P. BOLLEY
J. CAMUS

Régularité Gevrey et itérés pour une classe d'opérateurs hypoelliptiques

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1981-1982, fascicule 3
« Séminaire « Équations aux dérivées partielles » », , p. 1-46
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1981-1982___3_A2_0>

REGULARITE GEVREY ET ITERES POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS HYPOELLIPTIQUES

P. BOLLEY
Université de NANTES
Institut de Mathématiques
et Informatique
44 072 - NANTES CEDEX

J. CAMUS
U.E.R. Mathématiques et
Informatique
Laboratoire Associé CNRS n° 305
35000 - RENNES CEDEX

INTRODUCTION.

Soit $P = P(D)$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$ hypoelliptique, alors le symbole $p(\xi)$ de P satisfait des inégalités du type :

$$|p^{(\alpha)}(\xi)| \leqslant C\ |p(\xi)|\,|\xi|^{-\rho_0|\alpha|}$$

pour tous multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi|$ grand ; ρ_0 étant un nombre (rationnel) compris entre 0 et 1. Si $\rho_0 = 1$, P est elliptique.

Il est alors bien connu, L. Hörmander [8], F. Treves [14], que si pour une distribution u sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, Pu est une fonction Gevrey d'ordre $s \geqslant 1$ i.e. $Pu \in C^\infty(\Omega)$ et pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C_K > 0$, telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

$$||D^\alpha(Pu)||_{L^2(K)} \leqslant C_K^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s$$

alors u est une fonction Gevrey d'ordre $s' = \mathrm{Max}\ (s,\frac{1}{\rho_0})$.

De plus, d'après F. Newberger - Z. Zielezny [13], on sait que si u est un vecteur Gevrey d'ordre $s \geqslant 1$ pour P, ie : une distribution u sur Ω telle que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C_K > 0$ avec :

$$||P^N u||_{L^2(K)} \leqslant C_K^{mN+1}\ ((mN)!)^s \quad , \quad N = 0,1,\ldots$$

alors u est une fonction Gevrey d'ordre $s' = s/\rho_0$ pour tout $s \geqslant s_0$, s_0 assez grand. Si $\rho_0 = 1$, ie : si P est elliptique, $s_0 = 1$ d'après le théorème de T. Kotake - M.S. Narasimhan [11].

On se propose ici de généraliser ces résultats de régularité et d'itérés aux classes d'opérateurs hypoelliptiques, à coefficients analytiques, introduites par L. Hörmander [9], ie : d'opérateurs différentiels $P(x;D)$ à coefficients analytiques dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels le symbole $p(x,\xi)$ vérifie des estimations du type : pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe des constantes m' et $c > 0$ telles que :

$$|p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x;\xi)| \leqslant C^{|\beta|+1}\ \beta!\ |p(x;\xi)|\ |\xi|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

$$|\xi|^{m'} \leqslant C\ |p(x,\xi)|$$

pour $x \in K$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi|$ grand les constantes δ et ρ ne dépendant que de P et vérifiant $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$.

On obtient alors que si pour une distribution u sur Ω, Pu est une fonction Gevrey d'ordre s, alors u est une fonction Gevrey d'ordre $s' = \mathrm{Max}(\frac{1}{\rho-\delta}, \frac{s}{1-\delta})$. Et, si u est un vecteur Gevrey d'ordre s de P, $\delta < m'/m$, alors u est une fonction Gevrey d'ordre s' avec $s' = \mathrm{Max}(\frac{1}{\rho-\delta}, \frac{s}{m'/m-\delta})$. Ce résultat précise ainsi celui de F. Newberger - Z. Zielezny [13].

Par exemple, soit $P \equiv (-\Delta)^k + |x|^{2l}(-\Delta)^m$ où Δ désigne le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$, k, l et m étant des entiers $\geqslant 0$ avec $l > m-k > 0$. Alors P est hypoelliptique ; de plus, si Pu est une fonction Gevrey d'ordre s alors u est une fonction Gevrey d'ordre $s' = \frac{sl}{l+k-m}$ et lorsque $\frac{m-k}{l} < \frac{k}{m}$, si u est un vecteur Gevrey d'ordre s, alors u est une fonction Gevrey d'ordre $s' = \frac{slm}{Kl+(K-m)m}$.

Ces résultats locaux sont en fait déduits comme corollaires de résultats microlocaux obtenus pour ces opérateurs, généralisant ainsi le théorème de régularité microlocale de L. Hörmander [10] et le théorème des itérés microlocal de P. Bolley - J. Camus - C. Mattéra [3] établis dans le cadre elliptique ($\rho = 1$, $\delta = 0$).

Ces versions microlocales permettant aussi de donner des résultats pour des systèmes d'opérateurs ; le point de départ de cette étude (cf. [2] et [3] était en effet de montrer que si $\{P_1,\dots,p_r\}$ est un système elliptique d'opérateurs à coefficients analytiques et si u est un vecteur Gevrey d'ordre s, $s \geqslant 1$, pour chaque opérateur P_i, alors u est une fonction Gevrey d'ordre s, résultat généralisant celui de F. Browder [4] (cf. aussi M. Damlakhi [6], et pour un système non nécessairement elliptique B. Helffer - C. Mattéra [7]).

Citons dans la même direction les travaux de M.S. Baouendi - G. Métivier [1] qui étudient les vecteurs Gevrey d'ordre s associés aux opérateurs hypoelliptiques de type principal ; ils montrent que de tels vecteurs sont des fonctions Gevrey d'ordre s' pour un certain s' avec en particulier s' = s si s = 1.

Citons également les résultats de L. Zanghirati [15][16] concernant les itérés d'une autre classe d'opérateurs hypoelliptiques (opérateurs multi-quasi-elliptiques).

Dans cet article, les résultats ont été énoncés et démontrés dans le cadre des classes C^L comme dans L. Hörmander [10], le cas particulier des classes de Gevrey G^s étant donné en corollaires.

I- CLASSES C^L ET VECTEURS C^L D'UN OPERATEUR DIFFERENTIEL.

Comme dans L. Hörmander [10], soit L une suite croissante de nombres positifs L_N tels que $L_o = 1$ et

$$N \leqslant L_N \quad , \quad L_{N+1} \leqslant C.L_N \ ,$$

pour une constante $C > 0$.

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $C^L(\Omega)$ l'ensemble des $u \in C^\infty(\Omega)$ tels que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C_K > 0$ avec :

$$(1.1) \quad |D^\alpha u(x)| \leqslant C_K(C_K\, L_{|\alpha|})^{|\alpha|} \quad , \quad x \in K$$

pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Quand $L_N = N+1$, l'espace $C^L(\Omega)$ est l'ensemble $A(\Omega)$ des fonctions analytique (réelles) dans Ω et quand $L_N = (N+1)^s$ pour un nombre réel $s \geqslant 1$, l'espace $C^L(\Omega)$ est l'ensemble $G^s(\Omega)$ des fonctions Gevrey d'ordre s dans Ω. Notons que, en utilisant le théorème de Sobolev, on peut remplacer les normes $L^\infty(K)$ dans (1.1) par des normes $H^s(K)$ pour $s \in \mathbb{R}$.

Si $P = P(x;D)$ est un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques dans Ω et s un nombre réel, on note $C^L_s(\Omega;P)$ l'espace des distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C_K > 0$ avec :

$$(1.2) \quad ||P^N u||_{H^s(K)} \leqslant C_K\ (C_k\, L_{mN})^{mN}$$

pour tout entier $N = o,1,\ldots$

On note $C^L(\Omega;P) = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} C^L_s\ (\Omega;P)$ et on désigne par $C^L_{loc}(\Omega;P)$ l'ensemble des distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que pour tout $x_o \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert V de x_o tel que $u \in C^L(V;P)$.

REMARQUE 1.1. On a l'inégalité :

$$(L_{N+k})^{N+k} \leqslant C^{k^2}(C^{2k}L_N)^N$$

si bien que l'on peut remplacer $(L_{|\alpha|})^{|\alpha|}$ par $(L_{|\alpha|+k})^{|\alpha|+k}$ dans (1.1) avec k indépendant de $|\alpha|$, et $(L_{mN})^{mN}$ par $(L_{mN+k})^{mN+k}$ dans (1.2) avec k indépendant de N.

REMARQUE 1.2. Dans le même ordre d'idées, on rappelle qu'il existe des constantes C_1, C_2, $C_3 > 0$ telles que pour tout multi-indice α, on ait :

$$\alpha! \leqslant C_1^{|\alpha|}\ |\alpha|! \leqslant C_2^{|\alpha|}\ |\alpha|^{|\alpha|} \leqslant C_3^{|\alpha|}\ \alpha!.$$

(et on peut également remplacer, d'après la remarque précédente, $|\alpha|$ par $|\alpha|+k$ avec k indépendant de α).

Les espaces $C^L(\Omega)$ et $C^L(\Omega,P)$ peuvent être décrits à l'aide de la transformation de Fourier.

Pour les espaces $C^L(\Omega)$, on rappelle le résultat suivant de L. Hörmander ([10] , proposition 2.4.) :

PROPOSITION 1.3. Soient $x_0 \in \Omega$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors $u \in C^L(V)$ pour un voisinage V de x_0 si et seulement si pour un voisinage U de x_0, il existe une suite bornée $u_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ telle que :

$$u_N = u \text{ dans } U\ ;$$

$$(1.3) \qquad |\hat{u}_N(\xi)| \leqslant C.\ (C\ L_{N/|\xi|})^N \quad , \quad N = 0,1,\ldots$$

pour une constante $C > 0$.

On a un théorème analogue pour les espaces $C^L(\Omega;P)$:

PROPOSITION 1.4. Soient $x_0 \in \Omega$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et P un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques dans Ω. Alors $u \in C^L(V,P)$ pour un voisinage V de x_0 si et seulement si pour un voisinage U de x_0, il existe une suite $f_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ telle que :

$$f_N = P^N u \quad \text{dans} \quad U \ ;$$

$$(1.4) \quad |\hat{f}_N(\xi)| \leqslant C.\ (C\ L_{mN})^{mN}\ (1+|\xi|)^M \quad , \quad N = 0,1,\ldots$$

pour des constantes $C > 0$ et M.

DEMONSTRATION. Soit $u \in C_s^L(V,P)$ pour un voisinage V de x_0 et un $s \in \mathbb{R}$. Soient ψ et $\varphi \in C_0^\infty(V)$ avec $\psi\varphi = \varphi$ et $\varphi \equiv 1$ dans un voisinage U de x_0. Alors la suite $f_N = \varphi P^N u$ convient. En effet :

$$\hat{f}_N(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \varphi\, \psi P^N u(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{\varphi}(\xi-\eta)\ \widehat{\psi\ P^N u}(\eta)\ d\eta$$

$$= (2\pi)^{-n} \int (1+|\eta|)^{-s}\ \hat{\varphi}(\xi-\eta)(1+|\eta|)^s\ \widehat{\psi\ P^N u}(\eta)\ d\eta \qquad \text{donc}$$

$$|\hat{f}_N(\xi)| \leqslant (2\pi)^{-n}\ C_1\ C_2(C_2\ L_{mN})^{mN}\left(\int (1+|\eta|)^{-2s}\,|\hat{\varphi}(\xi-\eta)|^2 d\eta\right)^{1/2}$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n} 2^{|s|} C_1 C_2 (C_2\ L_{mN})^{mN}(1+|\xi|)^{-s}\ \left(\int (1+|\xi-\eta|)^{2|s|}\,|\hat{\varphi}(\xi-\eta)|^2 d\eta\right)^{1/2}$$

$$\leqslant C_3\ (C_3\ L_{mN})^{mN}\ (1+|\xi|)^{-s}.$$

ce qui démontre la condition nécessaire.

Inversement, supposons la condition (1.4) vérifiée. On a :

$$\|f_N\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C.\ (C\ L_{mN})^{mN}\ \left(\int (1+|\xi|)^{2(M+s)} d\xi\right)^{1/2}$$

$$\leqslant C_1.\ (C_1 L_{mN})^{mN} \quad \text{pour} \quad 2(M+s) \leqslant -n-1$$

donc $u \in C_s^L\ (U,P)$.

REMARQUE 1.5. De la même façon que (1.3) peut être remplacée par une estimation :

(1.3)' $|\hat{u}_N(\xi)| \leqslant C.\ (CL_{N+k})^{N+k}\ |\xi|^{k-N}$

avec k indépendant de N (cf. Remarque 1.1), l'estimation (1.4) peut être remplacée par :

(1.4)' $|\hat{f}_N(\xi)| \leqslant C.\ (CL_{mN+k})^{mN+k}(1+|\xi|)^M$

avec k indépendant de N.

On rappelle l'existence d'une suite de fonctions test telles que chacune d'elles ait des majorations convenables jusqu'à un certain ordre de dérivation (L. Hörmander [10], lemme 2.2):

LEMME 1.6. Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$, $r > 0$ et N un entier positif. Alors, il existe une fonction $\chi_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi_N = 1$ sur K et χ_N s'annule aux points dont la distance à K est supérieure à r et

(1.5) $|D^{\alpha+\beta}\chi_N| \leqslant C_\alpha\ r^{-|\alpha|}(C\ N/r)^{|\beta|}$ pour $|\beta| \leqslant N$

la constante C ne dépendant que de n et C_α ne dépendant que de n et α.

On donne les majorations suivantes qui sont contenues dans L. Hörmander ([10] lemme 5.3) mais dont on refait la démonstration car elle nous sera utile plus loin.

LEMME 1.7. Soient $K \subset \Omega$ un compact et χ_N une suite de fonctions $\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle qu'il existe une constante $C > 0$ avec :

(1.6) $|D^\alpha\chi_N(x)| \leqslant C.(CN)^{|\alpha|}$, $|\alpha| \leqslant N = 0,1,\ldots$ $x \in K$.

Alors, il existe une constante $C' > 0$ telle que pour $|\alpha| = |\alpha_1|+\ldots+|\alpha_j| \leqslant N$, on ait :

$$|D^{\alpha_1}a_1\ D^{\alpha_2}\ \ldots\ a_{j-1}\ D^{\alpha_j}\chi_N(x)| \leqslant C'^{N+1}\ |\alpha|! \quad , \quad x \in K$$

pour toutes fonctions $a_1,\ldots,a_{j-1}$ analytiques dans Ω et vérifiant :

$$|D^\alpha a_i(x)| \leqslant C^{|\alpha|+1}\alpha! \quad , \quad \alpha \in \mathbb{N}^n \; , \; i = 1,\ldots,j-1, \; x \in K.$$

DEMONSTRATION.

(i) On montre qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que lorsque $j \leqslant N$, on ait :

$$|D_{i_1} a_1 \ldots a_{j-1} D_{i_j} x_N| \leqslant C'^{N+1} j!$$

En effet, le premier membre de cette inégalité est une somme de termes de la forme:

$$(D^{\alpha_1} a_1) \ldots (D^{\alpha_{j-1}} a_{j-1})(D^{\alpha_j} x_N) \quad \text{où} \quad |\alpha_1|+\ldots+|\alpha_j| = j.$$

S'il y a $C_{k_1\ldots k_j}$ termes avec $|\alpha_1| = k_1,\ldots,|\alpha_j| = k_j$ le membre de gauche de l'inégalité est majoré par :

$$C^{N+1} \sum C_{k_1\ldots k_j} \, k_1!\ldots k_j!$$

(En effet,

$$|D^\alpha x_N| \leqslant C^{|\alpha|+1} N^{|\alpha|} \leqslant C_1^N |\alpha|! \; , \; |\alpha| \leqslant N$$

car $\quad N^{|\alpha|}/|\alpha|! \leqslant N^N/N! \leqslant C_2^N$).

Puisque la dérivée D_{i_k} opère sur tous les termes suivants dans $D_{i_1} a_1 \ldots D_{i_j} x_N$, il est facile de voir que :

$$\sum C_{k_1\ldots k_j} x_1^{k_1}\ldots x_j^{k_j} = (x_1 + \ldots + x_j)(x_2 + \ldots + x_j) \ldots x_j.$$

Il suit que :

$$\sum C_{k_1\ldots k_j} k_1!\ldots k_j! = \int_0^{+\infty}\!\!\ldots\int_0^{+\infty} (x_1+\ldots+x_j)(x_2+\ldots+x_j)\ldots x_j e^{-(x_1+\ldots+x_j)} dx_1\ldots dx_j$$

$$= \frac{(2j-1)!}{2^{j-1}(j-1)!} \leqslant 2^j \, j!$$

Donc,

$$|D_{i_1} a_1 D_{i_2} \ldots D_{i_j} x_N| \leqslant C^{N+1} 2^j \, j! \, .$$

(ii) Dans le cas général, on se ramène à ce cas en introduisant la fonction 1 autant de fois qu'il le faut, ce qui donne :

$$|D^{\alpha_1} a_1 D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_j} \chi_N| \leq C^{N+1} 2^{|\alpha_1|+\dots|\alpha_j|} (|\alpha_1|+\dots+|\alpha_j|)!$$

ce qui termine la démonstration du lemme 1.7.

Lorsqu'on considère $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la suite $u_N = \chi_N u$, où χ_N est une suite du type (1.5), est bornée dans $\mathcal{E}'(\Omega)$ puisque $|D^\alpha \chi_N| \leq C_\alpha$, ie : $|u_N(\xi)| \leq C.(1+|\xi|)^M$ pour $N = 0,1,\dots$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dans le problème des itérés qui nous intéresse ici, cette propriété est remplacée par le résultat suivant :

PROPOSITION 1.8. Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, P un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques dans Ω, $K \subset \Omega$ un compact et $\chi_N \in C_0^\infty(K)$ vérifiant $|D^\alpha \chi_N| \leq C(CN)^{|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leq N = 0,1,\dots$ Alors la suite $f_N = \chi_{pmN+q} P^N u$, où p et q sont deux entiers indépendants de N, vérifie :

$$|\hat{f}_N(\xi)| \leq C.(C(mN+|\xi|))^{mN+M} \quad , \quad N = 0,1,\dots$$

pour des constantes $C > 0$ et M.

DEMONSTRATION. On a :

$$\hat{f}_N(\xi) = \int e^{-i<x,\xi>} \chi_{pmN+q}(x) \, P^N u(x) dx$$

$$= \int u(x) \, {}^tP^N(\chi_{pmN+q}(x) \, e^{-i<x,\xi>}) dx$$

où ${}^tP$ est l'opérateur adjoint de l'opérateur P. On pose :

$${}^tP(\chi_{pmN+q} \, e^{-i<x,\xi>}) = e^{-i<x,\xi>} |\xi|^m \, R \, \chi_{pmN+q}$$

où $R = R_0 + R_1 + \dots + R_m$

avec $R_j = R_j(x,\xi,D)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant j$, à coefficients analytiques qui sont homogènes de degré $-j$ par rapport à $\xi \in \mathbb{R}^n$; plus précisément, si :

$$^tP(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

alors :

$$R_j = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sum_{\substack{\beta\leqslant\alpha \\ |\beta|=m-j}} a_\alpha \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \frac{\xi^\beta}{|\xi|^m} D^{\alpha-\beta}.$$

Donc :

$$^tP^N(e^{-i<x,\xi>}\chi_{pmN+q}(x)) = e^{-i<x,\xi>}|\xi|^{mN} R^N \chi_{pmN+q}(x)$$

$$= e^{-i<x,\xi>}|\xi|^{mN} \sum_{\substack{0\leqslant j_i\leqslant m \\ 1\leqslant i\leqslant N}} R_{j_1}\cdots R_{j_N}\chi_{pmN+q}(x).$$

Or il existe une constante $C > 0$ telle que si $j_1+\ldots+j_N+|\alpha| \leqslant pmN+q$, on a :

(1.6) $$|D^\alpha R_{j_1}\cdots R_{j_N}\chi_{pmN+q}| \leqslant C^{N+1}|\xi|^{-(j_1+\ldots+j_N)} N^{j_1+\ldots+j_N+|\alpha|}$$

Cette estimation se démontre en remarquant tout d'abord que par homogénéité il suffit de la prouver quand $|\xi| = 1$; d'autre part si $a_{\alpha,j}(x,\xi)$ sont les coefficients de R_j pour $|\alpha| \leqslant j = 0,1,\ldots,m$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|D^\beta a_{\alpha j}(x,\xi)| \leqslant C^{|\beta|+1} |\beta|!$$

pour $\beta \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant j = 0,1,\ldots,m$, $x \in K$, $|\xi| = 1$; l'estimation est alors une conséquence du lemme 1.7 puisque $(j_1+\ldots+j_N+|\alpha|)! \leqslant C^N N^{j_1+\ldots+j_N+|\alpha|}$

Si M est l'ordre de u sur K, on a :

$$|\hat{f}_N(\xi)| \leqslant C|\xi|^{mN} \sum_{|\alpha|\leqslant M} (1+|\xi|)^{M-|\alpha|} \operatorname{Sup}_x |D^\alpha R^N \chi_{pmN+q}(x)|.$$

Compte-tenu de (1.6), on en déduit que :

$$|\hat{f}_N(\xi)| \leq C.(C(mN+|\xi|))^{mN+M} \quad , \ N = 0,1,\ldots, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

II - FRONT D'ONDE.

Dans le cas où une distribution u n'est pas $C^L(V)$ pour un voisinage V d'un point x_0, on peut obtenir des informations sur la structure des singularités en x_0, en examinant les directions pour lesquelles (1.3) n'est pas satisfaite ; ce qui conduit à la définition du front d'onde donnée par L. Hörmander ([10], définition 3.1) que l'on rappelle :

DEFINITION 2.1. Soient $x_0 \in \Omega$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$; on dit que (x_0,ξ_0) est dans le complémentaire du front d'onde $WF_L(u)$ de u par rapport à C^L si et seulement si il existe un voisinage ouvert U de x_0, un voisinage ouvert conique Γ de ξ_0 et une suite bornée $u_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ telle que :

$$u_N = u \quad \text{dans} \quad U$$

$$(2.1) \qquad |\hat{u}_N(\xi)| \leq C. \ (C \ L_N/|\xi|)^N \quad , \quad N = 0,1,\ldots, \quad \xi \in \Gamma$$

pour une constante $C > 0$.

REMARQUE 2.2. Une estimation de la forme :

$$(2.1)' \quad |\hat{u}_N(\xi)| \leq C \ (C \ L_{N+k})^{N+k} |\xi|^{k-N} \quad , \quad N = 0,1,\ldots, \quad \xi \in \Gamma$$

avec k indépendant de N peut remplacer (2.1). En effet, U_{N+k} satisfait (2.1) avec une nouvelle constante C (cf.(1.3)').

Rappelons le lemme suivant (L. Hörmander [10], lemme 3.3) qui précise cette définition en particularisant la suite u_N :

LEMME 2.3. Avec les notations de la définition 2.1, soit F un voisinage conique de ξ_0, contenu dans Γ qui est fermé dans $\mathbb{R}^n\setminus\{o\}$. Si χ_N est une suite de fonctions de $C_0^\infty(U)$ à support dans un compact fixe et vérifiant :

$$|D^\alpha \chi_N| \leqslant C(CN)^{|\alpha|} \quad |\alpha| \leqslant N = 0,1,\ldots$$

alors la suite $\chi_N u$ satisfait une estimation du type (2.1)' dans F.

Ce lemme permet en particulier de montrer que la projection de $WF_L(u)$ sur Ω est le complémentaire du plus grand sous-ensemble ouvert de Ω dans lequel u est C^L ; il permet aussi de montrer que :

$$WF_L(Pu) \subset WF_L(u)$$

pour tout opérateur différentiel P à coefficients analytiques.

De même pour le problème des itérés qui nous intéresse ici, étant donné un opérateur différentiel P à coefficients analytiques, dans le cas où u n'est pas $C^L(V,P)$ pour un voisinage V de x_0, on peut obtenir des informations sur la structure des singularités en x_0 en examinant les directions pour lesquelles (1.4) n'est pas satisfaite, ce qui nous conduit à la définition du front d'onde associé aux itérés de P suivante :

DEFINITION 2.4. Soient $x_0 \in \Omega$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n\setminus\{o\}$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et P un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques dans Ω ; on dit que (x_0,ξ_0) est dans le complémentaire du front d'onde $WF_L(u;P)$ de u par rapport à C^L et aux itérés de P si et seulement si il existe un voisinage ouvert U de x_0, un voisinage ouvert conique Γ de ξ_0 et une suite $f_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tels que :

$$f_N = P^N u \quad \text{dans} \quad U$$

$$(2.2) \quad |\hat{f}_N(\xi)| \leqslant C\,(C(L_{mN}+|\xi|))^{mN+M} \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad , \quad N = 0,1,\ldots$$

(2.3) $|\hat{f}_N(\xi)| \leqslant C\,(CL_{mN})^{mN}(1+|\xi|)^M$, $\xi \in \Gamma$, $N = 0,1,\ldots$

pour des constantes $C > 0$ et M.

Comme pour $WF_L(u)$ il est habituel de regarder $WF_L(u;P)$ non seulement comme un sous-ensemble conique fermé de $\Omega \times (\mathbb{R}^n\setminus\{o\})$ mais aussi comme un sous-ensemble conique fermé de $T^*(\Omega)\setminus\{o\}$ en utilisant l'identification standard de l'espace cotangent de $\mathbb{R}^n$ avec $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. En fait, on va prouver que la définition est invariante par changement de coordonnées.

On donne tout d'abord un lemme pour $WF_L(u,P)$ analogue au lemme 2.2 pour $WF_L(u)$.

LEMME 2.5. Avec les notations de la définition 2.4, soit F un voisinage conique de ξ_o, contenu dans Γ, qui est fermé dans $\mathbb{R}^n\setminus\{o\}$. Si χ_N est une suite de fonctions de $C_o^\infty(U)$ à support dans un compact fixé vérifiant :

$$|D^\alpha \chi_N| \leqslant C\,(CN)^{|\alpha|} \quad , \ |\alpha| \leqslant N = 0,1,\ldots$$

alors la suite $\chi_{mN+q}\,P^N u$, où q est un entier indépendant de N avec $q \geqslant \mathrm{Max}(n+1+M, n+1)$ satisfait une estimation du type (2.3) dans F.

DEMONSTRATION. Utilisant le fait que $\chi_{mN+q}\,P^N u = \chi_{mN+q}\,f_N$, on obtient :

$$\widehat{\chi_{mN+q}\,P^N u}(\xi) = (2\pi)^{-n}\int \hat{\chi}_{mN+q}(\xi-\eta)\,\hat{f}_N(\eta)\,d\eta.$$

Remarquant ensuite que l'on peut toujours supposer $M \geqslant 0$, on déduit des majorations faites sur les dérivées de χ_N qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\hat{\chi}_N(\eta)| \leqslant C^{N+1}\,N^N(N+|\eta|)^{-N} \quad , \quad N = 0,1,\ldots$$

et

$$|\hat{\chi}_N(\eta)| \leqslant C\,N^{n+1+M}(1+|\eta|)^{-n-1-M} \quad , \quad N \geqslant n+1+M.$$

Tout d'abord :

$$\int_\Gamma |\hat{\chi}_{mN+q}(\xi-\eta)||\hat{f}_N(\eta)|d\eta \leq C\ (mN+q)^{n+1+M} C^{mN+1} L_{mN}^{mN} \int (1+|\xi-\eta|)^{-n-1-M}(1+|\eta|)^M d\eta$$

d'où pour une autre constante $C' > 0$

$$\leq C'^{mN+1}\ L_{mN}^{mN}(1+|\xi|)^{|n+1+M|}.$$

De plus, il existe une constante $K > 0$ telle que pour $\xi \in F$ et $\eta \notin \Gamma$ on ait :

$$|\xi-\eta| \geq K(|\xi| + |\eta|). \quad \text{Or,}$$

$$\int_{|\xi-\eta|>K(|\xi|+|\eta|)} |\hat{\chi}_{mN+q}(\xi-\eta)||\hat{f}_N(\eta)|d\eta$$

$$\leq C^{mN+q+1} L_{mN+q}^{mN+q} C^{mN+1+M} \int_{|\xi-\eta|>K(|\xi|+|\eta|)} \cdot (L_{mN+q}+|\xi-\eta|)^{-mN-q}(L_{mN}+|\eta|)^{mN+M} d\eta$$

d'où pour une autre constante $C'' > 0$

$$\leq C''^{mN+1}\ L_{mN}^{mN}.$$

Ainsi la suite $\chi_{mN+q}\ P^N u$ vérifie des inégalités du type (2.3) dans F.

On peut alors montrer le résultat suivant :

THEOREME 2.6. Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et P un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans Ω. Alors la projection de $WF_L(u;P)$ est le complémentaire du plus grand sous-ensemble ouvert Ω' de Ω tel que $u \in C^L_{loc}(\Omega';P)$.

DEMONSTRATION. Si $u \in C^L(V;P)$ pour un voisinage V de x_0, il suit de la proposition 1.3 que $(x_0,\xi_0) \notin WF_L(u,P)$ pour tout $\xi_0 \in \mathbb{R}^n\setminus\{o\}$. Inversement, soit x_0 tel que $(x_0,\xi_0) \notin WF_L(u,P)$ pour tout $\xi_0 \in \mathbb{R}^n\setminus\{o\}$. Si on peut montrer que la suite f_N dans la définition 2.4 peut être prise indépendante de ξ_0, il suivra de la proposition

1.4 que $u \in C^L(V;P)$ pour un voisinage V de x_0. Or grâce au théorème de Borel-Lebesgue ceci résulte du lemme 2.5.

On montre maintenant l'invariance par un changement de coordonnées analytiques de la définition de $WF_L(u,P)$ comme pour la définition de $WF_L(u)$. On rappelle pour cela deux lemmes de L. Hörmander ([10], lemmes 3.6 et 3.7).

Tout d'abord, on rappelle un lemme qui montre que les conditions imposées aux fonctions de troncature sont invariantes par un changement de variables analytiques :

LEMME 2.7. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $\Omega' \subset \mathbb{R}^\nu$ deux ouverts, a une fonction analytique dans Ω et $f : \Omega' \to \Omega$ une fonction analytique propre. Si χ_N est une suite de fonctions de $C_0^\infty(\Omega)$ à support dans un compact fixe et vérifiant :

$$|D^\alpha \chi_N(x)| \leqslant C(CN)^{|\alpha|} \quad , \quad |\alpha| \leqslant N = 0,1,\ldots$$

alors la suite $a\chi_N \circ f$ a les mêmes propriétés avec une autre constante C.

Ensuite, on rappelle un lemme qui permet de changer de variables dans la définition du front d'onde par transformation de Fourier.

LEMME 2.8. Soit F un ensemble compact de fonctions analytiques à valeurs réelles dans Ω n'ayant pas de point critique en x_0. Si χ_N est une suite de fonctions de $C_0^\infty(\Omega)$ vérifiant :

$$|D^\alpha \chi_N(x)| \leqslant C(CN)^{|\alpha|} \quad , \quad |\alpha| \leqslant N = 0,1,\ldots$$

et ayant leurs supports dans un même voisinage suffisamment petit de x_0, alors il existe une constante $C' > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $f \in F$ on ait :

$$\left|\int \chi_N(x)\, e^{-itf(x)} dx\right| \leqslant C'(C'N)^N \, (N+|t|)^{-N} \quad , \quad N = 0,1,\ldots$$

On peut maintenant donner un théorème qui entraînera facilement l'invariance recherchée.

THEOREME 2.9. Soient $x_o \in \Omega$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et P un opérateur différentiel à coefficients analytiques d'ordre m dans Ω. De plus, soit F un ensemble compact de fonctions analytiques à valeurs réelles avec $(x_o, df(x_o)) \notin WF_L(u,P) \cup \{o\}$ quand $f \in F$. Si les fonctions χ_N appartiennent à $C_o^\infty(\Omega)$, vérifient :

$$|D^\alpha \chi_N| \leqslant C\ (CN)^{|\alpha|}\ ,\ |\alpha| \leqslant N = 0,1,\dots$$

et ont leurs supports dans un même voisinage suffisamment petit de x_o, alors il existe des constantes $C' > 0$, M' et un entier $q \geqslant 0$ telles que :

$$\left|\int \chi_{mN+q}\ P^N u\ e^{-itf}\ dx\right| \leqslant C.\ (CL_{mN})^{mN} t^{M'}\ ,\quad N = 0,1,\dots,\ t \geqslant 1.$$

DEMONSTRATION. D'après la définition 2.4 et le lemme 2.5 on peut trouver un voisinage ouvert V de x_0 et un voisinage ouvert conique Γ de $\{df(x_0)\ ;\ f \in F\}$ tels qu'il existe une suite $f_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ avec :

$$f_N = P^N u \quad \text{dans} \quad V$$

$$(2.2)\quad |\hat{f}_N(\xi)| \leqslant C.\ (C(L_{mN}+|\xi|))^{mN+M}\ ,\ \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$(2.3)\quad |\hat{f}_N(\xi)| \leqslant C.\ (C\ L_{mN})^{mN}\ (1+|\xi|)^M\ ,\ \xi \in \Gamma\ ,\ N = 0,1,\dots$$

Supposons χ_N à support dans V et posons $v_{N,t} = \chi_{mN+q}\ e^{-itf}$ où q est un entier fixé $> n+1+M$. Alors on obtient :

$$\int \chi_{mN+q}\ P^N u\ e^{-itf}\ dx = (2\pi)^{-n} \int \widehat{f_N}(\xi)\ \widehat{v_{N,t}}(-\xi)\ d\xi$$

où

$$\widehat{v}_{N,t}(-\xi) = \int \chi_{mN+q}(x)\ e^{i(\langle x,\xi\rangle - t\, f(x))} dx.$$

Les fonctions normalisées :

$$x \to (\langle x,\xi\rangle - t\, f(x)) \,/\, (|t| + |\xi|)$$

avec $f \in F$ et $t > 0$ forment un ensemble compact de fonctions analytiques sans point critique en x_0 pourvu que $\xi \notin \Gamma$ ou $\xi \in \Gamma$ et $\min(|t|/|\xi|, |\xi|/|t|) < \varepsilon$ pour un ε suffisamment petit.

Si les χ_N ont leurs supports suffisamment petits autour de x_0, le lemme 2.8 permet d'évaluer $\widehat{v_{N,t}}(-\xi)$: il existe une constante $C' > 0$ telle que :

$$(2.4) \quad |\widehat{v_{N,t}}(-\xi)| \leqslant C' \, (C'(mN+q))^{mN+q} \, (mN+q+|t|+|\xi|)^{-mN-q}, \; N = 0,1,\dots$$

pour $f \in F$, $t > 0$, $\xi \notin \Gamma$ ou $\xi \in \Gamma$ et $\min(|t|/|\xi|, |\xi|/|t|) < \varepsilon$.

Ainsi de (2.2) , (2.3) et (2.4) on déduit :

$$\left|\int \chi_{m_{N+q}} \, P^N u \, e^{-itf} \, dx\right| \leqslant \int C(C(L_{mN}+|\xi|))^{mN+M} \, C'\left(\frac{C' L_{mN+q}}{L_{mN+q}+|t|+|\xi|}\right)^{mN+q} d\xi$$

$$+ \int_{\varepsilon t<|\xi|<t/\varepsilon} C \, (CL_{mN})^{mN} (1+|\xi|)^M \, d\xi$$

et pour une autre constante C' :

$$\leqslant C' \, (C' \, L_{mN})^{mN} \, (t^{-q+M+n} + (1 + \tfrac{t}{\varepsilon})^M \, t^n)$$

ce qui donne l'inégalité annoncée dans le théorème 2.9.

THEOREME 2.10. La définition de $WF_L(u,P)$ est invariante par changement de coordonnées analytiques.

DEMONSTRATION. Soit $f : \Omega \to \Omega'$ un difféomorphisme analytique de Ω sur un ouvert Ω' de R^n qui transforme l'opérateur P en l'opérateur P_f défini par :

$$P_f v = P(v \circ f) \circ f^{-1} \quad , \quad v \in C_0^\infty(\Omega').$$

Donc, pour tout entier $N = 0,1,...$

$$P_f^N v = P^N(vof)of^{-1}.$$

On pose : $y = f(x)$, $u = vof$.

Si $(x_0,\xi_0) \notin WF_L(u,P)$ on va montrer que $(y_0,\eta_0) \notin WF_L(v;P_f)$ où $y_0 = f(x_0)$ et $\xi_0 = {}^t f'(x_0).\eta_0$.

Soit χ_N une suite de fonctions de $C_0^\infty(\Omega)$ à support dans un voisinage suffisamment petit de x_0, et identique à 1 au voisinage de x_0 et vérifiant $|D^\alpha \chi_N| \leqslant C(CN)^{|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leqslant N = 0,1,...$

Soit Γ associé à ξ_0 comme dans la définition 2.4. Pour $\eta \in ({}^t f'(x_0))^{-1}(\Gamma)$ voisinage ouvert conique de η_0, la famille de fonctions :

$$f_\eta : x \to \frac{1}{1+|\eta|} <f(x),\eta>$$

est un ensemble compact de fonctions analytiques à valeurs réelles avec $(x_0, df_\eta(x_0)) \notin WF_L(u;P) \cup \{o\}$ car $(x_0,\xi_0) / WF_L(u,P)$. Comme les fonctions $|{}^t f'|\chi_N$ vérifient d'après le lemme 2.7 :

$$|D^\alpha(|{}^t f'|\chi_N)| \leqslant C\ (CN)^{|\alpha|}\ ,\ |\alpha| \leqslant N = 0,1,...$$

alors d'après le théorème 2.9 il existe des constantes C', M' et q telles que :

$$\left|\int |{}^t f'|\chi_{mN+q}\ P^N u\ e^{-i<f(x),\eta>}dx\right| \leqslant C'\ (C'L_{mN})^{mN}(1+|\eta|)^{M'}\ ,\quad N = 0,1,...$$

Si l'on pose : $\varphi_N(y) = \chi_N of^{-1}$ et $g_N = \varphi_{mN+q}\ P_f^N v$ on a donc :

$$|\hat{g}_N(\eta)| \leqslant C'\ (C'L_{mN})^{mN}(1+|\eta|)^{M'}\quad N = 0,1,...,\eta \in ({}^t f'(x_0))^{-1}(\Gamma).$$

De plus, comme les fonctions φ_N vérifient d'après le lemme 2.7.

$$|D^\alpha \varphi_N| \leqslant C(CN)^{|\alpha|}\quad |\alpha| \leqslant N = 0,1,...$$

la proposition 1.8 assure que g_N vérifie (2.2) dans $\mathbb{R}^n$.

Enfin, $g_N = P_f^N v$ au voisinage de y_0. Donc $(y_0,\eta_0) \notin WF_L(v;P_f)$, ce qui termine la démonstration du théorème 2.10.

THEOREME 2.11. Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et P un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans Ω. Alors $WF_L(u;P) \subset WF_L(Pu) \subset WF_L(u)$.

DEMONSTRATION. Soit $(x_0,\xi_0) \notin WF_L(u)$; il existe un voisinage ouvert U de x_0, un voisinage ouvert conique Γ de ξ_0 et une suite u_N bornée de $\varepsilon'(\Omega)$ tels que $u_N = u$ dans U et $|\widehat{u_N}(\xi)| \leqslant C\,(CL_{N}/|\xi|)^N$ dans Γ pour $N = 0,1,\ldots$ et pour une certaine constante $C > 0$.

Soient K un voisinage compact de x_0 contenu dans U et F un voisinage conique de ξ_0 contenu dans Γ, fermé dans $\mathbb{R}^n\backslash\{o\}$. Soit $\chi_N \in C_0^\infty(U)$, $\chi_N = 1$ dans K et $|D^\alpha \chi_N| \leqslant C\,(CN)^{|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leqslant N = 0,1,\ldots$ On va montrer que $f_N = \chi_{2mN}\, P^N u$ vérifie (2.2) et (2.3). On a :

$$\hat{f}_N(\xi) = \int e^{-i<x,\xi>}\chi_{2mN}(x)\; P^N u(x)dx = \int u(x)\,{}^tP^N(\chi_{2mN}\; e^{-i<x,\xi>})dx$$

$$= |\xi|^{mN} \int e^{-i<x,\xi>} u(x) R^N \chi_{2mN}(x)dx$$

avec les notations de la proposition 1.8. Les calculs faits dans cette démonstration montrent que :

$$|D^\beta(R^N\chi_{2mN})| \leqslant C^{N+1}(mN)^{|\beta|} \quad \text{pour } |\beta| \leqslant mN\ ,\ |\xi| \geqslant mN.$$

De là on déduit grâce au lemme 2.3 que $\widehat{f_N}(\xi)$ satisfait (2.3) pour $\xi \in F$ et $|\xi| \geqslant mN$.

Enfin, la proposition 1.8 assure que f_N satisfait (2.2) pour $\xi \in \mathbb{R}^n$. Donc $(x_0,\xi_0) \notin WF_L(u,P)$.

Ainsi $WF_L(u,P) \subset WF_L(u)$. Comme $WF_L(Pu,P) = WF_L(u,P)$ et $WF_L(Pu) \subset WF_L(u)$ on a démontré le théorème 2.11.

III - VARIETES $\sum^{m'}_{\rho,\delta}(P)$ ET LEMMES TECHNIQUES.

DEFINITION 3.1. Soient ρ,δ et m' trois nombres réels, P un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans Ω, $x_0 \in \Omega$ et $\xi_0 \in \mathbb{R}^n\setminus\{o\}$. On dit que (x_0,ξ_0) est dans le complémentaire de $\sum^{m'}_{\rho,\delta}(P)$ s'il existe un voisinage ouvert U de x_0, un voisinage ouvert conique Γ de ξ_0 et une constante $C > 0$ tels que pour $x \in U$, $\xi \in \Gamma$ avec $|\xi|$ grand, α et $\beta \in \mathbb{N}^n$, on ait :

$$(3.1) \quad |p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)| \leqslant C^{|\beta|+1}\beta! \; |p(x,\xi)|\,|\xi|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

$$(3.2) \quad |\xi|^{m'} \leqslant C\,|p(x,\xi)|$$

où $p(x;\xi)$ est le symbole de P, et $p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x;\xi) = \dfrac{\partial^{|\alpha+\beta|}p(x,\xi)}{\partial\xi^\alpha\partial x^\beta}$.

Si $\sum^{m'}_{\rho,\delta}(P) = \emptyset$ alors P est hypoelliptique d'après L. Hörmander [9].

PROPOSITION 3.2. Avec les notations de la définition 3.1., si $\delta < \rho$ alors $(x_0,\xi_0) \in \sum^{m'}_{\rho,\delta}(P)$ si et seulement si $(x_0,-\xi_0) \in \sum^{m'}_{\rho,\delta}({}^tP)$, où ${}^tP$ est le transposé de l'opérateur P.

DEMONSTRATION. Le symbole ${}^tp(x;\xi)$ de l'opérateur ${}^tP$ est donné par :

$${}^tp(x,\xi) = \sum_{|\gamma|\leqslant m} \frac{i^{|\gamma|}}{\gamma!}\, p^{(\gamma)}_{(\gamma)}(x;-\xi)$$

où m désigne l'ordre de l'opérateur P.

Si $(x_0,\xi_0) \notin \sum^{m'}_{\rho,\delta}(P)$, on a avec les notations de la définition 3.1. pour $x \in U$, $\xi \in \Gamma$, α et $\beta \in \mathbb{N}^n$:

$$|{}^tp^{(\alpha)}_{(\beta)}(x;\xi)| \leq \sum_{|\gamma|\leq m} \frac{1}{\gamma!} C^{|\beta|+|\gamma|+1}(\beta+\gamma)!\,|p(x,-\xi)|\ \ |\xi|^{-\rho|\alpha+\gamma|+\delta|\beta+\gamma|}$$

Pour $|\xi| \geq 1$, on a donc, avec une nouvelle constante C,

$$(3.3)\quad |{}^tp^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)| \leq C^{|\beta|+1}\beta!\ |\xi|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\ |p(x,-\xi)|.$$

or :

$$|p(x;-\xi)| \leq |{}^tp(x;\xi)| + \sum_{1\leq|\gamma|\leq m} \frac{1}{\gamma!} |p^{(\gamma)}_{(\gamma)}(x;-\xi)|$$

donc :

$$|p(x;-\xi)\ \ (1 - \sum_{1\leq|\gamma|\leq m} C^{|\gamma|+1}\ |\xi|^{-\rho|\gamma|+\delta|\gamma|}) \leq |{}^tp(x;\xi)|$$

Ainsi, si $\delta < \rho$, on a pour $|\xi|$ grand

$$(3.4)\quad |p(x;-\xi)| \leq 2\ |{}^tp(x;\xi)|.$$

De (3.3) et (3.4) on déduit les inégalités (3.1) et (3.2) pour le symbole ${}^tp$.

PROPOSITION 3.3. Avec les notations de la définition 3.1., si $1-\rho\leq\delta<\rho$ alors l'ensemble $\Sigma^{m'}_{\rho,\delta}(P)$ est invariant par changement de coordonnées analytiques.

DEMONSTRATION. Soit $f : \Omega \to \Omega'$ un difféomorphisme analytique entre deux ouverts Ω et Ω' de $\mathbb{R}^n$ qui transforme P en l'opérateur P_f défini par :

$$P_f v = P(v \circ f)\circ f^{-1}\quad ,\quad v \in C_0^\infty(\Omega').$$

On pose $x = \overset{-1}{f}(y)$ et $\xi = ({}^tf'(x)).\eta$;

alors le symbole de P_f est :

$$p_f(y;\eta) = \sum_{|\gamma|\leq m} \frac{1}{\gamma!}\, p^{(\gamma)}(x;\xi)\ \Phi_\gamma(x;\eta)$$

où Φ_γ est un polynôme en η de degré $\leq |\gamma|/2$ et à coefficients analytiques en x.

Si $(x_0,\xi_0) \notin \Sigma^{m'}_{\rho,\delta}(P)$, on va montrer que $(y_0,\eta_0) \notin \Sigma^{m'}_{\rho,\delta}(P_f)$ où $y_0 = f(x_0)$ et $\xi_0 = ({}^t f'(x_0)).\eta_0$. Avec les notations de la définition 3.1, on supposera U relativement compact.

Plus généralement posons :

$$x = x(y;\eta) = f^{-1}(y) \quad \text{et } \xi = \xi(y;\eta) = ({}^t f')\,(f^{-1}(y)).\eta$$

donc x est une fonction analytique en y et ξ est une fonction analytique en y linéaire en η. Par suite, il existe une constante C > 0 telle que pour $y \in f(U)$, $\eta \in ({}^t f'(x_0))^{-1}(\Gamma)$, $|\eta|$ grand, on ait :

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha+\beta|} x_i}{\partial\eta^\alpha \partial y^\beta}\right| \leq C^{|\alpha|+|\beta|+1} \alpha!\ \beta!\ |\eta|^{-|\alpha|}$$

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha+\beta|} \xi_i}{\partial\eta^\alpha \partial y^\beta}\right| \leq C^{|\alpha|+|\beta|+1} \alpha!\ \beta!\ |\eta|^{1-|\alpha|}.$$

La formule de Faa de Bruno de dérivation d'une fonction composée donne :

$$\frac{\partial^{|\theta+\varepsilon|}}{\partial\eta^\theta \partial y^\varepsilon} p^{(\gamma)}(x;\xi) = \sum_{*} \frac{\theta!\varepsilon!}{\theta^1!\ldots\theta^n!.\varepsilon^1!\ldots\varepsilon^n!}\, p^{(\gamma+(|\theta^1|,\ldots,|\theta^n|))}_{(|\varepsilon^1|,\ldots,|\varepsilon^n|)}(x;\xi)\times$$
$$\prod_{0\neq(\mu,\nu)\leq(\theta,\varepsilon)} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\mu!\nu!}\frac{\partial^{|\mu+\nu|}x_i}{\partial\eta^\mu \partial y^\nu}\right)^{\varepsilon^i_{(\mu,\nu)}} \left(\frac{1}{\mu!\nu!}\frac{\partial^{|\mu+\nu|}\xi_i}{\partial\eta^\mu \partial y^\nu}\right)^{\theta^i_{(\mu,\nu)}}$$

la sommation $\sum_{*}$ se faisant sur les multi-indices (θ^i,ε^i) avec $\theta^i = (\theta^i_{(\mu,\nu)})_{(\mu,\nu)}$ $\varepsilon^i = (\varepsilon^i_{(\mu,\nu)})_{(\mu,\nu)}$, $i = 1,\ldots,n$ tels que :

$$\sum_{0\neq(\mu,\nu)\leq(\theta,\varepsilon)} (\mu,\nu).\left(\sum_{i=1}^{n} \theta^i_{(\mu,\nu)} + \varepsilon^i_{(\mu,\nu)}\right) = (\theta,\varepsilon).$$

En particulier, notons que dans une telle somme, on a :

$$\sum_{0\neq(\mu,\nu)\leqslant(\theta,\varepsilon)} |(\mu,\nu)|(\sum_{i=1}^{n} \theta^{i}_{(\mu,\nu)} + \varepsilon^{i}_{(\mu,\nu)}) = |(\theta,\varepsilon)|.$$

Donc :

$$\left|\frac{\partial^{\theta+\varepsilon}}{\partial\eta^{\theta}\partial y^{\varepsilon}} p^{(\gamma)}(x;\xi)\right| \leqslant \sum_{*} \frac{\theta!\ \varepsilon!}{\theta^{1}!\dots\theta^{n}!\varepsilon^{1}!\dots\varepsilon^{n}!}(|\varepsilon^{1}|+\dots+|\varepsilon^{n}|)!\ C^{|\varepsilon^{1}|+\dots+|\varepsilon^{n}|+1}|p(x;\xi)|$$

$$\times\ |\xi|^{-\rho(|\theta^{1}|+\dots+|\theta^{n}|+|\gamma|)+\delta(|\varepsilon^{1}|+\dots+|\varepsilon^{n}|)}$$

$$\times \prod_{(\mu,\nu)} \prod_{i=1}^{n} (C^{|\mu|+|\nu|+1}|\xi|^{-|\mu|})^{\varepsilon^{i}_{(\mu,\nu)}}(C^{|\mu|+|\nu|+1}|\xi|^{1-|\mu|})^{\varepsilon^{i}_{(\mu,\nu)}}$$

donc, pour une autre constante C' > 0

$$(3.5)\qquad \begin{aligned}&\leqslant \sum_{*} \frac{\theta!\ \varepsilon!}{\theta^{1}!\dots\theta^{n}!\varepsilon^{1}!\dots\varepsilon^{n}!}(|\varepsilon^{1}|+\dots+|\varepsilon^{n}|)!\ C^{|\theta|+|\varepsilon|+1}|p(x,\xi)|\times\\ &|\xi|^{-\rho|\gamma|-|\theta|+(1-\rho)(|\theta^{1}|+\dots+|\theta^{n}|)+\delta(|\varepsilon^{1}|+\dots+|\varepsilon^{n}|)}\end{aligned}$$

Or puisque f est un difféomorphisme, il existe une constante C" > 0 telle que pour y et η on ait :

$$(3.6)\qquad \frac{1}{C''}|\xi| \leqslant |\eta| \leqslant C''|\xi|.$$

De plus,

$$p(x;\xi) = p_{f}(y,\eta) - \sum_{1\leqslant|\gamma|\leqslant m} \frac{1}{\gamma!} p^{(\gamma)}(x;\xi)\ \phi_{\gamma}(x,\eta)$$

donc :

$$|p(x;\xi)| \leqslant |p_{f}(y;\eta)| + \sum_{1\leqslant|\gamma|\leqslant m} C^{|\gamma|+1}|p(x;\xi)|\ |\xi|^{-\rho|\gamma|}C|\eta|^{|\gamma|/2}$$

Compte tenu de (3.6) et du fait que $\rho > \frac{1}{2}$, on en déduit que pour $|\eta|$ grand, on a :

$$(3.7)\qquad |p(x;\xi)| \leqslant 2\ |p_{f}(y;\eta)|.$$

Ainsi de (3.5), (3.6) et (3.7) on déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour $y \in f(U)$, $\eta \in ({}^t f'(x_0)(\Gamma))$, $|\eta|$ grand, on ait :

$$\left|\frac{\partial^{|\theta+\varepsilon|}}{\partial\eta^{\theta}\partial y^{\varepsilon}} p^{(\gamma)}(x;\xi)\right| \leq \sum_{*} \frac{\theta!\ \varepsilon!}{\theta^1!\dots\theta^n!\varepsilon^1!\dots\varepsilon^n!}(|\varepsilon^1|+\dots+|\varepsilon^n|)!\times$$

$$C^{|\theta|+|\varepsilon|+1}|p_f(y;\eta)|\,|\eta|^{-\rho|\gamma|-|\theta|+(1-\rho)(|\theta^1|+\dots+|\theta^n|)+\delta\,|\varepsilon^1|+\dots+|\varepsilon^n|)}.$$

Par ailleurs, comme $\phi_\gamma(x;\eta)$ est un polynôme de degré $\leq \frac{|\gamma|}{2}$ à coefficients analytiques en x, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour y,η comme précédemment :

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha-\theta|+|\beta-\varepsilon|}}{\partial\eta^{\alpha-\theta}\,\partial^{\beta-\varepsilon}}\phi_\gamma(x;\eta)\right| \leq C^{|\beta-\varepsilon|+1}(\beta-\varepsilon)!\ |\eta|^{|\gamma|/2-|\alpha|+|\theta|}$$

Par suite, compte tenu de la formule de Leibnitz, on en déduit que :

$$|p^{(\alpha)}_{f(\beta)}(y;\eta)| \leq \sum_{|\gamma|\leq m}\frac{1}{\gamma!}\sum_{\substack{\theta\leq\alpha\\ \varepsilon\leq\beta}}\frac{\alpha!\ \beta!}{\theta!\ \varepsilon!}\frac{1}{(\alpha-\theta)!}C^{|\beta-\varepsilon|+1}\ C^{|\theta|+|\varepsilon|+1}|p_f(y;\eta)|$$

$$\times\sum_{*}\frac{\theta!\ \varepsilon!}{\theta^1!\dots\theta^n!\varepsilon^1!\dots\varepsilon^n!}(|\varepsilon^1|+\dots+|\varepsilon^n|)!|\eta|^{-\rho|\gamma|+\frac{|\gamma|}{2}-|\alpha|+(1-\rho)(|\theta^1|+\dots+|\theta^n|)+\delta(|\varepsilon^1|+\dots+|\varepsilon^n|)}.$$

Comme $\rho > \frac{1}{2}$, on a $-\rho|\gamma|+|\gamma|/2 \leq 0$. De plus, on a :

$$(1-\rho)\ (|\theta^1|+\dots+|\theta^n|) + \delta(|\varepsilon^1|+\dots+|\varepsilon^n|)-|\alpha| \leq -\rho|\alpha|+\delta|\beta|.$$

En effet, cela revient à dire :

$$(1-\rho)(|\theta^1|+\dots+|\theta^n|-|\alpha|) \leq \delta(|\beta|-(|\varepsilon^1|+\dots+|\varepsilon^n|))$$

Or, ceci résulte des inégalités $1-\rho \leq \delta$, $|\theta^1|+\dots+|\theta^n|+|\varepsilon^1|+\dots+|\varepsilon^n| \leq |\theta|+|\varepsilon| \leq |\alpha|+|\beta|$ et $|\varepsilon^1|+\dots+|\varepsilon^n| \leq |\varepsilon| \leq |\beta|$ puisque $x = x(y;\eta)$ est indépendant de η.

On obtient donc, pour une autre constante $C > 0$:

$$(3.8)\quad |P^{(\alpha)}_{f(\beta)}(y;\eta)| \leqslant \sum_{|\gamma|\leqslant m} \frac{1}{\gamma!} \sum_{\substack{\theta\leqslant\alpha\\ \varepsilon\leqslant\beta}} \frac{\alpha!\ \beta!}{\theta!\ \varepsilon!} C^{|\alpha|+|\beta|+1} |P_f(y;\eta)|\,|\eta|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

$$\times \sum_{*} \frac{\theta!\ \varepsilon!}{\theta^1!\ldots\theta^n!\ \varepsilon^1!\ldots\varepsilon^n!}(|\varepsilon^1|+\ldots+|\varepsilon^n|)!$$

Il reste à évaluer la dernière sommation. Or

$$\sum_{*} \frac{\theta!\ \varepsilon!}{\theta^1!\ldots\theta^n!\ \varepsilon^1!\ldots\varepsilon^n!}(|\varepsilon^1|+\ldots+|\varepsilon^n|)! \leqslant \sum_{*} \frac{\theta!\ \varepsilon!}{\theta^1!\ldots\theta^n!\ \varepsilon^1!\ldots\varepsilon^n!}(|\theta^1|+\ldots+|\theta^n|$$

$$+ |\varepsilon^1|+\ldots+|\varepsilon^n|)!$$

cette dernière expression pouvant encore s'écrire sous la forme :

$$\sum_{**} \frac{a!}{m^1!\ldots m^{2n}!}(|m^1|+\ldots+|m^{2n}|)!$$

la sommation $\sum_{**}$ se faisant sur les multi-indices m^i avec $m^i = (m^i_b)_b$, $i = 1,\ldots,2n$, tel que :

$$\sum_{0\not\leqslant b\leqslant a} b.\Big(\sum_{i=1}^{2n} m^i_b\Big) = a$$

(Poser $a = (\theta,\varepsilon)$, $b = (\mu,\nu)$, $m^i_b = \theta^i_{(\mu,\nu)}$ pour $i = 1,2,\ldots,n$ et $m^i_b = \varepsilon^i_{(\mu,\nu)}$ pour $i = n+1,\ldots,2n$)

On a :

$$\sum_{**} \frac{a!}{m^1!\ldots m^{2n}!}(|m^1|+\ldots+|m^{2n}|)! \leqslant \sum_{**} \frac{|a|!}{m^1!\ldots m^{2n}!}(|m^1|+\ldots+|m^{2n}|)!$$

et $m^1!\ldots m^{2n}! = \prod_{i=1}^{2n} \prod_b m^i_b! = \prod_{i=1}^{2n} \prod_{k=1}^{|a|} \Big(\prod_{|b|=k} m^i_b!\Big)$.

Or, pour p nombres entiers $\geqslant 0$, $c_1,\ldots,c_p$, on a l'inégalité :

$$(c_1+\ldots+c_p)! \leqslant p^{|c|}\ c_1!\ldots c_p!$$

où $|c| = c_1+\ldots+c_p$.

Il en résulte, en posant $\mu^i_k = \sum_{|b|=k} m^i_b$, que :

$$\sum_{**} \frac{a!}{m^1!\ldots m^{2n}!} (|m^1|+\ldots+|m^{2n}|)! \leqslant \sum_{***} \frac{|a|!}{\prod_{i=1}^{2n} \prod_{k=1}^{|a|} \mu_k^i!} (\sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^{|a|} \mu_k^i)!\ C^{|a|}$$

pour une certaine constante C, la sommation $\sum_{***}$ étant étendue aux entiers $\mu_k^i \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,2n$, $k = 1,\ldots,|a|$, tels que : $\sum_{i=1}^{2n} (\sum_{k=1}^{|a|} \mu_k^i)k = |a|$.

Posant $P_k = \sum_{i=1}^{2n} \mu_k^i$ et écrivant $\prod_{i=1}^{2n} \prod_{k=1}^{|a|} \mu_k^i! = \prod_{k=1}^{|a|} (\prod_{i=1}^{2n} \mu_k^i!)$, on déduit par le même raisonnement que :

$$\sum_{**} \frac{a!}{m^1!\ldots m^{2n}!} (|m^1|+\ldots+|m^{2n}|)! \leqslant \sum \frac{|a|!}{\prod_{k=1}^{|a|} P_k!} (\sum_{k=1}^{|a|} P_K)!\ C^{|a|} .$$

pour une nouvelle constante $C > 0$, la sommation $\sum$ étant étendue aux entiers $P_k \geqslant 0$, $k = 1,\ldots,|a|$, tels que $\sum_{k=1}^{|a|} k\ P_k = |a|$. D'où :

$$\sum_{**} \frac{a!}{m^1!\ldots m^{2n}!} (|m^1|+\ldots+|m^{2n}|)! \leqslant \sum_{h=1}^{|a|} \sum_{\substack{P_1+\ldots+P_k=h \\ \sum_{k=1}^{|a|} kP_k=|a|}} \frac{|a|!}{\prod_{k=1}^{|a|} P_k!}\ h!\ C^{|a|}$$

Or l'expression :

$$B_{|a|,h} = \sum_{\substack{P_1+\ldots+P_k=h \\ \sum_{k=1}^{|a|} kP_k=|a|}} \frac{|a|!}{\prod_{k=1}^{|a|} P_k!} .$$

est égale à la valeur du polynôme de Bell $B_{|a|,h}$ au point $(1!,2!,\ldots)$, et d'après L. Comtet [5] (page 146), on a :

$$B_{|a|,h} = \binom{|a|-1}{h-1} \frac{|a|!}{h!}$$

On en déduit finalement que, pour une autre constante $C > 0$, on a :

$$\sum_{**} \frac{a!}{m^1!\ldots m^{2n}!} (|m^1|+\ldots+|m^{2n}|)! \leqslant |a|!\ C^{|a|}$$

Il résulte alors de (3.8) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour $y \in f(U)$, $\eta \in ({}^t f'(x_0)(\Gamma)$, $|\eta|$ grand, on ait :

$$|P_{f(\beta)}^{(\alpha)}(y;\eta)| \leqslant C^{|\beta|+1}\ \beta!\ |\eta|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.$$

Ainsi le symbole $P_f(y;\eta)$ vérifie une inégalité du type (3.1) dans un voisinage conique de (y_0,η_0).

L'inégalité (3.7) permet de montrer que $P_f(y;\eta)$ vérifie également (3.2).

Finalement $(y_0;\eta_0) \notin \sum_{\rho,\delta}^{m'}(P_f)$, ce qui achève la démonstration de la proposition 3.3.

Quand $1-\rho\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$, on peut regarder $\sum_{\rho,\delta}^{m'}(P)$ non seulement comme un sous-ensemble conique fermé de $\Omega\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, mais aussi comme un sous-ensemble conique fermé de $T^*(\Omega)\setminus\{0\}$ en utilisant l'identification standard de l'espace cotangent de $\mathbb{R}^n$ avec $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

En particulier le cas elliptique correspond à $\delta = 0$, $\rho = 1$ et $m' = m$:

PROPOSITION 3.4. Si P est un opérateur d'ordre m et si P_m désigne le symbole principal de P, on a :

$$\sum_{1,0}^{m}(P) = \{(x,\xi) \in T^*(\Omega)\setminus\{0\}\ ;\ p_m(x;\xi) = 0\}$$

DEMONSTRATION. Si (x_0,ξ_0) est tel que $p_m(x_0;\xi_0) \neq 0$, alors il existe un voisinage U de x_0, un voisinage conique Γ de ξ_0 et une constante $C > 0$ telle que pour $x \in U$, $\xi \in \Gamma$, on ait :

(3.8) $|p_m(x;\xi)| \geqslant C|\xi|^m$

d'où pour $|\xi|$ grand

(3.9) $|p(x;\xi)| \geq \frac{C}{2} |\xi|^m$.

Comme d'autre part pour une autre constante C on a : pour $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$ et $|\xi|$ grand,

(3.10) $|p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x;\xi)| \leq C^{|\beta|+1} \beta! \; |\xi|^{m-|\alpha|}$

de (3.9) et (3.10) on déduit alors que $(x_0,\xi_0) \notin \Sigma_{1,0}^m(P)$.

Inversement si $(x_0,\xi_0) \notin \Sigma_{1,0}^m(P)$, alors p vérifie en particulier (3.9) dans un voisinage conique $U \times \Gamma$ de (x_0,ξ_0) donc vérifie (3.8) ; ce qui implique que $p_m(x_0,\xi_0) \neq 0$.

On donne maintenant quelques lemmes techniques sur les dérivées de p.

LEMME 3.5. Avec les notations de la définition 3.1, il existe une constante $C > 0$ telle que pour $h \in \mathbb{Z}$, $x \in U$, $\xi \in \Gamma$ avec $|\xi|$ grand et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on ait :

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(p^h)\right| \leq C^{|h|+|\alpha|} \alpha! \; |p|^h \; |\xi|^{\delta|\alpha|}.$$

DEMONSTRATION.

(i) Si f est une fonction d'une variable suffisamment dérivable, on a la formule de dérivation de Faa de Bruno :

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(f\circ p) = \sum_{*} \frac{\alpha!}{\eta!} f^{(|\eta|)}\circ p \prod_{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma!} \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma} p\right)^{\eta_\gamma} \quad , \alpha \in \mathbb{N}^n$$

la somme $\sum_{*}$ se faisant sur les multi-indices $\eta = (\eta_\gamma)$ tels que :

$$\sum_{0 \neq \gamma \leq \alpha} \eta_\gamma . \gamma = \alpha.$$

On en déduit pour $x \in U$, $\xi \in \Gamma$ avec $|\xi|$ grand :

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f\circ p\right| \leq \sum_{*} \frac{\alpha!}{\eta!} f^{(|\eta|)}\circ p \; C^{|\alpha|+|\eta|} |p|^{|\eta|} |\xi|^{\delta|\alpha|}.$$

(ii) pour h entier >0, si $f(t) = t^h$, alors $f^{(k)}(t) = \frac{h!}{(h-k)!} t^{h-k}$, $k \leq h$;

on en déduit pour $x \in U$, $\xi \in \Gamma$ avec $|\xi|$ grand :

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} p^h\right| \leq \sum_{\substack{* \\ |n| \leq h}} \frac{\alpha!}{n!} \frac{h!}{(h-|n|)!} C^{|n|+|\alpha|} |p|^h |\xi|^{\delta|\alpha|}$$

$$\leq (2C)^h C^{|\alpha|} |p|^h |\xi|^{\delta|\alpha|} \sum_* \frac{\alpha!}{n!} |n|!$$

Or $\sum_* \frac{\alpha!}{n!} |n|! \leq |\alpha|! \, C'^{|\alpha|}$ pour une autre constante $C' > 0$ d'après le calcul fait au cours de la démonstration de la proposition 3.3.

Il en résulte que pour $x \in U$, $\xi \in \Gamma$ avec $|\xi|$ grand, $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} (p^h)\right| \leq C^{h+|\alpha|} \alpha! |p|^h |\xi|^{\delta|\alpha|}$$

pour une certaine constante $C > 0$.

(iii) pour h entier >0, si $f(t) = t^{-h}$, alors $f^{(k)}(t) = (-1)^k \frac{(h+k-1)!}{(h-1)!} t^{-h-k}$

on en déduit que :

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} p^h\right| \leq \sum_* \frac{\alpha!}{n!} \frac{(h+|n|-1)!}{(h-1)!} C^{|\alpha|+|n|} |p|^{-h} |\xi|^{\delta|\alpha|}$$

$$\leq 2^{h+|\alpha|-1} C^{2|\alpha|} |p|^{-h} |\xi|^{\delta|\alpha|} \sum_* \frac{\alpha!}{n!} |n|!$$

$$\leq C^{h+|\alpha|} \alpha! |p|^{-h} |\xi|^{\delta|\alpha|}$$

pour une nouvelle constante $C > 0$.

LEMME 3.6. Avec les notations de la définition 3.1, il existe une constante $C > 0$ telle que pour $h \in \mathbb{Z}$, $x \in U$, $\xi \in \Gamma$ avec $|\xi|$ grand, α et $\beta \in \mathbb{N}^n$, on ait :

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} (p^h p^{(\beta)})\right| \leq C^{|h|+|\alpha|+1} \alpha! |p|^{h+1} |\xi|^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$$

DEMONSTRATION. La formule de Leibnitz donne :

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(p^h\, p^{(\beta)}) = \sum_{\gamma\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}\, \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma}(p^h)\, p^{(\beta)}_{(\alpha-\gamma)}$$

D'après la définition 3.1 et le lemme 3.5, on a donc :

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(p^h\, p^{(\beta)})\right| \leq C^{|h|+|\alpha|+1}\, \alpha!\, |p|^{h+1}\, |\xi|^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|} \sum_{\gamma\leq\alpha} 1$$

ce qui termine la démonstration du lemme 3.6.

LEMME 3.7. Avec les notations de la définition 3.1, si $\chi_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est telle qu'il existe une constante $C > 0$ avec :

$$|D^\alpha \chi_N| \leq C(CN)^{|\alpha|} \quad , \ |\alpha| \leq N = 0,1,\ldots, \ x \in U$$

alors, il existe une autre constante $C' > 0$ telle que pour $h \in \mathbb{Z}$, $x \in U$, $\xi \in \Gamma$ avec $|\xi|$ grand et $|\alpha| \leq N$, on ait :

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(p^h\, \chi_N)\right| \leq C'^{N+1+|h|}\, \alpha!\, |p|^h\, |\xi|^{\delta|\alpha|}.$$

DEMONSTRATION. La formule de Leibnitz donne :

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(p^h\, \chi_N) = \sum_{\gamma\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}\, \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma}(p^h)\, \frac{\partial^{|\alpha-\gamma|}}{\partial x^{\alpha-\gamma}}\chi_N .$$

Or, comme on l'a vu au cours de la démonstration du lemme 1.7 on a, avec une autre constante $C_1 > 0$:

$$|D^\alpha \chi_N| \leq C_1^{N+1}\, \alpha!$$

Donc :

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(p^h\, \chi_N)\right| \leq \alpha!\, C_1^{N+1}\, C^{|h|}\, |p|^h \sum_{\gamma\leq\alpha} (C|\xi|^\delta)^{|\gamma|}$$

Or
$$\sum_{\gamma\leqslant\alpha} (C|\xi|^{\delta})^{|\gamma|} \leqslant \sum_{k\leqslant|\alpha|} k^n (C|\xi|^{\delta})^k$$

et pour une autre constante C' > 0

$$\leqslant \sum_{k\leqslant|\alpha|} (C'|\xi|^{\delta})^k = \frac{(C'|\xi|^{\delta})^{|\alpha|+1}-1}{C|\xi|^{\delta}-1}$$

ce qui termine la démonstration du lemme 3.7.

On peut alors démontrer le lemme suivant :

LEMME 3.8. Avec les notations du lemme 3.7, il existe une constante C' > 0 telle que pour $x \in U$, $\xi \in \Gamma$ avec $|\xi|$ grand, $|\alpha| = |\alpha_1|+\ldots+|\alpha_j| \leqslant N$, $|\beta| = |\beta_1|+\ldots+|\beta_{j-1}|$, $h_1,\ldots,h_j \in \mathbb{Z}$, on ait :

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha_1|}}{\partial x^{\alpha_1}} p^{h_1} p^{(\beta_1)} \frac{\partial^{|\alpha_2|}}{\partial x^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{|\alpha_{j-1}|}}{\partial x^{\alpha_{j-1}}} p^{h_{j-1}} p^{(\beta_{j-1})} \frac{\partial^{|\alpha_j|}}{\partial x^{\alpha_j}} p^{h_j} \chi_N\right|$$

$$\leqslant C'^{N+1+|h_1|+\ldots+|h_j|} |p|^{h_1+\ldots+h_j+j-1} |\xi|^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|} |\alpha|!$$

DEMONSTRATION.

(i) On pose $a_i = p^{h_i} p^{(\beta_i)}$ pour $i = 1,\ldots,j-1$ et $a_{jN} = p^{h_j}\chi_N$. D'après les lemmes 3.6 et 3.7, il existe une constante C > 0 telle que :

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} a_i\right| \leqslant C^{|h_i|+|\alpha|+1} |\alpha|! \ |p|^{h_i+1} |\xi|^{-\rho|\beta_i|+\delta|\alpha|}$$

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} a_{jN}\right| \leqslant C^{|h_j|+N+1} |\alpha|! \ |p|^{h_j} |\xi|^{\delta|\alpha|}$$

pour $|\alpha| \leqslant N$.

Considérons d'abord pour $j \leqslant N$ l'expression :

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} a_1 \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} a_2 \ldots a_{j-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_j}} a_{jN}.$$

Le développement de cette expression est une somme de termes de la forme :

$$\left(\frac{\partial^{|\alpha_1|}}{\partial x^{\alpha_1}} a_1\right) \dots \left(\frac{\partial^{|\alpha_{j-1}|}}{\partial x^{\alpha_{j-1}}} a_{j-1}\right) \left(\frac{\partial^{|\alpha_j|}}{\partial x^{\alpha_j}} a_{jN}\right)$$

avec $|\alpha_1|+\dots+|\alpha_j| = j$. Un tel terme est majoré par :

$$C^{|h_1|+\dots+|h_j|+N+2j-1} \; |p|^{h_1+\dots+h_j+(j-1)} \; |\xi|^{-\rho|\beta|+\delta j} \; |\alpha_1|!\dots|\alpha_j|!$$

S'il y a $C_{k_1\dots k_j}$ termes de la forme précédente avec $|\alpha_1| = k_1,\dots,|\alpha_j| = k_j$ on en déduit donc que :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} a_1 \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} a_2 \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_j}} a_{jN}\right| \leqslant C^{|h_1|+\dots+|h_j|+N+2j-1} \; |p|^{h_1+\dots+h_j+(j-1)}$$

$$\times \; |\xi|^{-\rho|\xi|+\delta j} \sum_{k_1+\dots+k_j=j} C_{k_1\dots k_j} \; k_1!\dots k_j!$$

Cette dernière somme est majorée par $2^j \, j!$ comme on l'a vu dans la démonstration du lemme 1.7.

(ii) Le lemme 3.8 se déduit de (i) en introduisant la fonction $1 = p^{-1}p^{(o)}$ autant de fois qu'il le faut pour se ramener à des opérateurs d'ordre 1 ; c'est à dire si $\alpha = \alpha_1+\dots+\alpha_{|\alpha|}$ avec $|\alpha_j| = 1$, on écrira :

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{|\alpha|}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \, p^{-1}p^{(o)} \, \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_2}} \, p^{-1}p^{(o)} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_{|\alpha|}}}.$$

IV - THEOREME DE REGULARITE.

Le théorème suivant est une extension du théorème de régularité microlocale donné par L. Hörmander ([10], théorème 5.4).

THEOREME 4.1. *Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, P un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans Ω, ρ, δ et m' des nombres réels avec $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$. Etant donné une suite L, si L' est la suite définie par $L'_N = \mathrm{Max}((L_N^{\frac{1}{1-\delta}}, N^{\frac{1}{\rho-\delta}})$ alors :*

$$WF_{L'}(u) \subset WF_L(Pu) \cup \Sigma^{m'}_{\rho,\delta}(P)$$

DEMONSTRATION. On adapte la technique utilisée par L. Hörmander ([10] , théorème 5.4) pour démontrer le théorème :

$$WF_L(u) \subset WF_L(Pu) \cup \{(x,\xi) \in T^*(\Omega)\setminus\{0\} \ ; \ P_m(x;\xi) = 0\}.$$

Soit donc $(x_0,\xi_0) \notin WF_L(Pu) \cup \Sigma^{m'}_{\rho,\delta}(P)$. Il existe un voisinage ouvert U de x_0, un voisinage ouvert conique Γ de ξ_0, une constante $C > 0$ et une suite v_N avec $v_N = P^N u$ dans U telles que les estimations (3.1) (3.2) pour ${}^tp$ dans le cône $-\Gamma$ et (2.1) pour v_N soient vérifiées.

Soient K un voisinage compact de x_0 contenu dans U et F un voisinage conique de ξ_0 contenu dans Γ et fermé dans $\mathbb{R}^n\setminus\{o\}$. Soit $\chi_N \in C_0^\infty(K)$ avec $|D^{\alpha+\beta}\chi_N| \leqslant C_\beta(C_\beta N)^{|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leqslant N = 0,1,\dots$

On va montrer que la suite $U_N = u\ \chi_{pN}$ convient pour en déduire que $(x_0,\xi_0) \notin WF_{L'}(u)$, où p est un entier fixé $\geqslant 1 + \frac{1-\delta}{\rho-\delta}$.

On a :

$$\hat{U}_N(\xi) = \int u(x)\ \chi_{pN}(x)\ e^{-i<x,\xi>}dx.$$

Pour estimer ce terme, on construit une solution $v(x,\xi)$ de l'équation (4.1) :

$${}^tP(x,D)\ v(x,\xi) = \chi_{pN}(x)\ e^{-i<x,\xi>}$$

Pour faire cette construction, on pose :

$$v(x,\xi) = e^{-i<x,\xi>}\ w(x,\xi)$$

et on obtient à la place de l'équation (4.1) une équation de la forme :

(4.2) $\ {}^{t}p(x;\xi)\ (I - R)\ w = \chi_{pN}$

où $\quad R = R_1+\ldots+R_m$ et $R_j = R_j(x,\xi;D) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \frac{{}^{t}p^{(\alpha)}(x;-\xi)}{{}^{t}p(x;-\xi)} D^{\alpha}$.

La solution formelle de (4.2) est $W = \sum_{k=0}^{+\infty} R^k(\chi_{pN}/{}^{t}p(x;-\xi))$. Cependant, on ne doit pas introduire des dérivées d'ordre trop élevé si bien que l'on considère la solution approchée suivante :

(4.3) $\ W_N = \sum_{j_1+\ldots+j_2 \leqslant [\frac{1-\delta}{\rho-\delta} N]} R_{j_1}\ldots R_{j_k}(\chi_{pN}/{}^{t}p)$

où ${}^{t}p = {}^{t}p(x;-\xi)$ et où $[A]$ désigne la partie entière de A.

Cette fonction W_N vérifie l'équation :

$${}^{t}p(I - R)W_N = \chi_{pN} - \ell_N$$

avec

(4.4) $\quad \ell_N = {}^{t}p \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_k > [\frac{1-\delta}{\rho-\delta}N] \\ j_2+\ldots+j_k \leqslant [\frac{1-\delta}{\rho-\delta}N]}} R_{j_1}\ldots R_{j_k}(\chi_{pN}/{}^{t}p)$

Par conséquent :

$${}^{t}P(x;D)\ (e^{-i<x,\xi>}\ W_N(x;\xi)) = e^{-i<x,\xi>}(\chi_{pN}(x) - \ell_N(x;\xi))$$

ce qui donne la formule de représentation suivante :

(4.5) $\quad \hat{U}_N(\xi) = \int u(x)\ \ell_N(x,\xi)\ e^{-i<x,\xi>}dx + \int Pu(x)\ W_N(x,\xi)e^{-i<x,\xi>}dx.$

Il reste à évaluer chaque terme de second membre de (4.5). D'après le lemme 3.8, il existe une constante $C > 0$ telle que quand $j = j_1 + \ldots + j_k$ et $j + |\alpha| \leqslant pN$, $x \in U$, $\xi \in \Gamma$ avec $|\xi|$ grand, on ait :

$$(4.6) \quad |D^\alpha R_{j_1} \ldots R_{j_k}(\chi_{pN/t_p})| \leqslant C^{N+1} N^{j+|\alpha|} |\xi|^{(-\rho+\delta)j+\delta|\alpha|-m'}$$

Or si M est l'ordre de u sur K, on a :

$$\left|\int u(x)\, \ell_N(x;\xi)\, e^{-i<x,\xi>}dx\right| \leqslant C. \sum_{|\alpha|\leqslant M} (1+|\xi|)^{M-|\alpha|} \operatorname{Sup}_x |D^\alpha \ell_N(x;\xi)|.$$

De (4.6), on déduit alors qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour $\xi \in \Gamma$, avec $|\xi|^{\rho-\delta} \geqslant N$ et N grand :

$$\left|\int u(x)\, \ell_N(x;\xi)\, e^{-i<x,\xi>}dx\right| \leqslant C^{N+1} N^{\frac{1-\delta}{\rho-\delta}N} |\xi|^{-N(1-\delta)+M+1-m'}.$$

De (4.6), on déduit également qu'il existe une constante $C > 0$ telle que:

$$|D^\alpha W_N(x;\xi)| \leqslant C^{N+1} N^{|\alpha|} |\xi|^{\delta|\alpha|+1-m'}$$

pour $\xi \in \Gamma$, $|\xi|^{\rho-\delta} \geqslant N$ et N grand, $|\alpha| \leqslant N$.

Le lemme 2.3 de troncature assure alors que :

$$\left|\int Pu(x)\, e^{-i<x,\xi>} W_N(x;\xi)dx\right| \leqslant C^{N+1} L_N^N |\xi|^{-N+\delta N+1-m'}$$

pour $\xi \in F$, $|\xi|^{\rho-\delta} \geqslant N$ et N grand.

Par conséquent :

$$|\hat{U}_N(\xi)| \leqslant C^{N+1} \{\operatorname{Max}(L_N, N^{\frac{1-\delta}{\rho-\delta}})\}^N |\xi|^{-N+\delta N+M+1-m'}$$

pour $\xi \in F$, $|\xi|^{\rho-\delta} \geqslant N$ et N grand.

Cette inégalité vaut pour tout $\xi \in F$ puisque l'on a aussi :

$$|\hat{U}_N(\xi)| = \left|\int e^{-i<x,\xi>}\chi_{pN} u(x)dx\right| \leqslant C. \sum_{|\alpha|\leqslant M} (1+|\xi|)^{M-|\alpha|} \operatorname{Sup}_x |D^\alpha \chi_{pN}|.$$

On en déduit que $(x_0,\xi_0) \notin WF_{L'}(u)$ où la suite L' est définie par :

$$L'_N = \mathrm{Max}((L_N^{\frac{1}{1-\delta}}\ N^{\frac{1}{\rho-\delta}})$$

ce qui termine la démonstration du théorème 4.1.

Comme corollaire, on retrouve le théorème de régularité microlocale de L. Hörmander ([10], théorème 5.4) :

COROLLAIRE 4.2. Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et P un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques dans Ω. Alors :

$$WF_L(u) \subset WF_L(Pu) \cup \{(x;\xi) \in T^*(\Omega)\setminus\{o\}\ ;\ P_m(x;\xi) = 0\}.$$

DEMONSTRATION. Ceci résulte du théorème 4.1 et de la proposition 3.4 qui assure que $\sum^m_{1,o}(P) = \{(x,\xi) \in T^*(\Omega)\setminus\{o\}\ ;\ P_m(x;\xi) = 0\}$.

Dans le cadre des classes de Gevrey G^S le théorème 4.1 s'exprime sous la forme :

COROLLAIRE 4.3. Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, P un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans Ω, ρ, δ et m' des nombres réels avec $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$. Alors pour tout $s \geqslant 1$, on a :

$$WF_{S'}(u) \subset WF_S(Pu) \cup \sum^{m'}_{\rho,\delta}(P)$$

où $S' = \mathrm{Max}(\frac{s}{1-\delta}\ ,\ \frac{1}{\rho-\delta})$ et où $WF_\sigma(.)$ pour un nombre réel $\sigma \geqslant 1$ désigne le front d'onde associé à la suite $L = ((N+1)^\sigma)$.

En particulier, on retrouve la régularité locale dans les classes de Gevrey pour les opérateurs hypoelliptiques à coefficients constants (L. Hörmander [8], F. Trèves [14]) :

COROLLAIRE 4.4. Soit P un opérateur différentiel à coefficients constants hypoelliptiques et ρ_0 le plus grand nombre (rationnel $\leqslant 1$) tel que :

$$|p^{(\alpha)}(\xi)| \leqslant C.\ |p(\xi)|\ |\xi|^{-\rho_0|\alpha|}$$

pour tout α et $\xi \in R^n$, $|\xi|$ grand.

Pour $s \geqslant 1$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, si $Pu \in G^s(\Omega)$ alors $u \in G^{s'}(\Omega)$ avec $s' = \mathrm{Max}(s, \frac{1}{\rho_0})$.

DEMONSTRATION. Ceci résulte du corollaire 4.3 et du fait que dans ce cas $\sum_{\rho_0,0}^{\rho_0 m}(P) = \emptyset$.

Ce corollaire se généralise aux classes d'opérateurs hypoelliptiques introduites par L. Hörmander ([9]) de la façon suivante :

COROLLAIRE 4.5. Soit $P \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques avec $\delta < \rho$ et tel que, pour tout compact K de Ω, il existe des constantes m', C > 0, telles que :

$$|P^{(\alpha)}_{(\beta)}(x;\xi)| \leqslant C^{|\beta|+1}\ \beta!\ |P(x;\xi)|\ |\xi|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

$$|\xi|^{m'} \leqslant C\ |P(x;\xi)|$$

pour $x \in K$ et $\xi \in R^n$, $|\xi|$ grand.

P est hypoelliptique dans Ω et de plus, pour tout $s \geq 1$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, si $Pu \in G^s(\Omega)$ alors $u \in G^{s'}(\Omega)$ avec $s' = \mathrm{Max}(\frac{s}{1-\delta}, \frac{1}{\rho-\delta})$.

DEMONSTRATION. Ceci résulte immédiatement du corollaire 4.3 et du fait que dans ce cas $\sum^{m'}_{\rho,\delta}(P) = \emptyset$.

Exemple : Soit l'opérateur $P = P(x;D) = (-\Delta)^k + |x|^{2l}(-\Delta)^m$ où Δ désigne le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$, k, l et m sont des entiers ≥ 0 avec $l > m-k > 0$. Alors P est hypoelliptique et si $Pu \in G^s$, $u \in G^{\frac{sl}{l+k-m}}$. (Ici $\rho = 1$ et $\delta = \frac{m-k}{l}$).

V - THEOREME DES ITERES.

Le théorème suivant est une extension de la version microlocale donnée dans P. Bolley - J. Camus - C. Mattéra [3] du théorème classique de T. Kotaké - M.S. Narasimhan [11] sur les itérés d'un opérateur elliptique.

THEOREME 5.1. Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, P un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans Ω, ρ, δ et m' des nombres réels avec $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ et $\delta m < m'$. Etant donnée une suite L, si L' est la suite définie par $L'_N = \mathrm{Max}((L_N)^{\frac{m}{m'-\delta}}, N^{1/\rho-\delta})$ alors :

$$WF_{L'}(u) \subset WF_L(u;P) \cup \textstyle\sum^{m'}_{\rho,\delta}(P).$$

DEMONSTRATION. Soit $(x_0,\xi_0) \notin WF_L(u;P) \cup \sum^{m'}_{\rho,\delta}(P)$. Il existe un voisinage ouvert U de x_0, un voisinage ouvert conique Γ de ξ_0 et une suite $f_N \in \varepsilon'(\Omega)$ égale à $P^N u$ dans U tels que les estimations (3.1) (3.2) pour ${}^tp$ dans le cône $-\Gamma$ et (2.2) - (2.3) pour f_N soient vérifiées.

Soit K un voisinage compact de x_0 contenu dans U et F un voisinage conique de ξ_0 contenu dans Γ et fermé dans $\mathbb{R}^n \setminus \{o\}$. Soit $\chi_N \in C_0^\infty(K)$ avec $|D^{\alpha+\beta}\chi_N| \leq C_\beta(C_\beta N)^{|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leq N = 0,1,\ldots$

On va montrer que la suite $U_N = u\,\chi_{pN}$ convient pour en déduire que $(x_0,\xi_0) \notin WF_{L'}(u)$, où p est un entier fixe ($\geq m\,(3+\frac{m'-\delta m}{\rho-\delta})$)

On a :

$$\hat{U}_N(\xi) = \int u(x)\, \chi_{pN}(x)\, e^{-i<x,\xi>}dx.$$

Pour estimer ce terme, on construit une solution $v(x,\xi)$ de l'équation :

(5.1) $\quad {}^tp^N(x;D)\ v(x;\xi) = \chi_{pN}(x)\ e^{-i<x,\xi>}.$

Pour faire cette construction, on pose :

$$v(x;\xi) = e^{-i<x,\xi>}\ w(x;\xi)$$

et on obtient à la place de (5.1) une équation de la forme :

(5.2) $\quad ({}^tp(x;-\xi)\ (I - R))^N\ W(x;\xi) = \chi_{pN}$

où $R = R_1+\ldots+R_m$ avec $R_j = \sum\limits_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \frac{{}^tp^{(\alpha)}(x;-\xi)}{{}^tp(x;-\xi)} D^\alpha$.

La solution formelle de (5.2) est $w = (\sum\limits_{k=o}^{+\infty} R^k({}^tp)^{-1})^N\chi_{pN}$ où ${}^tp = {}^tp(x;-\xi)$.

Mais, puisqu'on ne peut pas faire intervenir des dérivées d'ordre trop élevé sur χ_{pN}, on prend la solution approchée :

(5.3) $\quad w_N(x;\xi) = \sum\limits_{k_1+\ldots+k_N\leqslant[\frac{m'-\delta m}{\rho-\delta}N]} R^{k_1}({}^tp)^{-1}\ R^{k_2}\ldots R^{k_N}({}^tp)^{-1}\chi_{pN}.$

Cette fonction w_N vérifie l'équation :

$$({}^tp\ (I - R))^N\ w_N = \chi_{pN} - e_N$$

où

(5.4) $\quad e_N = \sum\limits_{j=1}^{N} ({}^tp(I - R))^{N-j} \sum\limits_{k_j+\ldots+k_N=[\frac{m'-\delta m}{\rho-\delta}N]} {}^tpR^{k_j+1}({}^tp)^{-1}R^{k_{j+1}}\ldots R^{k_N}({}^tp)^{-1}\chi_pN.$

Par conséquent :

$${}^tp^N\ (e^{-i<x,\xi>}w_N) = e^{-i<x,\xi>}\ (\chi_{pN} - e_N)$$

ce qui donne la formule de représentation suivante :

(5.5) $\quad \hat{U}_N(\xi) = \int u(x)e_N(x;\xi)e^{-i<x,\xi>}dx + \int p^N u(x)\ w_N(x;\xi)e^{-i<x,\xi>}dx.$

Il reste à évaluer chaque terme du second membre de (5.5). Le développement de W_N s'écrit :

$$(5.6) \quad W_N = \sum_{k_1+\ldots+k_N \leq [\frac{m'-\delta m}{\rho-\delta}N]} \sum_{1\leq 1_j\leq m} \cdots \sum_{1\leq N_j\leq m} R_{1_1}\ldots R_{1_{k_1}} ({}^t p)^{-1} R_{2_1}\ldots R_{N_1}\ldots R_{N_{k_N}} \backslash ({}^t p)^{-1} \chi_{pN}.$$

D'après le lemme 3.8, il existe une constante $C > 0$ telle que pour $|\alpha|+1_1+\ldots+N_{k_N} \leq pN$, $x \in U$, $\xi \in \Gamma$ avec $|\xi|$ grand, on ait :

$$|D^\alpha R_{1_1}\ldots R_{1_{k_1}} ({}^t p)^{-1} \ldots R_{N_{k_N}} ({}^t p)^{-1} \chi_{pN}| \leq C^{N+1} |p|^{-N} |\xi|^{(-\rho+\delta)(1_1+\ldots+N_{k_N})+\delta|\alpha|} \times N^{|\alpha|+1_1+\ldots+N_{K_N}}.$$

Par conséquent, pour $\xi \in \Gamma$ avec $|\xi|^{\rho-\delta} \geq N$ et N grand on a avec une autre constante $C > 0$:

$$|D^\alpha R_{1_1}\ldots R_{N_{k_N}} ({}^t p)^{-1} \chi_{pN}| \leq C^{N+1} N^{|\alpha|} |\xi|^{N(\delta m-m')}.$$

Comme le nombre de termes du développement de W_N est une puissance de N, on à donc :

$$|D^\alpha W_N(x;\xi)| \leq C^{N+1} N^{|\alpha|} |\xi|^{N(\delta m-m')}$$

pour $|\alpha| \leq mN+q$, $x \in U$, $\xi \in \Gamma$ avec $|\xi|^{\rho-\delta} \geq N$ (où q est un entier fixé $\geq$ Max $(m+1+M,n+1)$).

Le lemme 2.5 de troncature assure alors que :

$$\left|\int p^N u(x)\, W_N(x;\xi)\, e^{-i<x,\xi>} dx\right| \leq C^{N+1} L_{mN}^{mN} |\xi|^{N(\delta m-m')+M_1}$$

pour $\xi \in F$, $|\xi|^{\rho-\delta} \geq N$, N grand (où M_1 est une certaine constante).

On évalue maintenant e_N. Le développement de e_N est :

$$e_N = \sum_{j=1}^{N} \sum_{h_1+l_1+\ldots+h_q+l_q=N-j} \sum_{k_j+\ldots+k_N=[\frac{m'-\delta m}{\rho-\delta}N]} \sum_{\substack{1\leq l_j\leq m \\ 1\leq j\leq l_1}} \cdots \sum_{\substack{1\leq q_j\leq m \\ 1\leq j\leq l_q}} \sum_{\substack{1\leq j_i\leq m \\ 1\leq i\leq k_j+1}} \cdots$$

$$\sum_{\substack{1\leq N_i\leq m \\ 1\leq i\leq k_N}}$$

$$(-1)^{l_1+\ldots+l_q}({}^tp)^{h_1}({}^tpR_{1_1})\ldots({}^tpR_{1_{l_1}})({}^tp)^{h_2}\ldots({}^tp)^{h_q}({}^tpR_{q_1})\ldots({}^tpR_{q_{l_q}})$$

$$\times\ ({}^tp)R_{j_1}\ldots R_{j_{k_j+1}}({}^tp)^{-1}R_{(j+1)_1}\ldots R_{N_1}\ldots R_{N_{k_N}}({}^tp)^{-1}\chi_{pN}.$$

D'après le lemme 3.8, il existe une constante $C > 0$ telle que pour $|\alpha|+1_1+\ldots+q_{l_q}+j_1+\ldots+N_{k_N} \leq pN$, $x \in U$, $\xi \in \Gamma$ avec $|\xi|$ grand on ait :

$$|D^\alpha({}^tp)^{h_1}({}^tpR_{1_1})\ldots R_{N_{k_N}}({}^tp)^{-1}\chi_{pN}| \leq C^{N+1}\ |\xi|^{(-\rho+\delta)(1_1+\ldots+N_{k_N})+\delta|\alpha|}$$

$$\times\ N^{|\alpha|+1_1+\ldots+N_{k_N}}.$$

Or $1_1+\ldots+N_{k_N} \geq l_1+\ldots+l_q+k_j+1+\ldots+k_N \geq [\frac{m'-\delta m}{\rho-\delta}N]$, donc pour $|\xi|^{\rho-\delta} \geq N$. On a :

$$|D^\alpha({}^tp)^{h_1}({}^tpR_{1_1})\ldots(R_{N_{k_N}})({}^tp)^{-1}\chi_{pN}| \leq C^{N+1}\ N^{|\alpha|+\frac{m'-\delta m}{\rho-\delta}N}\ |\xi|^{-(m'-\delta m)N+\delta|\alpha|}$$

Comme le nombre de termes du développement de e_N est une puissance de N on a donc :

$$|D^\alpha e_N(x;\xi)| \leq C^{N+1}\ N^{|\alpha|+\frac{m'-\delta m}{\rho-\delta}N}\ |\xi|^{(m'-\delta m)N+\delta|\alpha|}.$$

pour $|\alpha| < mN$, $x \in U$, $\xi \in \Gamma$ avec $|\xi|^{\rho-\delta} > N$.

Si M' est l'ordre de la distribution u dans K on a donc :

$$\left|\int u(x)\ e_N(x;\xi)\ e^{-i<x,\xi>}dx\right| \leq C \sum_{|\alpha|\leq M'} (1+|\xi|)^{M'-|\alpha|}\ \operatorname{Sup}_x|D^\alpha e_N(x;\xi)|.$$

Compte tenu de l'estimation obtenue sur $D^\alpha e_N$, il existe donc une constante $C > 0$ telle que :

$$\left|\int u(x)\, e_N(x;\xi)\, e^{-i<x,\xi>}dx\right| \leqslant C^{N+1}\, N^{\frac{m'-\delta m}{\rho-\delta} N}\, |\xi|^{-(m'-\delta m)N+M'+1}$$

pour $\xi \in \Gamma$, $|\xi|^{\rho-\delta} \geqslant N$, N grand.

Par conséquent :

$$|\hat{U}_N(\xi)| \leqslant C^{N+1}\, \{\mathrm{Max}(L^m_{mN}, N^{\frac{m'-\delta m}{\rho-\delta}})\}^N\, |\xi|^{-(m'-\delta m)N+M''}$$

où $M'' = \mathrm{Max}(M_1, M'+1)$, pour $\xi \in F$, $|\xi|^{\rho-\delta} \geqslant N$, N grand.

Cette inégalité vaut pour tout $\xi \in F$ puisque l'on a aussi :

$$|\hat{U}_N(\xi)| = \left|\int e^{-i<x,\xi>}\chi_{pN}u(x)dx\right| \leqslant C. \sum_{|\alpha|\leqslant M'}(1+|\xi|)^{M'-|\alpha|}\ \mathrm{Sup}_x|D^\alpha\chi_{pN}|.$$

De là, on en déduit que $(x_o,\xi_o) \notin WF_{L'}(u)$ où la suite L' est définie par :

$$L'_N = \mathrm{Max}((L_N)^{\frac{m}{m'-\delta m}}, N^{\frac{1}{\rho-\delta}}).$$

ce qui termine la démonstration du théorème 5.1.

Comme corollaire, on retrouve le théorème des itérés microlocal donné dans P. Bolley - J. Camus - C. Mattéra ([3], théorème 3.2).

<u>COROLLAIRE 5.2.</u> Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et P un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques dans Ω. Alors :

$$WF_L(u) \subset WF_L(u;P) \cup \{(x,\xi) \in T^*(\Omega)\setminus\{o\}\ ;\ p_m(x;\xi) = 0\}.$$

Dans le cadre des classes de Gevrey G^s le théorème 5.1 s'exprime sous la forme :

COROLLAIRE 5.3. Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, P un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans Ω, ρ, δ, m' des nombres réels avec $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ et $\delta m < m'$. Alors, pour tout $s \geq 1$, on a :

$$WF_{S'}(u) \subset WF_s(u;P) \cup \Sigma^{m'}_{\rho,\delta}(P)$$

où $S' = \mathrm{Max}(\frac{1}{\rho-\delta}, \frac{s}{m'/m-\delta})$ et où $WF_\sigma(\ )$ pour un nombre réel $\sigma \geq 1$ désigne le front d'onde associé à la suite $L = ((N+1)^\sigma)$.

En particulier, on retrouve, en le précisant, un résultat local pour les itérés d'opérateurs hypoelliptiques à coefficients constants donné dans F. Newberger et Z. Zielezny [13] :

COROLLAIRE 5.4. Soit P un opérateur différentiel à coefficients constants et hypoelliptique . Soit ρ_0 le plus grand nombre (rationnel ≤ 1) tel que :

$$|P^{(\alpha)}(\xi)| \leq C.\ |P(\xi)|\ |\xi|^{-\rho_0|\alpha|}$$

pour tout α et $\xi \in R^n$, $|\xi|$ grand.

Alors pour $s \geq 1$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$G^s(\Omega;P) \subset G^{s/\rho_0}(\Omega)$$

où $G^s(\Omega;P) \doteq C^L(\Omega;P)$ avec $L = ((N+1)^s)$.

Ce corollaire se généralise aux classes d'opérateurs hypoelliptiques introduites par L. Hörmander ([9]) de la façon suivante :

COROLLAIRE 5.5. Soit $P \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques avec $\delta < \rho$ pour lequel il existe $m' > \delta m$ tel que, pour tout compact K de Ω, il existe une constante $C > 0$, telles que :

$$|p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x;\xi)| \leq C^{|\beta|+1}\ \beta!\ |p(x;\xi)|\ |\xi|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

$$|\xi|^{m'} \leqslant C|p(x;\xi)|$$

pour $x \in K$ et $\xi \in R^n$, $|\xi|$ grand.

Alors P est hypoelliptique dans Ω et de plus, pour tout $s \geqslant 1$, on a :

$$G^s(\Omega;P) \subset G^{s'}(\Omega)$$

où $s' = \mathrm{Max}(\frac{1}{\rho-\delta}, \frac{s}{m'/m-\delta})$.

<u>Exemple</u> : Soit l'opérateur $P = P(x;D) = (-\Delta)^k + |x|^{2l}(-\Delta)^m$ où Δ désigne le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$, k, l et m sont des entiers $\geqslant 0$ avec $l>m-k>0$. Alors P est hypoelliptique et on a pour $\frac{m-k}{l} < \frac{k}{m}$:

$$G^s(\Omega;P) \subset G^{s'}(\Omega)$$

où $s' = \frac{slm}{kl+(k-m)m}$ (Ici $\rho = 1$, $\delta = \frac{m-k}{l}$ et $m' = 2k$).

Pour terminer, on peut écrire comme dans P. Bolley-J. Camus-C. Mattéra [3] un dernier corollaire relatif à un système d'opérateurs qui généralise le théorème de T. Kotaké - M.S. Narasimhan [11] et de F. Browder [4] (cf. aussi M. Damlakhi [6], B. Helffer - C. Mattéra [7]) :

<u>COROLLAIRE 5.6.</u> Soient $P_1,\ldots,P_r$ des opérateurs différentiels à coefficients analytiques dans Ω d'ordre $m_1,\ldots,m_r$ respectivement et tels que :

$$\bigcap_{j=1}^{r} \{(x,\xi) \in T^*(\Omega)\setminus\{o\} \; ; \; P_{m_j}(x;\xi) = 0\} = \emptyset.$$

Alors : $\bigcap_{j=1}^{r} C^L(\Omega;P_j) = C^L(\Omega)$.

<u>REMARQUE 5.7.</u> Il résulte du corollaire 5.3. que si P est elliptique ($\rho = 1$, $\delta = 0$), alors on retrouve le résultat classique : $G^s(\Omega) = G^s(\Omega;P)$ pour tout $s \geqslant 1$. Par contre si P est non elliptique alors $m' < m$ et donc $s' = \mathrm{Max}(\frac{1}{\rho-\delta}, \frac{s}{m'/m-\delta}) > s$, ce qui est con-

forme au résultat de G. Métivier [12] qui précise que les seuls opérateurs P pour lesquels $G^s(\Omega;P) = G^s(\Omega)$, pour un même $s > 1$, sont les opérateurs elliptiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] : M.S. BAOUENDI - G. METIVIER : "Analytic vectors of hypoelliptic operators of principal type". A paraître.

[2] : P. BOLLEY - J. CAMUS : "Powers and Gevrey's regularity for a system of differential operators". Czechoslovak Mathematical Journal, 29 (104) 1979.

[3] : P. BOLLEY - J. CAMUS - C. MATTERA : "Analyticité microlocale et itérés d'opérateurs". Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique, France 1978-79.

[4] : F. BROWDER : "Real analytic functions and product spaces and separate analyticity". Canad. J. Math. 13 (1961) p. 650-656.

[5] : L. COMTET : "Analyse combinatoire, Tome 1, Collection Sup. Presses Universitaires de France.

[6] : M. DAMLAKHI : "Analyticité et itérés d'opérateurs pseudo-différentiels". J. Math. Pures et Appl. 58 (1979) p. 63-74.

[7] : B. HELFFER - C. MATTERA : "Analyticité et itérés réduits d'un système de champs de vecteurs". A paraître dans Comm. in P.D.E.

[8] : L. HÖRMANDER : "Linear partial differential operators. Springer Verlag - 1964.

[9] : L. HÖRMANDER : "Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations". Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math, 10 (1966), Singular integral operators, p. 138-183.

[10] : L. HÖRMANDER : "Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients". Comm. Pure Appl. Math., Vol XXIV (1971) p. 671-704.

[11] : T. KOTAKE - M.S. NARASIMHAN : "Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator". Bull. Soc. Math. France, 90 (1962) p. 449-471.

[12] : G. METIVIER : "Propriété des itérés et ellipticité". Comm. in P.D.E 3 (1978) p. 827.

[13] : E. NEWBERGER - Z. ZIELEZNY : "The growth of hypoelliptic polynomials and Gevrey classes". Proc. Amer. Math. Soc. 39 (3) (1973) p. 547-552.

[14] : F. TREVES : "Linear partial differential equations with constant coefficients. Gordon and Breach - 1966.

[15] : L. ZANGHIRATI : "Iterati di operatori quasi ellittici e classe di Gevrey". Università degli Studi di Ferrara, Istituto Matematico n° 4 - 1979.

[16] : L. ZANGHIRATI : "Ierati di una classe di operatori ipoellittici e classe generalizzate di Gevrey". Università degli Studi di Ferrara, Istituto Matematico n° 8 - 1979.