UN THEOREME DE LA LIMITE LOCALE POUR

UNE CLASSE DE TRANSFORMATIONS DILATANTES ET MONOTONES PAR MORCEAUX

par J. ROUSSEAU-EGELE (I.R.M.A.R. Campus de Beaulieu 35042 RENNES cedex FRANCE)

Summary :

We consider an expansive application T in the unit interval which is piecewise C^2 (associated with a finite or denumerable partition). It is known that there exists an absolutely continuous invariant measure μ. We suppose that (T,μ) is weakly mixing.

We show a central limit theorem with speed and a local limit theorem for a class of real bounded variation functions.

0. INTRODUCTION

0.1. Considérons une application T de l'intervalle unité dans lui-même, qui soit C^2 par morceaux et dilatante (pour une définition plus précise voir le 1. ci-dessous). Lasota et Yorke [18] ont montré qu'il existait une mesure μ ,invariante par T, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et dont la densité h est à variation bornée. En supposant le système dynamique (T,μ) faiblement mélangeant, Wong [30] a montré un théorème de la limite centrale :

$$\mu\{(1/\sigma\sqrt{n})(\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k - n\mu(f))<v\}\rightarrow (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{v}\exp(-u^2/2)\,du$$

où f est à variation bornée et $\sigma^2>0$.

A.M.S. 1980 subject classification

Primary 60 F 05 60 J 05 60 J 10

Secondary 10 K 05 28 D 05

Key words and phrases : Central limit theorem

Local limit theorem

En étudiant le spectre de l'opérateur de Perron-Frobenius associé à T, Keller [17] retrouve ce théorème, mais les moyens utilisés montrent que la classe de transformations considérées peut être traitée par une méthode de décomposition spectrale des opérateurs. Cette technique a déjà été utilisée pour les chaînes de Markov par Doeblin et Fortet ([7], [9], [15], [16], [23]) qui ont en particulier étudié les deux exemples principaux: la transformation "fraction continue" et la transformation "(2x) mod 1".

0.2 L'étude d'une équation fonctionnelle permet de déterminer si σ^2 est strictement positif et c'est le cas si f est l'indicatrice d'un borélien. On veut ici aller plus loin que le théorème de la limite centrale et obtenir une vitesse en $1/\sqrt{n}$ dans ce théorème et un théorème de la limite locale. Nous utilisons la théorie des perturbations analytiques des opérateurs de Rellich (pour son application aux chaines de Markov, voir Nagaev [22] et aux produits de matrices aléatoires, voir Le Page [19]).

Le théorème de la limite locale a été démontré pour la transformation "(2x) mod 1" par Moskvin et Postnikov [21] dans le cas d'une fonction indicatrice d'intervalle. La méthode utilisée ici permet d'étendre ces théorèmes au cas général d'une transformation C^2 par morceaux et dilatante et pour une fonction à variation bornée, à valeurs entières ou non. Mais une deuxième équation fonctionnelle intervient pour démontrer ce théorème de la limite locale.

0.3 Dans [14] Hofbauer et Keller montre que l'on a aussi un théorème de la limite central fonctionnel, un principe d'invariance et la loi du logarithme itéré. Les trois résultats peuvent être retrouvés à l'aide des techniques d'opérateurs. (cf. Le Page [19] dans un cadre différent).

0.4 Dans cet article les deux résultats principaux sont obtenus si la densité h de μ par rapport à la mesure de Lebesgue est telle que 1/h est aussi à variation bornée. C'est donc une restriction sur la classe de transformations considérées, mais les β-transformations pour $\beta > 1$ et la transformation "fraction continue" rentrent dans cette classe.

1. L'opérateur de Perron-Frobenius :

1.1. On considère une application T de I dans I, où $I = [0,1]$.
On note m, la mesure de Lebesgue et L^1_m , l'espace des fonctions intégrables.
On considère une subdivision finie ou dénombrable $\{a_j\}$ de I, où $I_j = (a_{j-1}, a_j)$ est un intervalle ouvert, vérifiant :

(1) La restric tion de T à I_j est strictement monotone et se prolonge en une application C^2 sur $\overline{I}_j$.

(2) $\{T(I_j)\}$ est composé d'un nombre fini d'intervalles distincts.

(3) Il existe un n tel que $\inf_{x \in I} |(T^n)'(x)| > 1$

La condition (1) permet l'existence d'inverses locaux de T.
La condition (3) est une condition de dilatation.

L'opérateur de Perron-Frobenius associé à T est l' opérateur ϕ de L^1_m dans L^1_m défini par :

$$\int_0^1 \phi f.g \, dm = \int_0^1 f.\, goT \, dm$$

où $f \in L^1_m$, $g \in L^\infty_m$.

Cet opérateur est une contraction positive de L^1_m et l'on a $\phi f = f$ si et seulement si la mesure $\mu = fm$ est invariante par T.

L'hypothèse (1) faite sur T permet de donner une forme explicite à ϕ :

$$\phi f(x) = \sum_j f(\sigma_j x) \varphi_j(x) \chi_j(x)$$

où - σ_j est l'inverse de T sur $J_j = T(\overline{I}_j)$
- $\varphi_j(x) = |\sigma'_j(x)|$
- χ_j est l'indicatrice de J_j

1.2. Notre but est l'étude du spectre de ϕ ,mais où ϕ est considéré comme un opérateur sur un sous-espace de L^1_m :

Pour $f : I \to \mathbb{C}$, on définit la variation de f par :

$$v(f) = \sup\{ \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k+1})| \} ,$$

la borne supérieure étant prise sur les subdivisions finies de I.

Si $f \in L^1_m$, on définit v(f) comme la borne inférieure des variations dans la classe de f.

Soit alors $\mathcal{V}$ l'ensemble des fonctions de L^1_m telle que $v(f) < \infty$. $\mathcal{V}$ est un sous-espace de L^1_m, mais qui n'est pas fermé pour $\| \quad \|_1$. Sur $\mathcal{V}$ définissons:

$$\|f\|_{\mathcal{V}} = v(f) + \|f\|_1$$

Il est aisé de vérifier que $\| \quad \|_{\mathcal{V}}$ est une norme sur $\mathcal{V}$, que $(\mathcal{V}, \| \quad \|_{\mathcal{V}})$ est un espace de Banach et que $\mathcal{V}$ est dense dans $(L^1_m, \| \quad \|_1)$.

Le **spectre** de ϕ **est** décrit à l'aide d'un théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu ([15] , [23]) :

<u>THEOREME 1</u> :

Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{L}$ deux espaces de Banach complexe de normes respectives $\| \quad \|_{\mathcal{V}}$ et $\| \quad \|_{\mathcal{L}}$, avec $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}$.

On suppose :

(a) Si $f_n \in \mathcal{V}$, $f \in \mathcal{L}$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{L}} = 0$ et $\|f_n\|_{\mathcal{V}} \leq C$ pour tout n, alors $f \in \mathcal{V}$ et $\|f\|_{\mathcal{V}} \leq C$.

Soit ϕ un opérateur borné de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}$, par rapport à $\| \quad \|_{\mathcal{V}}$.

On suppose de plus :

(b) $\sup_{n \geq 0} \{ \|\phi^n f\|_{\mathcal{L}} \text{ , } f \in \mathcal{V}, \|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1 \} < \infty$

(c) Il existe n_o, $\alpha < 1$ et $\beta < \infty$ tel que :

$$\|\phi^{n_o} f\|_{\mathcal{V}} < \alpha \|f\|_{\mathcal{V}} + \beta \|f\|_{\mathcal{L}} \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathcal{V}.$$

(d) Si V est une partie bornée de $(\mathcal{V}, \| \quad \|_{\mathcal{V}})$ alors $\phi^{n_o} V$ est relativement compacte dans $(\mathcal{L}, \| \quad \|_{\mathcal{L}})$.

Alors ϕ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1 : $\lambda_1,\dots,\lambda_p$. Les sous-espaces propres correspondants $E_i = \{ f\in \mathcal{L} : \phi f = \lambda_i f\}$ sont de dimension finie et contenus dans $\mathcal{V}$.

L'opérateur ϕ^n peut s'écrire :

$$\phi^n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n \phi_i + \psi^n , \quad n \geq 1 .$$

où les ϕ_i sont les projections sur les sous-espaces propres E_i, $\|\phi_i\|_{\mathcal{L}} \leq 1$ et ψ un opérateur sur L^1_m tel que $\sup_{n\geq 1} \|\psi^n\|_{\mathcal{L}} < \infty$.

On a de plus $\phi_i\ \phi_i = \phi_i\ \phi_j = 0$ si $i \neq j$

$$\phi_i^2 = \phi_i$$

$$\phi_i\psi = \psi\phi_i = 0$$

Enfin $\psi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ et ψ a un rayon spectral $\rho(\psi) < 1$ dans $(\mathcal{V}, \|\ \|_{\mathcal{V}})$.

Rappelons pour commodité la :

Proposition 1([18])

Si l'application T vérifie (1), (2) et (3), alors ϕ vérifie les hypothèses du théorème 1.

Preuve

La condition (a) est vérifiée car $\{f \in L^1_m : \|f\|_{\mathcal{V}} \leq c\}$ est compacte dans L^1_m. Lorsque la subdivision est finie, Lasota et Yorke [18] ont montré que pour $f \in \mathcal{V}$, on avait :

il existe n_o tel que $v(\phi^{n_o} f) \leq \alpha v(f) + \beta \|f\|_1$ où $\alpha<1$, $0<\beta<\infty$ indépendante de f.

Lorsque la subdivision est dénombrable, on a le même résultat.

Ici la condition (2) est essentielle (voir Pianigiani [27]).

Tout d'abord, remarquons que si T vérifie (1) et (2), alors pour tout n, T^n vérifie (1) et (2). C'est clair pour (1). Pour (2), considérons la subdivision associée à T^n qui est $\bigcup_{p=o}^{n-1} \{T^{-p} a_j\} = \{b_i\}$.

On a donc $T^n(b_i) = T^p(a_j)$ pour un j et un p tel que $0 \leq p \leq n-1$.
Or $\{T(a_j)\}$ est un ensemble fini de points et donc $\{\bigcup_{p=0}^{n-1} T^p(a_j)\}$ est aussi fini, d'où (2) pour T^n.

Soit $f \in \mathcal{V}$ et reprenons la démonstration de Lasota et Yorke :
Posons $\gamma = \inf |(T^n)'(x)|$ et choisissons N tel que $\gamma^N > 2$.
Alors $S = T^{nN}$ vérifie (1) et (2). L'opérateur de Perron-Frobenius associé à S est ϕ^{nN} , qui sous sa forme explicite sera noté comme ϕ :

$$\phi^{nN} f(x) = \sum_j f(\sigma_j x) \ \varphi_j(x) \ \chi_j(x)$$

avec $\varphi_j(x) \leq \gamma^{-N}$.

On a
$$v(\phi^{nN} f) \leq \sum_j v(f \circ \sigma_j) \ \varphi_j \ \chi_j$$
$$\leq \sum_j \underset{J_j}{v}(f \circ \sigma_j) \varphi_j + \sum_j |(f \circ \sigma_j)(Ta_{j-1}) \ \varphi_j(Ta_{j-1})|$$
$$+ \ |(f \circ \sigma_j)(Ta_j) \ \varphi_j(Ta_j)|$$

Or $g = (f \circ \sigma_j) \ \varphi_j$ est une fonction à variation bornée et on a :

$$|g(x)| + |g(y)| \leq \underset{(x,y)}{v(g)} + (2/(y-x)) \int_x^y |g| dm$$

d'où

$$v(\phi^{nN} f) \leq 2 \sum_j \underset{J_j}{v} (f \circ \sigma_j) \ \varphi_j + \sum_j (2/m(J_j)) \int_{I_j} |f| dm$$

D'après (2), il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\delta = \min_j m(J_j) \quad \text{d'où} \quad \sum_j (2/m(J_j)) \int_{I_j} |f| dm \leq (2/\delta) \ \|f\|_1$$

Il reste à évaluer :

$$\underset{J_j}{v} (f \circ \sigma_j) \varphi_j = \int_{J_j} |d(f \circ \sigma_j) \ \varphi_j|$$

$$\leq \int_{J_j} |f \circ \sigma_j| \ |\varphi'_j| \ dm + \int_{J_j} \varphi_j |d(f \circ \sigma_j)|$$

$$\leq K \int_{J_j} |f \circ \sigma_j| \ \varphi_j \ dm + \gamma^{-N} \int_{J_j} |d(f \circ \sigma_j)|$$

où $K = \sup_j \sup_{x \in J_j} (|\varphi_j'(x)| / \varphi_j(x))$

Cette constante K est finie, ce qui est évident lorsque la subdivision associée à T est finie car T est C^2 par morceaux. Quand la subdivision est dénombrable, la condition (2) permet d'arriver au même résultat.

On a donc

$$\underset{J_j}{v} (f \circ \sigma_j)\, \varphi_j \leq K \int_{I_j} |f| dm + \gamma^{-N} \int_{I_j} |df|$$

d'où en regroupant les résultats, la condition (c) :

$$v(\phi^{nN} f) \leq (2/\gamma^N)\, v(f) + (K + 2/\delta)\, \|f\|_1$$

La condition (d) résulte du fait que l'injection de $\mathcal{V}$ dans L^1_m est compacte et que ϕ est un opérateur borné de $\mathcal{V}$.

□

1.3 Comme conséquence du théorème 1 il existe une fonction $h \in \mathcal{V}$, positive, d'intégrale 1 et telle que $\phi h = h$, définie par

$$h = \lim_{n \to \infty} (1/n) \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k(1)$$

Donc $\mu = hm$ est une mesure de probabilité sur I, invariante par T.
On peut supposer que $\lambda_1 = 1$, car 1 est valeur propre de ϕ .
Le système dynamique (T,μ) ainsi construit sera supposé faiblement mélangeant, c'est-à-dire 1 est la seule valeur propre de T, et cette valeur propre est simple. L'on voit aisément que:

$$\phi^n f = \phi_1(f) + \psi^n(f)$$

où $\phi_1(f) = m(f)\, h$.
Remarquons que (T,μ) est faiblement mélangeant si et seulement si (T^n,μ) est ergodique pour tout n.

Dans le cas d'une subdivision finie, Bowen [4] donne des conditions pour que T soit faiblement mélangeante.
Dans ce cas, on peut démontrer le théorème de la limite centrale([30] , [17]).
Pour démontrer le théorème local, nous avons besoin de précisions sur la fonction h (unique puique T est faiblement mélangeante).

Nous supposons de plus que:

(4) il existe une constante $D > 0$ telle que

$$D \leq h(x) \leq 1/D .$$

Cette condition est vérifiée par les β-transformations et la transformation " fraction continue". Plus généralement cette condition est vérifiée par une classe de transformations considérée par Adler[1] (voir aussi [5], [27]):

$T : I \to I$ est dite markovienne si elle vérifie (1), si $T(I_j) \cap I_k \neq \emptyset$ implique $T(I_j) \supset I_k$ et si $\{T(a_j)\}$ est fini.

THEOREME 2 :

Si T est une application markovienne dilatante (condition (3)) vérifiant :

$$\sup |T''(x) / (T'(x))^2| < \infty$$

alors T admet une unique mesure finie invariante par T, $\mu = hm$, où h est une fonction strictement positive telle qu'il existe une constante $D > 0$ avec

$$D \leq h(x) \leq 1/D$$

Remarquons aussi le lien direct entre la constante K et la condition du théorème 2. En effet,

$$
\begin{aligned}
|\varphi'_j(x) / \varphi_j(x)| &= |(1/\varphi_j(x))'|\varphi_j(x) \\
&= |(T'(\sigma_j x))'| / |T'(\sigma_j x)| \\
&= |T''(\sigma_j x)| / (T'(\sigma_j x))^2
\end{aligned}
$$

Pour obtenir (4) on peut donc utiliser le **théorème** 2.

1.4 Dans la suite, nous supposons toujours que T vérifie (1), (2), (3), que h vérifie (4) et que (T,μ) **est** faiblement mélangeant.

L'opérateur adjoint de T **dans** L^1_μ est défini par

$$Pf = \phi(f\,h)/h$$

Comme $\phi^n(f\,h) = m(f\,h)h + \psi^n(f\,h)$, on a :

$$P^n = \mu + Q^n$$

pour tout $n \geq 1$ et où le rayon spectral de Q dans $\mathcal{V}$, $\rho(Q)$ est strictement inférieur à 1.

Remarquons que P vérifie les hypothèses du théorème 1 :

<u>Proposition 2</u> :

L'opérateur P, défini par $Pf = \phi(f\,h)/h$ est un opérateur borné de $\mathcal{V}$, qui vérifie les hypothèses du théorème 1.

En particulier, il existe n_o tel que

$$\|P^{n_o} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha\|f\|_{\mathcal{V}} + \beta\|f\|_{1,\mu}$$

où $\alpha < 1$, $\beta < \infty$ et $\|f\|_{1,\mu} = \int_0^1 |f|\,d\mu$

- L'espace $\mathcal{L}$ est L^1_μ et (b) est vérifié car P est une contraction positive de L^1_μ

$$\|Pf\|_{1,\mu} = \int_0^1 |\phi(f\,h)|\,dm \leq \int_0^1 \phi(|f|h)\,dm = \|f\|_{1,\mu}$$

- P est un opérateur borné de $\mathcal{V}$, car ϕ est un opérateur borné de $\mathcal{V}$ et que $1/h \in \mathcal{V}$, car $v(1/h) \leq (1/D^2)\, v(h)$.

- A l'aide de la démonstration de la proposition 1, on a :

$$\|P^{nN} f\|_{\mathcal{V}} = \|\phi^{nN}(f\,h)/h\|_{\mathcal{V}}$$

$$\leq 2\,\|1/h\|_{\mathcal{V}}\ \|\phi^{nN}(f\,h)\|_{\mathcal{V}} \text{ car } \|fg\|_{\mathcal{V}} \leq 2\|f\|_{\mathcal{V}}\|g\|_{\mathcal{V}}$$

$$\leq (8/\gamma^N)\,\|1/h\|_{\mathcal{V}}\ \|\phi^{nN}(f\,h)\|_{\mathcal{V}}$$

$$+ 2\,\|1/h\|_{\mathcal{V}}(K + 2/\delta + 1)\,\|f\|_{1,\mu}$$

□

1.5 Les Exemples :

1. les β-transformations

$$Tx = \{\beta x\} \quad \beta > 1, \text{ réel où } \{x\} = x - [x].$$

L'opérateur de Perron-Frobenius associé est défini par :

$$\phi f(x) = (1/\beta) \sum_{j=0}^{[\beta]-1} f((x+j)/\beta) + (1/\beta)\, f((x+[\beta])/3)\, \chi_{[0,\{\beta\}]}(x)$$

Les conditions (1), (2) et (3) sont évidemment vérifiées.

Pour (4) on a d'après Rényi [28] :

$$1 - 1/\beta \leq h(x) \leq 1/(1 - 1/\beta)$$

et (T,μ) est faiblement mélangeant

Si β est entier, on a donc $\phi = P$, car $h \equiv 1$.

Plus généralement, on peut considérer $Tx = \{\beta x + \alpha\}$ où $\beta > 2$ et $0 \leq \alpha \leq 1$.

Ces transformations vérifient (1), (2), (3) , (4) et le mélange faible.

2. la transformation "fraction continue" :

$$Tx = \{\tfrac{1}{x}\} \quad , T(0) = 0$$

L'opérateur de Perron-Frobenius s'écrit :

$$\phi f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f(1/(j+x))\, (1/(j+x))^2$$

La condition (3) s'écrit pour $n = 2$:

$$\inf|(T^2)'(x)| = 4$$

et $h(x) = 1/(1+x) \log 2$ vérifie (4).

Enfin (T,μ) est faiblement mélangeant.

2. L'opérateur $P_f(i\theta)$:

Soit $f \in \mathcal{V}$, à valeurs réelles et $\theta \in \mathbb{R}$.

Posons

$$P_f(i\theta)(g) = P(\exp(i\theta f)\, g)$$

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons étudier le spectre de $P_f(i\theta)$ lorsque θ est voisin de 0 et aussi pour des valeurs de θ quelconques.

Un premier type de résultat est dû à Re llich [8] qui a décrit comment les points isolés du spectre d'un opérateur varient lorsqu'on fait dépendre cet opérateur analytiquement d'un paramètre. **La proposition 4 qui suit permet la démons- -tration du théorème de la limite centrale.**

Proposition 3 :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'opérateur $P_f(i\theta)$ est un opérateur continu **sur** $\mathcal{V}$ (ainsi que **sur** L^1_μ) et l'application qui à θ fait correspondre $P_f(i\theta)$ est analytique.

Preuve :

$$\|P_f(i\theta)\, g\|_{\mathcal{V}} = \|P(\exp(i\,\theta f)\, g)\|_{\mathcal{V}} \leq 2\,\|P\|_{\mathcal{V}}\, \|\exp\, i\theta f\|_{\mathcal{V}}\, \|g\|_{\mathcal{V}}$$

Or $\|\exp\, i\,\theta\, f\|_{\mathcal{V}} = v(\exp\, i\theta f) + 1$

$$\leq v(\cos\theta f) + v(\sin\theta f) + 1$$

$$\leq 2\,|\theta|\, v(f) + 1$$

d'où $\|P_f(i\theta)\, g\|_{\mathcal{V}} \leq C(\theta)\|\, g\|_{\mathcal{V}}$

De même

$$\|P_f(i\theta)\, g\|_{1,\mu} \leq \|\exp(i\theta f)g\|_{1,\mu} = \|g\|_{1,\mu}$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} (i\theta)^n/n!\; P(f^n.g)$ est normalement convergente dans $\mathcal{V}$

car

$$|\theta|^n/n!\; \|P(f^n.g)\|_{\mathcal{V}} \leq (2\,|\theta|)^n/n!\; \|P\|_{\mathcal{V}}\; \|f\|^n_{\mathcal{V}}\, \|g\|_{\mathcal{V}}$$

et donc $\theta \to P_f(i\theta)$ est analytique.

□

Proposition 4 : ([8] , [19] , [22])

Il existe un réel $a > 0$ tel que si $|\theta| < a$, alors on ait :

1) pour tout $g \in \mathcal{V}$ et $n \geq 1$

$$P_f^n(i\theta)(g) = \lambda^n(i\theta)\, N_1(i\theta)(g) + P_2^n(i\theta)(g)$$

où $\lambda(i\theta)$ est l'unique valeur propre de plus grand module de $P_f(i\theta)$ et $|\lambda(i\theta)| > (2 + \rho(Q))/3$

$N_1(i\theta)$ est la projection sur le sous-espace propre E_θ de dimension 1, correspondant à $\lambda(i\theta)$.

$P_2(i\theta)$ est un opérateur sur $\mathcal{V}$ de rayon spectral

$$\rho(P_2(i\theta)) \leq (1 + 2\rho(Q))/3$$

et $P_2(i\theta)\, E_\theta = 0$.

2) les applications $\theta \to \lambda(i\theta)$, $\theta \to N_1(i\theta)$, $\theta \to P_2(i\theta)$ sont analytiques.

3) $\|P_2^n(i\theta)(1)\|_{\mathcal{V}} \leq C|\theta|((1 + 2\rho(Q))/3)^n$

où C est une constante positive.

Preuve :

Rappelons brièvement quelques points de la démonstration

1) Soit $R(z)$ la résolvante de P dans $\mathcal{V}$

$$R(z) = 1/(zI - P) = \mu/(z-1) + \sum_{n=0}^{\infty} Q^n/z^{n-1}$$

qui est définie si $|z| > \rho(Q)$ et $z \neq 1$.

Posons alors

$$R_{i\theta}(z) = R(z) \sum_{n=0}^{\infty} ((P_f(i\theta) - P)\, R(z))^n$$

Si $\|P_f(i\theta) - P\|_{\mathcal{V}} < 1/\|R(z)\|_{\mathcal{V}}$, alors la série précédente converge normalement dans $\mathcal{V}$ et définit la résolvante de $P_f(i\theta)$.

Soient I_1 et I_2 les cercles de centre 1 et 0 et de rayon $\rho_1 = (1-\rho(Q))/3$ et $\rho_2 = (1 + 2\rho(Q))/3$, respectivement.

Soit $\delta > 0$, tel que $\delta < \rho_1$ et $\rho(Q) + \delta < \rho_2$.

Posons $M_\delta = \sup \| R(z) \|_{\mathcal{V}}$, où la borne supérieure est prise pour $|z| > \rho(Q) + \delta$ et $|z-1| < \delta$.

Si $\| P_f(i\theta) - P \|_{\mathcal{V}} < 1/M_\delta$, les cercles I_1 et I_2 sont dans l'ensemble résolvant de $P_f(i\theta)$.

Soient alors les projections

$$N_1(i\theta) = (1/2i\pi) \int_{I_1} R_{i\theta}(z)\, dz$$

$$N_2(i\theta) = (1/2i\pi) \int_{I_2} R_{i\theta}(z)\, dz$$

Pour $\|N_1(i\theta) - \mu\|_{\mathcal{V}} < 1$, l'image E_θ de $N_1(i\theta)$ est de dimension 1 et on a :

$$P_f(i\theta)\, N_1(i\theta)(g_\theta) = N_1(i\theta)\, P_f(i\theta)(g_\theta) = \lambda(i\theta)\, g_\theta$$

où $g_\theta \in \mathcal{V}$ engendre E_θ.

On a donc pour tout $n \geq 1$

$$P_f^n(i\theta) = P_f^n(i\theta)\, N_1(i\theta) + P_f^n(i\theta)\, N_2(i\theta)$$

$$= \lambda^n(i\theta)\, N_1(i\theta) + P_2^n(i\theta)$$

en posant $P_2^n(i\theta) = (1/2i\pi) \int_{I_2} z^n R_{i\theta}(z)\, dz$

3) Pour $|\theta| < a$, on a :

$$R_{i\theta}(z) = R(z) + i\theta\, R_{i\theta}^{(1)}(z)$$

d'où

$$P_2^n(i\theta)(1) = (1/2i\pi) \int_{I_2} z^n R(z)(1)\, dz$$

$$+ (\theta/2\pi) \int_{I_2} z^n R_{i\theta}^{(1)}(z)(1)\, dz$$

$$= (\theta/2\pi) \int_{I_2} z^n R_{i\theta}^{(1)}(z)(1)\, dz$$

d'où $\quad \|P_2^n(i\theta)(1)\|_{\mathcal{V}} \leq C\,|\theta|\,\rho_2^n$

arc $C = (1/2\pi) \sup\limits_{\substack{|z| = \rho_2 \\ |\theta| < a}} \| R_{i\theta}^{(1)}(z)\|_{\mathcal{V}}$

$\square$

Pour démontrer un théorème de la limite locale nous avons besoin, pour tout θ réel, de la description du spectre de $P_f(i\theta)$ fournie par le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu :

Proposition 5 :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'opérateur $P_f(i\theta)$ n'a qu'un ensemble fini $G(i\theta)$ de valeurs propres de module 1.
Pour chaque $\xi \in G(i\theta)$, le sous-espace propre correspondant E_ξ est de dimension finie et contenu dans $\mathcal{V}$.

L'opérateur $P_f(i\theta)$ s'écrit alors :

$$P_f^n(i\theta) = \sum_{\xi \in G(i\theta)} \xi^n P_\xi(i\theta) + Q^n(i\theta) \quad , \; n \geq 1$$

où $P_\xi(i\theta)$ est le projecteur sur E_ξ et l'on a :

$$P_\xi(i\theta)\, P_{\xi'}(i\theta) = 0 \text{ si } \xi \neq \xi' \;,\; P_\xi^2(i\theta) = P_\xi(i\theta)$$

$$P_\xi(i\theta)\, Q(i\theta) = Q(i\theta)\, P_\xi(i\theta) = 0$$

Enfin $Q(i\theta)(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ et $\rho(Q(i\theta)) < 1$.

L'opérateur $P_f(i\theta)$ s'introduit naturellement dans l'étude du théorème de la limite centrale. En effet, posons :

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \quad , \; n \geq 1$$

$$S_0 f = 0$$

On a le lemme suivant :

LEMME 1 :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_f^n(i\theta)(g) = P^n(\exp(i\,\theta\, S_n f)\; g)$, $n \geq 0$.

Cette propriété permet l'étude de la fonction caractéristique de $S_n f$ via les itérées de $P_f(i\,\theta)$ et donc du spectre de $P_f(i\theta)$.

Preuve :

On a:

$$P^n(\exp(i\theta S_n f)g) = P(P^{n-1}(\exp(i\theta f\circ T^{n-1}).\exp(i\theta S_{n-1}f).g))$$
$$= P_f(i\theta)\left[P^{n-1}(\exp(i\theta S_{n-1}f).g)\right]$$

car

$$P^n(f\circ T^n.g) = f.P^n g \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

□

Preuve de la proposition 5 :

Vérifions la condition (c) du théorème 1.

$$\|P_f^{nN}(i\theta)(g)\|_{\mathcal{V}} = \|P^{nN}(\exp(i\,\theta\, S_{nN}f)g)\|_{\mathcal{V}}$$
$$\leq (16/\gamma^N)\ \|1/h\|_{\mathcal{V}}\ \|h\|_{\mathcal{V}}\ \|\exp i\,\theta\, S_{nN}f\|_{\mathcal{V}}\|g\|_{\mathcal{V}}$$
$$+\ 2\,\|1/h\|_{\mathcal{V}}(K + 2/\delta + 1)\|g\|_{1,\mu}$$

où $\gamma = \inf|(T^n)'(x)|$.

$$\text{Or } \|\exp i\,\theta S_{nN}f\|_{\mathcal{V}} = v(\exp i\,\theta\, S_{nN}f) + 1$$
$$\leq 2\,|\theta|\,v(S_{nN}f) + 1$$
$$\leq 2|\theta| \sum_{k=0}^{nN-1} v(f\circ T^k) + 1$$
$$\leq 2nN\,|\theta|\,v(f) + 1$$

et donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, il existe $n_o = nN_o$ tel que

$$(16/\gamma^{N_o})\,\|1/h\|_{\mathcal{V}}\,\|h\|_{\mathcal{V}}\,(2nN_o|\theta|\ v(f) + 1) < 1$$

□

3. Le théorème de la limite centrale :

THEOREME 3 :

Soit T une application de I dans I vérifiant (1), (2), (3) ,(4) et telle que le système dynamique (T,μ) soit faiblement mélangeant.

Si l'équation fonctionnelle

$$f(x) = k + \varphi(Tx) - \varphi(x)$$

n'admet pas de solution $\varphi \in \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{R}$,alors on a:

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 ((S_n f - n\mu(f))/\sqrt{n})^2 \, d\mu > 0$$

et pour tout $v \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{(S_n f - n\mu(f))/\sigma\sqrt{n} \leq v\} = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{v} \exp(-u^2/2)\, du .$$

La démonstration de ce théorème est donnée dans une suite de lemmes :

LEMME 2 :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^1 \exp(i\theta S_n f)\, d\mu = \int_0^1 P_f^n(i\theta)(1)\, d\mu$$

C'est la traduction du lemme 1 en termes de fonctions caractéristiques, avec $g = 1$.

Faisons ensuite le développement limité à l'ordre 2 de $\lambda(i\theta)$ (cf Proposition 4) :

LEMME 3 :

$$\lambda'(0) = \mu(f)$$

Preuve :

$$\int_0^1 \exp((it/n)\, S_n f)\, d\mu = \int_0^1 P^n(it/n)(1)\, d\mu$$

D'après la proposition 4, on a pour n suffisamment grand :

$$\int_0^1 \exp((it/n)\, S_n f)\, d\mu = \lambda^n(it/n) \int_0^1 N_1(it/n)(1)\, d\mu + \int_0^1 P_2^n(it/n)(1)\, d\mu$$

et $\left|\int_0^1 P_2^n(it/n)(1)d\mu\right| \leq \|P_2^n(it/n)(1)\|_{\mathcal{V}} \leq C(|t|/n)\, \rho_2^n$

D'autre part, on a :

$$N_1(it/n) = \mu + (it/n)\, N_1^{(1)} - (t^2/2n^2)\, N_1^{(2)} + (t^2/n^2)\, \overline{N}_1(it/n)$$

où $N_1^{(1)}$, $N_2^{(2)}$, $\overline{N}_1(it/n)$ sont des opérateurs bornés de $\mathcal{V}$,

avec $\lim\limits_{n\to\infty} \|\overline{N}_1(it/n)\|_{\mathcal{V}} = 0$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 N_1(it/n)(1)\, d\mu = 1$$

De même

$$\lambda(it/n) = 1 + (it/n)\, \lambda'(0) - (t^2/2n^2)\, \lambda''(0) + (t^2/n^2)\, \overline{\lambda}(it/n)$$

où $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\lambda}(it/n) = 0$

et $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n(it/n) = \exp(it\ \lambda'(0))$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} (1/n)\, S_n f = \mu(f)$ presque partout, on en déduit que pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$\exp\ it\ \lambda'(0) = \exp\ it\ \mu(f)$$

□

Sans perdre en généralité et de façon à simplifier les calculs, nous supposons par la suite que $\mu(f) = 0$.

LEMME 4 :

$$\lambda''(0) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (S_n f/\sqrt{n})^2 \, d\mu$$

Preuve :

Remarquons que l'on a :

$$\partial^2/\partial t^2 \left\{ \int_0^1 \exp((it/\sqrt{n}) S_n f) \, d\mu \right\} \Big|_{t=0}$$

$$= - \int_0^1 (S_n f/\sqrt{n})^2 \, d\mu$$

Or d'après la proposition 4

$$\int_0^1 \exp((it/\sqrt{n}) S_n f) \, d\mu = \lambda^n(it/\sqrt{n}) \int_0^1 N_1(it/\sqrt{n})(1) \, d\mu$$

$$+ \int_0^1 P_2^n (it/\sqrt{n})(1) \, d\mu$$

On a aussi

$$P_2^n(it/\sqrt{n})(1) = (1/2i\pi) \oint_{I_2} z^n R_{it/\sqrt{n}}(z)(1) \, dz$$

Pour n suffisamment grand et $|z| = \rho_2$, on peut développer $R_{it/\sqrt{n}}(z)$:

$$R_{it/\sqrt{n}}(z) = R(z) + (it/\sqrt{n}) R^{(1)}(z) - (t^2/2n) R^{(2)}(z) + (t^2/n) \overline{R}_{it/\sqrt{n}}(z)$$

où $R^{(1)}(z)$, $R^{(2)}(z)$, $\overline{R}_{it/\sqrt{n}}(z)$ sont des opérateurs bornés de $\mathcal{V}$ et

$\lim_{n\to\infty} \|\overline{R}_{it/\sqrt{n}}(z)\|_{\mathcal{V}} = 0$.

L'on a donc :

$$P_2^n(it/\sqrt{n})(1) = (t/2\pi\sqrt{n}) \int_{I_2} z^n R^{(1)}(z)(1)dz$$
$$- (t^2/4i\pi n) \int_{I_2} z^n R^{(2)}(z)(1)\, dz$$
$$- (t^2/2i\pi n)\int_{I_2} z^n \overline{R}_{it/\sqrt{n}}(z)(1)\, dz$$

d'où

$$\partial^2/\partial t\left(\int_0^1 P_2^n(it/\sqrt{n})(1)\, d\mu\right)_{|t=0} = (-1/2i\pi n) \int_{I_2} z^n R^{(2)}(z)(1)\, dz$$

A l'aide des développements de $\lambda(it/\sqrt{n})$ et de $N_1(it/\sqrt{n})$,
on obtient de même que :

$$\left(\lambda^n(it/\sqrt{n}) \int_0^1 N_1(it/\sqrt{n})(1)\, d\mu\right)_{|t=0} = -\lambda''(0) - (1/n)\, N_1^{(2)}(1)$$

La limite de $\int_0^1 (S_nf/\sqrt{n})^2\, d\mu$ existe donc et vaut $\lambda''(0)$.

□

On peut aussi faire une démonstration directe de l'existence de la limite de $\int_0^1 (S_nf/\sqrt{n})^2\, d\mu$, car $\rho(Q) < 1$.

Donnons maintenant une représentation en termes d'opérateurs de la variance.

<u>LEMME 5</u> :

Posons $\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (S_nf/\sqrt{n})^2 d\mu$. Alors , on a la représentation suivante pour σ^2 :

$$\sigma^2 = \int_0^1 P(g^2) - (Pg)^2\, d\mu \qquad \text{où } g = (I - P)^{-1}f$$

Preuve :

Un calcul classique ([16], page 36) montre que l'on a :

$$\sigma^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f.f \circ T^{|k|} d\mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 P^{|k|} f.f \, d\mu$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 Q^{|k|} f.f \, d\mu = \int_0^1 (2g - f) \, f \, d\mu$$

si l'on pose $\quad g = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k f = \sum_{k=0}^{\infty} P^k f = (I - P)^{-1} f$

on a

$$\sigma^2 = \int_0^1 (g + Pg)(g - Pg) \, d\mu = \int_0^1 P(g^2) - (Pg)^2 \, d\mu$$

□

LEMME 6 :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 P_f^n(it/\sqrt{n})(1)\, d\mu = \exp(-t^2\sigma^2/2)$$

Preuve :

Il suffit de reprendre les développements du lemme 3 avec $\lambda'(0) = 0$ et où it/n est remplacé par $it/\sqrt{n}$.

□

LEMME 7 :

$\sigma^2 > 0$ si et seulement si f n'est pas de la forme:

$$f = \varphi\circ T - \varphi$$

où $\varphi \in \mathcal{V}$.

Preuve :

La constante k du théorème 3 est égale à $\mu(f)$. Ici on a $k = 0$. D'après le lemme 5, on a :

$\sigma^2 = 0$ si et seulement si $Pg^2 = (Pg)^2$ presque partout

soit $\phi(g^2h)\,\phi(h) = (\phi(gh))^2$

$$\Big(\sum_j g^2(\sigma_j x)\, h(\sigma_j x)\, \varphi_j(x)\, \chi_j(x)\Big)\Big(\sum_j h(\sigma_j x)\, \varphi_j(x)\, \chi_j(x)\Big)$$

$$= \Big(\sum_j (g(\sigma_j x)\, h^{1/2}(\sigma_j x)\, \varphi_j^{1/2}(x)\, \chi_j(x))\,(h^{1/2}(\sigma_j x)\, \varphi_j^{1/2}(x)\, \chi_j(x))\Big)^2$$

d'où $g(\sigma_j x) = u(x)$ presque partout dans J_j et où u est une fonction indépendante de j. En effet, si dans l'inégalité de Cauchy on a l'égalité, les termes sont proportionnels.

et donc on a

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) - Pg(x) \\ &= g(x) - g(\sigma_j x) \qquad \text{pour tout } j. \end{aligned}$$

Or, pour j fixé, il existe au moins un $y \in I_j$ tel que $Ty = x$.
Comme $g(\sigma_j x)$ est indépendant de j, on peut donc écrire

$$f(Ty) = g(Ty) - g(y) \qquad \text{dans } \mathcal{V}.$$

Mais on a aussi:

$$\begin{aligned} f &= (g - f)\circ T - (g - f) \\ &= \varphi \circ T - \varphi . \end{aligned}$$

□

Un cas particulièrement important est celui de l'indicatrice d'un borélien A.

Proposition 6:

$\sigma^2 > 0$ si f est l'indicatrice d'un borélien de I, tel que $0 < \mu(A) < 1$.

Preuve :

Si $\chi_A = \mu(A) + \varphi\circ T - \varphi$

alors on a :

$$\exp(2\pi i \varphi\circ T) = \exp(-2\pi i \mu(A)) \cdot \exp(2\pi i \varphi)$$

Comme T est faiblement mélangeante, $\exp(-2\pi i\mu(A)) = 1$ et donc $\mu(A) = 0$ ou 1.

□

REMARQUE:

Soit φ une fonction mesurable, solution de l'équation fonctionnelle: $\quad f = \varphi \circ T - \varphi$

Alors on a: $\quad S_n f = \varphi \circ T^n - \varphi$

Soit $c > 0$, alors

$$\mu(|\varphi \circ T^n/\sqrt{n}| > c) = \mu(|\varphi/\sqrt{n}| > c)$$

et donc $S_n f/\sqrt{n} = (\varphi \circ T^n - \varphi)/\sqrt{n}$ tend vers 0 en probabilité. Comme $S_n f\sqrt{n} \longrightarrow 0$ en probabilité est équivalent à $\sigma^2 = 0$ il existe, d'après le Lemme 7, $\varphi_1 \in \mathcal{V}$ tel que $f = \varphi_1 \circ T - \varphi_1$.

La transformation T étant ergodique, $\varphi - \varphi_1$ est constante et il est équivalent de supposer que l'équation fonctionnelle n'a pas de solution mesurable ou de solution dans $\mathcal{V}$.

4. La vitesse dans le théorème de la limite centrale

La méthode précédente permet de préciser la vitesse de convergence. On obtient ainsi la vitesse exacte en $1/\sqrt{n}$. La démonstration repose sur l'inégalité de Essen [10] et un calcul de développement limité plus poussé que précédemment.

THEOREME 4 :

Les hypothèses étant celles du théorème 3, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in \mathbb{R}$, on ait :

$$|\mu\{(S_n f - n\mu(f))/\sigma\sqrt{n} \leq v\} - (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{v} \exp(-u^2/2)du \leq C/\sqrt{n}$$

<u>Preuve</u> :

D'après l'inégalité de Esseen, on a pour tout $U > 0$ et $n \geq 1$:

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \mu\{S_n f/\sigma\sqrt{n} \leq v\} - (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{v} \exp(-u^2/2)du \right|$$

$$\leq K/U + (1/\pi) \int_{-U}^{U} 1/|u| \left| \int_0^1 \exp[(iu/\sigma\sqrt{n}) S_n f] d\mu - \exp(-u^2/2) \right| du$$

où $K = 24/\pi\sqrt{2\pi}$.

Un calcul de développement limité donne une estimation de

$$\left| \int_0^1 \exp[(iu/\sigma\sqrt{n}) S_n f] - \exp(-u^2/2)\, d\mu \right| :$$

<u>LEMME 8</u> :

Il existe un réel $a > 0$ tel que pour tout $|u| < a\sqrt{n}$ on ait :

$$\left| \int_0^1 \exp[(iu/\sigma\sqrt{n}) S_n f] - \exp(-u^2/2)\, d\mu \right|$$

$$\leq \exp(-u^2/4)\, [2A|u|^3/\sigma^3\sqrt{n} + B|u|/\sigma\sqrt{n}] + (C|u|/\sigma\sqrt{n})\, \rho_2^n.$$

où A,B,C sont des constantes positives.

A l'aide de ce lemme et en posant $U = a\sqrt{n}$, on obtient que :

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \mu\{S_n f/\sigma\sqrt{n} \leq v\} - (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{v} \exp(-u^2/2)du \right|$$

$$\leq K/a\sqrt{n} + (1/\sqrt{n}) \int_{-a\sqrt{n}}^{a\sqrt{n}} \exp(-u^2/4)\, [2Au^2 + B/\sigma] + C\rho_2^n/\sigma\sqrt{n}\; du$$

d'où le résultat.

$\square$

Preuve du lemme 8 :

Comme

$$\left|\int_0^1 \exp[(iu/\sigma\sqrt{n})\, S_n f] - \exp(-u^2/2)\, d\mu\right| \leq \int_0^1 |P_f^n(iu\sigma/\sqrt{n})(1) - \exp(-u^2/2)|\, d\mu ,$$

on estime la dernière intégrale à l'aide d'un développement limité, poussé ici à l'ordre 3.

Il suffit pour cela d'utiliser la proposition 4, en posant $\theta = u/\sigma\sqrt{n}$

$$P_f^n(i\theta) = \lambda^n(i\theta) N_1(i\theta) + P_2^n(i\theta) =$$

$$= [1 + i\theta\lambda'(0) - (\theta^2/2)\lambda''(0) - (i\theta^3/6)\lambda^{(3)}(0) + \theta^3\overline{\lambda}(i\theta)]^n .$$

$$[\mu + i\theta N_1^{(1)} - (\theta^2/2)\, N_1^{(2)} + \theta^2\overline{N}_1(i\theta)] + P_2^n(i\theta)$$

$$\doteq \exp[n(-(\theta^2/2)\sigma^2 + iA_1\theta^3 + \theta^3\varepsilon(\theta))][\mu + i\theta N_1^{(1)} - (\theta^2/2)N_1^{(2)} + \theta^2\overline{N}_1(i\theta)] + P_2^n(i\theta)$$

où A_1 est une constante et $\lim_{\theta\to 0} \varepsilon(\theta) = 0$.

On a donc

$$\int_0^1 |P_f^n(iu\sigma/\sqrt{n})(1) - \exp(-u^2/2)|\, d\mu \leq A_n(u) + B_n(u) + (C|u|\sigma/\sqrt{n})\, \rho_2^n$$

où

$$A_n(u) = \exp(-u^2/2)\, |\exp[iA_1u^3/\sigma^3\sqrt{n} + (u^3/\sigma^3\sqrt{n})\, \varepsilon(u/\sigma\sqrt{n})] - 1|$$

$$B_n(u) = \exp(-u^2/2)\quad \exp[iA_1u^3/\sigma^3\sqrt{n} + (u^3/\sigma^3\sqrt{n})\, \varepsilon(u/\sigma\sqrt{n})]$$

$$.\ (|u|/\sigma\sqrt{n})|\ iN_1^{(1)}(1) - (u/2\sigma\sqrt{n})\, N_1^{(2)}(1) - (u/2\sigma\sqrt{n})\overline{N}_1(iu/\sigma\sqrt{n})(1)|$$

On peut trouver un réel $a > 0$ tel que pour $|u| < a\sqrt{n}$, on ait

$$2A\, a/\sigma^3 < 1/4 \quad \text{où } A = |A_1|$$

$$|iAu^3/\sigma^3\sqrt{n} + (u^3/\sigma^3\sqrt{n})\, \varepsilon(u/\sigma\sqrt{n})| \leq |u| 2Au^2/\sigma^3\sqrt{n} \leq u^2/4$$

et $$\| iN_1^{(1)}(1) - (u/2\sigma\sqrt{n})N_1^{(2)}(1) - (u/2\sigma\sqrt{n})\overline{N}_1(iu/\sigma\sqrt{n})(1)\|_{\nu} \leq B$$

On obtient ainsi le résultat à l'aide de l'inégalité

$$|e^z - 1| \leq |z|\, \exp|z|$$

□

5. Un théorème de la limite locale :

On se pose la question du comportement asymtotique de $\mu(S_n f \in \Delta)$ où Δ est un intervalle fini. C'est l'étude du spectre de $P_f(i\theta)$ pour chaque valeur de θ, qui va permettre de donner des renseignements sur ce compor--tement, alors que dans le théorème de la limite centrale, nous avions regardé le spectre au voisinage de $\theta = 0$.

THEOREME 5 :

Soit T une application de I dans I vérifiant (1),(2),(3),(4) et le mélange faible. Si $\sigma^2 > 0$ et s'il n'existe pas une fonction φ mesurable, un réel η, un réel t strictement positif et une fonction k(x) à valeurs entières tels que:

$$f(x) = \varphi(Tx) - \varphi(x) + \eta + (2\pi/t)k(x)$$

alors uniformément en z, pour tout intervalle fini Δ, on a:

$$\lim_{n\to\infty} \Big| \sigma\sqrt{n}\,\mu(z + S_n f - n\mu(f) \in \Delta) - (1/\sqrt{2\pi})\exp(-z^2/2\sigma^2 n)\, m(\Delta)\Big| = 0$$

Preuve : Suivons la démonstration donnée par Breiman [6] dans le cadre des variables aléatoires indépendantes.

Soit $g \in L^1_m(\mathbb{R})$, $g(x) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t)\exp(itx)\,dt$

où $\hat{g}$ est une fonction continue à support compact.

$$\sigma\sqrt{n}\int_0^1 g(z + S_n f - n\mu(f))\,d\mu =$$

$$(\sigma\sqrt{n}/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(itz)\hat{g}(t)\exp(-itn\mu(f))\int_0^1 P_f^n(it)(1)\,d\mu\,dt$$

Supposons que le support de $\hat{g}$ soit inclus dans $[-\delta,\delta]$.

D'après la proposition 4, si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe un réel $\delta(\varepsilon)$, tel que si $\delta(\varepsilon) < a$ et $|t/\sigma\sqrt{n}| < \delta(\varepsilon)$

alors, ona :

$$: \quad |\exp(-it\sqrt{n}\,\mu(f)/\sigma)\,\lambda^n(it/\sigma\sqrt{n})| \leq \exp(-t^2/4)$$

et $\| N_1(t/\sigma\sqrt{n}) - \mu\|_{\vartheta} < \varepsilon$

Comme

$$(1/\sqrt{2\pi})\exp(-z^2/2\sigma^2 n)\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt$$

$$= (\hat{g}(0)/2\pi)\int_{\infty}^{\infty}\exp(itz/\sigma\sqrt{n})\quad\exp(-t^2/2)\,dt$$

On a

$$2\pi\,\sigma\sqrt{n}\int_0^1 g(z+S_n f-n\mu(f))d\mu - (1/\sqrt{2\pi})\exp(-z^2/2\sigma^2 n)\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt$$

$$= \sigma\sqrt{n}\int_{|t|<\delta(\varepsilon)}\exp(itz)\hat{g}(t)\exp(-itn\mu(f))\,\lambda^n(it)\,dt$$

$$- \hat{g}(0)\int_{|t|<\delta(\varepsilon)\sigma\sqrt{n}}\exp(itz/\sigma\sqrt{n})\exp(-t^2/2)\,dt$$

$$+ \sigma\sqrt{n}\int_{|t|<\delta(\varepsilon)}\exp(itz)\,\hat{g}(t)\exp(-itn\mu(f))\,\lambda^n(it)\int_0^1 (N_1(it)(1)-\mu(1))\,d\mu dt$$

$$+ \sigma\sqrt{n}\int_{|t|<\delta(\varepsilon)}\exp(itz)\,\hat{g}(t)\exp(-itn\mu(f))\int_0^1 P_2^n(it)(1)\,d\mu\,dt$$

$$+ \sigma\sqrt{n}\int_{\delta(\varepsilon)\leq|t|\leq\delta}\exp(itz)\,\hat{g}(t)\exp(-itn\mu(f))\int_0^1 P_f^n(it)(1)\,d\mu\,dt$$

$$- \hat{g}(0)\int_{t\geq\delta(\varepsilon)\sigma\sqrt{n}}\exp(itz/\sigma\sqrt{n})\exp(-t^2/2)\,dt$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5.$$

$$A_1 = \int_{|t|<\delta(\varepsilon)\sigma\sqrt{n}}\exp(itz/\sigma\sqrt{n})\,[\hat{g}(t/\sigma\sqrt{n})\exp(-it\sqrt{n}\mu(f)/\sigma)\,\lambda^n(it/\sigma\sqrt{n}) - \hat{g}(0)\exp(-t^2/2)]\,dt$$

d'où à l'aide du théorème de Lebesgue $\lim_{n\to\infty}\sup_z|A_1| = 0$.

$$A_2 = \int_{|t|<\delta(\varepsilon)\sigma\sqrt{n}} \exp(itz/\sigma\sqrt{n})\, \hat{g}(t/\sigma\sqrt{n}) \exp(-it\sqrt{n}\mu(f)/\sigma)$$
$$\lambda^n(it/\sigma\sqrt{n}) \int_0^1 (N_1(it/\sigma\sqrt{n})(1) - \mu(1))\, d\mu\, dt$$

et donc
$$|A_2| \leq \varepsilon \|\hat{g}\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2/4)\, dt \text{ , d'où } \lim_{n\to\infty} \sup_z |A_2| = 0.$$

$$|A_3| \leq \sigma\sqrt{n}\, \delta(\varepsilon)\, C\, \rho_2^n \|\hat{g}\|_\infty \quad \text{et } \lim_{n\to\infty} \sup_z |A_3| = 0.$$

$$|A_5| \leq |\hat{g}(0)| \int_{|t| \geq \delta(\varepsilon)\sigma\sqrt{n}} \exp(-t^2/2)\, dt \quad \text{et } \lim_{n\to\infty} \sup_z |A_5| = 0.$$

Pour que A_4 tende vers 0, il faut que pour $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, l'opérateur $P_f(it)$ n'admette pas de fonction propre g_t de valeur propre ζ de module 1, d'après la proposition 5. Si c'est le cas, on a alors :

$$A_4 = \sigma\sqrt{n} \int_{\delta(\varepsilon)\leq|t|\leq\delta} \exp(itz)\, \hat{g}(t) \exp(-itn\mu(f)) \int_0^1 Q^n(it)(1)\, d\mu\, dt$$

et
$$|A_4| \leq \sigma\sqrt{n}\, \|\hat{g}\|_\infty \int_{\delta(\varepsilon)\leq|t|\leq\delta} C\, \rho^n(Q(it))\, dt.$$

Comme $t \to P_f(it) = Q(it)$ est continue, $\rho(Q(it))$ est semi-continue supérieurement et atteint son maximum, qui est strictement inférieur à 1 et $\lim_{n\to\infty} \sup_z |A_4| = 0$.

Le théorème 5 sera donc vérifié si pour $t \neq 0$, l'équation

$$P_f(it)(g_t) = \zeta g_t$$

n'a pas de solution dans $\mathcal{V}$, où $|\zeta| = 1$ (ζ dépend de t)

Donc

$$\sum_j \exp(it\, f(\sigma_j x))\, g_t(\sigma_j x)\, h(\sigma_j x)\, \varphi_j(x)\, \chi_j(x)$$
$$= \zeta\, g_t(x) \sum_j h(\sigma_j x)\, \varphi_j(x)\, \chi_j(x)$$

d'où en passant aux modules

$$\sum_j |g_t(\sigma_j x)| \, h(\sigma_j x) \, \varphi_j(x) \, \chi_j(x) \geq |g_t(x)| \sum_j h(\sigma_j x) \, \varphi_j(x) \, \chi_j(x)$$

soit $P|g_t| \geq |g_t|$

et donc

$$\mu(P|g_t|) \geq \mu|g_t|$$

d'où

$$P|g_t| = |g_t|$$

Or 1 est l'unique fonction laissée invariante par P, donc g_t est une fonction de module 1.

Si l'on revient à l'équation $P_f(it)g_t = \zeta g_t$,l'on voit que la seule possibilité est alors que

$$\exp(it\, f(\sigma_j x))\, g_t(\sigma_j x) = \zeta\, g_t(Tx)$$

soit

$$\exp(it\, f(x))\, g_t(x) = \zeta g_t(Tx)$$

et en prenant le logarithme

$$itf(x) = \log g_t(Tx) - \log g_t(x) + \log \zeta + 2\pi i k(x)$$

Il existe donc φ mesurable et $\eta \in \mathbb{R}$, tels que:

$$f(x) = \varphi(Tx) - \varphi(x) + \eta + (2\pi/t)k(x).$$

REMARQUE :

Dans un voisinage de 0, d'après la démonstration du théorème 3

$$\zeta = \lambda(it) = 1 - \sigma^2 t^2/2 + \varepsilon(it)$$

où $\lim_{t\to 0} \varepsilon(it) = 0$

Ainsi pour t petit, on a $|\zeta| < 1$. Le sous-groupe de $\mathbb{R}$ formé des t tels que $P_f(it)g_t = \zeta g_t$ qui est fermé, est donc discret.

Il reste à traiter un cas particulièrement intéressant. C'est celui où $f(x)$ prend ses valeurs dans un réseau :

$$f(x) = \eta + (2\pi/t)\, k(x)$$

Sans perdre en généralité, on peut supposer que $2\pi/t = 1$.

THEOREME 6 : **Soit T une application de I dans I vérifiant** (1),(2), (3),(4) **et le mélange faible. Si f est de la forme :**

$$f(x) = \eta + k(x)$$

où k est une fonction à valeurs entières, d'intégrale non-entière, η **un réel, alors on a:**

$$\lim_{n\to\infty} \Big| \sigma\sqrt{n}\, \mu(z + S_n f - n\mu(f) \in \Delta)$$

$$- (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-z^2/2\sigma^2 n)\, \nu(\Delta - z - n(\eta - \mu(f)))\Big| = 0$$

uniformément pour tout z réel et Δ intervalle fini et où ν est la **mesure de dénombrement sur** $\mathbb{Z}$.

Preuve :

D'après la démonstration de la proposition 6 , σ^2 est strictement positif car $\mu(k)$ n'est pas entier.

Reprenons les calculs du théorème 4 :

$$\sigma\sqrt{n}\int_0^1 g(z + S_n f - n\mu(f))\, d\mu =$$

$$(\sigma\sqrt{n}/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} \exp(itz)\, \hat{g}(t) \exp(-it\, n\, \mu(f)) \int_0^1 P_f^n(it)(1)\, d\mu\, dt$$

Si $f(x) = \eta + k(x)$, alors on a :

$$S_n f = n\eta + S_n k$$

et donc

$$\int_0^1 P_f^n(it)(1)\, d\mu = \exp(it\, n\, \eta) \int_0^1 P_k^n(it)(1)\, d\mu$$

La fonction $t \to \int_0^1 P_k^n(it)(1)\, d\mu$ est périodique de période 2π et l'opérateur a des valeurs propres de module 1 pour les t entiers.

En découpant en intervalles de longueur 2π et en changeant de variable, on obtient :

$$\sigma\sqrt{n}\int_0^1 g(z+S_nf-n\mu(f))\,d\mu =$$
$$(1/2\pi)\int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} G(t/\sigma\sqrt{n})\exp(itz/\sigma\sqrt{n})\exp(-it\sqrt{n}\mu(f)/\sigma)\int_0^1 P_f^n(it/\sigma\sqrt{n})(1)d\mu\,dt$$

où $G(u) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi\ell z)\,\hat{g}(u+2\pi\ell)\exp[i2\pi\ell\, n(\eta-\mu(f))]$

et donc

$$2\pi\,\Big|\,\sigma\sqrt{n}\int_0^1 g(z+S_n f-n\mu(f))\,d\mu$$
$$-(1/\sqrt{2\pi})\exp(-z^2/2\sigma^2 n)\int_{-\infty}^{\infty} g(z+n(\eta-\mu(f))+x)\,d\nu(x)\Big|$$
$$\leq \Big|\int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} \exp(itz/\sigma\sqrt{n})\,[\,G(t/\sigma\sqrt{n})\exp(-it\sqrt{n}\mu(f)/\sigma).$$
$$\int_0^1 P_f^n(it/\sigma\sqrt{n})(1)\,d\mu-\exp(-t^2/2)\int_{-\infty}^{\infty} g(z+n(\eta-\mu(f))+x)\,\nu(dx)\,]\,dt\Big|$$
$$+\Big|\int_{|t|\geq\pi\sigma\sqrt{n}} \exp(itz/\sigma\sqrt{n})\exp(-t^2/2)dt\int_{-\infty}^{\infty} g(z+n(\eta-\mu(f))+x)\,\nu(dx)\Big|$$
$$= A_1 + A_2$$

Pour le 1er terme, il suffit de regarder la limite de :

$$G(t/\sigma\sqrt{n})\exp(-it\sqrt{n}\mu(f)/\sigma)\int_0^1 P_f^n(it/\sigma\sqrt{n})(1)\,d\mu$$

quand $n\to\infty$ et d'appliquer le théorème de Lebesgue.

Or $\lim_{n\to\infty}\exp(-it\sqrt{n}\,\mu(f)/\sigma)\int_0^1 P_f^n(it/\sigma\sqrt{n})(1)\,d\mu = \exp(-t^2/2)$

Il suffit donc de calculer $G(0)$, à l'aide de la formule de Poisson :

$$G(0) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\exp(i2\pi\,\ell z)\,\hat{g}(2\pi\,\ell)\exp(i2\pi\,\ell n(\eta-\mu(f)))$$
$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} g(z+n(\eta-\mu(f))+p)$$

D'après la démonstration du théorème 4 et comme $G(u)$ tend vers $G(0)$ uniformément en z et que G est bornée indépendamment de z, on déduit que:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_z |A_1| = 0.$$

On voit aussi aisément que $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_z |A_2| = 0$.

□

Remarque :

Si $f(x)$ est l'indicatrice d'un intervalle $[a,b]$ de I, on retrouve en particulier le théorème de Moskvin et Postnikov pour la transformation "(2x)mod 1":

$$\lim_{n\to\infty} |\sigma\sqrt{n}\, \mu(S_n f = p) - (1/\sqrt{2\pi})\exp[-(p-n(b-a))^2/2n\sigma^2]| = 0$$

où $p \in \mathbb{N}$.

Les théorèmes de ce type se généralise donc à une application de I dans I , vérifiant (1),(2),(3),(4) et faiblement mélangeante , pour l'indicatrice d'un borélien de I.

Janvier 1982

REFERENCES

[1] R. L. ADLER : F-expansions revisited
Springer L.N 318 (1973), pp 1-5.

[2] P. BILLINGSLEY : Convergence of probability measures, 1968.

[3] A. BOYARSKY et M. SCAROWSKY : On a class of transformations which have unique absolutely continuous invariant measures
Trans. A.M.S., volume 255 (1979), pp243-262.

[4] R. BOWEN : Bernouilli maps of the interval
Israel Journal of Math, vol. 28 (1977), pp161-168.

[5] R. BOWEN : Invariant measures for markov maps of the interval
Commun. Math. Phys. 69 (1979), pp 1-17.

[6] L. BREIMAN : Probability, 1968.

[7] W. DOEBLIN : Remarques sur la théorie métrique des fractions continues
Compositio Math., vol. 7 (1940), pp 353-371.

[8] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ : Linear operators, part I, (1967).

[9] R.FORTET : Sur une suite également répartie
Studia Math. vol. 9 (1940) , pp 54-69.

[10] B.V GNEDENKO et A.N. KOLMOGOROV : Limit distributions for sums of independant random variables, (1954).

[11] M.I. GORDIN : Stochastic processes generated by number-theoretic endomorphisms
Soviet Math. Dokl., vol. 9 (1968) , pp 1234-1237.

[12] M.I GORDIN : The central limit theorem for stationary processes
Soviet Math. Dokl. , vol. 10 (1969), pp 1174-1176.

[13] M.I. GORDIN et B.A. LIFŠIC : The central limit theorem for stationary markov processes
Soviet Math. Dokl , vol 19 (1978), pp392-394.

[14] F. HOFBAUER et G. KELLER : Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations
preprint.

[15] C.T. IONESCU TULCEA et G. MARINESCU : Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues
Annals of Math., vol.47 (1946), pp140-147.

[16] M. KAC : On the distribution of sums of the type $\sum f(2^k t)$
Annals of Math., vol. 47(1946) , pp 33-49.

[17] G. KELLER : Un théorème de la limite centrale pour une classe de transformations monotones par morceaux
C. R. Acad. Sc. Paris, série A, 291(1980),pp155-158.

[18] A. LASOTA et J.A YORKE : On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations
Trans. A.M.S. , vol.186(1973), pp 481-488.

[19] E. LE PAGE : Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires
Oberwolfach 1981, Springer Lectures Notes, à paraître.

[20] T.Y LI et J.A YORKE : Ergodic transformations from an interval into itself
Trans. A.M.S. , vol.235 (1978), pp 183-192.

[21] D.A MOSKVIN et A.G.POSTNIKOV : A local limit theorem for the distribution of fractional parts of an exponential function
Th. of Proba. and its Appl., vol. XXIII (1978),pp521-528.

[22] S.V NAGAEV : Some limit theorems for stationnary markov chains
Th. of Proba. and its Appl., vol II(1957),pp378-406.

[23] F. NORMAN : Markov process and learning models, (1972).

[24] W. PARRY : On the β -expansions of real numbers
Acta Math. Acad. Sc. Hungar. ,vol11(1960),pp401-416.

[25] W. PHILIPP : Some metrical theorems in number theory II
Duke Math. J.,38 (1970), pp 447-458

[26] W. PHILIPP : Mixing sequences of random variables and probabilistic number theory
Memoirs of the American Math. Soc., 114 (1971).

[27] G. PIANIGIANI : First return map and invariant measures
Israel J. of Math., vol.35 (1980),pp32-48.

[28] A. RENYI : Representation for real numbers and their ergodic properties
Acta Math. Acad. Sc. Hungar., vol.8(1957),pp477-493.

[29] S. WONG : Some metric properties of piecewise monotonic mappings of the unit interval
Trans. A.M.S. vol.246 (1978), pp 493-500.

[30] S. WONG : A central limit theorem for piecewise monotonic mappings of the unit interval
The Annals of Proba., vol.7 (1979),pp 500-514.

[31] S. WONG : Hölder continuous derivatives and ergodic theory
J. London Math. Sc., vol. 22(1980) ,pp 506-520.