PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

PIERRE CRÉPEL

Les rapports d'une théorie mathématique à son époque

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1981, fascicule 2
« Séminaire d'histoire des mathématiques au XXe siècle », , exp. n° 1, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1981___2_A1_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Les rapports d'une théorie mathématique à son époque

(Indépendance et dépendance en probabilités au tournant du 20^{e} siècle)

(Pierre Crépel)

Introduction

Le développement d'un aspect des mathématiques n'est ni linéaire, ni indépendant de la vie sociale: une nouvelle théorie ne peut voir le jour que lorsque les problèmes qui y sont liés "apparaissent dans des domaines variés de l'activité humaine et seulement lorsque le besoin de les résoudre devient plus pressant parce qu'il met en jeu les intérêts d'un grand nombre d'individus" (1). Le "calcul des probabilités" n'échappe pas à cette loi très générale.

Selon l'expression d'E. Coumet, la théorie (mathématique) du hasard n'est pas née par hasard (2): sa construction, au milieu du 17^{e} siècle, par Pascal, Fermat et Huygens, est liée à la naissance de la bourgeoisie et du système capitaliste, non seulement dans ses aspects économiques (transactions monétaires, assurances...), mais, plus généralement, dans son mouvement global (juridique, religieux, philosophique...).

Apparemment limité à ses débuts aux jeux de hasard, le calcul des probabilités a ensuite renouvelé ses résultats (notamment avec la loi des grands nombres de J. Bernoulli au début du 18^{e} siècle) , ses méthodes (en utilisant plus à fond l'analyse mathématique dans un contexte de rigueur grandissante chez Laplace, Tchbycheff ...), son champ d'applications (la seconde moitié du 19^{e} siècle le voyant s'introduire dans les sciences "exactes" comme la physique et la biologie).

De nombreux auteurs, aux conceptions d'ailleurs fort différentes, ou même opposées, ont étudié avec quelque détail cette histoire et ses rapports avec la science et la société. Par contre, les bouleversements qui ont marqué le calcul des probabilités aux environs de 1900 ont encore assez peu retenu l'attention (*) Nous voudrions, dans cet article accessible sans connaissances mathématiques particulières, élucider, à partir de l'évolution des concepts d'indépendance et de dépendance, quelques unes des relations entre la théorie mathématique du hasard et le mouvement social dans la période 1880-1910.

I. Conception mécaniste du monde, hasard et probabilités

a) La conception mécaniste

La Renaissance, mouvement complexe, scientifique et technique, artistique et philosophique, marque un changement dans les forces productives appelant une nouvelle organisation de la société : le système capitaliste.

La mécanique, en particulier à la suite de Galilée et de Newton, fait un progrès considérable qui, jusqu'à son apogée au 19^{e} siècle, domine toutes les sciences. Comme le dit très clairement le physicien allemand

---

(*) Parmi les exceptions notables, il y a bien sûr l'Histoire Générale des Sciences (22), où l'on trouvera de nombreux renseignements complémentaires de ce travail.

Helmholtz :

"Nous arrivons finalement à découvrir que le problème de la science physique consiste à ramener les phénomènes naturels à des forces invariables d'attraction et de répulsion, dont l'intensité dépend entièrement de la distance. La solution de ce problème est la condition d'une intelligence complète de la nature (...) Et sa mission sera achevée au moment où la réduction des phénomènes naturels à des forces simples sera complète et la preuve fournie que cette réduction est la seule dont les phénomènes soient capables" (3)

Jusqu'à la fin du 19ᵉ siècle, le rêve général est de construire <u>toute</u> science (y compris la chimie, les sciences de la vie...) sur le modèle de la mécanique: l'efficacité de la mécanique newtonienne, sa simplicité et sa "propreté" mathématique, l'incapacité des moyens de mesure relativement peu précis à mettre en évidence des phénomènes ne rentrant pas dans ce cadre, font de la conception mécaniste du monde un édifice remarquablement adapté à cette époque. Tout autre vision des choses est alors impensable.

Les bases philosophiques apparaissent donc bien assurées: l'espace est immuable; le temps, indépendant de l'espace, s'écoule linéairement; les objets, tous bien localisés, ont une position et une vitesse déterminées; chaque effet a une cause; etc.

" La trajectoire future d'un corps en mouvement peut être prévue et celle du passé déterminée si l'on connaît sa condition présente et les forces qui agissent sur lui" (3)

Le matérialisme français (mécaniste) codifie ce point de vue. En particulier, vers 1800, Laplace , savant, philosophe, auteur d'une "Théorie analytique des probabilités", développe une vue entièrement déterministe du monde: le hasard représente seulement l'expression de notre ignorance: " Tout phénomène, si minime qu'il soit, a une cause, et un esprit infiniment puissant, infiniment bien informé des lois de la nature, aurait pu le prévoir dès le commencement des siècles" (4)

Comme variante à cette conception, le hasard est considéré comme la négation brutale de la causalité et du déterminisme.

Certes, A. Cournot propose d'autres idées: un événement est dû au hasard quand il est au point de rencontre de deux "séries causales indépendantes". Mais qu'est-ce que l'indépendance ? Cela lui permet danc naturellement d'envisager des phénomènes aléatoires dans les sciences "exactes", ce qui est très nouveau pour l'époque. Malheureusement, ses réflexions ne trouvent guère d'écho, et le cadre de Laplace fera autorité dans la pratique scientifique pendant tout le 19ᵉ siècle.

Le calcul des probabilités, modélisation mathématique des phénomènes attribués au hasard, voit ainsi son champ d'applications réduit aux sciences humaines, ou à des questions dont l'approche scientifique semble (définitivement ou provisoirement) inaccessible, trop compliquée. Cette discipline connaît même en France une disgrâce officielle au milieu du 19ᵉ , avec Auguste Comte, Cauchy

b) <u>Remises en cause</u>

De tels principes philosophiques restrictifs n'en sont pas moins générateurs de progrès, pendant tout une période.

Pourtant le mécanisme a des ratés. En physique, des expériences de plus en plus nombreuses ébranlent ce corps de doctrine (3) ; les sciences d'observations, qui se développent très rapidement au 19ᵉ siècle, accumulent des masses de données variées et considérables: comment démêler les relations qu'elles ont entre elles ? La pression du réel invite donc les scientifiques et les philosophes de la fin du siècle à affiner leurs idées sur le hasard et le déterminisme : on admet de plus en plus clairement la possibilité d'un "mariage" entre les aspects déterministes et les aspects aléatoires, mais cette unité est conçue de manière non dialectique : il s'agit seulement d'une juxtaposition, d'un mélange ou d'une position intermédiaire:

- Par exemple, l'assureur et statisticien français E. Dormoy, qui partage les vues de Laplace, distingue trois catégories d'événements : ceux dont les causes sont complètement connues, ceux dont les causes sont complètement inconnues (le hasard véritable !), enfin ceux (les plus nombreux) dont les causes sont partiellement connues (6)

- Pour d'autres, c'est l'occasion d'une réaction violente contre le matérialisme français, en fait contre le matérialisme en général. Le statisticien anglais K. Pearson, disciple de Mach, en est l'exemple le plus clair:

" Si la variation de la cause ne produit aucun effet sur le phénomène, nous sommes dans le cas d'indépendance absolue; si nous constatons que la cause a fait varier complètement et seule le phénomène, nous dirons qu'il y avait dépendance absolue. Une pareille dépendance absolue à l'égard d'une cause mesurable unique est certainement l'exception, si même elle se présente jamais quand l'observation est suffisamment précise. Elle correspondrait à une limite conceptuelle - dont l'existence réelle est très douteuse. Mais entre ces deux limites, indépendance absolue et dépendance absolue, tous les degrés d'association peuvent se rencontrer".

Le "concept de corrélation [concept statistique qui sera examiné plus loin] entre deux événements embrassant toute relation, depuis l'indépendance absolue jusqu'à la dépendance complète forme la catégorie la plus vaste par laquelle nous ayons à remplacer la vieille idée de causation".

Il ajoute même: " Le résumé scientifique définitif, ou la description de la relation entre deux choses, peut toujours être ainsi présenté sous forme d'un tableau de contingence" (7). Et il en déduit que la réalité objective et la causalité n'existent pas.

On notera au passage à quel point Pearson a du mal à prendre quelque distance par rapport à ses préoccupations scientifiques (classification des espèces...)

- Poincaré, qui est philosophiquement proche de Pearson, mais davantage porté sur la physique, note deux sortes de phénomènes relevant du hasard: ceux qui ont des causes "trop compliquées et trop nombreuses", ceux pour lesquels de petites variations des causes produisent de grandes variations d'effets (8).

Il suggère une troisième manière de concevoir le hasard: quand "des circonstances qui, au premier abord, semblaient complètement étrangères au fait prévu ...viennent contre toute prévision à jouer un rôle important" . Mais alors que certains voient dans le caractère externe des causes la question centrale du hasard, Poincaré estime que cette conception se ramène à l'une des deux premières, et la laisse donc de côté.

- Pour une autre école de pensée, issue notamment du physiologiste et philosophe allemand Fechner, ce qui caractérise le hasard c'est de régir les phénomènes collectifs par l'intermédiaire de la loi des grands nombres, alors que les phénomènes individuels sont soumis à des lois déterministes du type de celles de la mécanique. De telles idées seront reformulées dans les années 20 par von Mises, servant de base au positivisme objectiviste.

Bref, comme le reconnaît lui-même Poincaré, en 1900, c'est le grand désarroi quand il s'agit de définir le hasard: la conception de Laplace semble dépassée, mais comment la rectifier?

c) Hegel et Engels, sur le hasard

Près d'un siècle plus tôt, Hegel avait déjà une conception radicalement différente du hasard: "(...) ni le contingent ni le possible n'existent en-et-pour-soi, mais (...) chacun d'eux a sa véritable réflexion-sur-soi dans l'autre (...)" (9)

Entre 1875 et 1890, Engels approuve et précise les idées de Hegel sur le hasard et la nécessité. Il en intègre un certain nombre dans le cadre du matérialisme, mais 1°) l'essentiel se trouve dans "Dialectique de la Nature" qui n'est publié qu'en 1925 , 2°) Engels n'écrit rien (semble-t-il) sur le calcul des probabilités et ses liens avec les problèmes du hasard.

En gros, pour lui, la nécessité détermine la principale orientation, la tendance de développement. Le hasard dans chaque processus pris à part, complète la nécessité par divers traits uniques en leur genre et de ce fait il engendre la forme dans laquelle cette nécessité se manifeste.

" Partout où le hasard semble jouer à la surface, il est toujours sous l'empire de lois internes cachées, et il ne s'agit que de les découvrir" (10)

Il y a donc là une base pour "réconcilier" et articuler des notions telles que hasard, contingence, causalité, nécessité ... Nous renvoyons pour cela à deux ouvrages dont nous partageons les conclusions essentielles, celui de E. Bitsakis (11) et celui de J. Bonitzer (12). Contentons-nous d'en citer quelques unes:

" Le hasard n'est pas la négation de la causalité et du déterminisme, mais l'expression de la richesse des déterminations de l'être, dans les conditions de sa réalisation" (11)

" Il n'y a pas de hasard purement en soi, indépendamment de tout 'point de vue' ", de toute pratique sociale; "(...) tout changement dans l'ignorance ou la connaissance du sujet ne fait que traduire un simple changement du phénomène objectif en question: à savoir d'une part le dispositif de mesure mis en oeuvre, d'autre part les compensations aléatoires dans une certaine série d'épreuves" (12)

d) Hasard et théorie mathématique des probabilités

Quelle relation y a-t-il entre hasard et "calcul des probabilités" ? En 1900, cette question, pourtant fondamentale, est en général purement et simplement oubliée ou, au mieux, traitée dans la confusion. Tout se passe comme si l'on admettait une adéquation parfaite du modèle mathématique ("le" calcul des probabilités) aux phénomènes réels (naturels et sociaux) et au concept culturel de hasard. On définit la probabilité pour qu'un événement arrive (par exemple, tirer un as lors du jet d'un dé) comme le rapport du nombre des cas favorables (ici 1) au nombre des cas possibles (ici 6, donc dans notre exemple la probabilité est 1/6 ou "une chance sur 6"), mais sans préciser clairement qu'en faisant ainsi abstraction du phénomène lui-même (ici, le jet d'un dé dans certaines circonstances, etc.) et en remplaçant toutes les données par quelques nombres, on appauvrit fondamentalement ce phénomène, on en néglige de nombreux aspects (entre autres, sociaux) pour n'en garder qu'un seul: une règle du jeu schématisée.

De telles remarques, élémentaires, sont importantes pour notre objet: une théorie mathématique, si efficace et si bien adaptée soit elle, est toujours provisoire : on finit par trouver des cas qui nécessitent son élargissement. C'est, comme on va le voir, ce qui arrive au calcul des probabilités en 1900; et des simplifications philosophiques abusives, anodines en période "calme", peuvent constituer des blocages réels lorsque le mouvement scientifique et social pousse à des mutations rapides. D'ailleurs la théorie classique des probabilités (y compris sa version moderne) apparaît de plus en plus aujourd'hui comme une modélisation mathématique parmi d'autres possibles mais,pour le moment,moins efficaces: c'est une approximation, pour une large part additive et adaptée à la notion mathématique de limite(telle qu'elle s'est développée dans la seconde moitié du 19e siècle) des phénomènes "aléatoires", c'est-à-dire liés au hasard; il existe maintenant d'autres théories plus ou moins embryonnaires qui montrent bien le caractère relatif de tous ces modèles, on peut aussi signaler d'autres branches mathématiques voisines (théorie ergodique, théorie des jeux, ensemble flous ...) qui suggèrent qu'un traitement quantitatif de l'incertain ne peut se réduire à un seul cadre axiomatique.

Ceci touche bien sûr aux problèmes fondamentaux de la théorie de la connaissance: quand K. Pearson, qui a beaucoup et remarquablement contribué à donner une base mathématique solide aux théories de l'évolution et de l'hérédité, essaie (comme nous l'avons vu plus haut) de donner également une base mathématique à l'empiriocriticisme et au positivisme logique, par l'intermédiaire de l'"association" ou de la "corrélation", il caresse naïvement un espoir vain: il se contente de remplacer un schéma trop "schématique", voire partiellement périmé, par un autre schéma, certes plus fin, mais qui ne pourra pas davantage épuiser les phénomènes: ceux-ci, en effet, ne se réduiront jamais à un nombre, ni même à une famille de nombres (coefficients de corrélation ...): sa tentative philosophique se solde donc par un échec.

La seule manière de s'en sortir est de reconnaître que le "caractère inéliminable de comportements empiriques (n'est) nullement inconciliable avec l'idée d'un progrès indéfini de la rationalité du travail scientifique": "la connaissance est à la fois connaissance réelle du monde et connaissance approximative. Dans tout modèle théorique de la réalité subsiste un écart à la réalité et cet écart n'est pas toujours dû à une ignorance inéliminable en soi (...il s'agit en quelque sorte) d'un bruit de fond où se mélangent tous les écarts entre le modèle et la réalité. Il ne sert à rien d'éliminer une erreur aléatoire qui se perd dans le bruit de fond et (...) cette balance entre les besoins des pratiques en cause et le coût de toutes les espèces de connaissances supplémentaires qui permettraient de les satisfaire, va déterminer les niveaux de risques d'erreurs aléatoires acceptables" (12)

Dit autrement, "les lois probabilistes sont objectives en ce sens qu'elles décrivent des phénomènes objectifs, indépendants de notre connaissance,et de nos formalismes mathématiques Mais il n'en reste pas moins vrai qu'elles n'expriment qu'un aspect seulement de l'interconnexion (...)" (11). Ce ne sont donc pas des lois exhaustives.

e) Indépendance et dépendance en probabilités

Il y a, dans les ouvrages du dix-neuvième siècle, une confusion permanente entre:

- le mot "indépendance" dans le langage courant
- le mot "indépendance" dans la théorie mathématique des probabilités.

Ainsi la plupart des traités de calcul des probabilités, jusqu'au début du 20e siècle, définissent-ils, à quelques variantes près, l'indépendance de deux événements de la manière suivante:

" Deux événements A et B sont dits indépendants si l'arrivée du premier n'a pas d'influence sur l'arrivée du second".

Et on en "déduit", en examinant les nombres des cas favorables, que la probabilité pour que A et B se produisent tous les deux est le produit des probabilités d'arrivée de chacun de ces deux événements: c'est ce qu'on appelle la "règle du produit" ou le "théorème des probabilités composées":

Probabilité (A et B) = Probabilité (A) x Probabilité (B).

La tendance s'inverse petit à petit au cours du 20^e siècle, vers une définition axiomatique de l'indépendance. Par exemple, dans son ouvrage-clé de 1933, Kolmogoroff préfère prendre la "règle du produit" comme <u>définition</u> de l'indépendance dans la théorie des probabilités, ajoutant fort justement ceci:

" L'un des problèmes les plus importants dans la philosophie des sciences de la nature est (en plus de celui bien connu de considérer l'essence de la notion de probabilité elle-même) de rendre précises les raisons qui rendront possible de considérer comme indépendants des événements réels donnés" (13)

A défaut d'être résolu, le problème est au moins honnêtement posé. A notre avis, la seule manière de le résoudre est de se placer dans le cadre philosophique suivant:

" La notion d'indépendance en probabilité n'est qu'un cas particulier d'une notion générale d'indépendance qu'on trouve sous d'autres formes dans d'autres sciences: systèmes isolés en thermodynamique ou en mécanique [, indépendance linéaire en algèbre, orthogonalité en analyse] , etc... La notion générale d'indépendance, et les concepts qui la traduisent en termes scientifiques correspondent à la contrainte imposée à toute science, de découper son objet en faisant abstraction des influences extérieures qui s'exercent sur lui" . Cette "indépendance est <u>relative à un point de vue</u>, et non absolue" (12)

En d'autres termes, le "théorème des probabilités composées" correspond là aussi à <u>une</u> modélisation mathématique de cette idée générale d'indépendance. Rien que dans des cadres voisins, il en existe d'autres, par exemple celle plus grossière de <u>décorrélation</u> (ou non-corrélation). T. Fine fait un tour d'horizon d'autres modélisations possibles, plus "qualitatives" ou plus "empiriques" ...(14). Mais l'on doit reconnaître que, de la naissance du calcul des probabilités jusqu'au milieu du 20^e siècle, la notion classique d'indépendance, exprimée par la formule multiplicative:

Probabilité(A et B) = Probabilité(A) x Probabilité(B),

répond efficacement à la quasi-totalité des besoins. Pourquoi? Parce qu'elle a précisément été introduite, à l'occasion de problèmes élémentaires concrets, pour rendre compte de cette idée d'indépendance; parce que, grâce à sa simplicité, elle est adaptée à des techniques mathématiques très diverses; enfin, parce que le niveau de complexité des problèmes à aborder est encore moyen. Par contre, avec les ordinateurs, la physique des hautes énergies, la cybernétique ..., le caractère grossier de ce modèle mathématique d'indépendance se manifestera naturellement (mais ces craquements dans l'édifice n'empêcheront pas la formule traditionnelle de rendre encore longtemps d'utiles services).

II. <u>Présentation mathématique simple du problème de la dépendance en probabilité</u>

- Prenons <u>un exemple simple</u>: nous jouons à pile ou face, n fois de suite, en misant à chaque fois 1 F sur pile .

Comme la pièce "ne se souvient pas de ce qu'elle a fait au coup précédent", on dit raisonnablement, de manière naïve, que deux événements portant sur deux jets différents sont indépendants, par exemple:

les événements: { pile tombe au premier coup (= je gagne 1 F au premier coup)
et { face tombe au second coup (= je perds 1 F au second coup)

sont indépendants.

Par contre, si l'on considère le gain total (cumulé) à l'issue du n^e coup, il est évident qu'il est égal au gain cumulé à l'issue du $(n-1)^e$ coup augmenté ou diminué de 1 F (selon qu'on a tiré pile ou face au n^e coup): le gain cumulé à l'issue du n^e coup dépend donc du gain cumulé à l'issue du $(n-1)^e$!

Les problèmes les plus simples mettent donc en évidence des événements indépendants et des événements qui ne le sont pas. Ces remarques ont été faites dès le début du calcul des probabilités, et l'on a même donné, par une formule, la probabilité pour que deux événements dépendants soient conjointement réalisés. Laplace l'exprime ainsi:

" Si les événements simples sont liés entre eux de manière que la supposition de l'arrivée du premier influe sur la probabilité de l'arrivée du second, on aura la probabilité de l'événement composé en déterminant: 1°) la probabilité du premier événement; 2°) la probabilité que, cet événement étant arrivé, le second aura lieu" et en faisant le produit.(4) Ceci peut se généraliser au cas de plusieurs événements sans difficulté.

Mais il s'agit toujours de problèmes relatifs à un nombre fini d'événements, et l'étude d'événements dépendants se ramène, dans ces cas, élémentairement et directement à faire des calculs sur d'autres événements indépendants.

Sur le fond, le problème suivant, dit de "probabilité des causes", résolu depuis le 18^e siècle par la "formule de Bayes", n'est pas différent:

Si un événement E peut être attribué à plusieurs causes C_1, C_2, C_3 ... et qu'on connaît 1°) les probabilités respectives que ces causes sont en jeu, 2°) les probabilités qu'elles donnent à E; calculer, lorsque l'événement E a lieu, la probabilité pour qu'il soit dû à la cause C_i .

Il ne s'agit que du problème "inverse" du précédent, et d'une simple variante mathématique, qu'on trouve exposée dans tous les manuels.

Tout se passe donc, au 19^e siècle, comme si le calcul des probabilités avait pour objet unique l'étude d'épreuves aléatoires recommençables indépendamment les unes des autres, autant de fois qu'on veut, et sans que l'ordre intervienne.

Les"théorèmes limites" (tels que

- la "loi des grands nombres" qui décrit le comportement moyen d'un phénomène dans le cas d'un très grand nombre d'épreuves,
- la "loi des erreurs" qui indique que les écarts autour de cette moyenne sont distribués selon une courbe "en cloche", dite de Laplace-Gauss)

ne peuvent alors guère être imaginés que dans le cas d'épreuves ou d'observations indépendantes. Cela n'est pas étonnant: la relative simplicité des problèmes abordés par les sciences, et des données à prendre en considération, le rôle prépondérant de la mécanique, l'espèce d'apartheid qui existe entre hasard et déterminisme, la coupure assez générale entre probabilités et statistique, un état des forces productives qui n'exige pas encore une étude serrée de l'évolution dans le temps de phénomènes complexes, et aussi des bases axiomatiques mal assurées des mathématiques: voilà qui rend toute théorie mathématique de la dépendance en probabilités hors de saison et même impensable.

Certes, de vagues anticipations ont lieu, dans la première moitié du 19^e siècle, chez Laplace, Poisson, Bienaymé (avec des théorèmes limites pour tirages de boules dans une urne, sans remise), chez Gauss, Bravais (pour l'idée de corrélation). Mais elles ne peuvent déboucher durablement et, en tout cas, pas sur une théorie formalisée et cohérente. Poisson et Maxwell, même, ont commis des erreurs (qu'on qualifierait aujourd'hui de grossières) en appliquant à des cas dépendants des lois limites valables sous des hypothèses d'indépendance.

- Le cas du mathématicien russe P.Tchebycheff est,à ce sujet,frappant: ses travaux en probabilités (et dans d'autres domaines des mathématiques) entre 1850 et 1890 représentent une avancée remarquable: démontrant les grands théorèmes limites avec rigueur dans un cadre général, il place le calcul des probabilités au rang d'une théorie mathématique. Mais, fait apparemment singulier, (alors qu'il ne fait aucune application indue de ses théorèmes à des cas dépendants) il oublie de dire explicitement que les quantités aléatoires étudiées sont indépendantes. Il semble que, pour lui, le problème de la dépendance soit dénué de sens et d'intérêt.

Cela peut, vraisemblablement, s'expliquer ainsi: l'intelligentsia russe possède des hommes hors du commun, mais le pays est assez arriéré; diverses disciplines scientifiques (par exemple la physique et la biologie) sont très en retard. Tchebycheff n'est guère en contact avec les idées de Maxwell et Boltzmann en mécanique statistique, ni avec celles de Darwin concernant l'évolution . Or nous verrons plus précisément que ces idées ont joué un rôle considérable pour "appeler" une théorie mathématique de la dépendance en probabilités. Au contraire, comme le montre de manière saisissante le compte-rendu de son voyage en France, ce sont les questions de mécanique traditionnelle qui intéressent au plus haut point Tchebycheff (15)

- Il y a beaucoup d'autres changements "mathématiques" dans le calcul des probabilités aux alentours de 1900,cf (12), (22) ...

Signalons rapidement, pour situer le terrain, et sans ordre ni chronologique ni d'importance:

- le besoin et l'élaboration d'une axiomatique (reposant sur la théorie des ensembles) donnant des fondements moins vaseux à la notion d'équiprobabilité ou aux événements définis à partir d'un nombre infini d'épreuves,
- le rapprochement entre la théorie de la mesure, l'intégration et le calcul des probabilités,
- l'étude des "variables aléatoires" (et non plus seulement des événements) permettant d'exprimer des mesures dépendant du hasard,
- une plus grande attention portée au type de convergence, dans les théorèmes limites,
- l'introduction rigoureuse d'événements de probabilité nulle, au lieu de considérations assez vagues sur les événements de probabilité très petite,

...

Toutes ces transformations, qui traduisent une mathématisation plus poussée du calcul des probabilités, ne sont certes pas l'objet de cet article; mais il est nécessaire de souligner qu'elles ont des rapports étroits avec les problèmes de dépendance.

III. Naissance d'une théorie de la dépendance en probabilités

Des remarques philosophiques générales nous ont suggéré qu'en ne s'écartant pas de l'étude des événements indépendants, le calcul des probabilités ne peut répondre aux problèmes qui surgissent à la fin du 19^e^ siècle. Un renouvellement profond de la théorie est nécessaire, nous allons voir maintenant plus en détail comment il s'opère: cela va nous amener directement à considérer à la fois certains aspects des sciences "exactes" (astronomie, physique, biologie...), des problèmes économiques et sociaux divers, autant que des questions mathématiques issues ou non du calcul des probabilités.

a) Astronomie, théorie des erreurs

Cournot écrit en 1834, dans l'appendice d'un Traité d'Astronomie de Herschel:

" Jusqu'à présent on n'a guère appliqué le calcul des chances qu'à des problèmes sur les jeux, problèmes purement spéculatifs ou d'un médiocre intérêt pratique, et à des faits de statistique sociale (...). On s'est peu occupé de l'adapter à des questions de philosophie naturelle (...). Cependant s'il est une branche de la philosophie naturelle à laquelle ce genre de recherches puisse s'approprier avec chance de succès, c'est assurément l'astronomie (...)" (16)

Il y a au moins à cela deux raisons"naturelles":

- En raison de l'éloignement des objets considérés, et malgré les progrès des instruments, les observations sont nécessairement imprécises: il faut donc construire une théorie des erreurs. Une question est alors sous-jacente : quand les différences entre une loi théorique et une série d'expériences peuvent-elles être attribuées aux fluctuations du hasard ? Nous verrons plus loin que la loi des erreurs ne répond qu'imparfaitement à ces interrogations; d'ailleurs jusqu'au début du 20^e^ siècle, les liens entre probabilités, statistique et théorie des erreurs seront loin d'être clairs.

- Au fur et à mesure que les instruments se perfectionnent, les objets considérés deviennent de plus en plus nombreux et leur étude individuelle impossible: c'est par exemple le cas pour les galaxies, les comètes, les astéroïdes ... Dans un article de 1819, Laplace pose déjà la question: les angles des orbes des comètes par rapport à l'écliptique sont-ils distribués uniformément ? Cournot commente ainsi: son résultat "équivaudra à répéter autant de fois le tirage au hasard de 30 orbites, <u>à moins que la loi des chances ne soit dépendante du temps</u>, et sujette à éprouver des variations périodiques et séculaires [souligné par nous]"; mais il ne semble pas pousser plus loin ses reflexions sur la dépendance.

Il faut attendre le dernier quart du 19^e^ siècle pour voir les relations entre l'astronomie et le calcul des probabilités arriver à une maturité nouvelle. A ce moment, les scientifiques posent et résolvent, à partir de préoccupations d'astronomie, des questions de dépendance en probabilités. Pour une large part, cela tourne autour du "problème des 3 corps" et des "perturbations périodiques et séculaires des planètes". De quoi s'agit-il ?

3 corps (par exemple: le Soleil, Jupiter et Saturne) s'attirent mutuellement selon les lois de la gravitation de Newton: tant que les observations étaient assez imprécises, on pouvait, par des approximations raisonnables, se ramener à deux problèmes distincts (ici: les mouvements

Soleil- Jupiter et Soleil- Saturne), donc aux lois de Képler. Par contre une étude plus fine est indispensable pour expliquer, par exemple, les perturbations mutuelles de Jupiter et de Saturne; on est alors conduit à des difficultés mathématiques insoupçonnées: quelle que soit l'exactitude des mesures faites pour déterminer les paramètres des équations à considérer, on ne peut savoir si la solution de ces équations est stable ou instable ! H. Poincaré en conclut à l'impossibilité de résoudre le problème des 3 corps avec les méthodes dont dispose l'analyse mathématique (17).

On touche,là aussi, à des inquiétudes physiques et philosophiques de la plus grande importance: faut-il prendre en considération d'autres phénomènes (thermodynamiques, magnétiques,...ou même encore inconnus ?), probablement beaucoup plus lents, que la loi de la gravitation ? En d'autres termes, "la loi de Newton peut-elle expliquer à elle seule tous les phénomènes astronomiques ":l'origine et la stabilité (ou non) du système solaire, etc ? Pour Poincaré, " le seul moyen de parvenir [à des éclaircissements] est de faire des observations aussi précises que possible, de les prolonger pendant de longues années ou même de longs siècles et de les comparer ensuite aux résultats du calcul" .

Toutes les grandes préoccupations probabilistes naissantes sont alors mises sur les tapis par les astronomes: quand peut-on dire que des événements sont également probables (tout spécialement lorsque le nombre des cas possibles est infini) ? sur quelles bases axiomatiques propres peut-on asseoir les probabilités ? si une équation laisse apparaître une infinité de solutions stables et une infinité de solutions instables, comment comparer le "nombre" de ces solutions, ne peut-on pas dire que la probabilité de l'un des cas est nulle, et si oui, en quel sens ?...

A partir de là, de premiers énoncés probabilistes de théorèmes d'arithmétique seront même donnés (18),(19), qui préfigurent des avancées considérables des mathématiques. L'article de Borel de 1909 (20), dont nous parlerons plus loin, sera au centre de ces thèmes et marquera, en même temps, une étape capitale pour la théorie de la dépendance,et pour les probabilités en général.

b) <u>Mécanique statistique, théorie cinétique des gaz, physique</u>

En 1827, le botaniste anglais Robert Brown observe, au microscope, que de petites particules en suspension dans de l'eau sont"animées d'un mouvement très vif et <u>parfaitement désordonné</u>" (21), dont les directions imprévisibles semblent dues au hasard. En germe, se trouve là l'idée de <u>trajectoire</u> d'un phénomène aléatoire; mais, bien sûr, en ce début de 19^{e} siècle, cela ne peut déboucher sur une théorie mathématique.

L'élaboration de la théorie cinétique des gaz et de la mécanique statistique, disons de 1850 à 1910, va permettre petit à petit de donner une explication de ce phénomène et de l'intégrer dans un cadre plus large où les probabilités jouent un grand rôle.

Ceci est exposé clairement dans de nombreux ouvrages (3),(21),(22),(23)... Un fluide est composé d'un nombre énorme de molécules qui se choquent selon des mouvements incessants, compliqués et désordonnés; il est hors de nos capacités de connaître exactement les positions et les vitesses de ces molécules à chaque instant, seule une connaissance <u>statistique</u> est possible.

Les problèmes de température, de diffusion de la chaleur,étant justement liés aux vitesses de ces molécules, sont résolus par des lois statistiques. Mais pourquoi la chaleur se diffuse-t-elle vers le froid,? pourquoi deux liquides se mélangent-ils spontanément, mais ne se séparent-ils pas spontanément ?... Il s'ensuit une réflexion sur l'irréversibilité, l'écoulement du temps, l'ordre et le désordre, l'évolution (nécessaire, ou seulement hautement probable ?) vers des états d'équilibre, etc.

On développe une vision probabiliste et statistique de nombreux aspects de la physique, mais ceci dans le cadre d'une coexistence pacifique entre la mécanique classique et les probabilités. L'idée dominante est toujours que, conformément aux lois de Newton, "la trajectoire future d'un corps en mouvement peut être prévue et celle du passé déterminée si l'on connaît sa condition présente et les forces qui agissent sur lui"; l'irruption des probabilités vient du fait qu'on ne peut connaître sa condition présente que statistiquement.

Pour obtenir une modélisation probabiliste correcte, il faut savoir si les molécules sont indépendantes entre elles, si les variations des vitesses, lors d'un intervalle de temps, sont indépendantes de ces variations lors d'un autre intervalle ... Mais ces questions ne sont pas clairement posées par Maxwell en 1860, qui commet même une erreur. Puis, les choses se font plus précises avec Boltzmann, Gibbs ... L'explication physique et mathématique du mouvement brownien est développée par beaucoup de physiciens: en 1905, "indépendamment" l'un de l'autre, Einstein et von Smoluchowski mettent en place une théorie quantitative calculant exactement la distribution statistique des vitesses des molécules.

L'idée que la variation du phénomène entre l'instant t et l'instant $t + \Delta t$ ne dépend pas de son état à l'instant $t - \Delta t$ est à la base de plus d'un raisonnement de la théorie cinétique des gaz; dit d'une autre façon, pour ces phénomènes, le futur (l'instant $t + \Delta t$) ne dépend de l'histoire du phénomène qu'au travers du présent (l'instant t); on exprime cela par la phrase suivante: le passé et le futur sont indépendants conditionnellement par rapport au présent. On peut ainsi étudier une large classe de quantités dépendantes en se ramenant (moins élémentairement) à l'indépendance: Markov et Poincaré élaboreront, à partir de là, une théorie mathématique qui permettra de changer le visage des probabilités au 20e siècle. C'est la théorie des"chaînes de Markov".

Toutefois on ressent chez Poincaré une certaine confusion à cet égard: s'agit-il d'une hypothèse physique, d'une hypothèse mathématique, d'un fait expérimental, cela peut-il être démontré ?

Vers 1910, d'autres domaines de la physique sont également"touchés" par les probabilités: les temps d'attente pour les communications téléphoniques avec les travaux d'Erlang, la désintégration radioactive avec Rutherford et Geiger (24). Ces études d'évolution conduisent à considérer la dépendance de quantités aléatoires.

En résumé, ce qui naît en ce début de siècle, c'est une théorie des "processus aléatoires", c'est-à-dire de l'évolution dans le temps de phénomènes où intervient le hasard, de leurs fluctuations et de leur acheminement vers des états d'équilibre, quand la durée du processus est assez longue : la recherche de théorèmes limites pour les quantités dépendantes est donc dans l'air.

c) L'argent, la politique ...

Le calcul des probabilités, dès ses débuts, a été lié aux questions d'argent et aux assurances, mais il ne s'agissait encore souvent que d'assurer les marchands et les capitalistes eux-mêmes; les études démographiques n'avaient qu'un caractère limité.

Ensuite, de plus en plus, la constitution d'économies de marché à l'échelle de nations, la mise sur pied de grandes armées (par exemple, la levée en masse), bref toute l'organisation politique et juridique du nouveau système, réclame la création d'une science ayant pour objet le groupement méthodique des faits sociaux selon des évaluations numériques: la statistique. L'époque de la Révolution Française en est une étape essentielle; on entrevoit alors que l'étude des phénomènes collectifs est lié à la fois à la statistique et au calcul des probabilités; cependant les problèmes ne sont pas encore assez mûrs pour permettre l'éclosion d'une statistique mathématique qui s'appuie à fond sur les probabilités.

Plus tard, des changements importants se dessinent avec le rôle nouveau des banques et le caractère de masse des assurances : une gestion probabiliste plus sérieuse de l'argent devient nécessaire; c'est ce que nous allons examiner .

- La fin du 19^e siècle voit se modifier profondément les conditions et l'organisation de la production: "le développement industriel [pose], d'une façon qu'il [est] de plus en plus impossible d'éviter, la question du mouvement" (25).

L'introduction de méthodes scientifiques diverses (et plus seulement de machines) dans l'industrie et l'agriculture, l'urbanisation accélérée, la révolution des transports, bouleversent en pratique les conceptions de distance, de temps, de vitesse: il suffit de penser à la prolifération des chemins de fer, à la bicyclette, aux débuts de l'automobile, puis de l'aviation, aux inventions du téléphone et de la T.S.F., à la mise en place des services météorologiques et à l'acceptation générale de la zone temps (méridien de Greenwich), à l'invention et à la diffusion de caisses enregistreuses, de machines à calculer commerciales, aux premiers pas du cinéma, à la généralisation des compétitions sportives ...

- L'ouverture d'une mine, la construction d'une voie ferrée ou d'une usine, la mise en chantier de grands travaux, exigent des masses importantes de capitaux et des crédits à long terme que seules les organisations bancaires et boursières des grands centres commerciaux d'Europe sont à même de fournir. Le capital s'organise en conséquence:

" les opérations [des banques] prennent une extension formidable, il en résulte qu'une poignée de monopolistes se subordonne les opérations commerciales et industrielles de la société capitaliste tout entière; elle peut, grâce aux liaisons bancaires, grâce aux comptes courants et à d'autres opérations financières, <u>connaître</u> tout d'abord <u>exactement</u> la situation de tels ou tels capitalistes, puis les contrôler, agir sur eux en élargissant ou en restreignant, en facilitant ou en entravant le crédit, et enfin <u>déterminer entièrement</u> leur sort (...)" (26)

Les dirigeants des banques ont besoin d'être "plus aptes à juger, plus compétents dans les questions d'ordre général de l'industrie et dans les questions spéciales touchant les diverses branches" (26)

Toutes ces modifications dans l'économie s'étendent sur le dernier quart du 19^e siècle, mais elles s'accélèrent brusquement dans tous les pays, malgré certaines disparités bien sûr, à partir de 1890.

A titre d'exemple, pour l'Allemagne, Jeidels date ainsi cette mutation:

" Les relations des entreprises industrielles avec leur nouvel objet, leurs nouvelles formes, leurs nouveaux organismes, c'est-à-dire avec les grandes banques présentant une organisation à la fois centralisée et décentralisée, ne sont guère antérieures, en tant que phénomène caractéristique de l'économie nationale, aux années 1890; on peut même en un sens faire remonter ce point de départ à l'année 1897, avec ses grandes 'fusions' d'entreprises qui introduisent pour la première fois la nouvelle forme d'organisation décentralisée pour des raisons de politique industrielle des banques. Et l'on peut même le faire remonter à une date encore plus récente, car c'est seulement la crise de 1900 qui a énormément accéléré le processus de concentration tant dans l'industrie que dans la banque et en a assuré le triomphe définitif, qui a fait pour la première fois de cette liaison avec l'industrie le véritable monopole des grosses banques, qui a rendu ces rapports notablement plus étroits et plus intensifs" (26)

On voit donc nettement qu'une étude quantitative plus poussée du capital et de son évolution devient nécessaire pour connaître et pour prévoir; mais ce mouvement du capital, aux aspects multiples et apparemment contradictoires ne peut être déterminé dans le détail, de manière mécanique: c'est bien un renouvellement des probabilités et des statistiques qui est exigé.

En 1900, le Français L. Bachelier établit une théorie mathématique de la spéculation. Pour cela, cinq ans avant Einstein et von Smoluchowski, il donne une définition mathématique du mouvement brownien, et découvre certaines de ses propriétés; ses démonstrations ne sont que suggérées, d'ailleurs les outils mathématiques de l'époque ne permettaient guère d'être plus rigoureux. Bachelier a conscience, jusqu'à la prétention, de l'originalité de ses thèses, qui seront en fait méprisées pendant fort longtemps. D'un point de vue mathématique, il est parfaitement lucide sur la place de l'indépendance dans son travail:

" les variations du cours qui peuvent se produire à un instant quelconque sont indépendantes des variations antérieures et du cours coté à cet instant. Il faut bien comprendre ce que signifie ce principe: il est évident qu'en réalité l'indépendance n'existe pas, mais, par suite de l'excessive complexité des causes qui entrent en jeu, tout se passe comme s'il y avait indépendance" (27)

La stabilité de la monnaie à cette époque invite à étudier de plus près les fluctuations aléatoires des cours; Bachelier insiste sur le fait que c'est la spéculation qui a introduit "d'une façon nécessaire la notion de temps et de continuité absolue, [qui ...] a donné l'idée du mouvement des probabilités, de leur rayonnement ...".

Il souligne enfin qu'un progrès essentiel dans les probabilités a consisté à passer du temps discret au temps continu, c'est-à-dire, en d'autres termes, à utiliser à plein les méthodes de l'analyse mathématique. En 1906, Bachelier étend son travail en se dégageant de l'hypothèse d'indépendance des variations des cours, et en la remplaçant par une hypothèse du type de celle de Markov: il ouvre ainsi une double piste en s'intéressant à l'évolution de phénomènes aléatoires qui, eux-mêmes, ne sont plus définis à partir de la stricte indépendance.

Il estime, à tort et à raison, être le premier à avoir considéré la dépendance "en dehors de quelques problèmes isolés, étudiés par Laplace"

- Avant les années 1880, le développement des assurances est relativement lent: il y a certes une diversification des "risques" assurés (transports maritimes, incendie, assurances-vie, retraites des fonctionnaires...), mais cela ne touche qu'une faible partie de la population.

Les caisses de retraites mutuelles sont déjà évoquées dans la première moitié du 19e siècle; des compagnies sont créées, mais il ne s'agit pas encore d'assurances ouvrières obligatoires s'étendant à une population très nombreuse. Un tournant a lieu dans les années 80.

Correspondant à un besoin évident de sécurité, les assurances ouvrières (retraite, maladie, accidents) prennent un essor très rapide en Allemagne et dans les pays nordiques, à la fin du siècle, et plus tard dans le reste de l'Europe. Pour les capitalistes, les gouvernements et les théoriciens, c'est le "remède" permettant d'endiguer la montée des luttes sociales tout en conservant le système sur le fond.

E. Dormoy, le plus célèbre des actuaires, statisticiens et probabilistes français, est très explicite à ce sujet: dans une brochure présentant un projet de caisse de retraite obligatoire en faveur des ouvriers, il commence par justifier longuement l'organisation de la société telle qu'elle est: l'ouvrier doit recevoir "la part fixe, <u>la moins avantageuse</u>" des rémunérations, le patron doit garder "la part aléatoire, celle dans laquelle se résument l'avenir et la fortune de l'entreprise". Ensuite, il constate que ce système laisse tout juste à l'ouvrier de quoi subsister et qu'il "s'achemine fatalement vers une vieillesse dénuée de ressources. Devenu vieux on ne le laisse certainement pas mourir de faim; mais <u>il impose de grandes charges à la société</u>, et n'en reste pas moins malheureux (...).

L'ouvrier a eu le tort de ne pas économiser pendant la période active de sa vie; <u>la perspective, de plus en plus rapprochée, d'une vieillesse misérable produit chez lui la haine et l'envie, amène l'antagonisme de classe, les grèves, les batailles sociales</u>".

C'est dans cet état d'esprit que Dormoy propose comme "remède" la création d'une caisse de retraites, et il ajoute en guise de commentaire et de conclusion: "Loin de se réjouir des désordres qui peuvent amener des révolutions sociales, [l'ouvrier] combattra ceux qui voudraient les faire naître. C'est là le point capital de la question et <u>l'objectif principal du projet</u>" (28) [souligné par nous]

On pourrait multiplier les citations analogues émanant des divers milieux dirigeants d'Europe. Les disparités dépendent beaucoup à la fois de l'ampleur de l'exploitation et de celle des luttes sociales dans le pays:

" En Allemagne, le Gouvernement impérial considérant surtout le moment même où se fait la règlementation et <u>ayant pour but, dans l'impossibilité où il se trouve d'enrayer le mouvement socialiste, de diriger ce mouvement</u>, a édicté une loi forte, une loi d'autorité absolue (...). C'est une solution qui ne peut convenir à des pays plus soucieux de leur indépendance et de leur dignité" (29) [idem]

L'Allemagne a alors une grande influence sur les pays nordiques; en outre, dans ces pays, l'espérance de vie des ouvriers est assez élevée, contrairement à ce qui se passe en Angleterre: on comprendra donc qu'une école "continentale" de statistiques (liée aux probabilistes français et russes) ait poussé plus avant les études démographiques et la théorie mathématique des assurances.

La généralisation et la diversification de ces assurances incitent naturellement à s'interroger sur l'indépendance des risques ou des accidents individuels. Comme le dit Dormoy:

"quand, dans une série d'épreuves, les causes qui l'amènent sont indépendantes entre elles d'une épreuve à l'autre, les écarts suivent une certaine loi régulière (...) .La réciproque est vraie (...).
Si, au contraire, la moyenne des écarts observés est différente de l'écart moyen calculé, nous pouvons affirmer que cette déviation est due à une réaction des épreuves les unes sur les autres; et suivant que la différence sera plus ou moins grande, et aura lieu dans un sens ou dans l'autre, nous pourrons même acquérir quelques notions sur la nature et sur l'importance de cette réaction" .(6)

Dormoy, Lexis et d'autres statisticiens "continentaux" créent alors un embryon de théorie visant à décider quand les fluctuations d'un phénomène sont dues au "pur" hasard ou non.

Toujours aux environs de 1880, les actuaires scandinaves J.P. Gram, T.N. Thiele et leurs élèves, dans leurs recherches de statistiques et sur les erreurs d'observations regardent avec attention les questions mathématiques d'indépendance linéaire, d'orthogonalité, assez directement liées à l'indépendance en probabilités.

Mais la rigueur et la précision ne sont pas les motivations des actuaires: E. Borel écrira plus tard:

" Il est inutile d'observer que, les Compagnies d'Assurances se proposant comme but légitime de réaliser des bénéfices, il n'y a pas pour elles d'inconvénient à utiliser des statistiques partiellement inexactes lorsqu'elles sont certaines que le signe des erreurs est tel que ces erreurs tendent à accroître et non à diminuer leurs bénéfices(...)" (30)

- Ce développement massif de l'épargne, des caisses de retraites, des assurances diverses, va dégager des capitaux énormes qu'on évalue pour la France à 12 milliards, soit "le tiers de la Dette publique", ce qui conduit "à poser un problème redoutable au point de vue économique et social: quelle est l'entreprise qui peut utiliser ce capital (...) ?"

" Les auteurs du projet [de caisse de retraites] proposent d'employer ces capitaux en obligations du Crédit Foncier, des Compagnies de Chemins de Fer, des industries minières et métallurgiques, et d'en affecter une partie à l'organisation du crédit agricole" (31).

Les assurances stimulent donc, elles aussi, une étude fine du montant cumulé des sinistres aléatoires encourus par les Compagnies, bref de l'évolution des capitaux. On ne s'étonnera pas que l'actuaire suédois F. Lundberg soit amené, un peu comme Bachelier, à introduire dès 1903 des processus aléatoires nouveaux, destinés à élucider cette question, et dont l'intérêt mathématique ne sera reconnu qu'ultérieurement .(24)

- D'autres statisticiens continentaux se sont penchés sur divers problèmes de dépendance en probabilités et statistiques, notamment H. Bruns, Chuprov ... cf ,par exemple (33)...

d) Hérédité, évolution, biologie: les débuts de la statistique mathématique

Les continentaux, on l'a vu, s'intéressent à des sujets (démographie, astronomie ...) dont les relations avec le calcul des probabilités sont anciennes. Dans le même temps, pour des raisons différentes, se constitue une école anglaise qui, se heurtant en fin de compte à des obstacles techniques mathématiques analogues, va les résoudre avec davantage d'efficacité.

Ici encore, le contexte économique et social joue un rôle important: la bourgeoisie anglaise, elle, a su construire une alliance durable avec l'aristocratie et l'Eglise, repoussant ainsi la question de la révolution sociale et canalisant le mouvement ouvrier. L'exploitation n'en est que plus féroce dans ce pays capitaliste le plus avancé du monde: la révolution industrielle broie l'homme sous la machine sans la moindre pitié. D'énormes fléaux en résultent: rachitisme, paupérisme, problèmes d'hérédité ... au point que les classes dirigeantes en arrivent à s'inquiéter ! (ne serait-ce que parce que la misère de la main d'oeuvre lui fait perdre une partie de ses capacités).

Sir Francis Galton s'intéresse de près à ces questions complexes. A la même époque, en partie sous l'impulsion des idées de Ch. Darwin (d'ailleurs beau-frère de Galton), on se penche sur les problèmes autant théoriques que pratiques de l'évolution et de la sélection en biologie, agriculture, élevage. Pour le sujet qui nous concerne ici, un point de rencontre essentiel est le suivant : les études sur l'hérédité et l'évolution, que ce soit chez les hommes, les animaux ou les plantes, exigent <u>beaucoup d'observations</u> portant <u>sur un nombre considérable de caractères</u> dont on doit comprendre ce qu'ils ont de commun <u>et</u> de différent selon les races, les espèces, les variétés. Contrairement à ce qui se passe en mécanique, les résultats des expériences ne donnent pas de rapports stricts entre les caractères: on ne peut dire clairement : " voici <u>la</u> cause, voilà <u>l</u>'effet", l'interpénétration des facteurs et les variations en tous sens sont évidentes.

K. Pearson, comme on l'a dit plus haut, en déduit même que les causes n'existent pas. Mais, sans aller jusque là, l'idée de corrélation ne peut que faire son chemin. Il faut répondre à la question: quand deux caractères sont-ils indépendants ? quand sont-ils liés entre eux ? <u>comment mesurer</u> (à partir d'observations en grand nombre, donc par des moyens <u>statistiques</u>) ce lien, <u>cette dépendance entre</u> deux ou plusieurs <u>caractères</u> (par exemple, la taille, la couleur des yeux ... chez les parents et les enfants) ?

Ayant du mal à recueillir,sur l'homme, des données couvrant deux générations, Galton étudie la transmission des caractères sur les pois de senteur. Dans des travaux qui s'échelonnent en gros de 1875 à 1890, il introduit dans le champ des mathématiques divers concepts qui étaient déjà fréquemment employés de manière plus vague en biologie, et en particulier à propos de l'hérédité: tout spécialement la notion de"co-relation" (ou corrélation):

" Il est facile de voir que la co-relation doit être la conséquence des variations de deux organes dues en partie à des causes communes. Si elles étaient entièrement dues à des causes communes, la co-relation serait parfaite, comme c'est approximativement le cas pour les parties du corps disposées symétriquement. Si elles n'étaient en aucune façon dues à des causes communes, la co-relation devrait être nulle. Entre ces deux extrêmes, il y a un nombre infini de cas intermédiaires et on montrera comment l'étroitesse de la co-relation dans chaque cas particulier peut être exprimée par un nombre unique" (le coefficient de corrélation) (32)

Galton ajoute notamment que cette démarche "nous familiarise avec la mesure de la variabilité et avec de curieuses lois du hasard qui s'appliquent à une grande diversité de sujets sociaux" (souligné par lui).

A sa suite, dans les toutes dernières années du siècle, se crée ce qu'on pourrait appeler une école de statistique mathématique et de "biométrie" anglaise avec K. Pearson, Weldon, établissant les grandes divisions du règne animal, W. Gosset (dit 'Student') qui, employé chez Guinness à Dublin, s'intéresse aux relations entre la qualité des matières premières pour la bière (houblon, orge ...), les conditions de production et la qualité du produit fini, etc.

L'école anglaise, souvent à contre-courant des idées d'alors, jette des bases pour comprendre les liens profonds entre la théorie classique des erreurs, la statistique mathématique et les probabilités, révolutionne la recherche biologique par une utilisation systématique des mathématiques.

Cependant, Galton reste encore proche des idées mécaniques: il ne conçoit guère les quantités dépendantes que comme combinaisons de quantités indépendantes communes (les fameuses "causes communes" dans la citation ci-dessus). Une telle modélisation n'est évidemment pas inintéressante: on essaie d'exprimer le "compliqué" en fonction du "simple"; du reste, au moins jusqu'aux années 30, la dépendance n'est concevable que comme phénomène approché ou dérivé de l'indépendance.

Certes, bien avant Galton, dans la première moitié du 19^{e} siècle, Gauss, Bravais et d'autres, étudiant les erreurs d'observations, se sont penchés sur les liens entre plusieurs quantités construites à partir de combinaisons de grandeurs indépendantes communes; mais, comme le dit K. Pearson: "l'idée que des quantités mesurées directement pouvaient être corrélées semble ne pas leur être venue à l'esprit", ils l'auraient même sans doute trouvée saugrenue.

En fin de compte, le concept de corrélation (issu de considérations concrètes: les erreurs d'observations en astronomie) mûrit mathématiquement chez Gauss avec beaucoup d'avance; mais ne correspondant pas à un besoin profond de l'époque, elle reste très limitée. Ce n'est qu'à partir du moment où se produit un renversement de perspectives, réclamé par des problèmes nouveaux, que (sans grand contact avec les probabilités du 19^{e} siècle) les statisticiens anglais l'imposent et la réintègrent de manière reconnue dans la théorie mathématique des probabilités. Il ne semble pas que les travaux originaux de Bienaymé, au milieu du siècle, invitent à modifier ce jugement (33)

Terminons par une remarque mathématique: la notion de corrélation est en fait assez grossière. Lorsque les grandeurs aléatoires étudiées sont distribuées selon une loi de Laplace-Gauss (la courbe en cloche), comme c'est le cas dans la théorie des erreurs, dire que deux quantités ne sont pas corrélées (ou, en termes mathématiques plus classiques, qu'elles sont orthogonales) équivaut à dire qu'elles sont indépendantes. Mais, dans le cas général, il en va autrement; toutefois la distinction n'a vraiment d'importance qu'à un niveau de pratique et de théorie scientifiques (extra-mathématique) qui est loin d'être atteint en 1900. Cela explique aussi que physiciens et biologistes ne ressentent alors guère comme profondément reliées les questions mathématiques voisines auxquelles ils sont confrontés.

Il faudrait enfin noter, bien que cela déborde le cadre de cet article pour une large part, que l'apport mathématique de l'école anglaise de biométrie ne se limite pas, loin de là, à la corrélation et aux notions voisines.

e) Sur quelques problèmes mathématiques

Des physiciens, des biologistes, des économistes ... rencontrent donc la dépendance au détour de leurs recherches, mais ces scientifiques ont aussi des préoccupations mathématiques: leurs motivations ne se réduisent pas à la résolution d'un problème pratique déterminé.

Qui plus est, diverses branches des mathématiques elles-mêmes (l'arithmétique par exemple) poussent aussi à des développements probabilistes analogues qu'on peut même envisager d'un point de vue "purement" interne au calcul des probabilités.

- Joseph Bertrand, "géomètre habile" comme on a dit de lui, pose clairement en 1888, sans le résoudre sauf dans un cas particulier, le problème de la loi des grands nombres pour des événements dépendants: il cite le cas où l'on tire successivement des boules d'une urne sans les remettre; mais sa formulation laisse quelque peu à désirer: s'agit-il d'événements dépendants ou d'événements indépendants mais de lois différentes ? (34) Il ne dépasse donc pas le cadre de Laplace.

- Le mathématicien russe de Saint-Petersbourg, Markov, disciple fidèle de Tchebycheff, dans un article difficile à dater, mais en tout cas antérieur à 1907, pose et résout, dans de larges cas, le problème général des théorèmes limites sous des hypothèses de dépendance variées, en donnant d'autres précisions.

Son travail, dont les motivations ne sont apparemment pas explicitées (linguistique, arithmétique, souci de généralisation ..., autres ?), est à la base de quantité de développements ultérieurs des probabilités, en particulier des théories dites "chaînes et processus de Markov" (1),(35)

- H. Poincaré introduit, sans connaître les travaux de Markov, des notions analogues et démontre un théorème limite pour expliquer le "battage des cartes": "Pourquoi, quand le jeu a été battu assez longtemps, admettons-nous que toutes les permutations des cartes, c'est-à-dire tous les ordres dans lesquels ces cartes peuvent être rangées, doivent être également possibles ? " . Ces idées, comme il le signale pour le problème du mélange des liquides, sont liées à celles vues plus haut sur la théorie cinétique des gaz. (8)

Plus généralement, peut-être, il y a, dans les travaux de Poincaré, plusieurs raisonnements qui servent de point de départ à la "théorie ergodique", c'est-à-dire à l'étude,au bout d'un temps assez long,de phénomènes divers (mécaniques...): les objets considérés reviennent-ils à leur point de départ, vont-ils se mélanger dans tout l'espace...? La connexion entre ces questions et les théorèmes limites en probabilités,pour des quantités qui n'ont aucune raison d'être indépendantes, est évidente.

- La contribution du mathématicien français E. Borel, sur cette question de dépendance est plus tardive, mais capitale. Son article de 1909 marque une étape (18),(20). Mettant en évidence les liens entre les probabilités, l'analyse, la théorie des ensembles, l'arithmétique, Borel flotte cependant dangereusement sur la dépendance, au point qu'une erreur (qu'il corrige peu après) entache cet article.

Mais plus importants encore, pour la théorie de la dépendance en probabilités, sont l'introduction par Borel d'événements construits explicitement à partir d'un nombre infini d'épreuves, et son attachement à chercher quand certains de ces événements ont une probabilité, non pas petite, mais nulle: en d'autres termes, étudiant une suite infinie d'épreuves aléatoires, il pose, sans le dire aussi clairement, le problème de l'étude globale du processus sur toute la suite, c'est-à-dire sur toute l'échelle du temps, et non simplement à des instants individuels. La question de l'évolution du processus, de ses trajectoires, devient naturellement incontournable, ce qui débouchera sur des progrès fondamentaux dans la théorie, tout spécialement avec le travail de Kolmogorov de 1933.(13)

Conclusion

Comment caractériser ce tournant, vers 1900, de l'indépendance à la dépendance, dans l'histoire du calcul des probabilités ?

- Un premier commentaire s'impose: même en 1910, la théorie mathématique de la dépendance en probabilités n'a pas encore vraiment acquis une dynamique propre. Alors que dans les années 30, et surtout dans les années 50, la théorie mathématique du hasard sera centrée sur l'étude des processus aléatoires (c'est-à-dire de la dépendance), il est clair que ce n'est pas le cas au début du siècle: ces questions sont abordées au coup par coup et, presque jamais (sauf un peu chez Markov) en tant que problèmes mathématiques à part entière. Leur unité n'est même guère ressentie: les impulsions sont diverses, souvent indépendantes, les scientifiques qui y contribuent s'ignorent quelquefois de longues années.

- Où réside donc l'unité de ce tournant ? dans la cohérence même des mathématiques ? dans les exigences du développement technique et industriel qui pose, à un niveau de complexité suffisant, la question du mouvement et du temps ? dans le changement économique et social qui substitue la domination du capital financier à celle du capital en général ?

Chacune de ces réponses est vraie, mais ne peut être isolée de l'ensemble. En fait, "ce à quoi nous assistons à la fin du 19e siècle, c'est à l'achèvement de la Renaissance dans tous ses domaines (...): la masse des outils matériels et intellectuels accumulés depuis le 15e siècle produit des résultats qui nient les principes mêmes qui les ont fait naître. La formation sociale devient si contradictoire qu'elle n'a d'autre issue qu'un changement profond et radical (...)? Dans le même temps (...), il devient clair aussi que le monde physique ne peut plus fonctionner dans les rapports qui l'ont fait découvrir. Mais ces faits ne sont pas spontanément aperçus comme eux-mêmes reliés. Ils ne sont pourtant encore qu'une partie d'un ensemble cohérent plus vaste (...)" (25)

Ces mutations, ces "attaques" contre la Renaissance, touchent tous les domaines: l'art (avec le passage de l'impressionnisme au cubisme...), la psychologie (avec Freud), la sociologie (avec Durkheim...) etc.

- C'est donc toute une époque qui bascule. Mais comment démêler ses différents aspects, comment caractériser leurs relations réciproques ? Par exemple, en ce qui concerne les mathématiques, pourquoi les considérations abstraites ont-elles parfois de l'avance, parfois du retard sur les considérations plus concrètes, sur les possibilités que donnent les moyens de calcul, sur le mouvement des idées...? Les mathématiques jouent-elles un rôle actif, ou ne font-elles que formaliser plus ou moins passivement les découvertes des autres sciences, des techniques et de la pratique ? Autrement dit, quel est le moteur de l'histoire des mathématiques, de l'histoire de telle notion mathématique particulière ?

Elucider ces questions demanderait tout un autre article. Nous proposerons seulement ici une piste à partir de la distinction entre le "fondamental" et le"décisif":

" Le fondamental détermine les nécessités les plus générales du fonctionnement et du développement de la chose. Mais la nécessité n'est jamais simple ni univoque, elle est contradictoire et se traduit en une pluralité de possibilités -ou d'impossibilités- formelles. Tout n'est pas possible, mais rien n'est fatal au niveau du fondamental. Entre les possibilités formelles, c'est la dialectique concrète de la réalité, c'est l'ensemble complexe de ses déterminations qui "choisit" lesquelles deviendront réalité, et ainsi <u>décide</u> du sens, des rythmes, des formes concrètes du développement. (...) Au sein du mode de production d'une formation sociale donnée, les forces productives constituent l'élément fondamental, mais ce sont les rapports de production qui jouent le plus souvent le rôle décisif. Le mode de production à son tour constitue l'élément fondamental par rapport aux formes politiques et idéologiques de la vie sociale, mais ces formes n'en jouent pas moins un rôle souvent décisif dans son développement" (36).

Dans le sujet qui nous intéresse ici, l'environnement social, technique, scientifique, idéologique ne serait-il pas le fondamental ? mais, à partir du moment où un problème mathématique a été dégagé et débarrassé de certains aspects particuliers qui l'obscurcissent, ce problème mathématique lui-même et la personnalité de ceux qui l'attaquent ne deviendraient-ils pas le décisif ? (ce qui n'empêche pas l'environnement de continuer à en diriger certains aspects, éventuellement de manière cachée)

Une étude plus approfondie de l'interpénétration de ces contradictions serait nécessaire pour l'affirmer; toutefois certains indices sérieux nous invitent à conclure en ce sens. La vie sociale, au sens le plus large de cette expression, sert en quelque sorte de planche de rappel autour de laquelle se construit la découverte scientifique: lorsque des résultats et des méthodes sont trop en avance sur les problèmes de leur temps, ils ne sont pas appréciés (ou compris) par la communauté scientifique: c'est le cas pour les travaux de Gauss sur la corrélation, pour ceux de Tchebycheff qu'on ne reconnaîtra que 50 ans plus tard, pour ceux de Bachelier ... Il est ainsi clair que l'intervention de la dépendance dans le calcul des probabilités ne pouvait pas avoir lieu à une autre époque qu'aux environs de 1900, et seulement sous forme embryonnaire. C'est la "dialectique concrète" d'une réalité autrement plus complexe, dans laquelle entrent en jeu la personnalité des chercheurs (Markov, Poincaré ...), la dynamique interne des écoles probabilistes (française, russe), statistiques (anglaise, continentale), les "hasards"de la découverte, mais aussi d'autres facteurs plus particuliers de l'environnemant social, etc, qui "décident du sens, des rythmes, des formes concrètes du développement".

Ce texte reprend un exposé fait au séminaire de probabilités de l'Université de Nancy le 13 novembre 1981. L'auteur remercie tous ceux qui lui ont apporté des remarques critiques et souhaite en recevoir d'autres afin d'améliorer ce travail.

Bibliographie

Ces références ne constituent qu'une sélection, et n'ont pas la vocation d'être complètes.

(1) L. MAISTROV : "Probability theory - A historical sketch",Academic Press (1974), traduit du russe

(2) E. COUMET : "La théorie du hasard est-elle née par hasard ?" , Annales Economie,Sociétés,Civilisation (mai-juin 1970), 25e année, n° 3, p.574-598

(3) A. EINSTEIN, L. INFELD : "L'évolution des idées en physique" Flammarion (1951)

(4) P.S. LAPLACE : "Théorie analytique des probabilités", Oeuvres Complètes, vol. VII (1812)

(5) R. de MONTESSUS : "Leçons élémentaires sur le calcul des probabilités", Gauthier-Villars (1908), p.1-8

(6) E. DORMOY : "Théorie mathématique des assurances sur la vie", Gauthier-Villars (1878), p.2, p.37

(7) K. PEARSON : "La grammaire de la science", Félix Alcan (1912), p.144-227 , (et 1e édition anglaise: 1892)

(8) H. POINCARE : "Calcul des probabilités", Gauthier-Villars, 2e édition (1912), p.1-23 et annexe, (1e édition: 1896)

(9) G. HEGEL : "Logique", Livre II

(10) F. ENGELS : "Dialectique de la Nature", Editions Sociales (1971), "Ludwig Feuerbach", Editions Sociales (1966), p.67

(11) E. BITSAKIS : "Physique contemporaine et matérialisme dialectique", Editions Sociales (1973), p.159-190

(12) J. BONITZER : "Hasard et connaissance", à paraître.

(13) A.N. KOLMOGOROFF : "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Springer (1933) (aucune traduction n'existe en français !)

(14) T.L. FINE : "Theories of probability", Academic Press (1973), p.31-37, 76-83, 141-146 ...

(15) P.L. CHEBYSHEV : "Oeuvres", Chelsea, New York (1961, réimpression)

(16) J.F.W. HERSCHEL : "Traité d'astronomie", Paulin (1834), traduction et appendice de A. Cournot

(17) H. POINCARE : "Le problème des 3 corps", Revue générale des Sciences, t.2 (15 janvier 1891), p.1-5

(18) J. BARONE, A. NOVIKOFF : "A history of the axiomatic formulation of probability from Borel to Kolmogorov. Part I", Arch; hist. exact. sci. 18, 2 (1978), p. 123-190

(19) C.V.L. CHARLIER : "Applications de la théorie des probabilités à l'astronomie", Gauthier-Villars (1931)

(20) E. BOREL : "Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques", Oeuvres , t.II, p.1055-1079 ,Editions du CNRS

(21) J. PERRIN : "Les atomes", PUF (1948), p.82-137 , (1^{e} édition: 1914)

(22) "Histoire Générale des Sciences", sous la direction de R. Taton, t. 3, PUF (1961 et 1964)

(23) J. ROSMORDUC : "Histoire de la physique et de la chimie. De Thalès à Einstein", Etudes Vivantes (1979)

(24) H. CRAMER : "Half a century with probability theory: Some personal recollections", The Annals of probability , vol 4 (1976), n° 4, p.509-546

(25) J.P. JOUFFROY : "Une révolution esthétique au début du XX^{e} siècle", Les Cahiers du Communisme (1981), n° 4 , p. 88-97

(26) V.I. LENINE : "L'impérialisme, stade suprême du capitailsme", Editions Sociales (19[illegible]2), en particulier p.58-63

(27) L. BACHELIER : "La spéculation et le calcul des probabilités",Gauthier-Villars (1938)

(28) E. DORMOY : "Projet d'une caisse de retraites obligatoire en faveur des ouvriers" Paris, Aux Bureaux du journal La Semaine (1887) (B.N. 8° R Pièce 3609)

(29) S. CANTAGREL : "Note sur la législation des accidents et l'assistance ouvrière...", extrait des mémoires de la Société des ingénieurs civils (mars 1887), (B.N. 8° R Pièce 3625)

(30) "L'Encyclopédie Française" (1937): article de E. Borel sur les probabilités et statistiques

(31) A. BRASILIER : "Théorie mathématique des placements et emprunts à long terme", Masson (1893), p.288

(32) "Studies in the history of statistics and probability", édité par E.S. Pearson et M.G. Kendall, Charles Griffin (1970), vol.I

(33) C.C.HEYDE, E. SENETA : " I.J. Bienaymé. Statistical theory anticipated", Springer (1977)

(34) J. BERTRAND : " Calcul des Probabilités", Gauthier-Villars (1888)

(35) M. PETRUSZEWYCZ : "Les chaînes de Markov dans le domaine linguistique", Slatkine (1981)

(36) L. SEVE : "Une introduction à la philosophie marxiste", Editions sociales (1980) , p.194-201 et 487-501