JEAN JACOD

Topologies pour les mesures sur un produit d'espaces, application aux mesures aléatoires

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1982, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1982___1_A6_0>

Séminaire de Probabilités 1982
Université de Rennes

TOPOLOGIES POUR LES MESURES SUR UN PRODUIT D'ESPACES, APPLICATION AUX MESURES ALEATOIRES

Jean JACOD

Dans ce texte, nous améliorons légèrement l'article [4] publié il y a un an, et nous en donnons une application aux mesures aléatoires à valeurs entières, considérées comme mesures vectorielles dans l'esprit de [2].

§1. Compléments topologiques

§1.a. Rappelons d'abord les hypothèses et les notations de l'article [4]. Soit $(Y,\underline{\underline{Y}})$ un espace mesurable et $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace polonais muni de ses boréliens, et d'une distance d ; soit $\tilde{Y} = Y\times E$, $\tilde{\underline{\underline{Y}}} = \underline{\underline{Y}}\otimes\underline{\underline{E}}$, et

B = espace des fonctions bornées mesurables sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$;

$\tilde{B}$ = espace des fonctions bornées mesurables sur $(\tilde{Y},\tilde{\underline{\underline{Y}}})$;

C = espace des fonctions continues bornées sur E ;

$\tilde{C} = \{\varphi\in\tilde{B} : \varphi(y,.)\in C \text{ pour tout } y\in Y\}$;

BL_a = espace des fonctions lipschitziennes sur E, bornée par a et de coefficient de Lipschitz au plus égal à a ;

$\widetilde{BL}_a = \{\varphi\in\tilde{B} : \varphi(y,.)\in BL_a \text{ pour tout } y\in Y\}$;

$1\otimes C = \{\varphi = 1\otimes f : f\in C\}$;

$1\otimes BL_a = \{\varphi = 1\otimes f : f\in BL_a\}$.

Enfin, on pose

$$\widetilde{BL} = \bigcup_{a>0} \widetilde{BL}_a \, , \tag{1.1}$$

ce qui n'est pas la même notation que dans [4]: cependant, les théorèmes de [4] où $\widetilde{BL}$ apparait doivent être lus avec la définition (1.1) ci-dessus, et pas celle de [4] ! (une autre erreur de [4] peut prêter à confusion: la référence [6] a été notée [4] à diverses reprises, notamment pp.7,8).

Par ailleurs, soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel muni d'une quasi-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ pour lequel il est complet. On note $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)$ l'espace des mesures sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$ à valeurs dans $\mathcal{E}$, et on écrit simplement $\mathcal{M}(Y)$ lorsque $\mathcal{E}=\mathbb{R}$, auquel cas on a alors l'espace des mesures réelles signées finies sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$. Pour la définition et les propriétés des mesures vectorielles, nous renvoyons à [1], ou à [4] où toutes les propriétés utiles ici ont été rappelées. En particulier si $\eta\in\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)$ on a un espace $L^1(\eta)$ de fonctions intégrables, qui contient l'espace B. On introduit aussi la quasi-norme de la "semi-variation" (la variation, lorsque $Y=\mathbb{R}$):

$$(1.2)\qquad \|\eta\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)} = \sup_{g\in B,\, |g|\leq 1} \|\eta(g)\|_{\mathcal{E}}\,.$$

On définit de même $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\tilde{Y})$ et $\mathcal{M}(\tilde{Y})$. Si maintenant $\mu\in\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\tilde{Y})$ et si $\varphi\in L^1(\mu)$, on pose pour tout $g\in B$:

$$(1.3)\qquad \varphi\times\mu(g) = \mu(g\otimes 1\cdot\varphi)\,,$$

ce qui définit une mesure $\varphi\times\mu\in\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)$.

<u>§1.b</u>. Le problème posé dans [4] consiste à définir une topologie sur $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\tilde{Y})$ qui soit "forte" (en variation) sur le facteur Y et "faible" (étroite) sur le facteur E. A cet effet on définit la convergence d'une famille filtrante (μ_α) de $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\tilde{Y})$ vers une limite μ, et il y a plusieurs définitions possibles exprimées par les conditions suivantes:

(A1) $\|\varphi\times(\mu_\alpha-\mu)\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)} \longrightarrow 0$ pour toute $\varphi\in\tilde{C}$.

(A2) $\|\varphi\times(\mu_\alpha-\mu)\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)} \longrightarrow 0$ pour toute $\varphi\in\widetilde{BL}$.

(A3) $\|\varphi\times(\mu_\alpha-\mu)\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)} \longrightarrow 0$ pour toute $\varphi\in 1\otimes C$.

(A4) $\|\varphi\times(\mu_\alpha-\mu)\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)} \longrightarrow 0$ pour toute $\varphi\in 1\otimes BL_1$.

(A5) $\|\mu_\alpha-\mu\|_{\widetilde{BL}_1} \longrightarrow 0$, où $\|\nu\|_{\widetilde{BL}_1} = \sup_{\varphi\in\widetilde{BL}_1}\|\nu(\varphi)\|_{\mathcal{E}} = \sup_{\varphi\in\widetilde{BL}_1}\|\varphi\times\nu\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)}$

(A6) $\|\mu_\alpha-\mu\|_{1\otimes BL_1} \longrightarrow 0$, où $\|\nu\|_{1\otimes BL_1} = \sup_{f\in B,\,|f|\leq 1,\, g\in BL_1}\|\nu(f\otimes g)\|_{\mathcal{E}}$

$$= \sup_{\varphi\in 1\otimes BL_1}\|\varphi\times\nu\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)}\,.$$

Les différentes implications entre ces propriétés sont assez compliquées; elles sont explicitées dans le théorème (6.2) de [4]. Cependant, dans le cas où toutes les mesures μ_α sont "positives" donne lieu à l'équivalence de toutes ces conditions, comme nous allons le voir ci-dessous.

<u>§1.c. Mesures positives</u>. On suppose dans la suite que $\mathcal{E}$ vérifie:

(1.4) <u>Hypothèse</u>: $\mathcal{E}$ est réticulé, le cône positif de $\mathcal{E}$ est fermé, et si $a,b \in \mathcal{E}$ vérifient $|a| \leq |b|$, alors $\|a\|_{\mathcal{E}} \leq \|b\|_{\mathcal{E}}$. ∎

On note $\mathcal{M}^{+}_{\mathcal{E}}(\tilde{Y})$ l'ensemble des mesures $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\tilde{Y})$ qui sont <u>positives</u> au sens où

(1.5) $$\varphi \in \tilde{B}, \ \varphi \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \mu(\varphi) \geq 0 \quad (\text{dans } \mathcal{E}).$$

Remarquer qu'on a alors

(1.6) $$\|\mu\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\tilde{Y})} = \|\mu(1)\|_{\mathcal{E}} \quad , \qquad \|\varphi \times \mu\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)} \leq \|\mu(|\varphi|)\|_{\mathcal{E}} .$$

(1.7) THEOREME : <u>En restriction au cône $\mathcal{M}^{+}_{\mathcal{E}}(\tilde{Y})$, les conditions (A1)-(A6) sont toutes équivalentes entre elles, et aussi équivalentes aux deux conditions suivantes</u>:

(A7) $\|1_{Y \times A} \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)} \longrightarrow 0$ pour tout $A \in \underline{\underline{E}}$ tel que $\mu(1_{Y \times \partial A}) = 0$, (où ∂A est la frontière de A);

(A8) $\|1_{\{\varphi > a\}} \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)} \longrightarrow 0$ pour toute $\varphi \in \tilde{C}$ et tout $a \in \mathbb{R}$ tels que $\mu(1_{\{g = a\}}) = 0$.

(1.8) REMARQUES : 1) L'équivalence de (A2)-(A7) a déjà été montrée dans [4] (théorèmes (2.5) et (7.7)).

2) L'amélioration apportée ici suit les idées de [5]. Remarquons que (A8) n'est pas équivalente (sauf si la famille filtrante est une suite) à la condition suivante, plus forte:

(A8') $\|1_A \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)} \longrightarrow 0$ pour tout $A \in \underline{\underline{\tilde{Y}}}$ tel que $\mu(1_{\partial A}) = 0$, où $\partial A = \{(y,x) : x$ est dans la frontière de la section A_y de $A\}$.

<u>Démonstration</u>. Les implications suivantes sont immédiates:

$$\begin{tikzcd}
 & A3 \arrow[dr] & \\
A1 \arrow[ur] \arrow[r] & A2 \arrow[r] & A4 \\
 & A5 \arrow[u] \arrow[r] & A6 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

et il suffit donc de montrer qu'on a: $(A4) \longrightarrow (A7)$, $(A7) \longrightarrow (A5)$, $(A2) \longrightarrow (A8)$, et $(A8) \longrightarrow (A1)$.

a) $\underline{(A4) \Longrightarrow (A7)}$ et $\underline{(A7) \Longrightarrow (A5)}$: On reprend mot pour mot la preuve de [4] (pp. 4,5, et 21), en rappelant la propriété suivante (cf. (7.8) de [4]), valable pour toutes les mesures vectorielles:

(1.9) Si (A_s) est une famille de parties mesurables de $\widetilde{Y}$, deux-à-deux disjointes, on a $\mu(1_{A_s}) \neq 0$ pour au plus une infinité dénombrable d'entre elles.

(Note: à la page 5 de [4], au lieu de $|\varphi - \psi| \leq 1/n$ il faut lire $|\varphi - \psi| \leq 2/n$ et faire ensuite des modifications en conséquence dans les diverses majorations).

b) $\underline{(A2) \Longrightarrow (A8)}$: Soit $\varphi \in \widetilde{C}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\mu(1_{\{\varphi = a\}}) = 0$. Soit $A = \{\varphi > a\}$ et $F = \overline{A}$, i.e. chaque coupe F_y de F est la fermeture dans E de la coupe A_y. Soit

$$\theta(y,x) = \begin{cases} 1 \wedge d(x,F_y) & \text{si } F_y \neq \emptyset \\ 1 & \text{si } F_y = \emptyset . \end{cases}$$

Si (x_n) est une suite dense dans E, on a

$$\{\theta \geq b\} = \begin{cases} \bigcap_n \{(y,x) : d(x,x_n) \geq b \text{ ou } \varphi(y,x_n) \leq a\} & \text{si } b \leq 1 \\ \emptyset & \text{si } b > 1 . \end{cases}$$

On en déduit que θ est mesurable. Comme $\theta(y,.) \in BL_1$ par définition, on a donc $\theta \in \widetilde{BL}_1$. Soit alors $\phi_n(t) = 0$ pour $t \geq 1/n$ et $\phi_n(t) = n(\frac{1}{n} - t)$ pour $0 \leq t < 1/n$, et $\theta_n = \phi_n \circ \theta$. Alors

(1.10) $$\theta_n \in \widetilde{BL}_n , \qquad 1_F = \lim_{(n)} \downarrow \theta_n .$$

Si $\eta > 0$ on note $F(\eta)$ l'ensemble dont chaque coupe $F(\eta)_y$ est la fermeture dans E de l'ensemble $\{x: \varphi(y,x) < a + \eta\}$. Comme ci-dessus, on construit des fonctions $\theta'_{n,\eta}$ telles que

(1.11) $$\theta'_{n,\eta} \in \widetilde{BL}_n , \qquad 1_{F(\eta)} = \lim_{(n)} \downarrow \theta'_{n,\eta} .$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. On a $F(\eta) \subset \{\varphi \leq a + \eta\}$, donc

$$\{\varphi > a\} \subset \lim_{\eta \downarrow 0} F(\eta)^c \subset A \subset F \subset \{\varphi \geq a\} .$$

Comme $\mu(1_{\{\varphi = a\}}) = 0$ et comme μ est positive, il existe $\eta > 0$ tel que $\|\mu(1_{F \setminus F(\eta)^c})\|_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon$. D'après (1.10) et (1.11) il existe n tel que si $\psi = \theta_n$ et $\psi' = 1 - \theta'_{n,\eta}$ on ait

(1.13) $$\psi' \leq 1_A \leq \psi , \qquad \|\mu(\psi - \psi')\|_{\mathcal{E}} \leq 2\varepsilon .$$

Enfin, comme $\psi, \psi' \in \widetilde{BL}_n$, il existe d'après (A2) un indice β tel que

$$\alpha \succ \beta \Longrightarrow \|\psi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \leq \varepsilon \, , \qquad \|\psi' \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \leq \varepsilon \, .$$

Donc si $\alpha \succ \beta$ on a d'après (1.6) et (1.12)

$$\begin{aligned}
\|1_A \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} &\leq \|\psi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} + \|(\psi - 1_A) \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \\
&\leq \varepsilon + \|\mu_\alpha(\psi - 1_A)\|_\xi + \|\mu(\psi - 1_A)\|_\xi \\
&\leq \varepsilon + \|\mu_\alpha(\psi - \psi')\|_\xi + \|\mu(\psi - \psi')\|_\xi \\
&\leq \varepsilon + 2\|\mu(\psi - \psi')\|_\xi + \|(\mu_\alpha - \mu)(\psi - \psi')\|_\xi \\
&\leq 5\varepsilon + \|(\psi - \psi') \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \\
&\leq 5\varepsilon + \|\psi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} + \|\psi' \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \leq 7\varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient $\|1_A \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \longrightarrow 0$.

c) <u>(A8) $\Longrightarrow$ (A1)</u>: Soit $\varphi \in \tilde{C}$ et $\varepsilon > 0$. Etant donné (1.9) il existe des réels $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ tels que $a_{i+1} - a_i \leq \varepsilon$, et $a_0 < \varphi < a_n$ identiquement, et $\mu(1_{\{\varphi = a_i\}}) = 0$. Soit

$$f = \sum\nolimits_{1 \leq i \leq n} a_{i-1} 1_{\{a_{i-1} < \varphi \leq a_i\}} ,$$

de sorte que $|f - \varphi| \leq \varepsilon$. Comme $1_{\{a_{i-1} < \varphi \leq a_i\}} = 1_{\{\varphi > a_{i-1}\}} - 1_{\{\varphi > a_i\}}$, la condition (A8) implique l'existence de β tel que

$$\alpha \succ \beta \Longrightarrow \|f \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \leq \varepsilon \, , \qquad \|1 \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \leq \varepsilon \; ;$$

enfin, d'après (1.6) et le fait que $|f - \varphi| \leq \varepsilon$ on a pour $\alpha \succ \beta$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} &\leq \|f \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} + \|\mu_\alpha(|f - \varphi|)\|_\xi + \|\mu(|f - \varphi|)\|_\xi \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon\|\mu_\alpha(1)\|_\xi + \varepsilon\|\mu(1)\|_\xi \\
&\leq \varepsilon + 2\varepsilon\|\mu(1)\|_\xi + \varepsilon\|(\mu_\alpha - \mu)(1)\|_\xi \\
&\leq \varepsilon + 2\varepsilon\|\mu(1)\|_\xi + \|1 \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \leq 2[\varepsilon + \varepsilon\|\mu(1)\|_\xi]
\end{aligned}$$

et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire on obtient $\|\varphi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \longrightarrow 0$. ∎

<u>§1.d. Mesures σ-finies</u>. L'espace $\mathcal{M}_\xi(\tilde{Y})$ est l'espace des mesures "finies" à valeurs dans $\mathcal{E}$, dans le sens où elles permettent d'intégrer toutes les fonctions bornées.

Il y a bien-sûr une notion de mesures "σ-finies" qui nous sera utile plus loin, et qu'on peut introduire (et ramener aux mesures finies) très simplement comme suit: si V est une fonction mesurable strictement positive sur $\tilde{Y}$ et si $\mu \in \mathcal{M}_{\xi}(\tilde{Y})$, on note $\theta = \frac{1}{V}\cdot\mu$ la "mesure" définie ainsi:

(1.13) φ fonction mesurable sur $\tilde{Y}$, $\frac{\varphi}{V}$ bornée $\rightsquigarrow$ $\theta(\varphi) = \mu(\frac{\varphi}{V})$.

L'ensemble des fonctions θ-intégrables est bien-sûr $L^1(\theta) = \{\varphi : \frac{\varphi}{V} \in L^1(\mu)\}$, et on note $\mathcal{M}_{\xi,V}(\tilde{Y})$ l'ensemble de ces mesures, et $\mathcal{M}_{\xi,\sigma}(\tilde{Y})$ la réunion des $\mathcal{M}_{\xi,V}(\tilde{Y})$ pour toutes les V mesurables strictement positives. Remarquons que si $\theta \in \mathcal{M}_{\xi,\sigma}(\tilde{Y})$ on a aussi $\theta \in \mathcal{M}_{\xi,V}(\tilde{Y})$ si et seulement si $V \in L^1(\theta)$, et dans ce cas $\mu = V.\theta$ (définie par $\mu(\varphi) = \theta(\varphi V)$ pour $\varphi \in \tilde{B}$) est dans $\mathcal{M}_{\xi}(\tilde{Y})$.

Si $\theta \in \mathcal{M}_{\xi,\sigma}(\tilde{Y})$ et $\varphi \in L^1(\theta)$, on définit $\varphi \times \theta \in \mathcal{M}_{\xi}(Y)$ comme en (1.3):

(1.14) $\varphi\times\theta(g) = \theta(g \otimes 1 \cdot \varphi)$ pour $g \in B$ (i.e., $\varphi\times\theta = \frac{\varphi}{V} \times (V.\theta)$).

Exactement comme pour les mesures réelles, les topologies dont on peut munir $\mathcal{M}_{\xi,\sigma}(\tilde{Y})$ reviennent toujours à considérer une fonction V strictement positive particulière, à se restreindre à $\mathcal{M}_{\xi,V}(\tilde{Y})$, et à remplacer $\theta \in \mathcal{M}_{\xi,V}(\tilde{Y})$ par la mesure finie correspondante $\mu = V.\theta$. Par exemple, les conditions (A5) et (A6) conduisent à munir $\mathcal{M}_{\xi,V}(\tilde{Y})$ des quasi-normes suivantes:

$$(1.15) \quad \begin{cases} \|\theta\|_{\widetilde{BL}_1\text{-}V} = \sup_{\varphi \in \widetilde{BL}_1} \|(V\varphi)\times\theta\|_{\mathcal{M}_{\xi}(Y)} \\ \|\theta\|_{1\otimes BL_1\text{-}V} = \sup_{\varphi \in 1\otimes BL_1} \|(V\varphi)\times\theta\|_{\mathcal{M}_{\xi}(Y)} \end{cases}$$

et on peut traduire l'équivalence des conditions (A1), (A4), (A5) et (A6) du théorème (1.7) dans ce cadre, ce qui donne:

(1.16) THEOREME : <u>Soit</u> (θ_α) <u>une famille filtrante de mesures de</u> $\mathcal{M}^+_{\xi,V}(\tilde{Y})$, <u>et</u> $\theta \in \mathcal{M}^+_{\xi,V}(\tilde{Y})$. <u>Il y a équivalence entre</u>:

(i) $\|\varphi\times(\theta_\alpha - \theta)\|_{\mathcal{M}_{\xi}(Y)} \longrightarrow 0$ pour toute φ telle que $\frac{\varphi}{V} \in \tilde{C}$;

(ii) $\|\varphi\times(\theta_\alpha - \theta)\|_{\mathcal{M}_{\xi}(Y)} \longrightarrow 0$ pour toute φ telle que $\frac{\varphi}{V} \in 1\otimes BL_1$;

(iii) $\|\theta_\alpha - \theta\|_{\widetilde{BL}_1\text{-}V} \longrightarrow 0$;

(iv) $\|\theta_\alpha - \theta\|_{1\otimes BL_1\text{-}V} \longrightarrow 0$.

Ce résultat ne doit pas faire illusion: les conditions précédentes ne sont intéressantes que lorsque la fonction V elle-même a les "bonnes" propriétés de continuité: dans (i), $V(y,.)$ est continue; dans (ii), $V(y,.)$ est lipschitzienne, par exemple.

§2 - Applications aux mesures aléatoires

§2.a. Motivations. Dans toute la suite, on considère un espace probabilisé filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0},P)$, et l'espace $Y=\Omega\times\mathbb{R}_+$ muni de la tribu $\underline{\underline{Y}}=\underline{\underline{P}}$ des prévisibles. L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ est $L^0(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ muni de la quasi-norme $\|Z\|_{\mathcal{E}}=\|Z\|_{L^0}=E(|Z|\wedge 1)$.

On rappelle d'abord (théorème de Dellacherie-Mokobodzki) que $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)$ "s'identifie" aux semimartingales. Plus exactement, soit (cf. [2]):

(2.1) $\underline{\underline{S}}$ est l'espace des familles $\eta=(\eta_t)_{t\geq 0}$ de mesures de $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)$ telles que
 (i) $\eta_t(g)$ est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable;
 (ii) $\eta_s(g)=\eta_t(g1_{[0,s]})$ si $s\leq t$;
 (iii) $\eta_t(g1_{A\times I})=1_A\,\eta_t(g1_{\Omega\times I})$ si $A\in\underline{\underline{F}}_0$ et $I=\mathbb{R}_+$, ou si $A\in\underline{\underline{F}}_s$ et $I=]s,s']$. ∎

Il y a alors correspondance bi-univoque entre les élements $\eta=(\eta_t)$ de $\underline{\underline{S}}$ et les semimartingales nulles en 0 , via les formules

(2.2) $$X_t = \eta_t(1)\ ,\qquad \eta_t(g) = (g\cdot X)_t$$ (intégrale stochastique de $g\in B$).

On rappelle aussi que la topologie d'Emery sur $\underline{\underline{S}}$ est essentiellement la topologie induite par la quasi-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)}$: comme $\eta\in\underline{\underline{S}}$ est une famille de mesures, il convient seulement de remplacer cette quasi-norme par

(2.3) $$\|\eta\|_S = \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\|\eta_n\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)} = \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\sup_{g\in B,|g|\leq 1}\|\eta_n(g)\|_{L^0}\ .$$

Soit maintenant $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace polonais et $\tilde{Y}=Y\times E$, $\tilde{\underline{\underline{Y}}}=\tilde{\underline{\underline{P}}}=\underline{\underline{Y}}\otimes\underline{\underline{E}}$. Si V est $\tilde{\underline{\underline{P}}}$-mesurable et strictement positive, on pose:

(2.4) $\tilde{\underline{\underline{S}}}_V$ est l'espace des familles $\theta=(\theta_t)_{t\geq 0}$ de mesures de $\mathcal{M}_{\mathcal{E},V}(\tilde{Y})$ telles que: (i) $\theta_t(\varphi)$ est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable;
 (ii) $\theta_s(\varphi)=\theta_t(\varphi 1_{[0,s]})$ si $s\leq t$;
 (iii) $\theta_t(\varphi 1_{A\times I\times E})=1_A\,\theta_t(\varphi 1_{\Omega\times I\times E})$ pour $A\in\underline{\underline{F}}_0$ et $I=\mathbb{R}_+$ ou pour $A\in\underline{\underline{F}}_s$ et $I=]s,s']$. ∎

Lorsque $\theta\in\tilde{\underline{\underline{S}}}_V$ et lorsque φ est $\tilde{\underline{\underline{P}}}$-mesurable et intégrable par rapport à θ (i.e. par rapport à chaque θ_t), par exemple si $|\varphi|\leq V$, on définit $\varphi\times\theta\in\underline{\underline{S}}$ par l'extension suivante de (1.14):

(2.5) $$(\varphi\times\theta)_t(g) = \theta_t(g\otimes 1\,\varphi)\ ,$$

et la semimartingale associée à $\varphi\times\theta$ est l'<u>intégrale stochastique</u> de φ par rapport à θ : cf. [2].

Enfin, par analogie avec (2.3), on définit la quasi-norme suivante sur $\tilde{\underline{\underline{S}}}_V$:

(2.6) $$\|\theta\|_{\tilde{\underline{\underline{S}}}_V} = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} \sup_{\varphi\in\tilde{B},\,|\varphi|\leq 1} \|\theta_n(\varphi V)\|_{L^0} .$$

Maintenant, partons au contraire d'une semimartingale X. On lui associe une mesure aléatoire à valeurs entières μ^X, avec $E=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, par la formule:

(2.7) $$\mu^X(\omega;dt\times dx) = \sum_{s>0} 1_{\{\Delta X_s(\omega)\neq 0\}}\, \varepsilon_{(s,\Delta X_s(\omega))}(dt\times dx)$$

et on sait que $\int (x^2\wedge 1)\mu^X([0,t]\times dx)<\infty$ pour tout t. Il est alors clair que μ^X s'identifie à un élément de $\tilde{\underline{\underline{S}}}_V$ par la formule

(2.8) $$\mu_t^X(\varphi) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \varphi(.,s,x)\,\mu(.;ds\times dx) \qquad \text{si} \quad |\varphi|\leq V$$

et $\varphi\times\mu^X$ est le processus noté $\varphi*\mu^X$ dans [3].

L'application: $X\rightsquigarrow\mu^X$ n'est pas continue de $\underline{\underline{S}}$ muni de $\|.\|_S$ dans $\tilde{\underline{\underline{S}}}_V$ muni de $\|.\|_{\tilde{\underline{\underline{S}}}_V}$, parce que si une suite (X^n) converge dans $\underline{\underline{S}}$ vers une limite X, on sait que ΔX^n converge vers ΔX en probabilité, uniformément sur les compacts; donc pour chaque s, $\varepsilon_{(s,\Delta X_s^n)}$ converge (en probabilité) étroitement vers $\varepsilon_{(s,\Delta X_s)}$, mais cette convergence n'est pas une convergence en variation. D'où la nécessité de définir une topologie sur $\tilde{\underline{\underline{S}}}_V$ qui soit "faible" sur le facteur E, et "forte" sur le facteur Y: c'est exactement ce qu'on a fait dans [4] et dans le §1 ci-dessus.

Bien entendu, comme une mesure $\theta\in\tilde{\underline{\underline{S}}}_V$ est en réalité une famille (θ_t) de mesures, il convient de modifier comme suit la définition des quasi-normes (1.15):

(2.9) $$\begin{cases} \|\theta\|_{\widetilde{BL}_1\text{-}V} = \sup_{\varphi\in\widetilde{BL}_1} \|(V\varphi)\times\theta\|_S \\ \|\theta\|_{1\otimes BL_1\text{-}V} = \sup_{\varphi\in 1\otimes BL_1} \|(V\varphi)\times\theta\|_S . \end{cases}$$

<u>§2.b. Mesures à valeurs entières</u>. Dans ce qui suit, on considère une fonction V fixée, <u>$\tilde{\underline{\underline{P}}}$-mesurable, strictement positive, bornée</u>.

On considère une famille filtrante (μ^α) de mesures, et une mesure μ, qui sont toutes des mesures à valeurs entières sur $\mathbb{R}_+\times E$ (c'est-à-dire du type (2.7) avec ΔX remplacé par un processus optionnel à valeurs dans $E\cup\{\Delta\}$). On suppose que toutes ces mesures sont, grâce à l'identification (2.8), dans l'espace $\tilde{\underline{\underline{S}}}_V$, ce qui revient à dire que

$$V*\mu_t(\omega) = \int_0^t\int_E V(\omega,s,x)\,\mu(\omega;ds\times dx) < \infty \qquad \forall t\geq 0$$

et de même pour μ^α. Cela entraine en particulier que μ^α et μ admettent des projections prévisibles duales ν^α et ν, qui sont encore des mesures positives de $\tilde{\underline{\underline{S}}}_V$ (voir [3]).

Comme les mesures μ^α sont positives et que l'espace $\mathcal{E} = L^0$ vérifie (1.4), le théorème (1.15) implique immédiatement (modulo une adaptation triviale au fait que chaque μ^α est une famille de mesures) que

(2.10) LEMME : <u>Sous les hypothèses précédentes, il y a équivalence entre</u>:

(i) $\|(V\varphi)\times(\mu^\alpha-\mu)\|_S \longrightarrow 0$ <u>pour toute</u> $\varphi \in \tilde{C}$;

(ii) $\|\mu^\alpha-\mu\|_{\widetilde{BL}_1-V} \longrightarrow 0$;

(iii) $\|\mu^\alpha-\mu\|_{1\otimes BL_1-V} \longrightarrow 0$.

De plus, on a:

(2.11) LEMME : <u>Les propriétés équivalentes (i)-(iii) de (2.10) entrainent les propriétés équivalentes suivantes</u>:

(i) $\|(V\varphi)\times(\nu^\alpha-\nu)\|_S \longrightarrow 0$ <u>pour toute</u> $\varphi \in \tilde{C}$;

(ii) $\|\nu^\alpha-\nu\|_{\widetilde{BL}_1-V} \longrightarrow 0$;

(iii) $\|\nu^\alpha-\nu\|_{1\otimes BL_1-V} \longrightarrow 0$.

<u>Démonstration</u>. L'équivalence des trois conditions découle de (1.15). Il suffit donc de montrer que si $\varphi \in \tilde{C}$, et si $\|(V\varphi)\times(\mu^\alpha-\mu)\|_S \longrightarrow 0$, alors on a $\|(V\varphi)\times(\nu^\alpha-\nu)\|_S \longrightarrow 0$. Mais si $A^\alpha = (V\varphi)*\mu^\alpha$ et $A = (V\varphi)*\mu$, l'hypothèse implique que A^α tend vers A dans $\underline{\underline{S}}$. Comme ces processus sont à variation localement intégrable et à sauts uniformément bornés par la constante $a := \sup|\varphi V|$, on sait d'après [7] que la famille $(V\varphi)*\nu^\alpha$ des projections prévisibles duales de A^α tend dans $\underline{\underline{S}}$ vers la projection prévisible duale $(V\varphi)*\nu$ de A, ce qui donne le résultat. ∎

Soit alors $\theta^\alpha = \mu^\alpha - \nu^\alpha$ et $\theta = \mu - \nu$. Il est évident que les conditions précédentes impliquent, par exemple, que

(2.12) $$\varphi \in \tilde{C} \quad \Longrightarrow \quad \|(\varphi V)\times(\theta^\alpha-\theta)\|_S \longrightarrow 0 .$$

Mais il s'agit là d'une implication triviale, concernant les intégrales de Stieltjes $(\varphi V)*\mu^\alpha - (\varphi V)*\nu^\alpha$. Par contre, le théorème suivant, <u>qui est le résultat essentiel de cet article</u>, montre qu'on a aussi convergence des $\varphi\times\theta^\alpha = \varphi*(\mu^\alpha-\nu^\alpha)$ vers $\varphi\times\theta = \varphi*(\mu-\nu)$ pour de "vraies" intégrales stochastiques.

(2.13) THEOREME : <u>On suppose que les conditions équivalentes de (2.10) sont satisfaites, et que la fonction</u> V <u>appartient à</u> $\tilde{C}$. <u>Alors</u>

$$\|\varphi\times(\theta^\alpha-\theta)\|_S \longrightarrow 0 \quad (\text{i.e.,}\ \varphi*(\mu^\alpha-\nu^\alpha) \longrightarrow \varphi*(\mu-\nu) \ \text{dans}\ \underline{\underline{S}})$$

<u>pour toute</u> $\varphi\in\tilde{C}$ <u>telle que</u> $(|\varphi|\wedge\varphi^2)/V$ <u>soit bornée</u>.

(Si $|\varphi|\wedge\varphi^2/V$ est bornée, on sait que l'intégrale stochastique $\varphi*(\mu^\alpha-\nu^\alpha)$ est bien définie et est une martingale locale somme compensée de sauts; elle est égale à $\varphi\times\theta^\alpha$ d'après (2.35) de [2]).

Commençons par un lemme.

(2.14) LEMME : <u>Soit les hypothèses de (2.13), et</u> $\psi\in\tilde{C}$ <u>telle que</u> ψ^2/V <u>soit bornée. Pour tout</u> $\varepsilon>0$ <u>il existe un indice</u> β <u>tel que</u>

$$\alpha\succ\beta \Longrightarrow \sup_{\varphi\in\tilde{C},\,|\varphi|\le|\psi|}\|\varphi\times\theta^\alpha\|_S \le 3\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^3}\|\psi^2*\nu\|_S .$$

<u>Démonstration</u>. D'après (2.3) on a:

$$(2.15)\quad a_\alpha := \sup_{\varphi\in\tilde{C},\,|\varphi|\le|\psi|}\|\varphi\times\theta^\alpha\|_S \le \sum_{n\ge1}2^{-n}\sup_{\varphi\in\tilde{C},\,|\varphi|\le|\psi|}\|(\varphi\times\theta^\alpha)_n\|_{L^0} .$$

Si $\varphi\in\tilde{C}$ et $|\varphi|\le|\psi|$, on sait que $M^\alpha=\varphi\times\theta^\alpha=\varphi*(\mu^\alpha-\nu^\alpha)$ est une martingale localement de carré intégrable dont le crochet prévisible $\langle M^\alpha,M^\alpha\rangle$ est majoré par le processus croissant $\varphi^2*\nu^\alpha$, donc par le processus croissant $\psi^2*\nu^\alpha$ (cf. [3]). Par ailleurs $(M^\alpha)^2$ est dominé au sens de Lenglart [6] par $\langle M^\alpha,M^\alpha\rangle$, donc par $\psi^2*\nu^\alpha$, et on en déduit que pour tous $n\ge1$, $\varepsilon>0$, $\eta>0$,

$$P(|\varphi\times\theta^\alpha|_n>\varepsilon) \le \frac{\eta}{\varepsilon^2} + P(\psi^2*\nu^\alpha_n\ge\eta) .$$

On a aussi $\|Z\|_{L^0}\le b+P(|Z|>b)$ pour toute variable aléatoire Z et tout $b>0$, donc il vient en prenant $\eta=\varepsilon^3$:

$$(2.16)\qquad \|(\varphi\times\theta^\alpha)_n\|_{L^0} \le 2\varepsilon + P(\psi^2*\nu^\alpha_n\ge\varepsilon^3) .$$

Comme V et ψ sont dans $\tilde{C}$, et ψ^2/V est bornée, la fonction $\psi'=\psi^2/V$ est aussi dans $\tilde{C}$ et $\psi^2=\psi'V$. La condition (2.11,i) appliquée à ψ' entraine l'existence de β tel que

$$(2.17)\qquad \alpha\succ\beta \Longrightarrow \|\psi^2*\nu^\alpha-\psi^2*\nu\|_S \le \varepsilon^4 .$$

Par ailleurs, comme ν^α est prévisible positive et comme $\psi^2\ge0$, on a

$$\|\psi^2*\nu^\alpha\|_S = \sum_{n\ge1}2^{-n}\|\psi^2*\nu^\alpha_n\|_{L^0} .$$

D'après (2.15), (2.16) et (2.17), et comme $P(|Z|>b)\le\frac{1}{b}\|Z\|_{L^0}$ pour toute variable Z et tout $b>0$, on en déduit que pour $\alpha\succ\beta$,

$$a_\alpha \le \sum_{n\ge1}2^{-n}\left[2\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^3}\|\psi^2*\nu^\alpha_n\|_{L^0}\right]$$

$$= 2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^3}\|\psi^2 * \nu^\alpha\|_S \quad \leq \quad 2\varepsilon + \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^3}\|\psi^2 * \nu\|_S ,$$

d'où le résultat. ∎

<u>Démonstration de (2.13)</u>. Soit $\varphi \in \tilde{C}$ telle que $c := \sup(|\varphi| \wedge \varphi^2/V)$ soit fini. On définit la fonction suivante sur $\mathbb{R}_+$:

$$f_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq m \\ m+1-x & \text{si } m < x \leq m+1 \\ 0 & \text{si } m+1 < x , \end{cases}$$

et $\varphi_m = \varphi f_m(|\frac{\varphi}{V}|)$, $\varphi'_m = \varphi - \varphi_m$.

D'abord, $\psi_m = \varphi_m/V$ est dans $\tilde{C}$, donc d'après (2.10,i) et (2.11,i) appliqués à ψ_m on obtient

(2.18) $$\varphi_m \times \theta^\alpha = \varphi_m * \mu^\alpha - \varphi_m * \nu^\alpha \longrightarrow \varphi_m \times \theta = \varphi_m * \mu - \varphi_m * \nu \qquad \text{dans } \underline{\underline{S}} .$$

Ensuite, si $m \geq c$ on a $|\varphi/V| \geq m \Longrightarrow \varphi^2 \leq |\varphi|$; donc $\varphi'^2_m \leq c\,V$. De plus $\varphi'_m \longrightarrow 0$ lorsque $m \uparrow \infty$, donc si $\varepsilon > 0$ il existe $m \geq c$ tel que

$$\|\varphi'^2_m * \nu\|_S \quad \leq \quad \varepsilon^4 .$$

D'après (2.18) et le lemme (2.14) on peut trouver β tel que

$$\alpha \succ \beta \Longrightarrow \|\varphi_m \times (\theta^\alpha - \theta)\|_S \leq \varepsilon \quad , \quad \|\varphi'_m \times \theta^\alpha\|_S \leq 4\varepsilon ,$$

et le lemme (2.14) appliqué à la famille constante $\mu^\alpha = \mu$ montre que $\|\varphi'_m \times \theta\|_S \leq 4\varepsilon$ également. Donc comme $\varphi = \varphi_m + \varphi'_m$,

$$\alpha \succ \beta \Longrightarrow \|\varphi \times (\theta^\alpha - \theta)\|_S \leq \|\varphi_m \times (\theta^\alpha - \theta)\|_S + \|\varphi'_m \times \theta^\alpha\|_S + \|\varphi'_m \times \theta\|_S \quad \leq \quad 9\varepsilon$$

et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a le résultat. ∎

On aimerait bien-sûr déduire de (2.13) que, sous les mêmes hypothèses,

$$\|\theta^\alpha - \theta\|_{\widetilde{BL}_1 - \sqrt{V}} \longrightarrow 0 , \qquad \|\theta^\alpha - \theta\|_{1 \otimes BL_1 - \sqrt{V}} \longrightarrow 0$$

car la conclusion de (2.13) implique la condition (i) du théorème (1.16) avec V remplacé par $\sqrt{V}$. Mais le théorème (1.16) ne s'applique pas ici, car les mesures θ^α ne sont pas positives. Cependant, on a:

(2.19) THEOREME : <u>Sous les hypothèses du théorème (2.13), et si la famille filtrante</u> (μ^α) <u>est une suite</u> (μ^n) , <u>on a</u>:

$$\|\theta^n - \theta\|_{\widetilde{BL}_1 - \sqrt{V}} \longrightarrow 0 , \qquad \|\theta^n - \theta\|_{1 \otimes BL_1 - \sqrt{V}} \longrightarrow 0 .$$

<u>Démonstration</u>. On va appliquer l'équivalence du théorème (6.2) de [4]: il suffit de montrer que la suite (θ^n) est "$\tilde{C}$-asymptotiquement bornée" et "$\tilde{C}$- asymptotiquement uniformément tendue" dans $\tilde{\underline{S}}_V$, ce qui signifie qu'on a les deux propriétés suivantes:

(2.20) $$\lim_{r\downarrow 0} \limsup_n \sup_{\varphi\in\tilde{C},\, |\varphi|\leq\sqrt{V}} \|r\varphi\times\theta^n\|_S = 0 .$$

(2?21) $\forall \varepsilon>0$, $\exists K$ compact de E avec
$$\limsup_n \sup_{\varphi\in\tilde{C},\, |\varphi|\leq\sqrt{V}\, 1_{\Omega\times\mathbb{R}_+\times K^c}} \|\varphi\times\theta^n\|_S \leq \varepsilon .$$

Montrons d'abord (2.20), qui s'écrit encore:

(2.22) $$\lim_{r\downarrow 0} \limsup_n \sup_{\varphi\in\tilde{C},\, |\varphi|\leq r\sqrt{V}} \|\varphi\times\theta^n\|_S = 0 .$$

Si $\varepsilon>0$ il existe $r>0$ tel que $\|r^2\, V*\nu\|_S \leq \varepsilon^4$, donc d'après le lemme (2.14) appliqué à $\psi=r\sqrt{V}$ il existe n_0 tel que

$$n\geq n_0 \quad\Longrightarrow\quad \sup_{\varphi\in\tilde{C},\, |\varphi|\leq r\sqrt{V}} \|\varphi\times\theta^n\|_S \leq 4\varepsilon$$

et on en déduit (2.22).

Passons à (2.21). Soit $\varepsilon>0$. Comme les mesures positives ν^n convergent vers ν au sens de (2.11,ii), le lemme (7.9) de [4] montre qu'il existe un compact K de E tel que, si $\rho=1_{\Omega\times\mathbb{R}_+\times K^c}$, on ait $\|(V\rho)*\nu^n\|_S\leq\varepsilon^4$ pour chaque n.

On applique alors le lemme (2.14) pour chaque mesure θ^n (avec $\theta^\alpha=\theta^n$ pour tout α): si $\varphi\in\tilde{C}$ et si $|\varphi|\leq\sqrt{V}\rho$, on a (avec $\psi=\sqrt{V}\rho$, donc $\psi^2=V\rho$):

$$\|\varphi\times\theta^n\|_S \leq 3\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^3}\|(V\rho)*\nu^n\|_S \leq 4\varepsilon$$

et on en déduit (2.21). ∎

§2.c. <u>Retour aux semimartingales</u>. Nous terminons en montrant que la topologie introduite dans le paragraphe précédent pour les mesures à valeurs entières résoud effectivement le problème, posé au §2-a, des rapports entre convergence dans $\underline{S}$ des semimartingales X^n , et convergence des mesures associées μ^{X^n}.

(2.23) PROPOSITION : <u>Soit</u> X <u>une semimartingale et</u> (X^α) <u>une famille filtrante de semimartingales. Soit</u> $V(\omega,t,x)=x^2\wedge 1$.

a) <u>Si</u> $X^\alpha\longrightarrow X$ <u>dans</u> $\underline{S}$, <u>on a</u> $\mu^{X^\alpha}\longrightarrow\mu^X$ <u>au sens de (2.10)</u>.

b) <u>Si</u> $\mu^{X^\alpha}\longrightarrow\mu^X$ <u>au sens de (2.10) et si les</u> X^α <u>et</u> X <u>sont des martingales locales sommes compensées de sauts, nulles en</u> 0 <u>et vérifiant identi-</u>

quement $|\Delta X^\alpha| \leq a$, $|\Delta X| \leq a$ pour une constante a, alors $X^\alpha \longrightarrow X$ dans $\underline{\underline{S}}$.

Il est évidemment impossible d'obtenir une réciproque complète de l'assertion (a), car la mesure μ^X ne caractérise la semimartingale X que dans le cas où celle-ci est nulle en 0 et est une martingale locale somme compensée de sauts.

Démonstration. a) D'après les équivalences du théorème (1.7), il suffit de montrer que si $g \in C$, alors $V(1\otimes g)*\mu^{X^\alpha} \longrightarrow V(1\otimes g)*\mu^X$ dans $\underline{\underline{S}}$. Soit $h(x) = g(x)\, x^2 \wedge 1$. Alors

$$V(1\otimes g)*\mu_t^{X^\alpha} = \sum_{s\leq t} h(\Delta X_s^\alpha) .$$

Comme $|h(x)| \leq c(x^2 \wedge 1)$ pour une constante c, on sait d'après [7] que l'application: $X \rightsquigarrow \sum_{s\leq .} h(\Delta X_s)$ est continue de $\underline{\underline{S}}$ dans $\underline{\underline{S}}$, et le résultat en découle.

b) Soit $\mu^\alpha = \mu^{X^\alpha}$, $\mu = \mu^X$. On utilise les notations θ^α et θ du §2-b. Comme X^α est une martingale locale somme compensée de sauts et nulle en 0 avec $|\Delta X^\alpha| \leq a$, on sait d'après [3] que $X^\alpha = \varphi \times \theta^\alpha$ avec $\varphi(\omega,t,x) = (x\wedge a)\vee(-a)$ et de même $X = \varphi\times\theta$. Comme φ^2/V est borné et comme $\varphi \in \widetilde{C}$, le résultat découle du théorème (2.13). ∎

BIBLIOGRAPHIE

1 K. BICHTELER: Integration Theory. Lect. Notes in Math. 315, 1973.

2 K. BICHTELER, J. JACOD: Random measures and Stochastic Integration. A paraitre dans: Proc. IFIP-ISI Conference, Bangalore; ed. par G. Kallianpur, 1982.

3 J. JACOD: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. 714, 1979.

4 J. JACOD: Topologies pour les mesures sur un produit d'espaces. Sém. Proba. de Rennes 1981, publié en 1982.

5 J. JACOD, J. MEMIN: Rectification à "Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité". A paraitre dans: Sém. Proba. XVII, 1983.

6 E. LENGLART: Relations de domination entre deux processus. Annales de l'Institut H. Poincaré (B), XIII, 171-179, 1977.

7 J. MEMIN: Espaces de semimartingales et changements de probabilité. Z. für Wahr. 52, 9-40, 1980.