n_{s,t}(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\Upsilon}_2} z^n \, \tilde{R}_{s,t}(z,u)\, dz$$

$$(42) \quad \tilde{k}_{s,t}(u) = \frac{\tilde{P}^2_{s,t}(u)\, N_{s,t}(u)\, e(x_o,x_o)}{N_{s,t}(u)\, e(x_o,x_o)} = \frac{\int_{\tilde{\Upsilon}_1} z\, \tilde{R}_{s,t}(z,u)\, e(x_o,x_o)\, dz}{\int_{\tilde{\Upsilon}_1} \tilde{R}_{s,t}(z,u)\, e(x_o,x_o)\, dz}$$

Du lemme (2-9) et des formules précédentes résulte alors le

<u>lemme (2-11)</u> : *Pour tout* $p \geq 0$ *il existe une constante* $C'_p(r,\alpha)$ *telle que pour toute fonction* $\Phi \in \mathcal{L}_\alpha$

1) $$\sup_{s,t \in J} \left\| \frac{d^p}{du^p}(\tilde{N}_{s,t}(o))\Phi - \frac{d^p}{du^p}(\tilde{N}_{t,t}(o))\Phi \right\|_{(1-r)\alpha} \leq C'(r,\alpha)\, |t-s|^{r\alpha} \, \|\Phi\|_\alpha$$

2) $$\sup_{s,t \in J} \left\| \frac{d^p}{du^p}(\tilde{Q}^n_{s,t}(o))\Phi - \frac{d^p}{du^p}(\tilde{Q}^n_{t,t}(o))\Phi \right\|_{(1-r)\alpha}$$
$$\leq C'_p(r,\alpha)\, \tilde{\rho}^n_2(r,\alpha)\, |t-s|^\alpha \, \|\Phi\|_\alpha$$

où $\tilde{\rho}_2(r,\alpha) < 1$ *est le rayon du cercle* $\tilde{\Upsilon}_2$.

3) $$|\tilde{k}^{(p)}_{s,t}(o) - \tilde{k}^{(p)}_{t,t}(o)| \leq C'_p(r,\alpha)\, |t-s|^\alpha$$

En raison de (39) et (32), on a :

$$(43)\quad \frac{d^2}{du^2}[\tilde{P}^{2n}_{s,t}](o)e(x_o,x_o) = n\,\tilde{k}''_{s,t}(o) + \frac{d^2}{du^2}[\tilde{Q}^{n}_{s,t}](o)e(x_o,x_o)$$

et

$$(44)\quad \frac{d^4}{du^4}[\tilde{P}^{2n}_{s,t}](o)e(x_o,x_o) = 3n(n-1)\,[\tilde{k}''_{s,t}(o)]^2 + n\{k^{(4)}_{s,t}(o)$$

$$+ 3k^{(3)}_{s,t}(o)\,\frac{d}{du}[\tilde{N}_{s,t}](o)e(x_o,x_o) + 4k^{(2)}_{s,t}(o)\,\frac{d^2}{du^2}[\tilde{N}_{s,t}](o)e(x_o,x_o)$$

$$+ \frac{d^4}{du^4}[\tilde{N}_{s,t}](o)e(x_o,x_o) + \frac{d^4}{du^4}[\tilde{Q}^{n}_{s,t}](o)(x_o,x_o).$$

De plus on a (45) $\displaystyle k''_{t,t}(o) = \lim_n \frac{1}{n}\frac{d^2}{du^2}[\tilde{P}^{2n}_{t,t}](o)e(x_o,x_o)$

$$= 2\lim_n E(\tilde{Z}_{2n-1}(t) - \tilde{Z}_{2n-1}(t))^2 = 0.$$

Des égalités précédentes, du lemme (2-10) et du fait que d'après (34) on a :

$$E(\tilde{Z}_{2n-1}(t) - \tilde{Z}_{2n-1}(s))^{2p} = \frac{1}{2^p n^p}\Big[\frac{d^{2p}}{du^{2p}}(\tilde{P}^{2n}_{s,t})(o)e(x_o,x_o) - \frac{d^{2p}}{du^{2p}}(\tilde{P}^{2n}_{t,t})(o)$$

$$e(x_o,x_o)\Big]$$

on déduit que pour tous $0<\alpha_o<1$ $p = 1,2$

Il existe des constantes $C'_p(\alpha,r)$ telles que pour tous $s,t \in I$

$$(46)\quad E(\tilde{Z}_{2n-1}(t) - \tilde{Z}_{2n-1}(s))^{2p} \leq C'_p(\alpha,r)\ \{|t-s|^{pr\alpha} + \frac{|t-s|^{r\alpha}}{n}\}$$

Tout $\alpha_o, o<\alpha_1<1$ s'écrivant sous la forme $\alpha_o = 2\alpha$

$0<r<1$ $\quad 0<\alpha<1$, la proposition (2-7) est ainsi démontrée.

D) DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION (2-8)

On commence par construire une approximation de la probabilité $\overline{\sigma}_{o,o}$ de fonction de répartition $N(t) = E(\langle E_t\, e_o, e_o\rangle)$.

Pour cela on considère les opérateurs symétriques sur $[-L,L]$ définis par

$$L_{H_x} = L_H - x\pi_L \qquad x \in \mathbb{R}.$$

π_L étant la projection définie par $\pi_L(u) = u_L$ où $u = (u_n)_{n\in Z} \in \ell^2(Z)$

Soit $(p_n(L,\lambda))_{n\geq 1}$ la solution de l'équation :

$$-u_{n+1} - u_{n-1} + X_n u_n = \lambda u_n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

égale à 0 en $-L-1$ et à 1 en $-L$.

Les valeurs propres de la matrice symétrique définissant L_{H_x} sont les zéros du polynome $P_{L+1}(L,\lambda) - x\, P_L(L,\lambda)$.

La relation [1] :

$$(47) \quad 0 < \sum_{k=-L}^{L} p_k^2(L,\lambda) = p_L(L,\lambda)\frac{d}{d\lambda}(p_{L+1}(L,\lambda)) - p_{L+1}(L,\lambda)\frac{d}{d}(p_L(L,\lambda))$$

établit que les racines de $p_{L+1}(L,\lambda) - x\, p_L(L,\lambda)$ sont simples. Les sous-espaces propres sont donc de dimension 1 et si λ est une valeur propre, le vecteur

$$\frac{p_n(L,\lambda)}{\left(\sum_{k=-L}^{L} p_k^2(L,\lambda)\right)^{1/2}}_{-L\leq n\leq L}$$

est propre de norme 1.

Par conséquent si ${}^L E_x(t)$ est la résolution de l'identité de ${}^L H_x$ la probabilité ${}^L\sigma_{o,o}^x$ de fonction de répartition $\langle {}^L E_x(t)e_o, e_o\rangle$ est égale à :

$${}^L\sigma_{o,o}^x = \sum_{\{\lambda\,;\, p_{L+1}(L,\lambda) = x\, p_L(L,\lambda)\}} \frac{p_o^2(L,\lambda)}{\left(\sum_{k=-L}^{L} p_k^2(L,\lambda)\right)} \varepsilon_\lambda$$

Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite de probabilités $({}^L\sigma^x_{o,o})_{L\geq 1}$ converge étroitement vers la probabilité $\sigma_{o,o}$ de fonction de répartition $\langle E_t\ e_o, e_o\rangle$.

Pour cela on utilise la méthode des moments ; pour tout $p\geq 1$ on a :

$$\int \lambda^p\ {}^L\sigma^x_{o,o}\ (d\lambda) = \langle ({}^L H_x)^p e_o, e_o\rangle$$

Or si $L\geq p+1$ on a : $({}^L H_x)^p e_o = ({}^I H)^p e_o = H^p e_o$

et par conséquent : si $L \geq p+1$

$$\int \lambda^p\ {}^L\sigma^x_{o,o}(d\lambda) = \langle H^p e_o, e_o\rangle = \int \lambda^p\ \sigma_{o,o}(d\lambda)$$

ce qui établit le résultat cherché.

De même si τ est une probabilité sur $\mathbb{R}$ la suite de probabilités

${}^L\sigma^\tau_{o,o} = \int {}^L\sigma^x_{o,o}\ d\tau(x)$ $L\geq 1$ converge étroitement vers $\sigma_{o,o}$,

et on a également $\lim\limits_{L} E\,({}^L\sigma^\tau_{o,o}) = \bar{\sigma}_{o,o}$.

En choisissant τ égale à la loi de Cauchy sur $\mathbb{R}$, on peut obtenir une expression assez simple de ${}^L\sigma^\tau_{o,o}$. En effet pour toute fonction Φ continue à support compact on a, en tenant compte de (47) :

$$ {}^L\sigma^\tau_{o,o}(\Phi) = \frac{1}{\pi} \int \frac{dx}{1+x^2} \sum_{\lambda\in\{p_{L+1}(\lambda)=xp_L(\lambda)\}} \frac{p_o^2(L,\lambda)}{p_L^2(L,\lambda)} \left\{\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{p_{L+1}(L,\lambda)}{p_L(L,\lambda)}\right)\right\}^{-1} \Phi(\lambda)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_o^2(L,\lambda)}{p_L^2(L,\lambda) + p_{L+1}^2(L,\lambda)}\ \Phi(\lambda)\ d\lambda$$

La dernière égalité est obtenue par changement de variable en remarquant que dans chaque intervalle ouvert défini par la partition de $\mathbb{R}$ par les zéros de $p_L(L,\lambda)$ l'application $\lambda \to \dfrac{p_{L+1}(L,\lambda)}{p_L(L,\lambda)}$ croit strictement de $-\infty$ à $+\infty$ d'après (47), et que ${}^L\sigma_{o,o}$ ne change les zéros de $p_L(L,\lambda)$ car $p_{L+1}(L,\lambda)$ et $p_L(L,\lambda)$ n'ont pas de zéro commun.

Le résultat précédent peut encore s'écrire sous la forme

$$(48)\quad {}^{L}\sigma^{\tau}_{o,o}(\Phi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\langle \bar{g}^{\lambda}_{o}\, g^{\lambda}_{1} \cdots g^{\lambda}_{-L}\, x_o, x_o\rangle)^2}{\|g^{\lambda}_{L}\, g^{\lambda}_{L-1} \cdots g^{\lambda}_{-L}\, x_o\|^2}\, \Phi(\lambda)\, d\lambda$$

$\langle\ \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$.

Il en résulte que :

$$(49)\quad E({}^{L}\sigma^{\tau}_{o,o}(\Phi)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\lambda)\int \frac{|\langle gx_o, x_o\rangle|^2}{\|gx_o\|^2}\, T^{L}_{\lambda}(2)e(g\bar{x}_o)\mu^{L+1}_{\lambda}(dg)\, d\lambda$$

or on peut écrire (voir l'appendice)

$T^{2L}_{\lambda}(2)e = e_{\lambda,2} + R^{L}_{\lambda,2}e \qquad L \geq 1$

où $e_{\lambda,2} \in \mathcal{C}(X)$ est telle que $T^{2}_{\lambda}(2)e_{\lambda,2} = e_{\lambda,2}$ et $R^{L}_{\lambda,2}$ est un opérateur de norme spectrale, strictement inférieure à 1.
Pour $\bar{x} \in X$ on définit $\cos^2\bar{x}$ par $\cos^2\bar{x} = \cos x$ où x est un vecteur de norme 1, d'image $\bar{x}$ dans X.

On a alors :

$$(50)\quad E({}^{2L}\sigma^{\tau}_{o,o}(\Phi)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\lambda)\Big[\int \cos^2(g\bar{x}_o)\, e_{\lambda,2}(g\bar{x}_o)\mu^{2L+1}_{\lambda}(dg)\Big]\, d\lambda$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\lambda)\Big[\int \cos^2(g\bar{x}_o)\, R^{2L}_{\lambda,2}e(g\bar{x}_o)\mu^{(2L+1)}_{\lambda}(dg)\Big]\, d\lambda$$

Comme $\lim\limits_{L}\int \cos^2(g\bar{x}_o)\, e_{\lambda,2}(gx_o)\, \mu^{2L+1}_{\lambda}(dg) = \int \cos^2\bar{x}\, e_{\lambda,2}(\bar{x})\nu_{\lambda}(d\bar{x})$

et $\overline{\lim\limits_{L}}\Big[\int \cos^2(g\bar{x}_o)\, R^{2}_{\lambda,2}e(g.\bar{x}_o)\, \mu^{2L+1}_{\lambda}(dg)\Big] \leq \overline{\lim\limits_{L}}\, \|R^{2L}_{\lambda,2}\| = 0.$

on déduit de (50) que :

$\lim\limits_{L} E({}^{2L}\sigma^{\tau}_{o,o}(\Phi)) = \bar{\sigma}_{o,o}(\Phi) = \frac{1}{\pi}\int \Phi(\lambda)\Big[\int \cos^2\bar{x}\, e_{\lambda,2}(\bar{x})\nu_{\lambda}(d\bar{x})\Big]\, d\lambda$

ce qui établit que $\overline{\sigma_{o,o}}$ admet pour densité la fonction

$\lambda \to \frac{1}{\pi}\int \cos^2\bar{x}\;\; e_{\lambda,2}(\bar{x})\nu_{\lambda}(d\bar{x}).$

La continuité de l'application $\lambda \to T_\lambda^2(2)$ de $\mathbb{R}$ dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{C}(X), \mathcal{C}(X))$ des applications linéaires continues de $\mathcal{C}(X)$ dans $\mathcal{C}(X)$ entraîne la continuité de $\lambda \to e_{\lambda,2}$ et de $\lambda \to \nu_\lambda$, et par conséquent la densité de $\overline{\sigma_{o,o}}$ est continue.

Paragraphe 3 - LA FORMULE DE THOULESS

En reprenant les notations déjà définies, nous pouvons énoncer le

Théorème (3-1) :

Si μ est à support compact et charge au moins deux points :

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $x \in \mathbb{R}^2 - \{o\}$, on a

$$\text{P p s } \lim_{L} \frac{1}{L+1} \operatorname{Log} |P_{L+1}(t)| = \lim_{L} \frac{1}{L+1} \operatorname{Log} \|g_L^t \dots g_o^t x\| = \gamma(t)$$

où $\quad o<\gamma(t) = -\int \log \sigma(g,x)\, \mu_t(dg)\, \nu_t(dx)$.

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a l'égalité suivante "Formule de Thouless"

$$\gamma(t) = \int \operatorname{Log}|t-x|\, N(dx)$$

Démonstration du théorème (3-1) :

1) Justifions tout d'abord l'affirmation 1)

Si μ charge au moins deux points, le sous-groupe fermé engendré par μ_t est non compact et ne contient pas de sous-groupe d'indice fini ayant une action réductible sur $\mathbb{R}^2$ [14].

Donc d'après le théorème du Fürstenberg [4] pour tout $x \in R^2-\{0\}$ on a

(51) $$P\ p\ s \lim_{L \to +\infty} \frac{1}{L+1} \log \| g_L^t\, g_{L-1}^t \ldots g_o^t x \| = \gamma(t)$$

où (52) $$\gamma(t) = - \int \log\ \sigma(g,x)\ \mu_t(dg)\ \nu_t(dx) > 0$$

Par ailleurs, $p_{L+1}(t)$ est un coefficient de la matrice $g_L^t\, g_{L-1}^t \ldots g_o^t$, il résulte alors de [5] que l'on a également

(53) $$P\ p\ s \lim_{L} \frac{1}{L+1} \log |p_{L+1}(t)| = \gamma(t)$$

2) La justification du *3)* sera basée sur plusieurs résultats préliminaires :

<u>lemme (3-1)</u> : *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *l'intégrale* $\int \log |t-x|\ N(dx)$ *est convergente.*

<u>Démonstration du lemme (3-1)</u> :

Pour tous $L \geq 1$, $t \in \mathbb{R}$ $M \in \mathbb{N}$ on a :

(54) $$\frac{1}{L+1} \log |p_{L+1}(t)| = \int \log |t-x|\ \tilde{N}_L(dx) \leq \int \sup(\log |t-x|, -M)\ \tilde{N}_L(dx).$$

P-presque sûrement les probabilités de fonction de répartition $(\tilde{N}_L)_{L\geq 1}$, convergent étroitement vers la probabilité de fonction de répartition N (théorème 1-1) ; elles ont de plus leur support dans un compact fixe J. Par conséquent on déduit de l'inégalité précédente et en tenant compte du *1)* que pour tout $M \in \mathbb{N}$:

(55) $$0 < \gamma(t) \leq \int \sup\ (\log |t-x|, -M)\ N(dx)$$

ce qui assure puisque N est à support compact
l'intégrabilité par rapport à la probababilité dN
de la fonction $x \to |\log||t-x|$

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$; on a alors le

<u>lemme (3-2)</u> :

Pour λ *presque tout* t *on a :*

$$\gamma(t) = \int \log |t-x| \; N(dx)$$

<u>Démonstration du lemme (3-2)</u> :

Comme la suite de fonctions de répartition $(N_L)_{L \geq 1}$, converge étroitement vers la probabilité de fonction de répartition N, on en déduit que pour tout $b > 0$, on a :

$$(56) \quad P\ p\ s \quad \lim_{L} \int_{-b}^{b} dt \; \left| \int \log |t-x| \; \tilde{N}_L(dx) - \int \log |t-x| N(dx) \right| = 0$$

Le lemme (3-2) se déduit alors de (53) et de (56).

Avant d'énoncer une proposition qui nous sera également utile, précisons une notation :

Pour tout intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, nous noterons $\mathcal{L}_{loc}(]a,b[)$ l'espace des fonctions f de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout intervalle compact $T \subset]a,b[$, il existe une constante $0<\alpha(T)<1$, de sorte que l'application $t \in T \to f(t)$ soit Lipschitzienne d'ordre $\alpha(T)$. On a alors la

<u>proposition (3-1)</u> : *l'application* $t \to \gamma(t)$ *appartient à* $\mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R})$

dont nous donnerons la preuve à la fin du paragraphe 3.

Achevons alors la preuve du théorème (3-1).

Soit $A>0$ tel que $]-A,A[\supset J$.

La fonction $x \to \psi_A(x) = 1_{]-A,A[}(x)\, N(x)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc [11] une transformée de Hilbert $\tilde{\psi}_A \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ définie par $\tilde{\psi}_A = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \tilde{\psi}_{A,\varepsilon}(t)$ λ presque sûrement, où

$$\tilde{\psi}_{A,\varepsilon}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{|t-x|>\varepsilon} \frac{\psi_A(x)\, dx}{t-x}$$

Il résulte du lemme (3-2) par intégration par parties que :

$$\lambda p\,s \qquad \gamma(t) = \log|A-t| - \pi\tilde{\psi}_A(t),$$

c'est-à-dire

(57) $\lambda\, p\, s \qquad \tilde{\psi}_A(t) = \Phi_A(t)$

où (58) $\Phi_A(t) = \frac{1}{\pi}(\log|A-t| - \gamma(t)) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

D'après la proposition (3-2) et l'égalité précédente, la fonction Φ_A appartient à $\mathcal{L}_{loc}(]-A,A[)$. Si l'on pose

$$\tilde{\Phi}_{A,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{\Phi_A(t)}{x-t}\, dt$$

on déduit de la théorie de la transformée de Hilbert [11] dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ que $\lambda\, p\, s$ la limite $\tilde{\Phi}_A(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \tilde{\Phi}_{A,\varepsilon}(x)$ existe ; de plus comme Φ_A appartient à $\mathcal{L}_{loc}(]-A,A[)$ la limite précédente existe

pour tout $x \in]-A,A[$ et $\tilde{\Phi}_A \in \mathcal{L}_{loc}(]-A,A[)$.

La formule d'inversion de la transformée de Hilbert permet de conclure que :

λ p s $\quad 1_{]-A,A[}N(x) = \tilde{\Phi}_A(x)$.

Mais comme $x \to N(x)$ est continue et de plus $\tilde{\Phi}_A \in \mathcal{L}_{loc}(]-A,A[)$, on a :

$\forall x \in]-A,A[\quad \tilde{\psi}_A(x) = 1_{]-A,A[}\, N(x) = \tilde{\Phi}_A(x)$.

Ceci établit en particulier puisque A peut être choisi arbitrairement que $N \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R})$.

Comme $\psi_A \in \mathcal{L}_{loc}(]-A,A[)$, on en déduit que $\tilde{\psi}_A(t)$ est définie pour tout $t \in]-A,A[$ et que $\tilde{\psi}_A \in \mathcal{L}_{loc}(]-A,A[)$.

Les deux membres de (57) sont alors des fonctions continues de t sur $]-A,A[$ et l'on a donc :

(59) $\forall\, t \in]-A,A[\qquad \gamma(t) = \log|A-t| - \pi\, \tilde{\psi}_A(t)$

Comme on a $\log\, |A-t| - \pi\tilde{\psi}_A(t) = \int \log|t-x|\, dN(x)$, par intégration par parties, on obtient donc :

(60) $\forall\, t \in]-A,A[\qquad \gamma(t) = \int \log\, |t-x|\, dN(x)$

et le théorème (3-1) est ainsi démontré.

Avant de prouver la proposition (3-1), énonçons sous forme de proposition un résultat acquis au cours de la démonstration précédente.

<u>Proposition (3-2)</u> : *L'application* $t \to N(t)$ *appartient à* $\mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R})$.

<u>Démonstration de la proposition (3-1)</u> : elle est calquée sur la preuve de la proposition (2-10).

1) On commence par établir le

<u>lemme (3-1)</u> : *sous les hypothèses du théorème* (3-1) *pour tout compact*

$T \subset \mathbb{R}$ *il existe un réel* $0<\alpha(T)<1$ *tel que pour* $0<\alpha\leq\alpha(T)$

$$\lim_n \left[\sup_{\substack{t\in T\\ x\neq y\in X}} \int \frac{d^\alpha(gx,gy)}{d^\alpha(x,y)} \mu_t^n(dg) \right]^{1/n} = \rho(T,\alpha)$$

avec $\rho(T,\alpha)<1$

<u>démonstration du lemme (3-1)</u> :

Pour $0<\alpha<1$ on a l'inégalité

$$\sup_{\substack{x\neq y\in X\\ t\in T}} \int \frac{d^\alpha(gx,gy)}{d^\alpha(x,y)} \mu_t^n(dg) \leq \sup_{\substack{x\in X\\ t\in T}} \int \frac{1}{\sigma^{2\alpha}(g,x)} \mu_t^n(dg), \qquad n\geq 1.$$

Comme la suite de fonctions $\frac{1}{n}\int \log \sigma(g,x)\, \mu_t^n(dg)$ $n\geq 1$, converge uniformément sur $X\times T$ vers $\gamma(t)>0$ (2°) du théorème (3-1)) il existe un entier N_o tel que :

$$\beta = \inf_{\substack{t\in T\\ x\in X}} \int \log \sigma(g,x)\, \mu_t^{N_o}(dg) > 0$$

Si $\delta(g) = \sup_{x\in X} \sigma(g,x)$ on a l'inégalité :

$$\sup_{\substack{t\in T\\ x\in X}} \int \frac{1}{\sigma^{2\alpha}(g,x)} \mu_t^{N_o}(dg) \leq 1 - 2\alpha\beta + 2\alpha^2 \int \delta^2(g)\, e^{2\alpha\delta(g)} \mu_t^{N_o}(dg)$$

d'où puisque $\beta>0$, il existe un réel $0<\alpha(T)<1$ tel que pour $0<\alpha\leq\alpha(T)$:

$$(61) \quad \sup_{\substack{t\in T\\ x\in X}} \int \frac{1}{\sigma^\alpha(g,x)} \mu_t^{N_o}(dg) < 1$$

Par ailleurs la suite $\left(\sup_{\substack{t\in T\\ x\in X}} \int \frac{1}{\sigma^\alpha(g,x)} \mu_t^n(dg)\right)$ $n\geq 1$

est sous multiplicative, donc on a :

$$\lim_n \left(\sup_{\substack{t\in T\\ x\in X}} \int \frac{1}{\sigma^\alpha(g,x)} \mu_t^n(dg)\right)^{1/n} = \inf_n \left(\sup_{t\in T} \int \frac{1}{\sigma^\alpha(g,x)} \mu_t^n(dg)\right)^{1/n}$$

ce qui - compte-tenu de (61) - établit le lemme (3-1).

Le rôle de ce lemme est analogue à celui du lemme (2-7).

2) On considère de même que dans le paragraphe 2 B) pour $0<\alpha<1$ l'algèbre de Banach $\mathcal{L}'_\alpha$ des fonctions Lipschitziennes d'ordre α sur X ; les notations sont identiques à celles du paragraphe 2 B) et uniquement modifiées par l'adjonction d'un prime.
On étudie alors la famille des opérateurs P_t : $t \in \mathbb{R}$

(62) $P_t f(x) = \int f(gx)\, \mu_t(dg) \quad x \in X,$

où f est mesurable bornée sur X.

Ces opérateurs satisfont alors aux propriétés énoncées dans les propositions suivantes et dont la preuve est la même que celle des propositions (2-9) et (2-10- (cas où $u=0$), en substituant le lemme (3-1) au lemme (2-7).

Proposition (3-2) :

1) *Pour tout* $0<\alpha<1$ P_t *est un opérateur borné sur* $\mathcal{L}'_\alpha$, *et si* T *est un compact de* $\mathbb{R}$ *on a :*
$\sup_{t\in T} \|P_t\|'_\alpha < +\infty$

2) *Si* $0<\alpha<1$, $0<r<1$ *et si* T *est un compact de* $\mathbb{R}$, *il existe une constante* $C(T,\alpha)$ *telle que pour toute fonction* $\Phi \in \mathcal{L}'_\alpha$ *et tous* $s,t \in T$
$\|P_t\Phi - P_s\Phi\|_{(1-r)\alpha} \leq C(T,\alpha) \quad |t-s|^{t\alpha} \|\Phi\|_\alpha$

Proposition 3-3 : *Soit* T *un intervalle compact de* $\mathbb{R}$. *Pour tous* $t \in T$ *et* $0<\alpha\leq (T)$, P_t *est un opérateur quasi-compact de* $\mathcal{L}'_\alpha$ *dans* $\mathcal{L}'_\alpha$ *et tel que pour tout* $n\geq 1$ *on ait :*
$P_t^n = \nu_t + Q_t^n$
où Q_t *est un opérateur de* $\mathcal{L}'_\alpha$ *dans* $\mathcal{L}'_\alpha$ *vérifiant*
$Q_t e = 0,\ \nu_t Q_t = 0$
De plus si $r'_\alpha(Q_t)$ *est le rayon spectral de* Q_t *dans* $\mathcal{L}'_\alpha$ *on a :*
$\sup_{t\in T} r_\alpha (Q_t) < 1$

On en déduit le

<u>corollaire (3-1)</u> : *Si* T *est un intervalle compact de* $\mathbb{R}$, *si* $0<\alpha\leq\alpha(T)$, *si* $0<r<1$, *il existe une constante* $C(r,\alpha,T)$ *telle que pour toute fonction* $\Phi \in \mathcal{L}'_\alpha$ *on ait pour tous* s,t *de* T

$$|\nu_t(\Phi) - \nu_s(\Phi)| \leq C(r,\alpha,T) \quad |t-s|^{r\alpha} \; ||\Phi||'_\alpha$$

dont la preuve est la même que celle du lemme (2-11) 1).

Ce corollaire nous permet de terminer la preuve de la proposition (3-1). En effet, on a :

$$(63) \quad \gamma(t) - \gamma(t_o) = \int \log\sigma(g,x) \; \mu_t(dg)\nu_t(dx) - \int \log\sigma(g,x)\mu_{t_o}(dg)\nu_{t_o}(dg)$$

$$= \nu_t(\Phi_t) - \nu_{t_o}(\Phi_t) + \nu_{t_o}(\Phi_t - \Phi_{t_o})$$

$$\text{où} \qquad \Phi_t(x) = \int \log \sigma(g,x) \; d\mu_t(g).$$

Comme l'application $(t,x) \to \Phi_t(x)$ de $\mathbb{R} \times X$ dans $\mathbb{R}$ est continument différentiable, on en déduit que pour tout intervalle compact T de $\mathbb{R}$, on a :

$$\sup_{t\in T} ||\Phi_t||'_\alpha < +\infty, \qquad \sup_{x\in X} |\Phi_t(x) - \Phi_{t_o}(x)| \leq k(T)|t-t_o|$$

où $k(T)$ est une constante.

Par conséquent en tenant compte du corollaire (3-1), on obtient que si $0<\alpha\leq\alpha(T)$, $0<r<1$, $t,t_o \in T$

$$(64) \quad |\gamma(t) - \gamma(t_o)| \leq C(r,\alpha,T) \sup_{t\in T} ||\Phi'_t||_\alpha \quad |t-t_o|^{r\alpha} + k(T) \; |t-t_o|$$

ce qui prouve bien que la fonction $t \to \gamma(t)$ appartient à $\mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R})$.

APPENDICE

Dans cet appendice, nous précisons des résultats concernant certains opérateurs, utilisés au cours des démonstrations du lemme (2-7), et de la proposition (2-8). Les notations utilisées sont les mêmes que précédemment.

Soit p une probabilité sur $SL(2,\mathbb{R})$ ayant une densité à support compact. On considère l'opérateur $T(2\alpha)$ défini sur $\mathcal{C}(X)$ par

$$T(2\alpha)\, f(\overline{x}) = \int \sigma^{2\alpha}(g,\overline{x})\, f(g\overline{x})\, p(dg)$$

$f \in \mathcal{C}(X)$, $\overline{x} \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a alors la

Proposition A_1.

1) *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, $T(2\ )$ *est un opérateur compact positif sur* $\mathcal{C}(X)$;
Son rayon spectral $r(2\alpha)$ *est tel que la fonction* $\alpha \to \log r(2\alpha)$ *soit convexe, et que*

$r(0) = r(2) = 1,\quad r(2\alpha) < 1$ *pour* $0<\alpha<1$

2) *L'opérateur* $T(2)$ *peut s'écrire sous la forme :*

$T(2)\ [f\ ] = m(f)\ e_2 + R_2(f)$

où m *est la probabilité sur* X *invariante par les rotations.*
e_2 *l'unique fonction positive de* $\mathcal{C}(X)$ *telle que* $T(2)e_2 = e_2$ *et* $m(e_2) = 1$.
$\mathbb{R}_2$ *est un opérateur de* $\mathcal{C}(X)$ *de norme spectrale strictement inférieure à* 1 *et tel que :*

$m\ R_2 = 0 \qquad R_2(e_2) = 0.$

Démonstration de la proposition A_1.

1) Pour établir la compacité de l'opérateur $T(2\alpha)$, on commence par supposer que p a une densité continue : dans ce cas $T(2\alpha)$ est défini par un noyau continu [18], d'où le résultat.
Le cas général s'obtient en approximant la probabilité p en variation à l'aide d'une suite de probabilités p_n $n\geq 1$, admettant des densité continues dans un même compact fixe.

L'inégalité de Hölder permet facilement d'obtenir que pour

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0<t<1$ $n\geq 1$ on a

$$\operatorname{Log} \|T^n(2t\alpha+2(1-t)\beta)\| \leq t \log\|T^n(2\alpha)\| + (1-t)\log \|T^n(2(1-t)\beta)\|$$

d'où la convexité de la fonction $\alpha \to \log r(2\alpha) = \lim_n \log\|T^n(2\alpha)\|^{1/n}$

2) Pour terminer la démonstration, nous utiliserons la propriété suivante des opérateurs $T(2\alpha)$:

<u>lemme A</u> : *Il existe un réel* $\alpha_o>0$ *tel que pour* $|\alpha|<\alpha_o$ *l'opérateur* $T^n(2\alpha)$ $n\geq 1$ *peut s'écrire sous la forme*

$$T^n(2\alpha) = \lambda^n(2\alpha)\ \nu_{2\alpha}(\ )\ e_{2\alpha} + R^n(2\alpha)$$

où : $\lambda(2\alpha) > 0$ *est l'unique valeur propre de plus grand module de* $T(2\alpha)$

$\nu_{2\alpha}$ *l'unique probabilité sur* X *telle que* $\nu_\alpha T(2\alpha) = \lambda(2\alpha)\nu_\alpha$

$e_{2\alpha}\geq 0$ *l'unique élément de* $\mathscr{C}(X)$ *tel que*
$T(2\alpha)\ e_{2\alpha} = \lambda(2\alpha)\ e_{2\alpha}$, $\nu_{2\alpha}(e_{2\alpha}) = 1$
$R(2\alpha)$ *est un opérateur de* $\mathscr{C}(X)$ *de rayon spectral strictement inférieur à* $\lambda(2\alpha)$ *tel que*

$\nu_{2\alpha}\ Q(2\alpha) = 0$ $\qquad Q(2\alpha)\ e_{2\alpha} = 0$

De plus les applications $\alpha \to \nu_{2\alpha}$, $\alpha \to e_{2\alpha}$, $\alpha \to R(2\alpha)$ *sont analytiques.*

Démonstration du lemme A :

L'énoncé du lemme A est satisfait pour l'opérateur $T(o)$; on a :

$T^n(o) = \nu e + R^n \qquad n \geq 1$

où ν est l'unique probabilité p invariante portée par X.

D'autre part l'application $\alpha \to T(2\alpha)$ est analytique. La théorie des perturbations analytiques d'opérateurs assure qu'il existe un réel α_o tel que pour $|\alpha| < \alpha_o$ $T(2\alpha)$ admette une unique valeur simple isolée de module égal au rayon spectral de $T(2\alpha)$, et de sous-espace propre de dimension 1.

Comme d'autre part, $T(2\alpha)$ est un opérateur positif, cette valeur propre est égale au rayon spectral de $T(2\alpha)$ et admet une fonction propre positive [17].

L'énoncé du lemme A se déduit alors immédiatement de ce qui précède et de la théorie des perturbations analytiques d'opérateurs.

3) Etablissons le 2) de la proposition A_1. Pour cela on raisonne par dualité. Nous notons $\check{T}(2\alpha)$ l'opérateur défini de façon analogue à $T(2\alpha)$, mais en remplaçant la probabilité p par sa symétrisée $\check{p}$. Il est clair que $\check{T}(2\alpha)$ a les mêmes propriétés que $T(2\alpha)$.

Si θ est une mesure bornée sur X, et si $\Psi \in \mathcal{C}(X)$, on note :

$(\theta,\Psi) = \int \Psi(x)\, d\theta(x)$.

On a alors la relation :

$$(1') \quad (\Phi.m,\ T^k(2)\ [\Psi]) = (\Psi.m,\ \check{T}^k(o)\ [\Phi]) = ((\Psi.m)^{\vee k}T(o),\Phi)$$

où $\Phi,\ \Psi \in \mathcal{C}(X)$, $k \geq 0$.

Cette relation résulte du fait que $\sigma^2(g,\bar{x}) = \dfrac{dg^{-1}m}{dm}(\bar{x})$

$\bar{x} \in X$, $g \in SL(2,\mathbb{R})$.

Si λ est une valeur spectrale non nulle de l'opérateur compact T(2), il existe un entier $k \geq 1$ et une fonction $\Psi_\lambda \in \mathcal{C}(X)$ telle que

$[\lambda I - T(2)]^k \psi_\lambda = 0$

$m(\psi_\lambda) = 1.$

On en déduit d'après (1') que :

$(\psi_\lambda . m)[\lambda I - \check{T}(o)]^k = 0.$

L'adjoint de $\check{T}(o)$, admet 1 pour unique valeur propre de module supérieur ou égal à 1 ; cette valeur propre est simple, et le sous-espace propre correspondant est engendré par l'unique probabilité $\check{p}$ invariante $\check{\nu}$ portée par X. Il en résulte que si $|\lambda| \geq 1$ on a $\lambda = 1$, $k = 1$ et $\Psi_1 m = \check{\nu}$. Posons $e_2 = \Psi_1 \geq 0$.

Comme la dimension de l'espace des mesures bornées θ sur X satisfaisant à $\theta[I - T(2)] = 0$, est la même que celle de l'espace vectoriel des fonctions $f \in \mathcal{C}(X)$ satisfaisant à $[I - T(2)] f = 0$, c'est-à-dire 1, et que d'après (1') on a $m\,T(2) = m$, on en déduit le 2) de la proposition A_1.

4) L'application $\alpha \to \lambda(\alpha)$ est dérivable et l'on a [4], [18]

$$\lambda'(o) = - \int \log \sigma(g,x)\, p(dg)\, \nu(dx) < 0.$$

Comme d'autre part on a d'après ce qui précède $r(o) = r(2) = 1$, et que l'application $\alpha \to \log r(2\alpha)$ est convexe, il est clair que pour $0<\alpha<1$ on a nécessairement : $0<r(2\alpha)<1$

REFERENCES

[1] Atkinson — *Discrete and continuous boundary - Problems* Academic Press New-York (1964).

[2] Billingsley — *Convergence of probability measures* - John Wiley and sons - New-york (1968).

[3] Dunford - Schwartz — *Linear operators - Part 1.* Interscience Publishers - New-York (1958).

[4] Furstenberg — *Non-commuting random products* - Trans. American Math Soc 108 (1963) p. 337-428.

[5] Guivarc'h - Raugi — *Frontière de Furstenberg - Propriétés de contraction et théorèmes de convergence.* Séminaire de probabilités - Rennes 1981 et 1982.

[6] Ishii — *Localisation of eigenstates and transport phenomena in the one dimensional disorded system.* Suppl. Progr. Theor. Phys. 53, 77 (1963).

[7] Kunz et Souillard — *Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires.* Commun. Math Phys. 78 (1980) p. 201-246.

[8] Lacroix — *Problèmes probabilistes liés à l'étude des opérateurs aux différences aléatoires.* Annales del'Institut Elie Cartan(Nancy) n°7

[9] Le Page — *Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires.* Séminaire de Rennes 1981.

[10] Nagaev — *Some limit theorems for stationary Markov chains* - Theory of Proba and applications 2 (1957) p.378-406.

[11] Neri — *Singular Integrals* Lecture Notes in Mathematics 200.

[12] Neveu — *Bases mathematiques du calcul des probabilités* - Masson et Cie.

[13] Norman — *Markov processes and learning models.* Academic Press New-York vol. 84

[14] O. Connor — *Disordered Harmonic Chain.* Commun. Math. Physics 45 (1975) p. 63-77.

.../...

/...

15 Pastur *Spectral properties of disordered systems in the one body approximation.*
Commun. Math Physics 75(1980) p. 179-196.

16 Reznikova *The central limit theorem for the spectrum of random Jacobi matrices.*
Theory of Proba and its applications - volume XXV number 3 (1980).

17 Schaefer *Topological vector spaces.*
The Mac Millan Company New-York (1967).

18 Tutubalin *On limit theorems for the product of random matrices.*
Theory of Proba. Applic. 10 (1965) p. 15-27.