JEAN JACOD

Sur la non-réversibilité du processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1982, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1982___1_A5_0>

Séminaire de Probabilités 1982
Université de Rennes

SUR LA NON-REVERSIBILITE DU PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK GENERALISE

Jean JACOD

§1. Introduction et résultats.

Dans ce qui suit, nous complétons l'article précédent de Gravereaux [1] en prouvant qu'il n'existe pas de processus d'Ornstein-Uhlenbeck "généralisé" réversible (ou "symétrique", au sens des processus de Markov stationnaires) qui soit discontinu: le résultat est donc le même que ceux du §5 de [1], mais sans aucune restriction et avec une méthode différente et un peu plus simple.

Par "processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé" nous entendons le processus solution de l'équation suivante

(1.1) $$dX_t = h(X_t)\,dt + dZ_t \quad , \quad X_0 = V$$

où Z est un processus à accroissements indépendants stationnaires (en abrégé: PAIS) d-dimensionnel, défini sur un espace filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{F} = (\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0},P)$, où V est une variable $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et où h est un opérateur linéaire sur $\mathbb{R}^d$. Pour simplifier on suppose que $\underline{F}$ est la filtration engendrée par le processus Z (on peut toujours se ramener à ce cas).

On sait que la solution X est un processus fortement markovien homogène, et qu'il admet l'expression explicite suivante:

(1.2) $$X_t = e^{th}\left(V + \int_0^t e^{-sh}.dZ_s\right).$$

De plus on sait exactement quand ce processus X admet une probabilité stationnaire (voir [1], théorème (4.1)).

Plus précisément, on associe à h la décomposition (unique) suivante de $\mathbb{R}^d$ en somme directe: $\mathbb{R}^d = E\oplus F$ avec

(1.3) $$\begin{cases} E \text{ et } F \text{ sont stables par } h\,; \\ \text{la restriction de } h \text{ à } E \text{ (resp. } F\text{) n'a que des valeurs propres} \\ \lambda \text{ telles que } \mathrm{Re}(\lambda)<0 \quad \text{(resp. } \mathrm{Re}(\lambda)\geq 0\text{).} \end{cases}$$

Tout vecteur de $\mathbb{R}^d$ s'écrit de manière unique $x = x^E + x^F$ avec $x^E \in E$ et $x^F \in F$: on a ainsi $Z_t = Z_t^E + Z_t^F$, etc... Alors:

(1.4) THEOREME : Pour que le processus X admette une probabilité stationnaire, il faut et il suffit que:

(i) $E[\mathrm{Log}(1 + |Z_1|)] < \infty$;

(ii) Z^F soit déterministe, de la forme $Z_t^F = t\,h(a)$ avec $a \in F$.

Passons maintenant à la réversibilité: on dira que l'équation (1.1) est réversible s'il existe un choix de la variable V pour laquelle le processus solution soit un processus de Markov stationnaire réversible (ou symétrique): cela équivaut à dire qu'il existe une probabilité stationnaire η par rapport à laquelle le semi-groupe du processus de Markov solution soit auto-adjoint; ou encore qu'il existe une probabilité stationnaire η tel que la solution stationnaire X ait même loi (en tant que processus) que le retourné de X à chaque temps fixe.

Remarquons que pour l'étude de la réversibilité, il faut se placer sous les conditions de (1.4): la composante X^F est donc trivialement de la forme $X_t^F = e^{th}(V^F - a) + a$, et le choix $V^F = -a$ donne une valeur constante à X_t^F : auquel cas X^E est indépendant de X^F, et réversible si et seulement si X l'est. Afin d'éviter des complications fastidieuses et triviales, on suppose donc que $E = \mathbb{R}^d$, ce qui revient à dire que $e^{th} \longrightarrow 0$ quand $t \uparrow \infty$.

Soit aussi (b,C,H) les caractéristiques de Lévy-Khintchine de Z : on a $b \in \mathbb{R}^d$, C est un opérateur linéaire symétrique sur $\mathbb{R}^d$, H est une mesure positive sur $\mathbb{R}^d$, ne chargeant pas $\{0\}$ et intégrant la fonction $|x|^2 \wedge 1$, avec:

$$(1.5) \quad \begin{cases} E(\exp i\langle u, Z_t\rangle) = \exp t\,\xi(u) \\ \xi(u) = i\langle u,b\rangle - \frac{1}{2}\langle u,Cu\rangle + \int H(dx)\left[e^{i\langle u,x\rangle} - 1 - i\langle u,x\rangle 1_{\{|x|\le 1\}}\right] \end{cases}$$

(1.6) THEOREME: Supposons que toutes les valeurs propres de h aient leur partie réelle strictement négative. Dans ce cas $\tilde{C} = \int_0^\infty e^{sh}\,C\,e^{sh^*}\,ds$ existe, et l'équation (1.1) est réversible si et seulement si

(i) $H = 0$ ($\Longleftrightarrow$ Z est continu)

(ii) $h\tilde{C}$ est auto-adjoint.

Ce théorème sera démontré dans le §3. Contentons-nous maintenant de citer, sans justification, le résultat dans le cas général:

Pour que l'équation (1.1) soit réversible, il faut et il suffit que:

(i) $H = 0$;

(ii) $b = h(a)$ pour un $a \in \mathbb{R}^d$ (automatiquement satisfait dans (1.6) car h est inversible);

(iii) $\widetilde{C} = \int_0^\infty e^{sh} C e^{sh^*} ds$ existe, et $h\widetilde{C}$ est auto-adjoint.

On vérifie aisément que ces conditions impliquent les conditions de (1.4).

§2. Une "solution" stationnaire anticipative de (1.1).

Dans ce paragraphe, nous allons supposer que:

(2.1) $\qquad \mathrm{Re}(\lambda) > 0$ pour toute valeur propre de h.

L'objectif est de construire une solution stationnaire de (1.1). Bien entendu, (2.1) implique que $F = \mathbb{R}^d$, donc d'après le théorème (1.4) ce n'est en principe possible que lorsque Z est déterministe.

Toutefois, si on n'impose plus à V d'être $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable, l'équation (1.1) devient "anticipative"; elle n'a donc peut-être pas de sens, mais sa solution "formelle" explicite (1.2) est, quant à elle, toujours bien définie. On a alors la

(2.2) PROPOSITION : <u>Soit (2.1), et supposons que</u>

(i) $E[\mathrm{Log}(1 + |Z_1|)] < \infty$.

<u>Alors l'intégrale stochastique</u> $V = -\int_0^\infty e^{-sh}.dZ_s$ <u>existe, et le processus</u> X <u>défini par (1.2) vérifie aussi</u>

(2.3) $$X_t = -e^{th} \int_t^\infty e^{-sh}.dZ_s ,$$

<u>la loi de</u> X_t <u>ne dépend pas de</u> t , <u>et la filtration engendrée par</u> X <u>est</u> $\underline{\underline{G}} = (\underline{\underline{G}}_t)_{t \geq 0}$, <u>avec</u>

(2.4) $$\underline{\underline{G}}_t = \underline{\underline{F}}_t \bigvee \sigma(V) .$$

(dans le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck "classique", où Z est un brownien, cette construction nous a été suggérée par H. Föllmer).

<u>Démonstration</u>. Le fait que l'intégrale définissant V ci-dessus existe découle d'un résultat de Jurek [3] (voir la démonstration du théorème (3.1) de [1]). La formule (2.3) est alors évidente, et sur cette formule il est clair que la loi de X_t est égale à celle de $X_0 = V$.

Définissons $\underline{\underline{G}}$ par (2.4), et soit $\underline{\underline{G}}^X$ la filtration engendrée par X .

Il est clair que $\underline{\underline{G}}^X_t \subset \underline{\underline{G}}_t$. Par ailleurs $\int_0^t e^{-sh}.dZ_s = e^{-th}(X_t - X_0)$ est $\underline{\underline{G}}^X_t$-mesurable, donc Z est adapté à $\underline{G}^X$. Comme $\underline{F}$ est la filtration engendrée par Z, on en déduit que $\underline{\underline{F}}_t \subset \underline{\underline{G}}^X_t$, donc $\underline{\underline{G}}_t = \underline{\underline{F}}_t \vee \sigma(X_0) \subset \underline{\underline{G}}^X_t$: par suite, $\underline{G}^X = \underline{G}$. ∎

(2.5) REMARQUES : 1) On peut montrer bien mieux que cette proposition; notamment le fait que si X est défini par (1.2) avec une variable aléatoire V quelconque, et si la loi de X_t ne dépend pas de t, alors on a la condition (i) ci-dessus et V est égal à $-\int_0^\infty e^{-sh}.dZ_s$; notamment aussi le fait que le processus X construit ci-dessus est <u>markovien homogène</u> (stationnaire, bien-sûr) par rapport à la filtration $\underline{G}$: ceci est démontré dans [2].

2) Une autre question se pose: est-ce-que le processus X ci-dessus est effectivement solution de l'équation (1.1) ? si on veut que (1.1) soit une équation stochastique "usuelle", il faut que la condition initiale V soit mesurable par rapport à la tribu initiale, ce qui conduit à remplacer la filtration $\underline{F}$ par la filtration $\underline{G}$ définie par (2.4). Le problème se ramène donc à vérifier que Z est une $\underline{G}$-semimartingale, auquel cas l'équation (1.1) a un sens et le processus X défini par (1.2) en est la solution. Ce problème est résolu par l'affirmative dans le cas uni-dimensionnel dans l'article [2]. ∎

Rappelons que la mesure H est la "mesure de Lévy" de Z, relativement à la filtration $\underline{F}$: voir (1.5). On rappelle que, si $\underline{\underline{P}}(\underline{F})$ désigne la tribu $\underline{F}$-prévisible de $\Omega\times\mathbb{R}_+$, pour toute fonction $\underline{\underline{P}}(\underline{F})\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}^d)$-mesurable positive W sur $\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ on a

$$(2.6)\qquad E\Big[\sum_{s\leq t} W(s,\Delta Z_s)\, 1_{\{\Delta Z_s\neq 0\}}\Big] = E\Big[\int_0^t ds \int H(dx)\, W(s,x)\Big] .$$

Par rapport à la filtration $\underline{G}$, le processus continu à droite et limité à gauche X, qui est $\underline{G}$-adapté, admet aussi une mesure de Lévy $\underline{G}$-prévisible $\nu(\omega;dt\times dx)$, caractérisée par la propriété suivante: pour toute fonction $\underline{\underline{P}}(\underline{G})\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}^d)$-mesurable positive W elle vérifie l'égalité

$$(2.7)\qquad E\Big[\sum_{s\leq t} W(s,\Delta X_s)\, 1_{\{\Delta X_s\neq 0\}}\Big] = E\Big[\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} \nu(ds\times dx)\, W(s,x)\Big] .$$

(2.8) PROPOSITION : <u>Soit les hypothèses de (2.2). Pour que la $\underline{G}$-mesure de Lévy de X se mette sous la forme $\nu(\omega;dt\times dx) = dt\times H'(dx)$, où H est une mesure positive sur $\mathbb{R}^d$, il faut et il suffit que $H = 0$, ce qui revient à dire que Z (ou X) est continu</u>.

<u>Démonstration</u>. D'après (2.3) on a $\Delta X = \Delta Z$, donc dans (2.7) on peut rem-

placer ΔX par ΔZ dans (2.7). La condition suffisante est alors évidente car si Z est continu on peut prendre $\nu=0$. Montrons la condition nécessaire. Soit η la loi de V. Soit A un borélien de $\mathbb{R}^d$ ne contenant pas 0 et tel que $H(A)<\infty$. La formule (2.7) écrite pour $W(\omega,s,x) = 1_A(x)\, 1_B(V(\omega))$ entraine que pour tout borélien B on a

$$E[1_B(V) \textstyle\sum_{s\leq t} 1_A(\Delta Z_s)] = t\, H'(A)\, \eta(B). \tag{2.9}$$

Soit $V_s = -\int_s^\infty e^{-rh}.dZ_r$; soit $T_0=0$ et $T_{n+1}=\inf(t>T_n : \Delta Z_t \in A)$. On a $V = V_{T_n-} + e^{-T_n h}(-\Delta Z_{T_n} + X_{T_n})$ d'après (2.3) si $T_n<\infty$, et (T_n) croit vers $+\infty$, chaque T_n étant p.s. fini. D'après (2.9), on a

$$\begin{aligned} t\, H'(A)\, \eta(B) &= E[\textstyle\sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n\leq t\}} 1_B(V)] \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 1} E[1_{\{T_n\leq t\}} 1_B(V_{T_n-} + e^{-T_n h}(-\Delta Z_{T_n} + X_{T_n}))] \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 1} \int \eta(dz)\, E[1_{\{T_n\leq t\}} 1_B(V_{T_n-} + e^{-T_n h}(-\Delta Z_{T_n} + z))] \end{aligned}$$

car X_{T_n} est indépendante de $\underline{\underline{F}}_{T_n}$ et de loi η d'après (2.3). Soit alors $W_z(\omega,s,x) = 1_B(V_{s-}(\omega) + e^{-sh}(-x+z))\, 1_A(x)$: cette fonction est $\underline{\underline{P}}(\underline{\underline{F}})\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}^d)$-mesurable positive, donc (2.6) entraine:

$$\begin{aligned} t\, H'(A)\, \eta(B) &= \int \eta(dz)\, E[\textstyle\sum_{s\leq t} W_z(s,\Delta Z_s)] \\ &= \int \eta(dz)\, E[\int_0^t ds \int H(dx)\, W_z(s,x)] \\ &= \int_0^t ds \int_A H(dx) \int \eta(dz)\, E[1_B(V_s + e^{-sh}(z-x))]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Par ailleurs, pour toute fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^d$ et tout $s\geq 0$ on a

$$\eta(f) = E[f(V)] = E[f(V_s + e^{-sh}(X_s))] = \int \eta(dz) E[f(V_s + e^{-sh}(z))]$$

car X_s est indépendant de $\underline{\underline{F}}_s$ et de loi η. En remplaçant dans (2.10) avec $f(z) = 1_B(z - e^{-sh}(x))$, on obtient

$$\int_0^t ds \int_A H'(dx) \int_B \eta(dz) = \int_0^t ds \int_A H(dx) \int \eta(dz)\, 1_B(z - e^{-sh}(x)).$$

En prenant d'abord $B=\mathbb{R}^d$, on en déduit que $H'(A)=H(A)$ pour tout A, donc $H'=H$. On en déduit ensuite que pour $ds\times H(dx)$-presque tout (s,x),

$$\int \eta(dz)\, 1_B(z - e^{-sh}(x)) = \eta(B) \qquad \forall B \in \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}^d).$$

Donc η est invariante par la translation $-e^{-sh}(x)$: ce n'est possible pour une probabilité qu'à condition que $e^{-sh}(x)=0$, donc si H ne charge que 0, donc si $H=0$. ∎

§3. Démonstration du théorème (1.6).

Commençons par démontrer une partie de la condition nécessaire. On suppose que les valeurs propres de h ont toutes leur partie réelle strictement négative.

(3.1) LEMME : Si l'équation (1.1) est réversible, le processus Z est continu.

Démonstration. Supposons (1.1) réversible, et considérons la solution X stationnaire (pour laquelle $X_0 = V$ suit la loi stationnaire η). Nous allons faire un retournement du temps à un temps fixe T. Soit $t \leq T$ et

$$\hat{X}_t = X_{T-t} , \qquad \hat{Z}_t = Z_{T-t} - Z_T .$$

On a $X_T = e^{Th}(V + \int_0^T e^{-sh}.dZ_s)$ et $X_{T-t} = e^{(T-t)h}(V + \int_0^{T-t} e^{-sh}.dZ_s)$, donc

$$X_{T-t} = e^{-th} (X_T - \int_{T-t}^T e^{(T-r)h}.dZ_r) .$$

Un calcul simple, utilisant les sommes de Riemann car l'intégrand est continu, permet de montrer que

$$-\int_{T-t}^T e^{(T-r)h}.dZ_r = \int_0^t e^{sh}.d\hat{Z}_s ,$$

la seconde intégrale ayant aussi un sens car $(\hat{Z}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est encore un PAIS. Finalement, on a

$$\hat{X}_t = e^{-th} (\hat{X}_0 + \int_0^t e^{sh}.d\hat{Z}_s) \tag{3.2}$$

pour tout $t \leq T$. On peut toujours prolonger $\hat{Z}$ au delà de T de sorte que ce soit un PAIS indicé par $\mathbb{R}_+$, et on étend $\hat{X}_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par la formule (3.2): ainsi, $\hat{X}$ est un processus donné par l'équation (1.2), avec $\hat{Z}$ et $-h$ au lieu de Z et h, et avec $\hat{V} = \hat{X}_0$: en particulier, $-h$ vérifie (2.1). De plus, la loi de $\hat{X}_t$ est la loi stationnaire η pour tout $t \leq T$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ comme on le voit de proche en proche sur l'équation (3.2): en effet, on a $\hat{X}_{T+t} = e^{-th}(\hat{X}_T + \int_T^{T+t} e^{sh}.d\hat{Z}_s)$ si $t \leq T$, et $\hat{X}_T$ suit la loi η, donc $\hat{X}_t$ suit la loi η pour tout $t \in [T,2T]$, et ainsi de suite...

Comme $e^{th} \longrightarrow 0$ quand $t \uparrow \infty$, les variables $e^{th}(\hat{X}_t)$ convergent en loi, donc en probabilité, vers 0. Par suite $\hat{X}_0 + \int_0^t e^{sh}.d\hat{Z}_s$ converge vers 0 en probabilité, ce qui implique que

$$\hat{X}_0 = \hat{V} := -\int_0^\infty e^{sh}.d\hat{Z}_s$$

(cette intégrale a bien un sens, car la stationnarité implique qu'on ait la condition (2.2,i)). Autrement dit, le processus $\hat{X}$ est le processus construit en (2.2), avec $-h$ et $\hat{Z}$: d'après la proposition (2.8), le système de Lévy de X par rapport à sa filtration propre ne peut pas se mettre sous la forme $ds \times H'(dx)$, à moins que $H' = 0$, auquel cas $\hat{X}$ est continu.

Mais l'hypothèse de réversibilité implique que les processus X et $\hat{X}$ ont même loi, donc aussi même systèmes de Lévy (par rapport à leurs filtrations propres). Comme $\Delta X = \Delta Z$, le système de Lévy de X est $dt \times H(dx)$, et d'après ce qui précède ce n'est possible que si $H = 0$, donc si Z est continu.∎

Etant donné ce résultat, dans la démonstration du théorème (1.6) on peut supposer que $H = 0$. Etant donnée la condition sur les valeurs propres de h , l'opérateur $\tilde{C} = \int_0^\infty e^{sh}\, C\, e^{sh}\, ds$ est bien défini, et de même $\int_0^\infty e^{sh}(b)\, ds = -h^{-1}(b)$. D'après le théorème (3.1) de [1], l'unique probabilité invariante η admet la fonction caractéristique $e^{\psi(u)}$ avec

$$\psi(u) = \int_0^\infty \xi(e^{sh^*}u)\, ds = -i\langle u, h^{-1}(b)\rangle - \frac{1}{2}\langle u, \tilde{C}u\rangle$$

et en particulier η est gaussienne. Il suffit alors d'appliquer la proposition (5.2) de [1] pour obtenir que l'équation est réversible si et seulement si l'opérateur $h\tilde{C}$ est auto-adjoint.

BIBLIOGRAPHIE

1 J.B. GRAVEREAUX : Probabilités de Lévy sur $\mathbb{R}^d$ et équations différentielles stochastiques linéaires. Dans ce volume.

2 J. JACOD : Grossissement de filtration et processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé. A paraitre.

3 Z.J. JUREK : An integral representation of operator-selfdecomposable random variables. Bull. Ac. Polonaise des Sc. XXX, 7-8, pp385-393, 1982.