

J. BERTIN

**Automorphismes des surfaces algébriques non complètes**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1980, fascicule S3

« Colloque d'algèbre », , p. 169-185

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1980\\_\\_S3\\_169\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1980__S3_169_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

AUTOMORPHISMES DES SURFACES ALGÈBRIQUES  
NON COMPLETES

---

J. Bertin (Toulouse)

INTRODUCTION.

Dans l'étude des surfaces algébriques projectives sur  $\mathbb{C}$ , qui ont un "gros" groupe d'automorphismes, un outil de base est le morphisme d'Albanèse. (Potters, Fujuki). Il permet de représenter le groupe  $\text{Aut}^0$  (qui est un groupe algébrique) dans le groupe des translations de la variété d'Albanèse. Nous voulons décrire une méthode analogue pour des variétés non complètes, en particulier affines. On remplace la variété d'Albanèse (variété abélienne) par la variété d'Albanèse (quasi-Albanèse au sens d'Itaka, voir aussi Serre). Dans le cas d'une variété affine normale, et rationnelle, ce n'est rien d'autre que le tore algébrique  $\text{Spec}(R^*/k^*)$ ,  $R$  étant l'anneau des coordonnées et  $R^*$  le groupe des unités. (§ 1). Nous obtenons ainsi un théorème du type Remmert-Van de Ven (§3). Nous montrons comment on peut ramener l'étude des surfaces affines lisses, quasi-homogènes sous un groupe algébrique d'automorphismes, au cas où l'irrégularité logarithmique est nulle. Dans ce dernier cas, nous renvoyons à un article en préparation.

## 1. Variétés quasi-abéliennes et morphisme d'Albanèse

1.1. On appelle variété quasi-abélienne un groupe algébrique connexe qui est extension d'une variété abélienne par un tore (algébrique). Ceci signifie que dans la décomposition de Chevalley, le plus grand sous-groupe linéaire connexe est un tore ; ou encore que le groupe  $G$  ne contient pas le groupe additif  $G_a$ , [5].

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 1$$

Une variété quasi-abélienne est un groupe algébrique commutatif. Nous utiliserons la notation additive.

1.2. Soient  $G$  une variété quasi-abélienne et  $V, W$  des variétés. Tout morphisme  $f : V \times W \longrightarrow G$  s'écrit :  $f(x,y) = g(x) + h(y)$  avec :

$$g : V \longrightarrow G \text{ et } h : W \longrightarrow G.$$

c'est bien connu si  $G$  est une variété abélienne. Dans le cas général, considérons des points  $x_0 \in V$  et  $y_0 \in W$  ; nous pouvons supposer  $f(x_0, y_0) = 0$ . Si  $\tilde{f}(x,y) := f(x, y_0) + f(x_0, y)$ , nous devons vérifier que  $f = \tilde{f}$ . Si  $\pi$  désigne la surjection de  $G$  sur le quotient abélien  $A$ ,  $\pi \circ f = \pi \circ \tilde{f}$  donc le morphisme  $\underline{f}_1 = f - \tilde{f}$  a son image dans  $T$ . Nous avons  $\underline{f}_1(x, y_0) = \underline{f}_1(x_0, y) = 0$ .

Soit  $\chi$  un caractère de  $T$  ;  $\chi \circ \underline{f}_1$  définit une unité de  $\Gamma(V \times W, \mathcal{O}_{V \times W})$ . Rappelons que si on désigne par  $U_k(V)$  le groupe  $\Gamma(V, \mathcal{O}_V^*)/k^*$ ,  $U_k(V)$  est un groupe de type fini et : [Rosenlich], [4].

$$U_k(V) \oplus U_k(W) = U_k(V \times W)$$

Par suite il existe des morphismes :  $\alpha : V \longrightarrow k^*$ ,  $\beta : W \longrightarrow k^*$  avec :

$$\chi \circ \underline{f}_1 = \alpha(x) \beta(y)$$

si  $x = x_0$  on obtient  $\beta = \text{constante} = 1$  et si  $y = y_0$ ,  $\alpha = \text{constante} = 1$ , d'où  $\underline{f}_1 \equiv 0$  et  $f = \tilde{f}$ .

Comme conséquence, nous avons :

1.3. Tout morphisme d'un groupe algébrique  $H$  dans une variété quasi-abélienne  $G$  est composé d'une translation de  $G$  et d'un homomorphisme de  $H$  dans  $G$ . En particulier, tout automorphisme de la variété sous jacente à  $G$  est un morphisme affine : translation 0 automorphisme de groupe algébrique.

Nous noterons  $T(G)$  le groupe des translations de  $G$ .  $T(G)$  peut être considéré comme un groupe algébrique :  $T(G) \cong G$ .

#### Théorème 1.4.

Soit  $V$  une variété (que nous supposerons toujours normale) : il existe une variété quasi-abélienne  $A$  et un morphisme  $\alpha: V \longrightarrow A$  tel que tout autre morphisme  $\beta: V \longrightarrow B$  ou  $B$  est quasi abélienne, factorise de manière unique par  $A$  :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & A \\ & \searrow \beta & \downarrow \tilde{\beta} \\ & & B \end{array}$$

Alors :

(i)  $\tilde{\beta}$  est affine

(ii)  $\alpha(V)$  engendre  $A$ , c'est-à-dire  $\alpha(V)$  n'est pas contenu dans le translate d'un sous-groupe propre.

(iii)  $(A, \alpha)$  est unique à isomorphisme près.

(iv) le quotient abélien  $A$  de  $A$  est la variété d'Albanèse usuelle de  $V$ .

Ce théorème a été démontré par Serre [exposés] et Itaka . La démonstration de Serre est valable pour tout corps de base algébriquement clos. La construction d'Itaka qui est de nature transcendante suppose  $k = \mathbb{C}$ , mais donne des renseignements précis sur  $A$  en utilisant les formes différentielles à singularités logarithmiques.

1.5. Dans un cas particulier que nous utiliserons dans la suite, on peut donner une construction simple de  $A$ .  $V$  désigne donc une variété normale, le grou-

pe abélien  $U_k(V) = \frac{\Gamma(V, \mathcal{O}_V^*)}{K^*}$  étant libre de rang fini, nous pouvons considérer

le tore algébrique :  $A_V = \text{spec } k[U_k(V)]$ , ( $k[U_k(V)] =$  algèbre de groupe) considérons des éléments  $\phi_1, \dots, \phi_m$  de  $\Gamma(V, \mathcal{O}_V^*)$  induisant une base de  $U_k(V)$ . Si nous identifions  $A_V$  à  $(k^*)^m$  par cette base, nous avons un morphisme :

$$\alpha : V \longrightarrow A_V \cong (k^*)^m :$$

$$\alpha(v) = (\phi_1(v), \dots, \phi_m(v)).$$

Proposition 1.6.

(i) Le morphisme  $\alpha$  est universel pour les morphismes à valeurs dans un tore : tout morphisme  $\beta : V \longrightarrow T$  ou  $T$  est un tore, factorise de manière unique par  $A_V$  :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & A_V \\ & \searrow \beta & \downarrow \tilde{\beta} \\ & & T \end{array}$$

$\tilde{\beta}$  est un morphisme affine.

(ii) Si  $V$  est rationnelle,  $A_V$  est la variété d'Albanèse de  $V$  au sens précédent (1.4.).

Preuve :

Soit une base  $(\chi_1, \dots, \chi_p)$  du groupe des caractères  $\chi(T)$  de  $T$ .  $\beta$  est déterminé par  $p$  fonctions régulières inversibles sur  $V$  :

$$\psi_i = \chi_i \circ \beta, \quad \psi_i \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V^*)$$

on peut donc écrire avec les notations 1.5. (dans le groupe multiplicatif  $\Gamma(V, \mathcal{O}_V^*)$  :

$$\psi_i = c_i \phi_1^{c_{i1}} \dots \phi_m^{c_{im}}, \quad c_i \in k^* \text{ et } (c_{i1}, \dots, c_{im}) \in \mathbb{Z}^m$$

Définissons un morphisme  $\tilde{\beta} : A_V \longrightarrow T \cong (k^*)^p$  par :

$$\tilde{\beta}(t_1, \dots, t_m) = (\dots, c_i t_1^{c_{i1}} \dots t_m^{c_{im}}, \dots).$$

par construction  $\tilde{\beta}$  est affine et il est clair que  $\tilde{\beta} \circ \alpha = \beta$ .

L'unicité de  $\tilde{\beta}$  est évidente si on montre que  $\alpha(V)$  engendre  $A_V$ . Il suffit pour cela de montrer qu'un caractère  $\chi$  de  $A_V$  tel que  $\chi \circ \alpha = \text{constante}$  est trivial.

$\chi \circ \alpha = c \in k^*$  équivaut à une relation :

$$\phi_1(V)^{n_1} \dots \phi_m(V)^{n_m} = c \quad \forall V \in V.$$

Les fonctions  $\phi_1, \dots, \phi_m$  étant indépendantes modulo  $k^*$  nous obtenons  $n_1 = \dots = n_m = 0$ , soit  $\chi = 0$ .

(iii) Si  $V$  est rationnelle et  $\beta$  un morphisme de  $V$  dans une variété quasi-abélienne  $G$ , avec les notations 1.1., il est bien connu que  $\pi \circ \beta$  est constant, en fait nous pouvons supposer modulo une translation que  $\pi \circ \beta = 0$  d'où  $\beta$  factorise sur le tore  $T$  contenu dans  $G$ , et par suite par  $A_V$ . Par l'unicité de la variété d'Albanèse on a la conclusion.

1.7. Si  $V$  est une variété normale, nous appellerons irrégularité de  $V$  l'entier :

$$q(V) = \dim A_V, \quad A_V = \text{variété d'Albanèse de } V.$$

si  $k = \mathbb{C}$  c'est l'irrégularité logarithmique de  $V$ , si  $V$  est rationnelle :

$$q(V) = \text{rang } U_k(V).$$

L'exemple suivant nous sera utile dans la suite.

### Proposition 1.8.

Supposons que  $V$  soit une variété affine torique normale ;  $\sigma$  le cône associé nous avons :

$$q(V) = \dim V - \dim(\sigma) \leq \dim V$$

$$\text{et } q(V) = \dim V \iff V \text{ est un tore.}$$

Preuve :

Nous utilisons la terminologie classique sur les variétés toriques, cône associé, semi-groupe des exposants.... etc...

$\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$  est la  $k$ -algèbre du semi-groupe  $\sigma \cap \mathbb{Z}^n = \{m \in \mathbb{Z}^n, m \geq 0 \text{ sur } \sigma\}$ .

Il est facile de voir que  $\Gamma(V, \mathcal{O}_V^*)$  consiste en les monômes  $c \otimes^m$ ,  $c \in k^*$  et  $m \equiv 0$  sur  $\sigma$ ; d'où  $U_k(V) \cong$  au  $\mathbb{Z}$  dual du groupe  $\mathbb{Z}^n / \langle \sigma \rangle$ ,  $\langle \sigma \rangle$  étant le sous-groupe engendré par  $\sigma$ ; la première assertion en découle :

$$q(V) = \dim(V) \text{ équivaut à } \sigma = 0 \text{ donc } V \text{ est un tore.}$$

1.9. Nous pouvons donner une construction explicite du couple  $(A, \alpha)$  lorsque  $V$  est le complémentaire d'un diviseur  $D = \sum_{j=0}^t D_j$  dans une variété projective rationnelle normale  $X$ .

Une unité de l'algèbre  $\Gamma(V, \mathcal{O}_V) = \Gamma(X-D, \mathcal{O}_X)$  a pour diviseur un cycle de support  $D$  :

$$\text{Div}(f) = \sum_{j=0}^t n_j D_j$$

d'où une relation dans le groupe des classes de diviseurs  $\text{Pic}(X)$  :

$$\sum_{j=0}^t n_j \text{cl}(D_j) = 0$$

inversement une relation entre les  $D_j$  dans  $\text{Pic}(X)$  :

$\sum n_j \text{cl}(D_j) = 0$ , détermine une fonction rationnelle non nulle  $f$ ,  $k(X)^*$  telle que :  $\text{div}(f) = \sum_{j=0}^t n_j D_j$ , d'où  $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V^*)$ . Ainsi nous obtenons un isomorphisme :  $U_k(V) \cong$  du sous-groupe de  $\mathbb{Z}^{t+1}$  défini par  $\sum n_i D_i \equiv 0$ , soit  $\sum n_i \text{cl}(D_i) = 0$  dans  $\text{Pic}(X)$ , aussi :

$$U_k(V) \cong \ker \left( \bigoplus_{i=0}^t \mathbb{Z} D_i \longrightarrow \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q} \right)$$

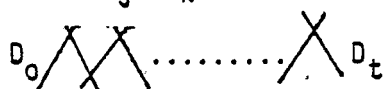
Comme conséquence nous obtenons que  $q(V) = 0 \iff$  les composantes  $D_0, \dots, D_t$  sont linéairement indépendantes dans  $\text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$ .

Exemple :

Considérons une courbe de Dynkin de type  $A$  sur une surface rationnelle complète  $X$ . C'est-à-dire :

$$D = \sum_{j=0}^t D_j \text{ et } D_j \cdot D_k = 0 \iff (j-k) > 1.$$

sinon  $D_j \cdot D_k = 1$ .



Soit  $V = X - D$  ; on a :  $q(V) \leq 1$ . Pour démontrer cette assertion

supposons une relation  $\sum_{i=0}^t n_i p_i \equiv 0$  ; on a donc le système d'équations :

$$n_0 D_0^2 + n_1 = 0$$

$$n_0 + n_1 D_1^2 + n_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$n_{j-1} + n_j D_j^2 + n_{j+2} = 0$$

$$\vdots$$

$$n_{t-1} + n_t D_t^2 = 0$$

Il est clair que le groupe des solutions est de rang  $\leq 1$ .

## 2. Le morphisme de Jacobi d'une variété quasi-homogène

2.1. Une variété normale  $V$  (complète ou non) est quasi-homogène sous l'action d'un groupe algébrique  $G$  s'il existe une orbite dense (donc ouverte). Les points de l'orbite dense, qui est unique, seront appelés points en position générale.

Nous utiliserons aussi la terminologie presque homogène s'il existe un point  $x \in V$  tel que l'orbite de  $x$  sous le groupe entier  $\text{Aut}(V)$  soit  $V$  moins un nombre fini de points ; c'est la situation étudiée par Gizatullin, Gizatullin-Dani-lov et Popov,

Dans la suite, nous nous limiterons aux variétés rationnelles.

### Proposition 2.2.

Soit  $G$  un groupe algébrique qui opère sur une variété rationnelle  $V$ .

Fixons un point de base  $x_0 \in V$  et supposons le morphisme d'Albanèse  $\alpha$  choisi tel



que  $\alpha(x_0) = 0 \in A_V$ . Il existe un morphisme de groupes algébriques

$\phi : G \longrightarrow A_V$  unique vérifiant :

$$(*) \quad \alpha(g.x) = \phi(g) + \alpha(x) \quad \forall g \in G, \forall x \in V$$

( $A_V$  est noté additivement).

Preuve :

Considérons l'action  $\sigma : G \times V \longrightarrow V$  de  $G$  sur  $V$ . En composant avec  $\alpha$  on obtient un morphisme de  $G \times V$  dans  $A$ . Le résultat très utile de Rosenlich, rappelé en 1.2. peut se formuler ainsi : soit  $T$  un tore et  $f$  un morphisme

$$f : V \times W \longrightarrow T.$$

Il existe des morphismes  $g$  et  $h : g : V \longrightarrow T, h : W \longrightarrow T$  tels que  $f(v,w) = g(v) + h(w)$ . Ils sont définis modulo une translation par un élément de  $T$ . Il suffit en effet d'appliquer le lemme de Rosenlich aux composantes de  $f$  après identification  $T = (k^*)^m$ .

Appliquons ceci au morphisme  $\alpha \circ \sigma$ , donc nous avons  $\beta : G \longrightarrow A$  et  $\gamma : V \longrightarrow A$  tels que  $\alpha(g.x) = \beta(g) + \gamma(x)$ , nous pouvons supposer que  $\beta(1) = 0$  ; d'où si on fait  $g = 1$  on a  $\gamma = \alpha$ , et si on fait  $x = x_0$  ;  $\alpha(g.x_0) = \beta(g)$ , on prend  $\phi = \beta$ . Toujours en utilisant le lemme de Rosenlich il est facile de voir que  $\phi$  est en fait un homomorphisme de groupes et par construction nous avons bien la propriété  $(*)$

$$\alpha(g.X) = \phi(g) + \alpha(X)$$

#### 2.4. Définition

Nous appellerons  $\phi$  le morphisme de Jacobi de la  $G$ -variété  $V$  ; on pourra comparer avec le cas  $V$  complète par exemple dans [4]

#### 2.5. Note

En vertu de la propriété universelle de  $\alpha$ , tout automorphisme  $g$  de  $V$

induit un automorphisme  $\tilde{g}$  de  $A(V)$  de telle sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\alpha} & A \\
 \uparrow g & & \uparrow \tilde{g} \\
 V & \xrightarrow{\alpha} & A
 \end{array}$$

d'où un homomorphisme de groupes abstraits  $\phi : \text{Aut}(V) \longrightarrow \text{Aut}(A)$ .

### 2.6. Lemme

Soient  $\phi$  et  $\alpha$  les morphismes de Jacobi (resp d'Albanèse) de la  $G$ -variété quasi-homogène  $V$  ;  $\alpha$  et  $\phi$  sont surjectifs.

Preuve :

Supposons  $\alpha$  choisi tel que  $\alpha(x_0) = 0$  avec  $x_0$  en position générale. Nous avons alors  $\phi(g) = \alpha(g.x_0)$ , d'où  $\alpha(G.x_0) = \text{im}(\phi)$  qui est un sous-groupe fermé de  $A$  et puisque  $G.X_0$  est dense dans  $V$ , on a les inclusions :

$$\alpha(V) = \text{im}(\phi) \subset A$$

comme  $\alpha(V)$  engendre  $A$  nous obtenons  $\alpha(V) = \text{im}(\phi) = A$ . Par un argument tout à fait analogue nous avons :

### 2.7. Corollaire

Toute composante irréductible du bord de  $V$  ( $= V - \text{orbite dense}$ ) est de dimension  $\geq \dim A = q$ .

### 2.8. Exemple

Si  $V$  est une surface normale quasi-homogène, et si  $V$  a un point singulier, alors  $q(V) = 0$ .

Dans la situation presque homogène, nous avons un résultat un peu plus faible à savoir que  $\alpha$  est dominant. Si  $V$  est une surface affine, presque homogène, lisse,

Gizatullin a démontré que l'on pouvait réaliser  $V$  comme le complémentaire d'une courbe de Dynkin de type A dans une surface rationnelle complète, sauf peut-être si  $V \cong G_m^2$ . On observe donc dans ce cas des surfaces presque homogènes, que l'on a toujours  $q \leq 2$ ; c'est ce dernier point que nous pouvons généraliser.

### 2.9. Proposition

Soit une variété normale  $V$  presque homogène; le morphisme d'Albanèse  $\alpha: V \longrightarrow A$  est dominant, en particulier  $q(V) \leq \dim V$  (nous supposons que le corps algébriquement clos  $k$  est non dénombrable).

Preuve :

Nous avons vu que par universalité de  $\alpha$ , on obtient un homomorphisme de groupes abstraits  $\phi: \text{Aut}(V) \longrightarrow \text{Aut}(A)$ .

Pour simplifier la discussion, nous supposons  $V$  rationnelle donc  $A$  est un tore (la conclusion est encore valable avec les mêmes arguments dans le cas général)

Observons que tout automorphisme de la variété  $A$  est affine, donc de la forme : translation ou automorphisme du groupe  $A$ . Notons  $T(A) \cong A$  le groupe des translations, il est normal dans  $\text{Aut}(A)$  et  $\text{Aut}(A)$  est produit semi-direct de  $T(A)$  et de  $\text{Aut}_{gp}(A)$  avec en particulier  $\text{Aut}_{gp}(A) \cong \text{Aut}_{\mathbb{Z}} X(A) \cong GL_q(\mathbb{Z})$  si  $\dim A = q$ . Notons  $\widetilde{\text{Aut}}(V)$  l'image inverse de  $T(A)$  sur  $\phi$ , par suite  $\widetilde{\text{Aut}}(V)$  est normal dans  $\text{Aut}(V)$  et de quotient dénombrable puisque :

$$\frac{\text{Aut}(V)}{\widetilde{\text{Aut}}(V)} \subset GL_q(\mathbb{Z})$$

choisissons un système de représentants dans  $\text{Aut}(V)$  du sous-groupe  $\widetilde{\text{Aut}}(V)$  ;

$$g_0 = 1, g_1, g_2, \dots, g_i, \dots$$

$$\text{d'où : } \text{Aut}(V) = \bigcup_{i=0}^{\infty} g_i \widetilde{\text{Aut}}(V)$$

Posons  $\Omega = \widetilde{\text{Aut}}(V) \times_0$  (nous supposons que  $V\text{-Aut}(V) \times_0$  fini,

$$\text{d'où : } V = \bigcup_{i=0}^{\infty} g_i \Omega \cup \{z_1, \dots, z_s\}$$

$$\text{d'où : } V = \bigcup_{i=0}^{\infty} \overline{g_i \Omega} \cup \{z_1, \dots, z_s\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} g_i(\overline{\Omega}) \cup \{z_1, \dots, z_s\}$$

Nous allons conclure que  $\Omega$  est partout dense dans  $V$  par un argument du type Baire. Nous avons en effet le lemme suivant (avec l'hypothèse sur  $k$ ) qui est probablement bien connu. N'ayant pas de référence nous en donnons une démonstration.

### 2.10. Lemme

Soit une variété  $V$  sur le corps  $k$  telle que :

$$V = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$$

$F_i$  fermé, alors pour un indice  $i_0$  on a :  $V = F_{i_0}$  (ici on identifie  $V$  à l'ensemble de ses points fermés).

Preuve :

Si  $k = \mathbb{C}$  remarquons que c'est le théorème classique de Baire. Nous procédons par récurrence sur  $\dim V$ ; si  $\dim V = 1$ , la conclusion est claire car un fermé propre est fini. Supposons  $\dim V > 1$ . Nous pouvons aussi supposer que  $V$  est affine et alors par normalisation on se ramène à l'espace affine  $A^n$ ; enfin quitte à considérer  $F_i \cup (\mathbb{P}^n - A^n)$  on suppose que  $V = \mathbb{P}^n$ . Si chaque fermé  $F_i$  est un fermé propre, il contient seulement un nombre fini d'hyperplans et par suite l'ensemble des hyperplans contenus dans un fermé  $F_i$  est une partie au plus dénombrable de l'espace projectif dual; l'hypothèse sur le corps  $k$  permet de trouver un hyperplan (générique)  $H$  qui ne sera contenu dans aucun  $F_i$  d'où :

$$\mathbb{P}^{n-1} \cong H = \bigcup_{i=0}^{\infty} H \cap F_i, \text{ et } H \cap F_i \text{ étant un fermé propre de } H;$$

nous obtenons une contradiction.

Ce lemme nous permet de conclure que  $\Omega$  est partout dense dans  $V$  si on identifie

pour  $g \in \widetilde{\text{Aut}}(V)$ ,  $\phi(g)$  avec un élément de  $A$ , nous avons :

$$\alpha(g-x_0) = \phi(g) \quad \forall g \in \widetilde{\text{Aut}}(V)$$

par suite :  $\alpha(\Omega) = \text{im } \phi$  est un sous-groupe abstrait de  $A$  et  $\Omega$  étant partout dense :

$$\text{im}(\phi) = \alpha(\Omega) \subset \overline{\alpha(\Omega)} = \alpha(V) \subset \overline{\alpha(V)} = \overline{\text{im}(\phi)} \subseteq A$$

$\overline{\text{im}(\phi)}$  est un sous-groupe formé de  $A$  qui contient  $\alpha(V)$  donc

$\overline{\text{im}(\phi)} = A$  puisque  $\alpha(V)$  engendre  $A$ , d'où la conclusion.

2.11. Note : La conclusion subsiste s'il existe seulement une orbite sous  $\text{Aut}(V)$  qui contient un ouvert non vide de  $V$ .

### 3. Un théorème du type Remmert - Van de Ven

Le résultat qui suit est notre outil principal pour classifier les surfaces algébriques quasi-homogènes, il ramène le problème aux surfaces d'irrégularité zéro. C'est une généralisation d'un résultat bien connu de Remmert - Van de Ven concernant les variétés analytiques compactes quasi-homogènes sous un groupe de Lie complexe. En ce qui concerne l'essentiel, notre résultat est valable sur un corps de caractéristique quelconque. Comparer avec [1]

#### 3.1. Lemme

Soit  $\alpha$  le morphisme d'Albanèse d'une variété quasi-homogène  $V$  sous un groupe algébrique connexe  $G$ .  $k(A)$  est algébriquement fermé dans  $k(V)$  dans deux cas :

(i)  $G$  est un groupe linéaire

(ii)  $G$  est arbitraire et  $k$  de caractéristique zéro.

Preuve :

Fixons un point en position générale  $x_0$ , tel que  $\alpha(x_0) = 0$ .  $\alpha$  est un morphisme

surjectif équivariant,  $G$  opérant sur  $A$  par le morphisme de Jacobi, plaçons-nous dans l'hypothèse (i). Soit  $\tilde{A}$  la normalisation de  $A$  dans  $k(V)$ , comme  $G$  est affine, d'où une variété rationnelle  $A$  est un tore algébrique; considérons le diagramme commutatif :

$$(1, \alpha) \quad \begin{array}{ccc} G \times V & \xrightarrow{\sigma} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times A & \xrightarrow{\quad} & A \end{array} \quad \alpha$$

comme  $k(\tilde{A})$  est un sous-corps algébriquement fermé de  $k(V)$  et que  $k(G)$  est transcendante pure,  $k(G \times \tilde{A})$  est algébriquement fermé dans  $k(G \times V)$  d'où  $G \times \tilde{A}$  est la normalisation de  $G \times A$  dans  $G \times V$ ;  $\sigma$  induit alors un morphisme  $\tilde{\sigma} : G \times \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  qui est aussi compatible avec  $\phi$ . Il est clair que  $\sigma$  est une action de  $G$  sur  $\tilde{A}$  et que l'on a une factorisation :

$$\alpha : G \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \tilde{A} \xrightarrow{\beta} A$$

$\tilde{\alpha}, \beta$  équivariants.

Par la propriété universelle de la variété d'Albanèse on a :  $A \cong \text{Alb}(\tilde{A})$ ,

$\phi$  étant surjectif, il existe un tore maximal  $T$  de  $G$  tel que  $\phi(T) = A$ .

Si  $y_0 = \tilde{\alpha}(x_0)$  nous avons  $\beta(T.y_0) = \phi(T) = A$  donc  $T.y_0$  est partout dense dans  $\tilde{A}$ .

Comme  $\dim \tilde{A} = \dim A$ ,  $\tilde{A}$  est une variété torique affine en utilisant 1.8. on obtient que  $\tilde{A}$  est un tore (car  $\dim \text{Alb}(\tilde{A}) = \dim \tilde{A}$ ) d'où  $\tilde{A} = A$ .

Supposons  $k$  de caractéristique zéro et  $G$  quelconque; soit encore  $\tilde{A}$  la normalisation de  $A$  dans  $k(V)$ ,  $\alpha$  factorise par  $\tilde{A}$  et le morphisme  $V \rightarrow \tilde{A}$  a sa fibre générique intègre. Considérons la normalisation  $X$  de  $G \times A$  dans  $G \times V$ .

On a la factorisation :

$$G \times V \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{\delta} G \times \tilde{A}$$

$\delta$  étant fini et une fibre générique de  $\delta \gamma$  étant irréductible,  $\delta$  doit être génériquement bijectif, par suite birationnel. Comme  $G \times \tilde{A}$  est normale on conclut

que  $X = G \times \tilde{A}$ . Par un raisonnement analogue au précédent on a une action de  $G$  sur  $\tilde{A}$  qui est quasi-homogène et une factorisation équivariante de  $\alpha$ . Soit  $N^0$  la composante neutre de  $\phi^{-1}(0)$ .  $N^0$  opère sur les fibres (finies) de  $\beta$  par suite opère trivialement sur  $\tilde{A}$ ; donc quitte à quotienter par  $N^0$  nous pouvons supposer que  $\phi$  est de noyau fini. Alors si  $x_0 \in \tilde{A}$  est en position générale avec  $\beta(x_0) = 0$  nous avons la factorisation de  $\phi$  :

$$G \xrightarrow{\tau} \tilde{A} \xrightarrow{\beta} A \quad \tau(g) = g.x_0$$

$\beta$  et  $\phi$  étant finis, il en est de même de  $\tau$  d'où  $\tilde{A}$  est un espace homogène sous  $G$ . Comme  $\phi$  est de noyau fini,  $G$  ne contient pas le groupe additif  $G_a$  d'où  $G$  est quasi-abélienne. Donc  $\tilde{A}$  est aussi une variété quasi-abélienne et par la propriété universelle de  $\alpha$ ,  $\tilde{A} = A$ .

### 3.2. Théorème

Soit  $V$  une variété quasi-homogène sous un groupe algébrique connexe  $G$ .

(i) si  $k$  est de caractéristique zéro le morphisme d'Albanèse  $\alpha$  est la fibration associée à la fibration principale  $\phi : G \longrightarrow A$  de fibre type  $\alpha^{-1}(0) = F$  intègre et quasi-homogène sous  $N : \ker(\phi)^0$ .

(ii) si  $k$  est de caractéristique quelconque,  $G$  linéaire et  $\dim V = 2$ , on a essentiellement la même conclusion que dans (i) à savoir que  $\alpha$  est une "fibration" de fibre type  $F = \alpha^{-1}(0)$  intègre.

Preuve :

(i)  $k$  étant de caractéristique zéro,  $A \cong G/\text{Ker}(\phi)$  et  $\phi$  est une fibration principale au sens de Serre (localement isotriviale). Le lemme 3.1. nous permet de dire (Bertini) qu'une fibre générique de  $\alpha$  est géométriquement intègre. Comme  $\phi$  est surjectif,  $G$  permute transitivement les fibres d'où toutes les fibres sont isomorphes entre elles en particulier à  $F = \alpha^{-1}(0)$ . Considérons le morphis-

me induit par l'action de  $G$  sur  $V$  :

$$\mu : G \times F \longrightarrow V$$

nous avons :  $\mu(g, x) = \mu(g', x')$   $\iff g \cdot x = g' \cdot x'$  d'où :

$$\alpha(gx) = \phi(g) = \alpha(g'x') = \phi(y'), \text{ donc : } h = g^{-1}g' \in \text{Ker}(\phi)$$

$\mu$  induit un morphisme par passage au quotient :

$$\bar{\mu} : G \times F \xrightarrow{\text{ker}(\phi)} V$$

$G \times \text{ker}(\phi) \rightarrow F$  désignant le fibré associé à  $\alpha$ . On voit facilement que  $\bar{\mu}$  est bijectif, d'où un isomorphisme par le "main theorem" de Zariski puisque  $k$  est de caractéristique zéro.

Nous pouvons supposer que le point en position générale  $x_0$  est dans  $F$  ; alors :  $G \cdot x_0 \cap F = \text{ker}(\phi) \cdot x_0$  d'où  $F$  est quasi-homogène sous  $N$ .

(ii) pour avoir la même conclusion que dans (i), à savoir que  $F = \alpha^{-1}(0)$  est intègre, nous devons vérifier que  $\alpha$  est séparable.

Si  $\dim A = 2$ ,  $\alpha$  est birationnel d'après 3.1., étant alors quasi-fini c'est un isomorphisme.

Si  $\dim A = 1$  on utilise le lemme suivant dont la démonstration figure par exemple dans [5]

### 3.3. Lemme

Soit  $R$  un corps de fonctions d'une variable sur un corps parfait  $k$  algébriquement fermé dans un corps de fonctions  $S$ . Alors  $S/R$  est séparable.

Comme dans (i), ceci nous permet de conclure que les fibres de  $\alpha$  sont intègres et isomorphes à  $F$  par homogénéité. On notera que  $\alpha$  n'est pas nécessairement une fibration isotriviale.



### 3.4. Remarque

L'argument ci-dessus (3.3.) prouve aussi le résultat suivant qui est bien connu dans le cas classique (variétés complètes):  $k$  est de caractéristique quelconque; soit  $\alpha : V \longrightarrow A$  le morphisme d'Albanèse d'une variété  $V$ ; supposons  $\dim \alpha(V) = 1$ , alors une fibre générique de  $\alpha$  est géométriquement intègre.

3.5. Le résultat précédent sur la fibration d'Albanèse permet une première classification des surfaces quasi-homogènes.

### 3.6. Proposition

Soit  $V$  une surface affine normale sur un corps  $k$  (de caractéristique quelconque) quasi-homogène sous un groupe affine. Nous avons :

$$1 - V \cong G_m^2 \text{ si } q = 2$$

$$2 - V \cong A^1 \times G_m \text{ si } q = 1$$

soit le tableau :

q	0	1	2
	?	$A^1 \times G_m$	$G_m^2$

Ce résultat est obtenu par Gizatullin [ 1 ] sous une hypothèse plus restrictive et par une méthode moins naturelle.

Preuve :

Si  $q = 2$  nous avons déjà démontré que  $V \cong A \cong G_m^2$  (3.3.), Supposons  $q = 1$ ;

La fibre type  $F = \alpha^{-1}(o)$  de la fibration d'Albanèse  $\alpha$ , est une courbe intègre quasi-homogène sous le groupe linéaire  $N = \ker(\phi)^0$ . Quitte à quotienter par le noyau d'effectivité, nous supposons que  $N$  opère effectivement. Si  $N$  contient un tore non trivial, ce tore est contenu dans un tore maximal de  $G$  qui a pour image  $A$  par  $\phi$  vu que  $\phi$  est surjectif. D'où il est clair que l'orbite sous  $T$  d'un point

en position générale appartenant à  $F$  est dense.  $V$  est donc torique et comme  $q(V) = 1$  il est facile de voir que l'on a en utilisant 1.8. :

$$V \cong \mathbb{A}^1 \times G_m$$

Supposons donc  $N$  unipotent, d'où  $F$  est homogène sous  $N$ , en fait  $F \cong \mathbb{A}^1$ . Ainsi  $\alpha : V \longrightarrow A$  est une fibration en droites affines. Un résultat récent de Kambayashi-Miyayashi [3] dit que  $\alpha$  est une fibration localement triviale ; donc on peut la décrire par un cocycle à valeurs dans le groupe  $\text{Aff}(\mathbb{A}^1)$  des automorphismes affines de  $\mathbb{A}^1$  soit :

$$\{u_i \circ u_j, (a_{ij}, b_{ij})\}$$

avec sur  $u_i \circ u_j$  :

$$3.7. \quad a_{ij} a_{jk} = a_{ik}$$

et

$$a_{ij} b_{jk} + b_{ij} = b_{ik}$$

Le couple  $\{a_{ij}\}$  définit un élément de  $H^1(A, \mathcal{O}_A^*) = \text{Pic}(A)$  qui est trivial d'où nous pouvons supposer que  $a_{ij} = 1$ , par suite la fibration correspond à une classe de cohomologie dans le groupe  $H^1(A, \mathcal{O}_A)$  qui est nul puisque  $A$  est affine. D'où  $V \cong A \times F$ .

#### Références.

- [1] GIZATULLIN, MH : Affine surfaces which are quasi-homogeneous with respect to an algebraic group. Math. USSR. IZV. 5, 754, 769 (1971).
- [2] ITAKA S. : Logarithmic forms on algebraic varieties. J. Fac. Sc. Univ. Tokyo. 23, 525-544 (1977).
- [3] KAMBAYASHI-MIGANISHI : On flat fibrations by the affine line. III Math. Journal 22, 662-671 (1978).
- [4] POTTERS : On almost homogeneous compact analytic surfaces. Inv. Math. 8, 244-266 (1969).
- [5] SERRE J.P. : Morphismes universels et variété d'Albanèse. Sem. C. Chevalley 1958-59, I.H.P. (Paris).