A. Alabidi

Estimation de Schauder pour certains problèmes aux limites elliptiques dégénérés

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1981-1982, fascicule 3
« Séminaire « Équations aux dérivées partielles » », , p. 1-42
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1981-1982___3_A1_0>

ESTIMATION DE SCHAUDER POUR CERTAINS PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES DEGENERES

(D'après C. GOULAOUIC et N. SHIMAKURA)

A. ALABIDI

INTRODUCTION

Nous étudions dans ce mémoire l'action dans les espaces de Hölder sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ d'opérateurs elliptiques du 2ème ordre dont la partie principale s'annule comme la distance au bord.

I - HYPOTHESES ET NOTATIONS

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et φ une fonction positive sur Ω équivalente à la distance au bord c'est à dire :

$$\begin{cases} \Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > 0 \} \\ \partial\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = 0 \} \\ \text{et } d\varphi \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

on supposera $\bar{\Omega}$ et φ de classe C^∞.

$C^\mu(\bar{\Omega})$ désignera l'espace de Hölder habituel ou μ est un réel positif non entier. On introduit aussi les espaces

$$C_\varphi^{2+\mu}(\Omega) = \{ u \in C^{1+\mu}(\bar{\Omega}) \ , \varphi u \in C^{2+\mu}(\bar{\Omega}) \}.$$

que l'on munit de la norme du graphe notée $||.||_{2+\mu,\varphi}$

On considère une classe d'opérateurs différentiels sur Ω de la forme $\mathcal{A} = -\varphi \sum_{i,j=1}^{n} a_{jk} \partial_j \partial_k + \sum a_j \partial_j + a_o$ où les coefficients a_{jk}, a_j et a_o sont $C^\mu(\bar{\Omega})$ et on suppose a_{jk} réel symétrique ie : $a_{jk} = a_{kj}$.

. On supposera de plus que a_{jk} est uniformément elliptique ie :

$$(1) \quad \begin{cases} \exists\, C > 0 \text{ tq } \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad \text{et} \quad \xi \in \mathbb{R}^n \\ \sum_{j,k} a_{jk}(x)\, \xi_j\, \xi_k \geq C|\xi|^2 \end{cases}$$

Les problèmes aux limites de tels opérateurs $\mathcal{A}$ font intervenir la fonction Z de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{C}$ où

$$Z = \frac{\sum_{1}^{n} a_j \, \partial_j \varphi}{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \, \partial_j \varphi \, \partial_k \varphi}$$

On supposera que :

(2) $$a_j - Z \sum a_{jk} \, \partial_k \varphi = O(\varphi) \quad j = 1,\ldots,n$$

on s'intéressera ici au cas où $Z < 0$ c'est à dire au cas où

(3) $$\forall x \in \partial\Omega \quad \sum a_j(x) \, \partial_j \varphi(x) < 0$$

II - RESULTAT

THEOREME 1 : (Goulaouic - Shimakura)

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur vérifiant les hypothèses (1), (2) et (3). Alors il existe $C > 0$ telle que l'on ait pour tout $u \in C_{\varphi}^{2+\mu}$

$$||u||_{2+\mu,\varphi} \leqslant C\,(||\mathcal{A}u||_{\mu} + ||u||_{\mu})$$

Par partition de l'unité et carte locale on se ramène au cas modèle sur $\mathbb{R}^n_+$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{L} = -x_n \Delta + z \, \partial_n .$$

pour lequel on a le théorème suivant.

THEOREME 2 : Soit $R > 0$; il existe $C > 0$ tq pour tout $u \in C_{x_n}^{2+\mu}(\bar{\mathbb{R}}^n_+) \cap \mathcal{E}'(\omega_R)$ on ait :

$$||u||_{2+\mu,x_n} \leqslant C\,(||\mathcal{L}u||_{\mu}).$$

ω_R désigne la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{E}'(\omega_R)$ l'espace des distributions à support dans ω_R.

Pour la démonstration de ce 2ème théorème on va dans une première partie exhiber une solution élémentaire de $\mathcal{L}$ notée E (proposition 1). Et dans une 2ème partie montrer que cette solution opère de C^μ dans $C^{2+}_{x_n}$ (propositions 3 et 4) ce qui terminera la démonstration du théorème car alors $u = E\,\mathcal{L}u$.

PARTIE I

Cette partie aura pour but de montrer l'existence d'une solution élémentaire de l'opérateur $\mathcal{L}$ où $\mathcal{L} = - x_n \Delta + z \partial_n$, Δ désigne l'opérateur de Laplace dans $\mathbb{R}^n$; pour cela on donnera un noyau explicite pour $\mathcal{L}$.

I - NOTATIONS

Dans tout ce qui suit z désignera un nombre complexe dont la partie réelle est négative : $\mathrm{Re} z = z' < 0$.

$$\mathcal{L}_x = \mathcal{L}(x, \partial_x) \text{ désigne } - x_n \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + z \frac{\partial}{\partial x_n} .$$

et on écrira $\mathcal{L}$ au lieu de $\mathcal{L}_x$, s'il n'y a pas risque de confusion sinon on précisera $\mathcal{L}_x$ ou $\mathcal{L}_y$ suivant que l'opérateur agit sur la variable x ou y.

On note :

$$\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{n-1}, -y_n).$$

On posera une fois pour toute : $A = A(x, y, \theta)$

$$A(x,y,\theta) = \{ |x-y|^2 \theta + |x-\tilde{y}|^2 (1-\theta) \}^{1/2}$$

Enfin pour $x \neq y$, $(x,y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$

On pose $E(x,y) = \displaystyle\int_0^1 \gamma \, y_n^{-z-1} A^{z-n+2} [\theta(1-\theta)]^{-(z+2)/2} \, d\theta.$

La valeur de la constante γ sera précisée plus loin.

II - RESULTAT

PROPOSITION 1 : $E(x,y)$ est solution élémentaire dans $\mathbb{R}_+^n$ de $\mathcal{L}$. ie :

(i) - Si $x \in \mathbb{R}^n_+$ $E(x,y)$ est localement sommable par rapport à y sur $\bar{\mathbb{R}}^n_+$.

(ii) - Si $u \in C^2(\bar{\mathbb{R}}^n_+) \cap \mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ et $x \in \mathbb{R}^n_+$ on a $E\mathcal{L}u(x) = u(x)$.

(iii) - Si $f \in C^o(\bar{\mathbb{R}}^n_+) \cap \mathcal{E}'(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ alors $E\,f$ est solution de l'équation $\mathcal{L}u = f$.

Dans cette proposition $E\,f(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} f(y)\,E(x,y)\,dy$.

Démonstration de la proposition.

Soit $x \in \mathbb{R}^n_+$ montrons que $E(x,y)$ est localement sommable par rapport à y sur $\bar{\mathbb{R}}^n_+$; pour cela on va commencer par montrer un lemme qui nous donne des majorations de $|E(x,y)|$.

LEMME 1

$$|E(x,y)| \leqslant \begin{cases} C\; y_n^{-z'-1}\; |x-y|^{2+z'-n} & \text{si } -1 < z' < 0 \\ C\; |x-y|^{1-n} & \text{si } z' < 1 \end{cases}$$

Preuve du lemme 1 :

comme $A^2 - |x-y|^2 = (1-\theta)\,(|x-\tilde{y}|^2 - |x-y|^2) = (1-\theta)\,[\,(x_n+y_n)^2 - (x_n-y_n)^2]$

$= 4(1-\theta)\; x_n\; y_n$ on a

$A \geqslant |x-y|$

Vu que $z' + 2 - n$ est négatif, on obtient

$|A^{z+2-n}| \leqslant |x-y|^{z'+2-n}$ et par suite

$$|E(x,y)| \leqslant C\; y_n^{-z'-1}\; |x-y|^{z'+2-n} \int_0^1 [\,\theta(1-\theta)]^{-\frac{z'+2}{2}}\; d\theta$$

or $\int_0^1 [\theta(1-\theta)]^{-\frac{z'+2}{2}} d\theta$ est absolument intégrable car

$-\frac{(z'+2)}{2} > -1$ donc

$$|E(x,y)| \leqslant C' \, y_n^{-z'-1} \, |x-y|^{z'+2-n}$$

D'autre part on a $A > (x_n+y_n)\sqrt{1-\theta}$. Donc si $z' < -1$

$A^{z'+1}$ se majore par $(x_n+y_n)^{z'+1} \, (1-\theta)^{\frac{z'+1}{2}}$

A^{1-n} est majoré par $|x-y|^{1-n}$. Vu que $y_n^{-z'-1} < (x_n + y_n)^{-z'-1}$ que $|E(x-y)| \leqslant C \, |x-y|^{1-n}$ on a $|E(x,y)| \leqslant C|x-y|^{1-n} \int_0^1 \theta^{-\frac{z'+2}{2}} (1-\theta)^{-1/2} d\theta$. Par suite $|E(x,y)| \leqslant C|x-y|^{1-n}$ et le lemme est établi.

Ceci étant, la démonstration du i) devient immédiate, au moins dans le cas $z' \leqslant -1$. Lorsque $-1 < z' < 0$, puisque $x_n > 0$, les singularités de $E(x,y)$ qui sònt $y_n = 0$ et $y = x$, sont distinctes.

Au voisinage de $y_n = 0$ on majore $E(x,y)$ par $C(x) \; y_n^{-z'-1}$, qui est localement intégrable puisque $z' < 0$.

Au voisinage de $y = x$ on majore E par $C(x)|x-y|^{2+z'-n}$, qui est intégrable pour $z' > -1$.

Démonstration du ii) de la proposition 1.

Soit $u \in C^2(\bar{\mathbb{R}}^n_+) \cap \mathcal{E}'(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$, montrons que l'on a : $E\mathcal{L}u(x) = u(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n_+$.

La démonstration va reposer sur les lemmes suivants :

LEMME 2

(i) ${}^t\mathcal{L}_y\ F(x,y,\theta)$ est localement sommable sur $\bar{\mathbb{R}}^n_+$ par rapport à y.

(ii) $\forall\ \theta \in]0,1[$, $\qquad \forall\ u \in C^2(\bar{\mathbb{R}}^n_+) \cap \mathcal{E}'(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \mathcal{L}_y u(y)\ F(x,y,\theta)\ dy = \int_{\mathbb{R}^n_+} u(y)\ {}^t\mathcal{L}_y F(x,y,\theta)\ dy\ .$$

Dans ce lemme $F(x,y,\theta) = \gamma\, y_n^{-z-1}\ A^{z+2-n}\ [\theta(1-\theta)]^{-(\frac{z'+2}{2})}$

et ${}^t\mathcal{L}_y\ V(y) = -\sum_1^n \partial_j^2(y_n\ V) - z\ \partial_n\ V.$

Calcul de ${}^t\mathcal{L}_y\ F(x,y,\theta)$ on obtient successivement :

$$\partial_j(y_n^{-z-1}\ A^{z+2-n}\ y_n) = (z+2-n)\ y_n^{-z}\ (y_j-x_j)\ A^{z-n} \qquad \text{pour } j < n$$

$$\partial_j^2\ (y_n^{-z}\ A^{z+2-n}) = (z+2-n)y_n^{-z}\ A^{z-n} + (z-n)\ (z+2-n)y_n^{-z}\ (y_j-x_j)^2\ A^{z-n-2}$$

$$\partial_n(y_n^{-z-1}\ A^{z+2-n}) = -(z+1)y_n^{-z-2}\ A^{z+2-n} + (z+2-n)y_n^{-z-1}(y_n+x_n(1-2\theta))A^{z-n}$$

$$\partial_n(y_n^{-z}\ A^{z+2-n}) = -z\ y_n^{-z-1}\ A^{z+2-n} + (z+2-n)y_n^{-z}\ (y_n+x_n(1-2\theta))A^{z-n}$$

$$\partial_n^2(y_n^{-z}\ A^{z+2-n}) = z(z+1)y_n^{-z-2}\ A^{z+2-n} - z(z+2-n)y_n^{-z-1}(y_n+x_n(1-2\theta))A^{z-n}\ -$$

$$- z(z+2-n)y_n^{-z-1} \; (y_n+x_n(1-2\theta)) \; A^{z-n} + (z+2-n)y_n^{-z} \; A^{z-n} +$$

$$+ (z+2-n) \; (z-n)y_n^{-z} \; (y_n+x_n(1-2\theta))^2 \; A^{z-n-2}.$$

On obtient tous calculs faits, vu que $(y_n+x_n(1-2\theta))^2 = A^2-4\theta(1-\theta)x_n^2 - \sum(y_j-x_j)^2$:

$$\begin{aligned} {}^t\mathcal{L}_y F(x,y,\theta) &= \gamma[\theta(1-\theta)]^{-\frac{z+2}{2}} \; z \; y_n^{-z-1} \; x_n(1-2\theta) \; A^{z-n} + \\ &+ 4\gamma \; y_n^{-z}(z+2-n) \; (z-n)x_n^2 \; [\theta(1-\theta)]^{-z/2} \; A^{z-n-2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Pour $0 < \theta < 1$, A est une fonction continue de (x,y) et donc ${}^t\mathcal{L}_y \, F(x,y,\theta)$ est localement intégrable en y puisque y_n^{-z-1} et y_n^{-z} le sont $(z' < 0)$. D'où le i) du lemme 2.

Pour montrer (ii) du lemme on va d'abord montrer l'égalité suivante :

$$(\mathcal{L}u)v - u \; {}^t\mathcal{L}v = \sum_1^{n-1} \partial_j[y_n(u\,\partial_j v - v\,\partial_j u)] - \partial_n[y_n \, v \; \partial_n u - u \; y_n^{-z} \, \partial_n(y_n^{z+1} v)] \tag{5}$$

Pour établir cette égalité il suffit de voir que :

$$- v \; y_n \; \partial_n^2 u + z \, v \; \partial_n u + u \; \partial_n^2(y_n \, v) + zu \; \partial_n v =$$

$$= - \; \partial_n[y_n \, v \; \partial_n u - u \; y_n^{-z} \; \partial_n(y_n^{z+1} \, v)].$$

Or le terme de droite est égal à :

$$- v \; \partial_n u - y_n \; \partial_n v \; \partial_n u - y_n \, v \; \partial_n^2 u + \partial_n[z \, u \, v + u \; \partial_n(y_n \, v)] =$$

$$= - v\,\partial_n u - y_n\,\partial_n v\,\partial_n u - y_n\,v\,\partial_n^2 u + z(\partial_n u)v + z\,u\,\partial_n v + \partial_n u\,\partial_n(y_n v)$$
$$+ u\,\partial_n^2(y_n v)$$

$$= - y_n\,v\,\partial_n^2 u + z\,v\,\partial_n u + z\,u\,\partial_n v + u\,\partial_n^2(y_n\,v)$$

L'égalité (5) en résulte. On l'applique alors avec $v(y) = F(x,y,\theta)$. D'abord on remarque que pour $j < n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \partial_j(y_n\,u\,\partial_j V - y_n\,V\,\partial_j u)\,dy = 0$$

puisque u est à support compact.

D'autre part :

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \partial_n[\,y_n\,v\,\partial_n u - u\,y_n^{-z}\,\partial_n(y_n^{z+1}\,v\,)]\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\,y_n\,v\,\partial_n u - u\,y_n^{-z}\,\partial_n(y_n^{z+1}\,v)]_0^{\infty}\,dy'.$$

A l'infini $[\,y_n\,v\,\partial_n u - u\,y_n^{-z}\,\partial_n(y_n^{z+1}\,v)] = 0$ car u est à support compact et en zéro on remarque que $y\ \ v = y_n^{-z}\,A^{z-n+2} \to 0$ avec y_n ; en outre $y_n^{z+1}V = \gamma A^{z+2-n}[\,\theta(1-\theta)]^{-\frac{z'+2}{2}}$ et on a aussi $y_n^{-z}\,\partial_n(y_n^{z+1}v) \to 0$ avec y_n.

Ce qui donne que l'intégrale sur $\mathbb{R}^{n-1}$ des termes de droite de (5), est nulle et donc on a $\int_{\mathbb{R}^n_+} \mathcal{L}u(y)\ F(x,y,\theta)dy = \int_{\mathbb{R}^n_+} u(y)\ {}^t\mathcal{L}_y F(x,y,\theta)dy$ et le lemme 2 est établi.

Posons : $E_\varepsilon(x,y) = \int_0^{1-\varepsilon} F(x,y,\theta)\ d\theta.$

On va calculer $E_\varepsilon \mathcal{L} u(x)$ et puis faire tendre $\varepsilon \to 0$ ceci parce que ${}^t\mathcal{L}_y F(x,y,\theta)$ a une singularité pour $\theta = 1$.

Et d'abord on commence par montrer le lemme suivant qui donne une représentation de ${}^t\mathcal{L}_y F(x,y,\theta)$ sous forme de dérivée par rapport à θ d'une fonction.

LEMME 3

Posons : $G(x,y,\theta) = 2\gamma(n-2-z)y_n^{-z-1}\ A^{z-n}[\theta(1-\theta)]^{-z/2}$

Alors : ${}^t\mathcal{L}_y F(x,y,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}[x_n\ G(x,y,\theta)]$.

Dans le lemme précédent on a calculé ${}^t\mathcal{L} F(x,y,\theta)$.

On calcule $\frac{\partial}{\partial\theta}[x_n\ G(x,y,\theta)]$ qui vaut :

$$x_n\ \gamma/2\ 2\gamma(y_n^{-z-1}(z+2-n)\ A^{z-n}\ [\theta(1-\theta)]^{-(\frac{z+2}{2})}\ (1-2\theta)\ +$$

$$+\ x_n\ 2\gamma(n-2-z)\ (\frac{z-n}{2})\ y_n^{-z-1}\ A^{z-n-2}\ [\theta(1-\theta)]^{-j/2}\ x\ -\ 4\ x_n y_n.$$

Ce qui donne en comparant à $\mathcal{L} F(x,y,\theta)$ l'égalité voulue et donc on a : ${}^t\mathcal{L}_y F(x,y,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} x_n\ G(x,y,\theta)$.

Ceci nous permet de calculer $\int_o^{1-\varepsilon} {}^t\mathcal{L}_y F(x,y,\theta)d\theta = x_n\, G(x,y,1-\varepsilon)$ car $G(x,y,o) = 0$ vu que z est négatif.

Et donc on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} E_\varepsilon(x,y)\,\mathcal{L}u(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n\, G(x,y,1-\varepsilon)\, u(y)dy.$$

Le terme gauche de cette égalité qui est $E_\varepsilon \mathcal{L}\, u$ tend vers $E\,\mathcal{L}u(x)$; donc pour terminer la démonstration il nous suffit de montrer que :

$$\lim_{\varepsilon\to o} \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n\, G(x,y,1-\varepsilon)\, u(y)\, dy = u(x).$$

Pour cela il suffit de montrer que :

$$\lim_{\varepsilon\to o} \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n\, G(x,y,1-\varepsilon)dy = 1 \quad \text{et que}$$

$$\lim_{\varepsilon\to o} \int_K x_n \left|G(x,y,1-\varepsilon)\right|dy = 0 \text{ sur tout compact } K \text{ ne contenant pas } x,$$

ce qui fera l'objet du lemme 4 suivant :

LEMME 4

1 - $\lim_{\varepsilon\to o} \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n\ \ G(x,y,1-\varepsilon)\ dy = 1$

2 - $\forall$ K compact de $\bar{\mathbb{R}}^n_+$ qui ne contient pas x

$$\lim_{\varepsilon\to o} \int_K x_n\ \left|G(x,y,1-\varepsilon)\right|dy = 0$$

Démonstration du lemme 4

Soit $\varepsilon > 0$ donné; $G(x,y,1-\varepsilon)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}^n_+$ par rapport à y. De plus :

$$|G(x,y,1-\varepsilon)| = 2\gamma(z+2-n)y_n^{-z'-1}\, A^{z'-n}[\varepsilon(1-\varepsilon)]^{-z'/2}$$

Calcul de $I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n |G(x,y,1-\varepsilon)|dy$

$$I_\varepsilon = C \int_0^\infty x_n y_n^{-z'-1}[\varepsilon(1-\varepsilon)]^{-z'/2} \int_{R^{n-1}} A^{z'-n}\, dy'\, dy_n$$

(On note $y = (y',y_n)$ ie : $y' = (y_1,\ldots,y_{n-1})$.

La fonction A étant radiale dans $\mathbb{R}^{n-1}$ s'écrit :

$$A = (r^2 + B^2)^{1/2} \text{ avec } B^2 = (x_n-y_n)^2\, \varepsilon + (1-\varepsilon)\ (x_n+y_n)^2$$

et $r^2 = |x'-y'|^2$, ce qui donne :

$$\int A^{z'-n}\, dy' = C_1\, B^{z'-1}$$

avec $\quad C_1 = \int (|y'|^2+1)^{\frac{z'-n}{2}}\, dy'$

Le changement de variable $u = \dfrac{x_n}{y_n}$ montre que :

$$J_\varepsilon = \int_0^\infty x_n y_n^{-z'-1}\, B^{z'-1}\, dy_n = \int_0^\infty (u^2+2(1-2\varepsilon)u+1)^{\frac{z'-1}{2}} du$$

Posant $v = \dfrac{u+1-2\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}}$ on obtient

$$J_\varepsilon = (\varepsilon(1-\varepsilon))^{z'/2} \int_{\frac{-(1-2\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}}}^{\infty} (v^2+1)^{\frac{z'-1}{2}} dv$$

Puisque l'on a : $I_\varepsilon = \gamma\, C_1(\varepsilon(1-\varepsilon))^{-z'/2}\, J_\varepsilon$

On voit que :

$$\lim_{\varepsilon\to o} I_\varepsilon = \gamma\, C$$

$$\text{avec } C = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (v^2+1)^{\frac{(z'-1)}{2}}\, dv$$

Or la constante γ est choisie de telle sorte que $\gamma C = 1$. Donc on a bien le résultat pour z' réel négatif ; le même calcul établit que $\lim_{\varepsilon\to o} \int_{\mathbb{R}^n_1} x_n\, G(x-y,1-\varepsilon)dy = 1$ pour z complexe avec $\mathrm{Re}\, z < 0$ ce qui donne le 1° du lemme 4.

Pour le 2) notons K un compact de $\bar{\mathbb{R}}^n_+$ tq $x \notin K$.

On étudie $\lim_{\varepsilon\to o} \int_K |y_n^{-z-1}\, A^{z-n}|dy\, [\varepsilon(1-\varepsilon)]^{-z'/2}$. Sur le compact K A^{z-n} est une fonction continue donc uniformément bornée et $\int y_n^{-z'-1}\, dy_n = cte$ car $z' < 0$; donc comme $\lim_{\varepsilon\to o} [\varepsilon(1-\varepsilon)]^{-z'/2} = 0$, on a le résultat et par suite le le lemme 4 est démontré.

On déduit classiquement du lemme 4 que

$$\lim_{\varepsilon\to o} \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n\, G(x,y,1-\varepsilon)u(y)dy = u(x)$$

pour u continue à support compact dans $\bar{\mathbb{R}}^n_+$ ce qui achève de montrer le ii) de la proposition 1.

La démonstration de iii) est presque la même : on va en donner les étapes. On montre que $\mathcal{L}_x F$ est localement intégrable et que $\mathcal{L}_x F(x,y,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} (y_n\, G(x,y,\theta))$ ce qui donnera :

$$E_\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} y_n \, G(x,y,1-\varepsilon) \, f(y) \, dy$$

et on termine comme au ii) en montrant que :

$$\lim_{\varepsilon \to o} \int_{\mathbb{R}^n_+} y_n \, G(x,y,1-\varepsilon) \, dy = 1$$

et que pour tout compact K ne contenant pas x :

$$\lim_{\varepsilon \to o} \int_K y_n \, G(x,y,1-\varepsilon) \, dy = 0$$

et donc la proposition 1 est démontrée.

PARTIE II

Dans cette deuxième partie, on va s'intéresser à la régularité dans les espaces de Hölder de l'opérateur $\mathcal{L}$.

I - NOTATIONS

Dans tout ce qui suit $\xi_{\rho,a}(x)$ désignera $\xi(\frac{x-a}{\rho})$, pour $\rho > 0$, $a \in \mathbb{R}^n_+$

$\omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid |x| < R\}$.

$\eta_R(x) = \eta(\frac{x}{R})$ et enfin

$K\,f(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\,f(y)\,dy$ lorsque ceci aura un sens.

II - RESULTAT

PROPOSITION 2 : On se donne une distribution K sur $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ associée à une fonction localement intégrable vérifiant :

a - $\exists \alpha \in [0,1[$ et $C_1 > 0$ tq l'on ait pour $x \neq y$

$$|K(x,y)| \leqslant C_1\, y_n^{-\alpha} |x-y|^{\alpha-n}$$

$$|\partial_{x_j} K(x,y)| \leqslant C_1 y_n^{-\alpha} |x-y|^{\alpha-n-1}.$$

b - $\exists C_2 > 0$ et une fonction $\xi \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$, $\xi = 1$ pour tout $|x| \leqslant 1$, nulle pour $|x| > 2$ et tq pour tout $\rho > 0$ et $a \in \mathbb{R}^n_+$ on ait $\|K\,\xi_{\rho,a}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C_2$.

c - $\exists C_3 > 0$ et une fonction $\eta \in C^\infty(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$, $\eta = 1$ pour $|x|$ petit et telle que pour $R \geq 1$ on ait $[K\eta_R]_\mu \leq C_3$.

Alors pour tout compact F de $[0,1[$ $\exists$ $C > 0$ telle que pour $\alpha \in F$, $R > 0$ et pour tout $f \in C^\mu(\bar{\mathbb{R}}^n_+) \cap \mathcal{E}'(\bar{\omega}_R)$ on ait :

1- $||K f||_\infty \leq C (||f||_\infty + R^\mu [f]_\mu)$

2- $[K f]_\mu \leq C' (||f||_\infty + [f]_\mu)$.

D'abord on remarque que $K f(x)$ a un sens car K est localement intégrable sur $\bar{\mathbb{R}}^n_+$ par rapport à y et que $f \in \mathcal{E}' \cap C^\mu(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$. En effet, au voisinage de $x = y$ $|K(x,y)|$ se majore par $C|x-y|^{\alpha-n}$ lequel est intégrable localement vu que $\alpha > 0$ et au voisinage de $y_n = 0$, K se majore par $C\, y_n^{-\alpha}$ qui est intégrable vu que $\alpha < 1$, ce qui nous permet d'écrire $K f(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\, f(y)\, dy$.

<u>Démonstration de la proposition 2</u>: (cas $\alpha > 0$)

Montrons que :

$||K f||_\infty \leq C (||f||_\infty + R^\mu [f]_\mu)$.

Soit $a \in \mathbb{R}^n_+$ et $f \in C^\mu(\bar{\mathbb{R}}^n_+) \cap \mathcal{E}'(\bar{\omega}_R)$.

On distingue deux cas :

où bien $|a| > 2R$ et alors $|a-y|$ ne s'annule pas dans le support de f et donc on a :

$$|K\ f(a)| \leq \int_{\underline{\omega}_R} |K(a,y)|\,|f(y)dy| \leq \|f\|_\infty \int_{\underline{\omega}_R} |K(a,y)|dy$$

or $\int_{\underline{\omega}_R} |K(a,y)|dy \leq \int_{\underline{\omega}_R} y_n^{-\alpha}|a-y|^{\alpha-n}dy$

mais comme $|a-y| > R$ on a :

$$\int_{\underline{\omega}_R} y_n^{-\alpha}|a-y|^{\alpha-n}\,dy \leq R^{\alpha-n}\int_{|y|<R} y_n^{-\alpha}\,dy \qquad \text{et,}$$

$$\int_{|y|<R} y_n^{-\alpha}\,dy = C\int_o^R y_n^{-\alpha}\,dy_n \int_o^R r^{n-1}\,dr$$

$$= C\,R^{-\alpha+1} \times R^{n-1} = C\,R^{n-\alpha}$$

d'où

$$\int_{\underline{\omega}_R} y_n^{-\alpha}|a-y|^{\alpha-n}\,dy \leq C \times R^{n-\alpha}\,.\,R^{\alpha-n} = C'$$

et par suite on a :

$|K\ f(a)| \leq C\ \|f\|_\infty$ avec C indépendante de R.

Si $|a| \leq 2\,R$; posons : $f = f_1 + f_2$ avec

$f_1 = (f - f(a))\xi_{3R,a}$

$f_2 = f(a)\ \xi_{3R,a}$

$|K\ f(a)| \leq |K\ f_1(a)| + |K\ f_2(a)|$

pour $K\ f_2$ on a :

$$|K\,f_2(a)| = |f(a)|\ |K\xi_{3R,a}(a)| \leq C_2||f||_\infty$$

d'après l'hypothèse b).

Pour $K\,f_1(a)$ on a :

$$|K\,f_1(a)| \leq \int |K(a,y)|\,|f(y)-f(a)|\ \xi_{3R,a}(y)dy.$$

f étant de classe C^μ $\quad |f(y)-f(a)| \leq |y-a|^\mu[f]_\mu$.

Soit $|K\,f_1(a)| \leq C[f]_\mu \int_{\substack{|a-y|< 3R \\ |y|\leq R}} |K(a,y)|\ |y-a|^\mu\ dy.$

Il suffit donc, pour terminer la démonstration du 1) de montrer le lemme suivant :

LEMME 5

$$\exists C > 0 \,/\, \forall \rho > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}^n_+$$

$$\int_{\substack{|a-y|<\rho \\ |y|<\rho}} |K(a,y)|\ |y-a|^\mu\ dy \leq C\,\rho^\mu$$

Preuve du lemme 5 :

Par homogénéité on se ramène au cas $\rho = 1$

$$\int_{\substack{|a-y|<1\\|y|<1}} |K(a,y)|\,|y-a|^{\mu}dy \leqslant \int_0^1 y_n^{-\alpha} \int_{|a-y|<1} |a-y|^{\alpha+\mu-n}dy'\, dy_n$$

$$\leqslant C \int_{\substack{0<y_n<1\\|a_n-y_n|<1}} y_n^{-\alpha}\, I(a_n,y_n)dy_n$$

avec $I(a_n,y_n) = I = \int_0^1 (r+|a_n-y_n|)^{\alpha+\mu-n}\, r^{n-2}dr$

Si $\alpha+\mu > 1$, I se majore par $C \int_0^1 r^{\alpha+\mu-2}\, dr < C'$.

Si $\alpha+\mu = 1$, I est de la forme $\int_0^{\frac{1}{|a_n-y_n|}} (r+1)^{\alpha+\mu-n}\, r^{n-2}\, dr$ que l'on majore par $\int_0^{\frac{1}{|a_n-y_n|}} (r+1)^{\alpha+\mu-n}\, (r+1)^{n-2}\, dr < \log(\frac{1}{|a_n-y_n|} + 1)$.

pour $\alpha+\mu < 1$ on majore I par :

$$|a_n-y_n|^{\alpha+\mu-1} \int_0^{\infty}(1+r)^{\alpha+\mu-2}\, dr \leqslant C\, |a_n-y_n|^{\alpha+\mu-1}$$

Par suite, si $\alpha+\mu > 1$

$$\int |K(a,y)|\; |a-y|^{\mu}\, dy \leqslant C \int_0^1 y_n^{-\alpha}\, dy_n \leqslant C' \quad \text{car } 0 < \alpha < 1$$

Si $\alpha+\mu < 1$ en distinguant les cas $y_n \gtrless |a_n-y_n|$ on majore :

$$y_n^{-\alpha}|a_n-y_n|^{\alpha+\mu-1} \leqslant y_n^{\mu-1} + |a_n-y_n|^{\mu-1}$$

et $$\int_{\substack{|a-y|<1\\|y|<1}} |K(a,y)|\,|a-y|^{\mu}\, dy \leqslant 2\, C \int_0^1 t^{\mu-1}\, dt = C'$$

Si $\alpha+\mu = 1$ on a :

$$y_n^{-\alpha} \operatorname{Log}(1 + \frac{1}{|a_n-y_n|}) \leqslant y_n^{-\alpha} \operatorname{Log}(1 + \frac{1}{y_n}) + |a_n-y_n|^{-\alpha} \operatorname{Log}(1 + \frac{1}{|a_n-y_n|})$$

et $$\int_{\substack{|a-y|<1\\|y|<1}} |K(a,y)|\ |a-y|^{\mu}\, dy \leqslant 2\, C \int_0^1 t^{-\alpha} \operatorname{Log}(1 + \frac{1}{t})dt = C''.$$

Ce qui termine la démonstration du lemme et en même temps la démonstration du 1) de la proposition.

Démonstration du 2).

$$[K\, f]_{\mu} \leqslant C\, (||f||_{\infty} + [f]_{\mu})$$

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$ $a \neq b$ posons $\rho = 2|a-b|$ et prenons R' assez grand pour que $\eta_{R'}(x) = 1$ pour $|x| < R + 2\rho$.

Posons : $f = f_1 + f_2 + f_3$ avec

$$f_1 = (f - f(a))\ \xi_{\rho,a}$$

$$f_2 = (f - f(a))\ (\eta_{R'}(x) - \xi_{\rho,a}(x))$$

$$f_3 = f(a)\ \eta_{R'}(x)$$

On a donc à estimer $[K\, f_j]_{\mu}$ pour $j = 1,2,3$.

D'abord $[K\, f_3]_{\mu} \leqslant |f(a)|\ [K\, \eta_{R'}]_{\mu} \leqslant C_3\ ||f||_{\infty}$ d'après l'hypothèse c).

D'autre part $|K f_1(a)| \leq \int |K(a,y)|\ |f(y) - f(a)||\xi_{\rho,a}(y)|\ dy$

qui se majore par $[f]_\mu \int_{|a-y|<2\rho} |K(a,y)||y-a|^\mu\ dy$

et le lemme 5 nous donne donc que $|K f_1(a)| \leq C\rho^\mu [f]_\mu$

pour $|K f_1(b)| \leq \left|\int_{\mathbb{R}^n_+} K(b,y)\ [f(y) - f(a)]\ \xi_{\rho,a}(y)\ dy\right|$

que l'on écrit encore :

$$|K f_1(b)| \leq \left| \int K(b,y)\ [f(y) - f(b)]\ \xi_{\rho,a}(y)\ dy \right| +$$

$$+\left|\int K(b,y)\ [f(b) - f(a)]\ \xi_{\rho,a}(y)\ dy\right|$$

$$\int|K(b,y)||f(y) - f(b)|\ \xi_{\rho,a}(y)\ dy \leq \int_{|y-a|<2\rho} |K(b,y)|\,|b-y|^\mu\ dy\ [f]_\mu$$

$$\leq [f]_\mu \int_{|y-b|<(\frac{5\rho}{2})\rho} |K(b,y)|\,|y-b|^\mu\ dy < C\ \rho^\mu[f]_\mu$$

Par ailleurs :

$$\left|\int K(b,y)(f(b)-f(a))\xi_{\rho,a}(y)dy\right| = |(f(b)-f(a))\ K\ \xi_{\rho,a}(b)|$$

$$\leq |b-a|^\mu [f]_\mu\ C_2$$

d'après l'hypothèse b).

On a alors $|K f_1(b)| \leq C\ \rho^\mu [f]_\mu$

et $|K f_1(b) - K f_1(a)| \leq C'\ \rho^\mu [f]_\mu$

ce qui donne $[K f_1]_\mu \leqslant C[f]_\mu$.

Il nous reste pour terminer la démonstration à estimer $[K f_2]_\mu$. Or

$$|K f_2(b) - K f_2(a)| \leqslant \int |K(a,y) - K(b,y)| \ |f(y) - f(a)| [\eta_{R'}(y) - \xi_{\rho,a}(y)] dy$$

$$|K f_2(b) - K f_2(a)| \leqslant C[f]_\mu \int |K(a,y) - K(b,y)| \, |y-a|^\mu |\eta_{R'}(y) - \xi_{\rho,a}(y)| dy$$

$$\leqslant C[f]_\mu \int_{|a-y|>\rho} |K(a,y) - K(b,y)| \ |y-a|^\mu \, dy \; ,$$

Puisque $|a-b| = 2\rho$, pour $|a-y| > \rho$ le segment $[a,b]$ ne contient pas y, et par le théorème des accroissements finis il existe $x \in [a,b]$ tel que :

$$|K(a,y) - K(b,y)| \leqslant |b-a| \ |\text{grad}_x K(x,y)|$$

Puisque $|a-y| < 2|x-y|$ on déduit de l'hypothèse a) que :

$$|K(a,y) - K(b,y)| \leqslant C_1 \, y_n^{-\alpha} |a-y|^{\alpha-n-1} . |b-a| .$$

donc on a

$$|K f_2(b) - K f_2(a)| \leqslant C[f]_\mu \int_{|a-y|>\rho} |b-a| \ y_n^{-\alpha} |a-y|^{\alpha-n-1+\mu} \, dy$$

pour avoir le résultat il suffit donc de montrer le lemme suivant:

LEMME 6

Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\rho > 0$:

$$I = \int_{|a-y|>\rho} y_n^{-\alpha} \; |a-y|^{\alpha+\mu-n-1} \; dy < C \; \rho^{\mu-1}$$

Preuve :

Là encore on va intégrer une fonction homogène de degré μ-n-1. Donc il suffit de montrer le résultat pour $\rho = 1$. Comme la fonction à intégrer est positive on peut commencer l'intégration par rapport à y', ce qui donne :

$$I_1 = \int_{r+|a_n-y_n|>1} (r+|a-y_n|)^{\alpha+\mu-n-1} \; dy'$$

$$= C\int_{r+|a_n-y_n|>1} (r+|a_n-y_n|)^{\alpha+\mu-n-1} \; r^{n-1} \; dr$$

ou bien $|a_n-y_n| \geqslant \frac{1}{2}$ et alors on majore I_1 par :

$$|a_n-y_n|^{\alpha+\mu-2} \int_0^\infty (r'+1)^{\alpha+\mu-2} \; dr' \leqslant C \; |a_n-y_n|^{\alpha+\mu-2}$$

on a alors $|a_n-y_n| \leqslant \frac{1}{2}$ et dans ce cas

$r + |a_n-y_n| > r$ et $r \geqslant \frac{1}{2}$. L'intégrale se majore donc par

$$\int_{\frac{1}{2}}^\infty r^{\alpha+\mu-2} \; dr = C < + \infty$$

par suite I se majore par

$$C \int y_n^{-\alpha}(\text{Max } (\tfrac{1}{2}, \; |a_n-y_n|))^{\alpha+\mu-2} \; dy_n$$

Distinguant les cas $y_n \gtrless 1$ puis $y_n \lessgtr |a_n - y_n|$, on majore :

$$I \leqslant C \left\{ \int_0^1 y_n^{-\alpha}\, dy_n + \int_{\substack{|a_n-y_n|\leqslant 1/2 \\ y_n \geqslant 1}} y_n^{-\alpha} dy_n + \int_{\substack{|a_n-y_n|\geqslant 1/2 \\ y_n \geqslant 1}} (y_n^{\mu-2} + |a_n - y_n|^{\mu-2}) dy_n \right\}$$

chacune des intégrales converge et le lemme 6 est démontré. On a donc :

$[K\, f_2]_\mu \leqslant C[f]_\mu$ et en regroupant les morceaux on obtient

$[K\, f]_\mu \leqslant C\, (||f||_\infty + [f]_\mu)$.

Cette proposition 2 étant établie on est en mesure de démontrer le théorème de régularité pour la solution élémentaire E et ses dérivées.

PROPOSITION 3

Soit K l'un quelconque des opérateurs intégraux associés aux noyaux distributions $\partial_{x_j} E$ $1\leq j\leq n$ pour tout compact F de $]-\infty,0[$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $R > 0$ et $z' \in F$ et tout $f \in C^{\mu}(\overline{\mathbb{R}}^n_+) \cap \mathcal{E}'(\overline{\omega_R})$ on ait :

$$1 - \|K f\|_\infty \leq C\,(\|f\|_\infty + R^{\mu}[f]_\mu)$$

$$2 - [K f]_\mu \leq C\,\|f\|_\mu$$

Pour la démonstration on va vérifier que les hypothèses de la proposition 2 sont satisfaites, ce qui nous donne le résultat.

D'abord on a besoin de connaître $\partial_{x_j} E$ $1\leq j\leq n$. On a :

$$E(x,y) = \int_0^1 F(x,y,\theta)\, d\theta$$

$$F(x,y,\theta) = \gamma\, y_n^{-z-1} \quad A^{z+2-n}\,[\theta(1-\theta)]^{-\frac{(z+2)}{2}}$$

F est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times]0,1[$.

$$\text{et } \frac{\partial F}{\partial x_j}(x,y,\theta) = -\,C\, y_n^{-z-1}(y_j - x_j)\; A^{z-n}\cdot[\theta(1-\theta)]^{-\frac{(z+2)}{2}} \qquad j < n$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}(x,y,\theta) = C\, y_n^{-z-1}(x_n + (1-2\theta)y_n)A^{z-n}\,[\theta(1-\theta)]^{-\frac{(z+2)}{2}}$$

On va d'abord montrer que $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,y,\theta) \in \mathbb{L}^1(K \times \mathbb{R}^n_+ \times]0,1[)$

pour tout compact K de $\mathbb{R}^n_+$ ce qui nous permettra de justifier la dérivation sous le signe somme et on aura au sens des distributions :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} E(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_j}(x,y,\theta)\, d\theta$$

Si l'on pose : $r = |x' - y'|$

$$\frac{\partial F}{\partial r}(x,y,\theta) = 2\, C\, y_n^{-z-1}\, r\, A^{z-n}\, [\theta(1-\theta)]^{-\frac{(z+2)}{2}}$$

Comme $\frac{\partial F}{\partial x_j} = C\frac{(x_j-y_j)}{r}\frac{\partial F}{\partial r}$ pour $j < n$, on a :

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,y,\theta)\right| \leq C \left|\frac{\partial F}{\partial r}(x,y,\theta)\right|$$

Posons d'autre part, pour $1 \leq j \leq n$:

$$K_j(x_n, y_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_j}(x,y,\theta)\, d\theta\, dy'$$

$$\tilde{K}_j(x_n, y_n) = \int_{R^{n-1}} \int_0^1 \left|\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,y,\theta)\right| d\theta\, dy'$$

On définit de même $\tilde{K}_r$ en remplaçant $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ par $\frac{\partial F}{\partial r}$

Comme $(x_j-y_j)\, A^{z-n}$ est une fonction impaire sur $\mathbb{R}^{n-1}$ par rapport à y_j-x_j on obtient que $K_j(x_n,y_n) \equiv 0$ pour $1 \leq j < n$ si l'on justifie que $\tilde{K}_j(x_n,y_n) < +\infty$.

<u>LEMME 7</u>

Soit F un compact de $]-\infty,0[$ $\exists$ $C > 0$ tel que pour $z' \in F$, $x_n > 0$, $y_n > 0$

$x_n \neq y_n$, on ait :

1 - $\tilde{K}_n(x_n,y_n) \leq C \text{ Min } (1, (\frac{x_n}{y_n})^{z'}) \; y_n^{-1}$

2 - $\tilde{K}_r(x_n,y_n) \leq C \; y_n^{-z'-1} (x_n+y_n)^{z'} [\log(|\frac{x_n+y_n}{x_n-y_n}|)+1]$

3 - $K_j(x_n,y_n) = 0$

4 - $K_n(x_n,y_n) = x_n^z \; y_n^{-z-1} \; Y(x_n-y_n)$. (Y fonction d'Heavyside).

Preuve :

Pour 1 et 4 on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_n}(x,y,\theta)| dy' = C \; y_n^{-z'-1}(x_n+(1-2\theta)y_n)[\theta(1-\theta)]^{\frac{(z+2)}{2}} \int_{\mathbb{R}'} A^{z'-n} dy'$$

et $$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} A^{z'-n} \, dy' = C \int_o^\infty (r^2+B^2)^{z'-n} \, r^{n-2} \, dr$$

$$= C \; B^{z'-1} \int_o^\infty (r^2+1)^{z'-n} \, r^{n-2} \, dr = C \; B^{z'-1}$$

$(\int_o^\infty (r^2+1)^{z'-n} \, r^{n-2} \, dr$ est fini car $z' < 0)$.

$$\int_o^1 \int_{R^{n-1}} |\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_n}(x-y-\theta)| dy' \, d\theta =$$

$$= \int_o^1 C \; y_n^{-z'-1} |(x_n+(1-2\theta)y_n)| B^{z'-1} [\theta(1-\theta)]^{\frac{(z'-2)}{2}} \, d\theta$$

comme $B^2 = ((x_n-y_n)^2\theta + (1-\theta) \; (x_n+y_n)^2)$ on a en posant $h = \frac{x_n-y_n}{x_n+y_n}$

$$B^2 = (h^2\,\theta + 1-\theta)\;(x_n+y_n)^2 \quad \text{donc vu que}$$

$$(x_n + (1-2\theta)y_n) = (x_n-y_n)\theta + (1-\theta)\;(x_n+y_n)$$

$$= (h\,\theta + 1-\theta)\;(x_n+y_n)$$

l'intégrale devient :

$$(x_n+y_n)^{z'}\;C\;y_n^{-z'-1}\int_0^1 (h^2\theta+1-\theta)^{\frac{z'-1}{2}}\;(|h\theta+1-\theta|[\,\theta(1-\theta)]^{-\frac{(z'+2)}{2}}\,d\theta.$$

et $\displaystyle\int_0^1\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\frac{\partial F}{\partial x_n}(x,y,\theta)|\;d\theta\;dy' =$

$$= C(x_n+y_n)^{z'}\;y_n^{-z'-1}\int_0^1 (h^2\theta+1-\theta)^{\frac{z'-1}{2}}\;|h\theta+1-\theta|[\,\theta(1-\theta)]^{-\frac{z'+2}{2}}\,d\theta$$

Dans cette intégrale on fait le changement de variable $s = \dfrac{|h|\theta}{1-\theta}$.

Ce qui permet d'écrire l'intégrale sous la forme suivante :

$$C(x_n+y_n)^{z'}\;y_n^{-z'-1}\;|h|^{z'/2}\int_0^\infty |\varepsilon\sqrt{s} + \frac{1}{\sqrt{s}}|\,(s+\frac{1}{s}+|h|+\frac{1}{|h|})^{\frac{z'-1}{2}}\;\frac{ds}{s}$$

Le même calcul montre que $K_n(x_n,y_n)$ vaut :

$$C(x_n+y_n)^{z'}\;y_n^{z-1}\;|h|^{z/2}\int_0^\infty (\varepsilon\sqrt{s} + \frac{1}{\sqrt{s}})\;\;(s+\frac{1}{s}+|h|+\frac{1}{|h|})^{\frac{z-1}{2}}\;\frac{ds}{s}$$

Dans ces formules $\varepsilon = \operatorname{sgn} h$.

Dans la dernière intégrale le changement de variable $s \to \frac{1}{s}$ montre que cette intégrale est nulle lorsque $\varepsilon < 0$. Majorant $|\varepsilon\sqrt{s} + \frac{1}{\sqrt{s}}|$ pas $(\sqrt{s} + \frac{1}{\sqrt{s}})$ il reste à calculer :

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{s} + \frac{1}{\sqrt{s}} \right) \left(s + \frac{1}{s} + |h| + \frac{1}{|h|} \right)^{\frac{z-1}{2}} \frac{ds}{s}.$$

Là encore on fait un autre changement de variable :

$$u\left(\sqrt{|h|} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \right) = \sqrt{s} - \frac{1}{\sqrt{s}} \quad \text{on a :}$$

$$\left(s + \frac{1}{s} + |h| + \frac{1}{|h|}\right) = \left(s - 2 + \frac{1}{s} + |h| + 2 + \frac{1}{|h|}\right)$$

$$= \left[\left(\sqrt{s} - \frac{1}{\sqrt{s}} \right)^2 + \left(\sqrt{|h|} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \right)^2 \right]$$

$$du \left(\sqrt{|h|} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{s\sqrt{s}} \right) ds.$$

On obtient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} (u^2 + 1)^{\frac{z-1}{2}} \, du \quad 2(|h| + 1)^z$.

On a donc obtenu que :

$$K_n(x_n, y_n) = - x_n^z \, y_n^{-z-1} \, Y(x_n - y_n)$$

$$\tilde{K}_n(x_n, y_n) \leqslant C \, y_n^{-z'-1} (x_n + y_n)^{z'} [\, |x_n - y_n| + x_n + y_n]^{z'} \, (x_n + y_n)^{-z'}$$

$$\leqslant C \, y_n^{-z'-1} [\, |x_n - y_n| + x_n + y_n]^{z'}$$

Si $x_n < y_n$ on obtient :

$$\tilde{K}_n(x_n, y_n) \leqslant \frac{C}{y_n}$$

Si $x_n > y_n$ alors :

$$|x_n - y_n| + x_n + y_n = 2\, x_n \quad \text{et}$$

$$\tilde{K}_n(x_n, y_n) \leqslant C\, x_n^{z'}\, y_n^{-z'-1} = \frac{C}{y_n}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{z'} .$$

Ce qui donne que $K_n(x_n, y_n) \leqslant \frac{C}{y_n} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{z'}\right)$.

Reste donc à montrer 2)

Pour celà on a d'abord à calculer $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} r\, A^{z'-n}\, dy'$

ce qui donne comme précédemment :

$$C\, B^{z'} \int_0^{+\infty} (r^2+1)^{\frac{z'-n}{2}}\, r^{n-1}\, dr = C'\, B^{z'}$$

car l'intégrale est convergente pour $z' < 0$. On en déduit que

$$\tilde{K}_r' x_n, y_n) \leqslant C\, y_n^{-z'-1} \int_0^1 (h^2\theta + 1 - \theta)^{z'/2} [\theta(1-\theta)]^{-\frac{(z'+2)}{2}}\, d\theta .$$

Pour obtenir l'inégalité 2 il suffit de montrer que :

$$\int_0^1 (h^2\theta + 1 - \theta)^{z'/2} [\theta(1-\theta)]^{-\frac{(z'+2)}{2}}\, d\theta \leqslant C(1 + |\log\ h^2|.)$$

D'abord le changement de variable $\theta \to 1-\theta$ transforme l'intégrale en

$$\int_0^1 (\ \theta + (1-\theta)h^2)^{z'/2} [\theta(1-\theta)]^{\frac{(z'+2)}{2}}\, d\theta$$

et celle-ci est égale à

$$I = \int_o^1 \left(\frac{1}{1-\theta} + \frac{h^2}{\theta}\right)^{z'/2} \frac{d\theta}{\theta(1-\theta)}$$

que l'on coupe en deux morceaux suivant que $\theta \leqslant \frac{1}{2}$ ou $\theta \geqslant \frac{1}{2}$:

$$I = I_1 + I_2 \quad \text{avec} \quad I_1 = \int_o^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1$$

Pour I_1 comme $1 \geqslant 1-\theta \geqslant \frac{1}{2}$ on a :

$$I_1 \leqslant 2 \int_o^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{h^2}{\theta}\right)^{z'/2} \frac{d\theta}{\theta}$$

et
$$\int_o^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{h^2}{\theta}\right)^{z'/2} \frac{d\theta}{\theta} = \int_o^{h^2} \left(\frac{\theta+h^2}{\theta}\right)^{z'/2} \frac{d\theta}{\theta} + \int_{h^2}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\theta+h^2}{\theta}\right)^{z'/2} \frac{d\theta}{\theta}$$

$$\leqslant 2^{z'/2}\left(\int_o^{h^2} \left(\frac{h^2}{\theta}\right)^{z'/2} \frac{d\theta}{\theta} + \int_{h^2}^{\frac{1}{2}} \frac{d\theta}{\theta}\right)$$

$$I_1 \leqslant 2^{1-z'/2}\left(1 + \log \frac{1}{2} - \log h^2\right)$$

$$\leqslant 2^{1-z'/2}\left(1 + \log \frac{1}{2|h|^2}\right)$$

Pour I_2 on a :

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{\theta+h^2(1-\theta)}{\theta(1-\theta)}\right]^{z'/2} \frac{d\theta}{\theta(1-\theta)}$$

vu que $\theta + h^2(1-\theta) > \theta$

$$I_2 \leqslant 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^{z'/2} \frac{d\theta}{1-\theta} = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-\theta)^{-z'/2-1}\, d\theta$$

$$I_2 \leqslant -\frac{4}{z'}\left[(1-\theta)^{-z'/2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{4}{z'}\, 2^{z'/2}$$

ce qui donne

$$I_2 \leq \left(-\frac{2}{z} + \log\left|\frac{1}{2h^2}\right|\right) \text{ avec } h = \frac{x_n - y_n}{x_n + y_n}$$

et donc le 2) du lemme est établi.

Pour le 3) il suffit de constater que $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ est une fonction impaire sur R^{n-1} par rapport à y_j et donc comme $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ est absolument intégrable on déduit que $K_j(x_n, y_n) = 0$ et donc le lemme 7.

COROLLAIRE

Pour tout $x_n > 0$ $\tilde{K}_r(x_n,.)$ et $\tilde{K}_n(x_n,.)$ est intégrable sur tout compact de $\overline{R}^n_+$ et on a au sens des distributions $\frac{\partial E}{\partial x_j}(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_j}(x,y,\theta)\, d\theta$.

En effet $K_r(x_n, y_n)$ au voisinage de $y_n = 0$, x_n étant positif, se comporte comme $C\, y_n^{-z'-1}$ qui est localement intégrable car $z' < 0$.

Au voisinage de $y_n = x_n$, $\tilde{K}_r$ se comporte comme $C \log |x_n - y_n|$ qui est intégrable localement et donc le résultat pour $\tilde{K}_r$ suit.

Pour $\tilde{K}_n(x_n\ y_n)$ on a :

$\tilde{K}_n(x_n - y_n)$ se comporte au voisinage de $y_n = 0$ comme $C\, x_n^{z'}\ y_n^{-z'-1}$ (en effet $\mathrm{Min}(1, (\frac{x_n}{y_n})^{z'}) = (\frac{x_n}{y_n})^{z'}$ et $y_n^{-z'-1}$ est intégrable.

Démonstration de la proposition 3

On va vérifier que les hypothèses a, b et c de la proposition 2 sont satisfaites.

Hypothèse a :

C'est une conséquence du lemme 8 suivant.

LEMME 8

Soit F un compact de $]-\infty,0[$ il existe une constante $C > 0$ tel que l'on ait pour $z \in F$ $(x,y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ $x \neq y$

$$1 - \left|\frac{\partial E}{\partial x_j}(x-y)\right| \leqslant \begin{cases} C\, y_n^{-z'-1}\, |x-y|^{z'+1-n} & \text{si } -1 \leqslant z' < 0 \\ C\, |x-y|^{-n} & \text{si } z' < -1 \end{cases}$$

$$2 - \frac{\partial^2 E}{\partial x_j\, \partial x_k}(x-y) \leqslant \begin{cases} C\, y_n^{-z'-1}\, |x-y|^{z'-n} & \text{si } -1 \leqslant z' < 0 \\ C\, |x-y|^{-n-1} & \text{si } z' < -1 \end{cases}$$

Preuve : Considérons d'abord le cas $j < n$.

Comme $\left|\frac{\partial F}{\partial x_j}(x\ y)\right| = \gamma'\, y_n^{-z'-1}\, |x_j-y_j|\, A^{z'-n}[\theta(1-\theta)]^{\frac{(z'+2)}{2}}$

et que $|x_j-y_j| \leqslant |x-y|$

$A^{z'-n} \leqslant |x-y|^{z'-n}$ car $A \geqslant |x-y|$ (voir lemme 1 partie I).

On a : $\left|\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,y)\right| \leqslant C\, y_n^{-z'-1}\, |x-y|^{z'-n+1}[\theta(1-\theta)]^{\frac{(z'+2)}{2}}$

Si de plus $z' < -1$ on a $y_n^{-z'-1} \leqslant (x_n+y_n)^{-z'-1}$

$$A^{z'-n} \leqslant ((x_n+y_n)\sqrt{1-\theta})^{z'+1}\, |x-y|^{-1-n}$$

donc $\left|\frac{\partial F}{\partial x_j}(x-y)\right| \leqslant C|x-y|^{-n}\, \theta^{\frac{(z'+2)}{2}}\, (1-\theta)^{-1/2}$

Intégrant en θ on obtient les estimations pour $\frac{\partial E}{\partial x_j}(x-y)$.

Si $j < n$ et $k < n$ on a :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\, \partial x_k} = C\, y_n^{-z-1} (x_j-y_j)\, (x_k-y_k)\, A^{z-n-2} [\theta(1-\theta)]^{-\frac{(z+2)}{2}}$$

pour $j \neq k$ et si $j = k$ on a :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^{\,2}} = C\, y_n^{-z-1}\, A^{z-n} [\theta(1-\theta)]^{-\frac{(z+2)}{2}} +$$

$$+ C\, y_n^{-z-1} (x_j-y_j)^2\, A^{z-n-2} [\theta(1-\theta)]^{-\frac{(z+2)}{2}}$$

On fait alors les mêmes majorations en estimant $A^{z'-n-2}$ par :

$$|x-y|^{z'-n-2} \qquad\qquad \text{si } -1 \leqslant z' < 0$$

$$(x_n+y_n)^{z'+1} (1-\theta)^{\frac{z'+1}{2}}\, |x-y|^{-n} \qquad\qquad \text{si } z' < -1$$

et par intégration en θ on obtient la 2ème estimation du lemme.

Si l'un des indices j ou k vaut n les calculs sont similaires en remplaçant le facteur $x_j - y_j$ par $x_n+(1-2\theta)y_n$ et en majorant $|x_n+(1-2\theta)y_n|$ par A.

En conclusion le noyau distribution $\frac{\partial E}{\partial x_j}$ vérifie l'hypothèse a avec $\alpha = \mathrm{Min}(0, 1+z')$.

Hypothèse c) :

Posons $\eta(x) = \tilde{\eta}(x_n)$, $0 \leqslant \tilde{\eta} \leqslant 1$, $\tilde{\eta} \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ tel que $\tilde{\eta} = 1$ pour $0 < x_n < 1$ $\tilde{\eta} = 0$ pour $x_n > 2$. Alors si l'on pose $E_j(x,y) = \frac{\partial E}{\partial x_j}(x,y)$ $1 \leqslant j \leqslant n$ comme $K_j(x_n, y_n) \equiv 0$ $1 \leqslant j \leqslant n-1$ et $K_n(x_n,y_n) = x_n^z\, y_n^{-z-1}\, Y(x_n-y_n)$ vu le lemme 7 on a :

$$(E_j \tilde{\eta}_R)(x) = 0 \quad \text{si } j < n-1$$

et $$E_n \tilde{\eta}_k(x) = \int_0^1 t^{-z-1} \tilde{\eta}\left(\frac{x_n t}{R}\right) dt$$

après changement de variable. On a donc :

$$|E_n \tilde{\eta}_R(x) - E_n \tilde{\eta}_R(y)| \leq \int_0^1 t^{-z'-1} \left|\tilde{\eta}\left(\frac{x_n t}{R}\right) - \tilde{\eta}\left(\frac{y_n t}{R}\right)\right| dt$$

On a la majoration :

$$\left|\tilde{\eta}\left(\frac{x_n t}{R}\right) - \tilde{\eta}\left(\frac{y_n t}{R}\right)\right| \leq [\tilde{\eta}]_\mu \, t^\mu \left|\frac{x_n - y_n}{R}\right|^\mu$$

et

$$|E_n \tilde{\eta}_R(x) - E_n \tilde{\eta}_R(y)| \leq [\tilde{\eta}]_\mu \left|\frac{x_n - y_n}{R}\right|^\mu \int_0^1 t^{-z-1+\mu} dt$$

$$\int_0^1 t^{-z'-1+\mu} dt = C < +\infty \quad \text{d'où}$$

$$[E_n \tilde{\eta}_k]_\mu \leq \frac{C}{R^\mu} [\tilde{\eta}]_\mu \leq C [\tilde{\eta}]_\mu \quad \text{pour } R \geq 1.$$

ce qui donne l'hypothèse c).

Hypothèse b) :

Vu l'homogénéité des E_j et l'invariance par translation tangentielle il suffit d'évaluer $||E_j \xi_{\rho,a}||_\infty$ pour $\rho = 1$ et $a' = 0$.

On choisit $\xi(x) = \alpha(x') \beta(x_n)$ où α et β sont des fonctions C_0^∞ valant 1 pour $|x'| < 1$ et $x_n < 1$ respectivement.

Posons $V_j(x\ a_n) = (E_j \xi_{a_n})(x)$; $V_j(x,a_n)$ s'écrit alors :

$$V_j(x,a_n) = \int_0^{+\infty} U_j(x,y_n)\, \beta(y_n-a_n)\, dy_n$$

ou

$$U_j(x,y_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E_j(x,y)\, \alpha(y')\, dy'$$

Les intégrales convergent grâce au corollaire du lemme 7.

On va commencer par donner des majorations sur les $U_j(x-y_n)$ $0 \leqslant j \leqslant n$ ce qui va faire l'objet du lemme 9 que voici :

LEMME 9

Soit σ un nombre tq $0 < \sigma < \mathrm{Min}(1,-z')$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n_+$ $x_n \neq y_n$ $y_n > 0$ on a :

1 - $|U_j(x,y_n| \leqslant C\, y_n^{\sigma-1}$ $1 \leqslant j \leqslant n-1$

2 - $|U_n(x,y_n) + \alpha(x') x_n^z\, y_n^{-z-1}\, Y(x_n-y_n)| \leqslant C\, y_n^{\sigma-1}$

Preuve :

1°) Comme $U_j(x,y_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E_j(x,y)\, \alpha(y')\, dy'$

et vu que : $E_j(x,y) = \gamma' \quad y_n^{-z-1}(x_j-y_j)\, A^{z'-n} [\theta(1-\theta)]^{\frac{(z'+2)}{2}}$

et $A^2 = (r^2 + B^2)$ avec $r = |x'-y'|$ $B^2 = A^2 - r^2$.

$U_j(x-y_n)$ s'écrit alors en introduisant la fonction $N_z(y') = \gamma' \quad (1+|y'|^2)^{\frac{z-n}{2}}$ et après changement de variable $x'-y' = y_1'$:

$$1 - U_j(x,y_n) = \int_o^1 y_n^{-z-1}\ B^z \int_{\mathbb{R}^{n-1}} y_j\ N_z(y')\ \alpha(x'-By')\ dy'[\theta(1-\theta)]^{\frac{(z'+2)}{2}}\ d\theta$$

$$2 - U_n(x,y_n) = \int_o^1 (x_n+(1-2\theta)y_n)y_n^{-z-1}\ B^{z-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} N_z(y')\alpha(x'-By')dy'[\theta(1-\theta)]^{\frac{(z'+2)}{2}}\ d\theta$$

Or la fonction $N_z(y')$ vérifie :

$$\int |N_z(y')|\ (1+|y'|)^{1+\sigma}\ dy' < +\infty \quad \text{car } 0 < \sigma < \text{Min}(1,-z)$$

et $\displaystyle\int y_j\ N_z(y')\ dy' = 0$ vu la symétrie.

Donc pour avoir une majoration de 1 on remplace

$$\int y_j\ N_z(y')\ \alpha(x'-By')\ dy'$$

par

$$\int y_j\ N_z(y')\ [\alpha(x'-By') - \alpha(x')]\ dy.$$

Et le module de cette dernière intégrale est inférieure à :

$$\int [\alpha]_\sigma\ |By'|^\sigma\ |y_j|\ |N_z(y')|\ dy' = C\ B^\sigma\ [\alpha]_\sigma \quad \text{si } B < 1$$

car

$$\int |y_j|\ |y'|^\sigma\ |N_z(y')|\ dy' \leqslant \int (1+|y'|)^{1+\sigma}\ |N_z(y')|\ dy < +\infty$$

ce qui donne que :

$$|U_j(x,y_n)| \leqslant \int_o^1 y_n^{-z'-1}\ B^{z'+\sigma}\ [\alpha]_\sigma\ [\theta(1-\theta)]^{\frac{(z'+2)}{2}}\ d\theta$$

et si $B \geqslant 1$

$$U_j(x,y_n) \leqslant C||\alpha||_\infty \int_o^1 B^z\,[\theta(1-\theta)]^{\frac{z'+2}{2}}\,d\theta\;y_n^{-z-1}$$

Donc dans tous les cas on a :

$$|U_j(x,y_n)| \leqslant C\int_o^1 y_n^{-z-1}\,B^z\,[\theta(1-\theta)]^{\frac{(z'+2)}{2}}\,\mathrm{Min}(1,B^\sigma)\,d\theta$$

et

$$|U_j(x-y_n)| \leqslant C\,y_n^{-z'-1}\int_o^1 B^{z'+\sigma}\,[\theta(1-\theta)]^{\frac{z'+2}{2}}\,d\theta$$

comme $B > y_n(1-\theta)^{\frac{1}{2}}$ et que $z'+\sigma < 0$

$$\int B^{z'+\sigma}\,[\theta(1-\theta)]^{\frac{z'+2}{2}}\,d\theta \leqslant y_n^{z'+\sigma}\int_o^1 \theta^{\frac{z'+2}{2}}\,(1-\theta)^{\frac{\sigma-2}{2}}\,d\theta$$

$$\leqslant C\,y_n^{z'+\sigma} \text{ car } \sigma > 0$$

ce qui donne $|U_j(x,y_n)| \leqslant y_n^{\sigma-1}$ et donc le 1) du lemme 9.

Comme $x_n^z\,y_n^{-z-1}\,Y(x_n-y_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_o^1 \frac{\partial F}{\partial x_n}(x,y,\theta)\,d\theta\,dy'$

$U_n(x,y_n) + \alpha(x')\,x_n\,y_n^{-z-1}\,Y(x_n-y_n)$ n'est autre que

$$\int_o^1 (x_n+(1-2\theta)y_n)y_n^{-z-1}\,B^{z-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} N_z(y')[\alpha(x'-By')-\alpha(x')]\,dy'[\theta(1-\theta)]^{\frac{z'+2}{2}}\,d\theta$$

Or là encore comme $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} y_j\,N_z(y')\,dy' = 0$ on a

$$\int N_z(y')\,[\alpha(x'-By') - \alpha(x')]\,dy' =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} N_z(y')[\alpha(x'-By')-\alpha(x')-B\sum_1^{n-1} y_j\,\partial_j\alpha(x)]\,dy'$$

et le terme entre crochets est égal d'après la formule de Taylor avec reste intégrale à :

$$B \sum_{1}^{n-1} y_j \int_o^1 [\ D_j\ \alpha(x') - D_j\ \alpha(x' - \tau\ By')\ ]d\tau$$

que l'on majore par :

$$\sum_{j=1}^{n-1} B\ |y_j|(|B||y'|)^{-\sigma} \leqslant C\ B^{\sigma+1}\ |y'|^{1+\sigma}$$

et donc :

$$\int N_z(y')\ (\alpha(x'-By') - \alpha(x'))dy' \leqslant C'\ B^{\sigma+1}$$

avec $C' = C \int |y'|^{1+\sigma}\ N_z(y')\ dy'$

on obtient alors que

$$|U_n(x,y_n) + \alpha(x')x_n^z\ y_n^{-z-1}\ Y(x_n-y_n)| \leqslant$$

$$\leqslant C \int_o^1 y_n^{-z'-1}B^{z'-1}\ \mathrm{Min}(1-B^{\sigma+1})(x_n+(1-2\theta)y_n)[\ \theta(1-\theta)]^{\frac{(z'+2)}{2}}\ d\theta$$

Mais $|x_n+(1-2\theta)y_n| < B$ et que $\mathrm{Min}(1-B^{\sigma+1}) \leqslant B^{\sigma}$ ce qui donne

$$|U_n(x,y_n) + \alpha(x')x_n^z\ y_n^{-z-1}\ Y(x_n-y_n)| < C\ y_n^{-z-1} \int_o^1 B^{z'+\sigma}[\ \theta(1-\theta)]^{\frac{(z'+2)}{2}}\ d\theta$$

Là encore B étant $> y_n\ \sqrt{1-\theta}$ et $z'+\sigma < 0$, on a

$$\int B^{z'+\sigma}\ [\ \theta(1-\theta)]^{\frac{(z'+2)}{2}}\ d\theta \leqslant C'\ y_n^{z+\sigma}$$

Donc $|U_n(x,y_n) + \alpha(x')x_n^z\, y_n^{-z-1}\, Y(x_n-y_n)| \leqslant C\, y_n^{\sigma-1}$

et le lemme 9 est établi.

Vérifions maintenant l'hypothèse b) ; pour $V_j(x,a_n)$ on a d'après le 1) du lemme :

$$|V_j(x,a_n)| \leqslant C \int_a^\infty \beta(y_n-a_n)\, y_n^{\sigma-1}\, dy_n$$

Or β est à support compact et l'intégrale est bornée uniformément en x et a_n.

On a :

$$|U_n(x,y_n)| \leqslant C\, y_n^{\sigma-1} + |\alpha(x')x_n^{z'}\, y_n^{-z'-1}\, Y(x_n-y_n)|$$

et

$$|V_n(x,a_n)| \leqslant C \int_0^\infty \beta(y_n-a_n) y_n^{\sigma-1}\, dy_n + C \int_0^1 \alpha(x')\, \beta(x_n t-a_n)\, t^{-z'-1}\, dt$$

$$\leqslant C + ||\alpha||_\infty\, ||\beta||_\infty\, C' = C''.$$

Et donc $|V_n(x\, a_n)| \leqslant C$ indépendemment de a_n et x ce qui donne

$$||E_n\, \xi_{\rho,a}||_\infty \leqslant C$$

ce qui termine la vérification de l'hypothèse b et par suite les noyaux E_j opèrent de C^μ dans C^μ.

<u>PROPOSITION 4</u> :

Les noyaux $\partial_{xj}\, \partial_{xk}\, x_n\, E$ opèrent de C^{μ}_{comp} dans C^{μ}_{loc}.

<u>Preuve</u> :

Soit $f \in C^{\mu}(\bar{\mathbb{R}}^n_+) \cap \mathcal{E}'(\omega_R)$ et posons $u(x) = E\, f(x)$ d'après la 1ère partie $u(x)$ est solution de l'équation $\mathcal{L}u = f$ et d'après la 2ème partie $u(x) \in C^{1+\mu}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ donc en posant $v(x) = x_n\, u(x)$ on a que $v(x)$ est solution du problème de Dirichlet pour $-\Delta$ dans le demi-espace

$$\begin{cases} -\Delta v(x) = f(x) - (z+2)\, D_n\, u(x) \text{ dans } \mathbb{R}^n_+ \\ \\ v(x) = 0 \text{ sur } x_n = 0 \end{cases}$$

d'après un théorème classique $v \in C^{1+\mu}_{loc}\,(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ ce qui achève la 2ème partie.

Et par la suite on a aboutit au but fixé au début et donc on a le théorème de GOULAOUIC-SHIMAKURA.