PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

C. MALLOL

Sur les f-morphismes

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1980, fascicule S3
« Colloque d'algèbre », , p. 131-150

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1980___S3_131_0>

SUR LES f-MORPHISMES

par

C. MALLOL

1- Sur les f-morphismes

1.1- Préliminaires :

Soient A un anneau intègre et unitaire et $A[X_1, \ldots, X_n]$ l'anneau de polynômes à n variables à coefficients dans A.

Une application φ de $A[X_1, \ldots, X_n]$ dans $A[X_1, \ldots, X_n]$ est un A-endomorphisme, si pour tout élément $P(X_1, \ldots, X_n)$ de $A[X_1, \ldots, X_n]$ on a $\varphi(P(X_1, \ldots, X_n)) = P(\varphi(X_1), \ldots, \varphi(X_n))$.

Un A-endomorphisme bijectif de $A[X_1, \ldots, X_n]$ est appelé un A-automorphisme.

Deux questions sont depuis longtemps posées : i) la classification des A-automorphismes de $A[X_1, \ldots, X_n]$; ii) G étant un groupe de A-automorphismes de $A[X_1, \ldots, X_n]$, déterminer la structure de l'ensemble des invariants de G, i.e., le sous-anneau de $A[X_1, \ldots, X_n]$, noté $A[X_1, \ldots, X_n]^G$, défini par $A[X_1, \ldots, X_n]^G = \{P/P \in A[X_1, \ldots, X_n], \varphi(P) = P, \forall \varphi \in G\}$.

Dans le cas d'une variable, les deux questions ont été résolues, la première par R. Gilmer (cf. [1]) et la seconde par P. Samuel (cf. [2]). Cependant, pour $n \geq 2$ on connait très peu de choses. En effet, à partir de $n \geq 2$ les problèmes acquièrent une très grande complexité calculatoire. Il s'ajoute à cela le fait que les méthodes utilisées pour $n = 1$ ne marchent plus pour $n \geq 2$, par exemple, les méthodes basées sur le terme de plus haut degré d'un polynôme à une variable.

Bien qu'il existe un résultat de Nagata (cf. [3]) concernant la classification des K-automorphismes de $K[X,Y]$ où K est un corps commutatif, il en reste beaucoup à faire.

Si A et B sont deux anneaux intègres et unitaires et $f : A \to B$ un homo-

morphisme unitaire d'anneaux, un f-morphisme de $A[X]$ dans $B[Y]$ est une application $\varphi : A[X] \to B[Y]$ telle que si $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ est dans $A[X]$, alors $\varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} f(\alpha_i)\, \varphi(X)^i$.

Bien qu'étant une généralisation de la notion de A-endomorphisme, les f-morphismes ont été introduits comme une technique en vue d'étudier les problèmes à deux ou plusieurs variables. En effet, si $\varphi : A[X,Y] \to A[X,Y]$ est un A-automorphisme et si $\varphi_{|A[X]}$ est la restriction de φ à $A[X]$, alors φ peut être considéré, de façon naturelle, comme un $\varphi_{|A[X]}$-morphisme défini dans $A[X][Y]$ à valeurs dans $A[\varphi(X)]\,[\varphi(Y)]$.

1.2- Sur les f-morphismes.

Soient A et B deux anneaux et $f : A \to B$ un homorphisme d'anneaux. On dira que l'application $\varphi : A[X] \to B[Y]$ est un f-morphisme si $\varphi(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i) = \sum_{i=0}^{n} f(\alpha_i)\, \varphi(X)^i$, pour tout polynôme $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ de $A[X]$. On notera $\mathrm{Hom}_f(A[X],B[Y])$ l'ensemble des f-morphismes de $A[X]$ dans $B[Y]$.

Il est clair que si $A = B$ et $f = \mathrm{id}_A$, alors un f-morphisme de $A[X]$ dans $A[Y]$ n'est autre que un A-homomorphisme d'anneaux au sens habituel.

Comme, par définition, pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$ on a $\varphi_{|A} = f$, il en résulte que $f \neq 0$ entraîne $\varphi \neq 0$. Ainsi, si A et B sont deux anneaux unitaires et $f : A \to B$ un homomorphisme unitaire d'anneaux, alors $B \neq \{0\}$ entraîne $f \neq 0$ donc $\varphi \neq 0$.

Dorénavant, on supposera A et B intègres et unitaires et $f : A \to B$ un homomorphisme unitaire d'anneaux.

1.2.1- Proposition. Soient $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$. Si φ est injectif, il en est de même de f.

En effet, soit $\alpha \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme φ est injectif $\varphi(\alpha) = f(\alpha) = 0$ entraîne $\alpha = 0$.

1.2.2- Proposition. Soient $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$. On a :

(i) $(\mathrm{Ker}\ f)[X] \subset \mathrm{Ker}\ \varphi$;

(ii) si $\varphi(X) \notin B$, $\mathrm{Ker}\ \varphi = (\mathrm{Ker}\ f)[X]$.

En effet, la condition (i) est évidente et pour ce qui est de (ii), posons $\varphi(X) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j Y^j$ où $m \geq 1$ et $\beta_m \neq 0$. Soit maintenant $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i \in \mathrm{Ker}\ \varphi$. On a $0 = \varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} f(\alpha_i)(\sum_{j=0}^{m} \beta_j Y^j)^i$ et on déduit facilement que $f(\alpha_n)\beta_m^n = 0$, d'où $f(\alpha_n) = 0$. Par récurrence, on a $f(\alpha_i) = 0$ pour tout $0 \leq i \leq n$, donc $P \in (\mathrm{Ker}\ f)[X]$.

1.2.3- Corollaire. Soient $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$. Si $\varphi(X) \notin B$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) φ est injectif ; (ii) f est injectif.

En effet, ceci découle des propositions 1.2.1- et 1.2.2-.

1.2.4- Proposition. Soient $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) $\mathrm{Ker}\ \varphi = (\mathrm{Ker}\ f)[X]$; (ii) l'ensemble $\{1, \varphi(X), \varphi(X)^2, \ldots\}$ est un système linéairement indépendant du $\mathrm{Im}(f)$-module $B[Y]$.

En effet, soit $I \subset \mathbb{N}$, I ensemble fini. Si $\sum_{i \in I} f(\alpha_i)\varphi(X)^i = 0$ alors $\varphi(\sum_{i \in I} \alpha_i X^i) = 0$ donc $\sum_{i \in I} \alpha_i X^i \in \mathrm{Ker}\ \varphi$, et si l'on suppose que $\mathrm{Ker}\ \varphi = (\mathrm{Ker}\ f)[X]$, alors $\alpha_i \in \mathrm{Ker}\ f$ pour tout $i \in I$, soit $f(\alpha_i) = 0$ pour tout $i \in I$. Donc

$\{1, \varphi(X), \varphi(X)^2, \ldots\}$ est un système linéairement indépendant du Im(f)-module B[Y]. Ceci nous dit que (i) $\Rightarrow$ (ii).

Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (i). Si $\sum_{i\in I} \alpha_i X^i \in \text{Ker } \varphi$, alors $0 = \varphi(\sum_{i\in I} \alpha_i X^i) = \sum_{i\in I} f(\alpha_i)\varphi(X)^i$ et d'après l'hypothèse $f(\alpha_i) = 0$ pour tout i dans I. Ceci nous montre que $\sum_{i\in I} \alpha_i X^i$ appartient à (Ker f)[X].

1.2.5- Corollaire. Soient f dans Hom(A,B) et φ dans $\text{Hom}_f(A[X], B[Y])$. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) φ est injectif ;
(ii) f est injectif et $\{1, \varphi(X), \varphi(X)^2, \ldots\}$ est un système linéairement indépendant du Im(f)-module B[Y].

En effet, (i) $\Rightarrow$ (ii) est une conséquence des propositions 1.2.1- et 1.2.2- et (ii) $\Rightarrow$ (i) résulte de la proposition 1.2.4-.

1.2.6- Proposition. Soient f dans Hom(A,B) et φ dans $\text{Hom}_f(A[X], B[Y])$. Les conditions sont équivalentes : (i) φ est surjectif; (ii) f est surjectif et $\varphi(X) = \beta_0 + \beta_1 Y$, $\beta_0, \beta_1 \in B$, β_1 étant un élément inversible de B.

En effet, si φ est surjectif, il est clair que $\varphi(X) \notin B$, donc si P est un élément de A[X]-(A+(Ker f)[X]) on a $\varphi(P) \notin B$. On déduit $B = \varphi(A) = f(A)$, donc f est surjectif. Posons maintenant $\varphi(X) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j Y^j$ où $m \geq 1$ et $\beta_m \neq 0$, et soit $Q = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ un élément de A[X] tel que $\varphi(Q) = Y$ et $f(\alpha_n) \neq 0$. On a alors $Y = \varphi(Q) = \sum_{i=0}^{n} f(\alpha_i)(\sum_{j=0}^{m} \beta_j Y^j)^i$ et comme $f(\alpha_n)\beta_m^n \neq 0$ on déduit que n.m=1 ce qui entraîne n=m=1, donc, $\varphi(X) = \beta_0 + \beta_1 Y$ et β_1 un élément inversible de B. Ceci nous dit que (i) $\Rightarrow$ (ii). Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (i). Si $\varphi(X) = \beta_0 + \beta_1 Y$ et si β_1 est un élément inversible de B on obtient $Y = \beta_1^{-1}(\varphi(X) - \beta_0)$; f étant surjectif, soient γ et δ deux éléments de A tels que $f(\gamma) = \beta_0$ et $f(\delta) = \beta_1^{-1}$. On a $Y = \varphi(\delta X - \delta\gamma)$ ce

qui montre que φ est surjectif.

1.2.7- Corollaire. Soient f dans Hom(A,B) et φ dans $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i)φ est bijectif ; (ii) φ est surjectif et f est injectif.

En effet, ceci découle du corollaire 1.2.3- et de la proposition 1.2.6-.

1.2.8- Corollaire. Soit $\varphi : A[X] \to A[Y]$ un A-homomorphisme de $A[X]$ dans $A[Y]$. On a : (i) φ est injectif si et seulement si $\varphi(X) \notin A$; (ii) φ est surjectif si et seulement si φ est bijectif, si et seulement si $\varphi(X) = \alpha + \beta Y$ et β est un élément inversible de A.

Ceci découle des résultats précédents.

Le corollaire 1.2.8- nous dit que si $\varphi : A[X] \to A[X]$ est un A-endomorphisme de $A[X]$, alors φ est un A-automorphisme de $A[X]$ si et seulement si $\varphi(X) = \alpha + \beta X$ où $\alpha, \beta \in A$ et $\beta \in U(A)$. Cette classification des A-automorphismes de $A[X]$ est due à R. Gilmer (cf. [1]). On note U(A) le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A.

1.2.9- Remarque. Soit $\varphi : A[X] \to A[Y]$ un A-homomorphisme injectif ; φ n'est pas nécessairement surjectif, même si le degré du polynôme $\varphi(X)$ est égal à 1. En effet, le $\mathbb{Z}$-homomorphisme $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[Y]$ défini par $\varphi(X) = 1 + 2Y$ n'est pas surjectif, car l'élément 2 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}$ (!).

Ce qui suit est un résultat de Abhyankar-Heinzer-Eakin (cf. [4]). La notion de f-morphisme permet une démonstration brève de tel résultat.

1.2.10- Proposition. Soit $\varphi : A[X,Y] \to A[X,Y]$ un A-endomorphisme de $A[X,Y]$. Si φ est surjectif, alors φ est bijectif.

En effet, si φ est surjectif alors $\varphi(X) \notin A$, car, sinon on aurait $A[X,Y] = A[\varphi(Y)]$ ce qui est impossible. Cela nous dit que $\varphi_{|A[X]} : A[X] \to A[\varphi(X)]$ est un A-homomorphisme surjectif d'anneaux de polynômes donc, d'après le corollaire 1.2.8-, injectif. Mais φ est, de façon naturelle, un $\varphi_{|A[X]}$-morphisme surjectif et d'après le corollaire 1.2.7-, φ est bijectif.

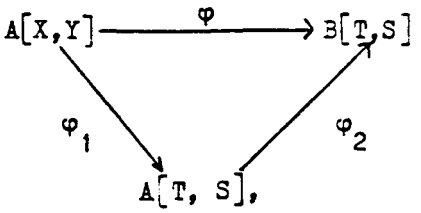
La proposition 1.2.10- nous dit que si $\varphi : A[X,Y] \to A[T,S]$ est un A-homomorphisme surjectif, il est aussi injectif.

1.2.11- Proposition. Soient $f : A \to B$ un isomorphisme d'anneaux et $\varphi : A[X,Y] \to B[T,S]$ un f-morphisme surjectif. Alors φ est injectif.

En effet, soient $\varphi_1 : A[X,Y] \to A[T,S]$ et $\varphi_2 : A[T,S] \to B[T,S]$ les applications définies par $\varphi_1(\sum_{i,j} \alpha_{ij} X^i Y^j) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} T^i S^j$ et

$$\varphi_2(\sum_{k,l} \beta_{k,l} T^k S^l) = \sum_{k,l} f(\beta_{kl}) T^k S^l.$$

Ainsi définies, φ_1 et φ_2 font commuter le diagramme



i.e., $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$, et d'après des résultats précédents, φ_1 et φ_2 sont bijectifs, donc φ est bijectif.

1.2.12- Proposition. Soit $\varphi : A[X,Y,Z] \to A[X,Y,Z]$ un A-endomorphisme de $A[X,Y,Z]$. Si φ est surjectif, alors φ est injectif.

En effet, comme $\varphi(X) \notin A$, $\varphi_{|A[X]}$ est un A-homomorphisme bijectif de $A[X]$ dans $A[\varphi(X)]$. Comme φ est, de façon naturelle, un $\varphi_{|A[X]}$-morphisme surjectif de $A[X][Y,Z]$ dans $A[\varphi(X)][\varphi(Y), \varphi(Z)]$, d'après la proposition 1.2.11-, il est bijectif.

Compte tenu que la démarche utilisée pour aboutir au résultat de la proposition 1.2.12- peut-être répétée pour un nombre d'indéterminées $n \geq 3$, on peut écrire :

1.2.13- Proposition. Tout A-endomorphisme surjectif de $A[X_1, \ldots, X_n]$ dans $A[X_1, \ldots, X_n]$ est injectif.

On étudie maintenant à l'aide de la technique des f-morphismes, quelques A-automorphismes de $A[X,Y]$.

1.3- Applications et exemples. Soit $\varphi : A[X,Y] \to A[X,Y]$ un A- automorphisme de $A[X,Y]$ tel que $\varphi(X) = \alpha + \beta X$, α et β éléments de A, $\beta \in U(A)$. Il est clair que $\varphi_{|A[X]} : A[X] \xrightarrow{\sim} A[X]$ est un A-automorphisme de $A[X]$, d'où on déduit que $\varphi(Y) = P(X) + \gamma Y$ avec $P(X) \in A[X]$ et γ est un élément inversible de A.

1.3.1- Proposition. Soit φ un A-automorphisme de $A[X,Y]$. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) $\varphi_{|A[X]} : A[X] \to A[X]$ est un A-automorphisme de $A[X]$;
(ii) $\varphi(X) = \alpha + \beta X$, α et β éléments de A et β inversibles dans A ;
(iii) $\varphi(X)$ est un élément de $A[X]$.

En effet, il est clair que (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Montrons que (iii) $\Rightarrow$ (i). Si $\varphi(X) \in A[X]$, alors $\varphi(Y) \notin A[X]$, donc $\varphi(Y) = \sum_{k,l} \gamma_{k,l} X^k Y^l$ et

il existe $\gamma_{kl} \neq 0$ tel que $l \neq 0$. Soit $P = \sum_{i,j} \alpha_{ij} X^i Y^j$ le seul élément de $A[X,Y]$ tel que $\varphi(P) = X$. On obtient ainsi l'équation $X = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \varphi(X)^i (\sum_{k,l} \gamma_{kl} X^k Y^l)^j$ (*) Soient, maintenant, $l_o = \max\{l/\gamma_{kl} \neq 0\}$, $k_o = \max\{k/\gamma_{kl_o} \neq 0\}$; $j_o = \max\{j/\alpha_{ij} \neq 0\}$ et $i_o = \max\{i/\alpha_{ij_o} \neq 0\}$. A partir de l'équation (*) on déduit que $\varphi(X)^{i_o} . X^{k_o j_o} . Y^{l_o j_o}$ est un élément de $A[X]$, d'où $l_o j_o = 0$ et comme par construction $l_o \neq 0$, on obtient $j_o = 0$. Ceci nous dit que $P \in A[X]$, ce qui montre que $\varphi_{|A[X]} : A[X] \xrightarrow{\sim} A[X]$.

Soit maintenant $\varphi : A[X,Y] \to A[X,Y]$ le A-endomorphisme de $A[X,Y]$ défini par $\varphi(X) = \alpha X + P(Y)$ et $\varphi(Y) = Q(\varphi(X)) + \beta Y$, où α et β sont des éléments de A, $P(Y)$ un élément de $A[Y]$ et $Q(\varphi(X))$ un polynôme en $\varphi(X)$. Si α et β sont inversibles dans A, alors φ est un A-automorphisme de $A[X,Y]$. En effet, il suffit de voir que $Y = \varphi(\beta^{-1} Y - \beta^{-1} Q(X))$ et $X = \varphi(\alpha^{-1} X - \alpha^{-1} P(\beta^{-1} Y - \beta^{-1} Q(X)))$, ce qui montre que φ est surjectif, donc bijectif.

Montrons maintenant que si φ est un A-automorphisme de $A[X,Y]$ tel que $\varphi(X) = \alpha X + P(Y)$ où $\alpha \in U(A)$ et $P(Y) \in A[Y]$, alors $\varphi(Y) = Q(\varphi(X)) + \beta Y$, où β est un élément inversible de A et Q est un polynôme en $\varphi(X)$.

En effet, on remarque que $X = \alpha^{-1} \varphi(X) - \alpha^{-1} P(Y)$, d'où $A[X,Y] = A[\varphi(X),Y]$. Ceci nous dit que φ peut être considéré comme un $\varphi_{|A[X]}$ - morphisme de $A[X][Y]$ dans $A[\varphi(X)][Y]$ et, par suite $\varphi(Y) = Q(\varphi(X)) + \beta Y$, où β est un élément inversible de A.

On voit donc que si φ est un A-automorphisme de $A[X,Y]$ tel que $A[X,Y] = A[\varphi(X), Y]$, alors $\varphi(Y) = Q(\varphi(X)) + \beta Y$, où β est un élément inversible de A et $Q(\varphi(X))$ est un polynôme en $\varphi(X)$.

Réciproquement, si φ un A- automorphisme de $A[X,Y]$ tel que $\varphi(Y) = Q(\varphi(X)) + \beta\ Y$, où β est un élément inversible de A et $Q(\varphi(X))$ un polynôme en $\varphi(X)$, on obtient $\varphi^{-1}(Y) = \beta^{-1}\ Y - \beta^{-1}\ Q(X)$, d'où $\varphi^{-1}(X) = \alpha\ X + P(\varphi^{-1}(Y))$ où α est un élément inversible de A et $P(\varphi^{-1}(Y))$ un polynôme en $\varphi^{-1}(Y)$. On déduit donc que $\varphi(X) = \alpha^{-1}\ X - \alpha^{-1}\ P(Y)$ et ceci nous permet d'énoncer la proposition suivante :

1.3.2- Proposition. Soit φ un A-endomorphisme de $A[X,Y]$. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) $\varphi(X) = \alpha\ X + P(Y)$ et $\varphi(Y) = \beta\ Y + Q(\varphi(X))$, où α et β sont deux éléments inversibles de A ; (ii) φ est bijectif et $\varphi(X) = \alpha\ X + P(Y)$ où α est un élément inversible de A ; (iii) φ est bijectif et $A[X,Y]=A[\varphi(X),Y]$.

Ces résultats nous montrent que la classification des A-automorphismes de $A[X,Y]$ est beaucoup plus complexe que dans le cas d'une variable. Si K est un corps commutatif, d'après Nagata (cf. [3]) l'ensemble $\mathrm{Aut}_K(K[X,Y])$ est engendré par les K-automorphismes du type $X \to a\ X + b\ Y + C$ et $Y \to \alpha\ X + \beta\ Y + \gamma$ où $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in K$ et $a\beta - b\alpha \neq 0$ et les K-automorphismes du type $X \to a\ X + P(Y)$ et $Y \to b\ Y + c$ où $a, b, c \in K$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $P(Y) \in K[Y]$.

Compte tenu de ce résultat de Nagata et des renseignements fournis par la proposition 1.3.2-, deux questions se posent de façon naturelle. La première est sur le rapport qui peut exister entre l'ensemble $\mathrm{Aut}_A(A[X_1,X_2])$ et les ensembles N_{ij}, où $(i,j) \in \{1, 2\}^2$, définis par $N_{i,j} = \{\varphi \mid \varphi \in \mathrm{Aut}_A(A[X_1,X_2]),\ A[X_1, X_2] = A[\varphi(X_i), X_j]\}$. Deuxièmement, étant donné un A-automorphisme φ de $A[X_1, X_2]$, étudier le degré de X_i, $i = 1, 2$, dans le polynôme $\varphi(X_k)$, $k = 1,2$. Ce travail ne traite pas ces deux questions.

1.4- La notion de f-invariant

Dans ce qui suit on donne une généralisation de la notion d'invariant et de l'ensemble des invariants d'un A-endomorphisme.

Soit $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$. On appellera f-morphisme canonique de $A[X]$ dans $B[Y]$ l'application $I_f : A[X] \to B[Y]$ définie par $I_f(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i) = \sum_{i=0}^{n} f(\alpha_i) Y^i$ pour tout élément $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ de $A[X]$.

Soit φ un élément de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$. On appellera ensemble des f-invariants de φ, l'ensemble $A[X]^{\varphi}$ défini par $A[X]^{\varphi} = \{P \mid P \in A[X], \varphi(P) = I_f(P)\}$.

Soit maintenant, G un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$. L'ensemble des f-invariants de G est l'ensemble $A[X]^G$ défini par $A[X]^G = \{P \mid P \in A[X], \varphi(P) = I_f(P), \forall\, \varphi \in G\}$.

D'après les définitions précédentes, il est clair que si φ est un élément de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$ alors $A[X]^{\varphi} = A[X]^{\{\varphi\}} = \mathrm{Ker}\,(I_f - \varphi)$.

1.4.1- Proposition. Soient $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$, $g \in \mathrm{Hom}(B,C)$ et $I_f : A[X] \to B[Y]$, $I_g : B[Y] \to C[Z]$ les morphismes canoniques respectifs. Alors $I_{g \circ f} = I_g \circ I_f$. De plus, si f est bijectif il en est de même de I_f et $(I_f)^{-1} = I_{f^{-1}}$.

La démonstration est immédiate.

1.4.2- Proposition. Soient f un élément de $\mathrm{Hom}(A,B)$ et G un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$. On a : (i) $A + (\mathrm{Ker}\, f)[X] \subset A[X]^G$; (ii) $A[X]^G$ est un sous-anneau de $A[X]$; (iii) $A[X]^G = \bigcap_{\varphi \in G} A[X]^{\varphi}$; (iv) si $G = \mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$, alors $A[X]^G = A + (\mathrm{Ker}\, f)[X]$.

En effet, si $P = \alpha + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ est un élément de $A + (\mathrm{Ker}\, f)[X]$, on a $I_f(P) = f(\alpha) = \varphi(P)$ pour tout élément de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$. Ceci montre (i). Pour ce qui est de (ii), d'après (i) on voit que $A[X]^G \neq \emptyset$. Soient P, Q deux éléments

de $A[X]^G$. On a $\varphi(P\,Q) = \varphi(P)\,\varphi(Q) = I_f(P)\,I_f(Q) = I_f(PQ)$ et $\varphi(P+Q) = \varphi(P)+\varphi(Q) = I_f(P)+ I_f(Q) = I_f(P+Q)$, ce qui montre que $A[X]^G$ est un sous-anneau de $A[X]$. Pour démontrer (iii), soit P un élément de $A[X]^G$. On a les équivalences suivantes : $P \in A[X]^G \Leftrightarrow \varphi(P) = I_f(P),\ \forall\, \varphi \in G \Leftrightarrow P \in A[X]^{\varphi},\ \forall\, \varphi \in G \Leftrightarrow P \in \bigcap_{\varphi\in G} A[X]^{\varphi}$.

Finalement, soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$ défini par $\varphi(X) = \beta \in B$. Il est clair que $A[X]^{\varphi} = A + (\mathrm{Ker}\ f)[X]$, ce qui montre (iv).

1.4.3- Théorème. Soient f dans Hom(A,B) et G un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_f(A[X],B[Y])$ tel que $A[X]^G \neq A+(\mathrm{Ker}f)[X]$. On a alors : i) pour tout $\varphi\in G$, $\varphi(X) = \beta_o+\beta_1 Y$, avec $\beta_o,\beta_1 \in B$, β_1 étant inversible et d'ordre fini ; ii) il existe $P = \sum_{i=0}^{n=1} \alpha_i X^i + \alpha X^n$ dans $A[X]^G$, $f(\alpha)\neq 0$, tel que pour tout $Q\in A[X]^G$ on a $\alpha^k Q\in(A+(\mathrm{Ker}f)[X])[P]$ pour un élément $k\in N$.

En effet, comme $A[X]^G \neq A + (\mathrm{Ker}\ f)[X]$, soit $Q \in A[X]^G$, $Q = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j X^j$ tel que $f(\alpha_m) \neq 0$ et $m > 0$. Soit $\varphi \in G$. On a $\varphi(Q) = I_f(Q)$. Posons $\varphi(X) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i Y^i$, $\beta_n \neq 0$. On a donc les égalités suivantes : $\varphi(Q) = \sum_{j=0}^{m} f(\alpha_j)\,\varphi(X)^j = \sum_{j=0}^{m} f(\alpha_j)(\sum_{i=0}^{n}\beta_i Y^i)^j = \sum_{j=0}^{m} f(\alpha_j)Y^i = I_f(Q)$. Si l'on prend de chaque côté de l'égalité le terme de plus grand degré, on obtient $f(\alpha_m)\beta_n^m\, Y^{mn} = f(\alpha_m)Y^m$, d'où m.n=m et comme $m \neq 0$, on a n=1. Cela nous dit que $\varphi(X)= \beta_o + \beta_1\, Y$ et β_1 est un élément inversible de B d'ordre fini, i.e., $\beta_1^m = 1$. Ceci montre (i). Pour ce qui est de (ii), soit $n=\min\{k \in N/\exists\ Q \in A[X]^G,\ Q \notin A +(\mathrm{Ker}\ f)[X] \text{ et } \deg(Q) = k\}$. Soit maintenant $P \in A[X]^G$, $P \notin A +(\mathrm{Ker}\ f)[X]$, tel que $\deg(P)=n$ et posons $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$. On a $f(\alpha_n) \neq 0$; en effet si $f(\alpha_n) = 0$, alors $n \geq 2$ car sinon P appartiendrait à $A +(\mathrm{Ker}\ f)[X]$. Cela nous dit que $P' = P - \alpha_n Y^n$ est un élément de $A[X]^G$ qui n'appartient pas à $A +(\mathrm{Ker}\ f)[X]$, ce qui contredit la définition de n. On a, donc $f(\alpha_n) \neq 0$ ce qui entraîne que $\deg(P) = \deg(\varphi(P)) = \deg(I_f(P)) = n$. Posons $\alpha = \alpha_n$ et soit $Q \in A[X]^G$, $Q = \sum_{j=0}^{m}\beta_j X^j$ tel que $f(\beta_m)\neq 0$. On a alors $Q \notin A +(\mathrm{Ker}\ f)[X]$ et

$\deg(P) \leq \deg(Q)$. Il existe donc L_1 et R_1 éléments de $A[X]$, uniques, tels que $\alpha Q = L_1 P + R_1$ et $\deg(R_1) < \deg(P)$. Si $\varphi \in G$, on a les égalités suivantes : $\alpha\,\varphi(Q) = \varphi(L_1)\,\varphi(P) + \varphi(R_1) = \varphi(L_1)\,I_f(P) + \varphi(R_1)$, et comme $\varphi(Q) = I_f(Q)$, on obtient $\varphi(L_1)\,I_f(P) + \varphi(R_1) = I_f(L_1)\,I_f(P) + I_f(R_1)$. Puisque $\deg(\varphi(R_1)) < n$ et $\deg(I_f(R_1)) < n$ on a $\varphi(L_1) = I_f(L_1)$ et $\varphi(R_1) = I_f(R_1)$, c'est-à-dire, L_1 et R_1 sont deux éléments de $A[X]^G$, et en particulier $R_1 \in A + (\mathrm{Ker}\ f)[X]$. Or, si $L_1 \in A + (\mathrm{Ker}\ f)[X]$ la démonstration est achevée. Par contre si $L_1 \notin A + (\mathrm{Ker}\ f)[X]$ on répéte avec L_1 la démarche précédente concernant Q, et ainsi de suite. On obtient ainsi $\alpha^k Q = P(P(\ldots P(L_k P + R_k) + \alpha R_{k-1})\ldots) + + \alpha^{k-2} R_2) + \alpha^{k-1} R_1$ où $L_k, R_k, R_{k-1}, \ldots, R_1$ appartiennent à $A + (\mathrm{Ker}\ f)[X]$, ce qui donne $\alpha^k Q = L_k P^k + R_k P^{k-1} + \alpha\, R_{k-1} P^{k-2} + \ldots + \alpha^{k-2} R_2 P + \alpha^{k-1} R_1$, donc $\alpha^k Q \in (A + (\mathrm{Ker}\ f)[X])[P]$. Finalement soit T un élément quelconque de $A[X]^G$. Si $T \notin A + (\mathrm{Ker}\ f)[X]$, il est clair que l'on peut écrire $T = T_1 + T_2$ où $T_1 \in A + (\mathrm{Ker}\ f)[X]$ et $T_2 = \sum_{s=0}^{t} \gamma_s X^s$ tel que $f(\gamma_t) \neq 0$. Il existe alors $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^\ell T_2 \in [A + (\mathrm{Ker}\ f)[X]]\,[P]$, d'où $\alpha^\ell T = \alpha^\ell T_1 + \alpha^\ell T_2$ appartient à $(A + (\mathrm{Ker}\ f)[X])[P]$.

1.4.4- Remarque. Il est clair que, sous les mêmes conditions du théorème 1.4.3., si l'élément α est inversible, alors $A[X]^G = (A + (\mathrm{Ker}\ f)[X])[P]$. Si, de plus, l'application f est bijective, le polynôme P peut être déterminé à un scalaire près.

1.4.5- Proposition. Soient $f : A \to B$ un isomorphisme d'anneaux et φ un élément de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$ tel que $\varphi(X) = \beta_0 + \beta_1 Y$, où β_1 est un élément inversible de B d'ordre n. On a :

(i) si $\beta_1^i - 1$ est un élément inversible pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq n-1$, alors $A[X]^{\varphi} \neq A$;

(ii) si B est un corps, $A[X]^{\varphi} \neq A$.

En effet, soient $\gamma_0, \gamma_1 \in A$ tels que $f(\gamma_0) = \beta_0$ et $f(\gamma_1) = \beta_1$. On déduit, des hypothèses faites, que $\gamma_1^i - 1$ est un élément inversible pour tout i tel que $1 \leq i \leq n-1$. Soit α un élément non nul de A et posons, pour tout j, $1 \leq j \leq n-1$, $\alpha_{n-j} = (\gamma_1^j - 1)^{-1} \left(\sum_{K=0}^{j-1} \alpha_{n-k} \binom{n-K}{n-j} \gamma_0^{j-K}\right)$, et $\alpha_n = \alpha$. Si $P = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s X^s \in A[X]$, alors, par construction, $P \notin A$ et un calcul simple nous montre que $\varphi(P) = I_f(P)$, d'où $A[X]^{\varphi} \neq A$. Ceci montre (i). Pour ce qui est de (ii), il suffit d'appliquer (i).

1.5- Le f-produit dans $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$.

Soient f dans $\mathrm{Hom}(A,B)$, φ dans $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$ et ψ dans $\mathrm{End}_B(B[Y])$. On appellera B-endomorphisme associé à φ et on notera φ^f, le B-endomorphisme défini par $\varphi^f(Y) = \varphi(X)$. On appellera f-morphisme associé à ψ et on notera ${}^f\psi$, le f-morphisme défini par ${}^f\psi(X) = \psi(Y)$.

Si f est bijectif, on appellera A-endomorphisme associé à φ et on notera φ_*, le A-endomorphisme défini par $\varphi_*(X) = I_f^{-1}(\varphi(X))$.

1.5.1- Proposition. Soit $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$. On a :

(1) $\varphi = \varphi^f \circ I_f$ pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$;

(2) $(I_f)^f = \mathrm{Id}_{B[Y]}$ et ${}^f(\mathrm{Id}_{B[Y]}) = I_f$;

(3) si f est bijectif, alors $(I_f)_* = \mathrm{Id}_{A[X]}$ et $\varphi_* = I_f^{-1} \circ \varphi^f \circ I_f$;

(4) pour tout φ élément de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$ et pour tout ψ élément de $\mathrm{End}_B(B[Y])$, on a ${}^f(\varphi^f) = \varphi$ et $({}^f\psi)^f = \psi$;

(5) l'application $\varphi \to \varphi^f$ de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$ dans $\mathrm{End}_B(B[Y])$ est une bijection dont l'inverse est l'application $\psi \to {}^f\psi$ où $\psi \in \mathrm{End}_B(B[Y])$;

(6) si $\varphi \in \mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$ on a les isomorphismes $\mathrm{Im}(\varphi) \xrightarrow{\sim} A[X]/\mathrm{Ker}\ \varphi \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(I_f)/\mathrm{Ker}\ \varphi^f$;

(7) si f est bijectif, alors $\mathrm{Ker}\ \varphi_* = \mathrm{Ker}\ \varphi$ pour tout φ élément de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$.

En effet, si φ est un élément de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$, on a $(\varphi^f \circ I_f)(X) = \varphi^f(I_f(X)) = \varphi^f(Y) = \varphi(X)$, ce qui montre (1). Les égalités $(I_f)^f(Y) = I_f(X) = Y$ et ${}^f(\mathrm{Id}_{B[Y]})(X) = \mathrm{Id}_{B[Y]}(Y) = Y$ montrent (2). Si f est bijectif, on a $(I_f)_*(X) = I_f^{-1}(I_f(X)) = X$ ce qui montre (3). Pour montrer (4) notons que ${}^f(\varphi^f)(X) = \varphi^f(Y) = \varphi(X)$ et $({}^f\psi)^f(Y) = {}^f\psi(X) = \psi(Y)$ pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$ et $\psi \in \mathrm{End}_B(B[Y])$. Il est clair que (5) découle de (2) et (4). Pour ce qui est de (6), soit g l'application de $A[X]/\mathrm{Ker}\ \varphi$ dans $\mathrm{Im}(I_f)/\mathrm{Ker}\ \varphi^f$ définie par $g(P+\mathrm{Ker}\ \varphi) = I_f(P) + \mathrm{Ker}\ \varphi^f$. L'application g est bien définie: $P_1 + \mathrm{Ker}\ \varphi = P_2 + \mathrm{Ker}\ \varphi$ entraîne $\varphi(P_1 - P_2) = 0$ d'où $\varphi(P_1) = \varphi(P_2)$ soit encore $\varphi^f(I_f(P_1)) = \varphi^f(I_f(P_2))$ et, par suite, $I_f(P_1) - I_f(P_2) \in \mathrm{Ker}\ \varphi^f$. Il est clair que g est une application surjective. Finalement, si $g(P + \mathrm{Ker}\ \varphi) = 0$, on a $I_f(P) \in \mathrm{Ker}\ \varphi^f$ ce qui entraîne $\varphi(P) = 0$, d'où $P \in \mathrm{Ker}\ \varphi$, donc g est injective. Pour ce qui est de (7), on sait que $\varphi_* = I_f^{-1} \circ \varphi$, donc $\varphi_*(P) = 0$ si et seulement si $\varphi(P) = 0$.

Soient f dans Hom(A,B) et φ_1, φ_2 deux éléments de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$. On appellera f-produit (ou f-composé) de φ_1 par φ_2 le f-morphisme de A[X] dans B[Y], noté $\varphi_2 \circ_f \varphi_1$, défini par $(\varphi_2 \circ_f \varphi_1)(X) = \varphi_2^f(\varphi_1(X))$. Il s'ensuit que si $\varphi_1(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Y^i$ et $\varphi_2(X) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j Y^j$, alors $(\varphi_2 \circ_f \varphi_1)(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (\sum_{j=0}^{m} \beta_j Y^j)^i$.

1.5.2- Proposition. Soit f dans Hom(A,B). On a :

(i) $\varphi \circ_f I_f = I_f \circ_f \varphi = \varphi$ pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$;

(ii) si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$, alors $(\varphi_1 \circ_f \varphi_2)^f = \varphi_1^f \circ \varphi_2^f$;

(iii) si $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{End}_B(B[Y])$, alors ${}^f(\psi_1 \circ \psi_2) = {}^f\psi_1 \circ_f {}^f\psi_2$.

En effet, si φ est un f-morphisme de A[X] dans B[Y], on a $\varphi \circ_f I_f = {}^f\varphi \circ I_f = \varphi$ et $I_f \circ_f \varphi = (I_f)^f \circ \varphi = \mathrm{Id}_{B[Y]} \circ \varphi = \varphi$, ce qui montre (i). Pour ce qui est de (ii), notons que $(\varphi_1 \circ_f \varphi_2)^f(Y) = (\varphi_1 \circ_f \varphi_2)(X) = \varphi_1^f(\varphi_2(X)) = \varphi_1^f(\varphi_2^f(Y)) = (\varphi_1^f \circ \varphi_2^f)(Y)$.

Finalement, montrons (iii). On a ${}^f(\psi_1 \circ \psi_2)(X) = (\psi_1 \circ \psi_2)(Y) = \psi_1(\psi_2(Y)) = ({}^f\psi_1)^f \circ \psi_2)(Y) = (({}^f\psi_1)^f \circ {}^f\psi_2)(X) = ({}^f\psi_1 \circ_f {}^f\psi_2)(X)$.

1.5.3- Proposition. Soient f un élément de Hom(A,B), G un sous-groupe (pour le f-produit) de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$ et H un sous-groupe de $\mathrm{End}_B(B[Y])$. Posons $G^f = \{\varphi^f / \varphi \in G\}$ et ${}^fH = \{{}^f\psi / \psi \in H\}$. Alors G^f est un sous-groupe de $\mathrm{End}_B(B[Y])$, ${}^fH$ est un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$ et les applications $G \to G^f$, $\varphi \to \varphi^f$ et $H \to {}^fH$, $\psi \to {}^f\psi$ sont des isomorphismes de groupes.

En effet, compte tenu des résultats précédents, il ne nous reste qu'à démontrer que $(\varphi^{-1})^f = (\varphi^f)^{-1}$ pour tout $\varphi \in G$ et ${}^f(\psi^{-1}) = ({}^f\psi)^{-1}$ pour tout $\psi \in H$. Pour cela, notons que $I_f = \varphi^{-1} \circ_f \varphi$, donc $\mathrm{Id}_{B[Y]} = (I_f)^f = (\varphi^{-1} \circ_f \varphi)^f = (\varphi^{-1})^f \circ \varphi^f$, ce qui entraîne que $(\varphi^f)^{-1} = (\varphi^{-1})^f$. Le même type de raisonnement nous montre que ${}^f(\psi^{-1}) = ({}^f\psi)^{-1}$ pour tout $\psi \in \mathrm{End}_B(B[Y])$.

1.5.4- Proposition. Soient $f : A \to B$ un isomorphisme d'anneaux et φ un f-morphisme de $A[X]$ dans $B[Y]$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A[X] & \xrightarrow{\varphi} & B[Y] \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^f} \\ A[X] & \xrightarrow[\varphi]{} & B[Y] \end{array}$$

est commutatif.

En effet, $\varphi^f \circ \varphi = (\varphi \circ I_f^{-1}) \circ \varphi = \varphi \circ (I_f^{-1} \circ \varphi) = \varphi \circ \varphi_*$.

1.5.5- Proposition. Soient $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$, f bijectif et G un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$. Posons $G_* = \{\varphi_* / \varphi \in G\}$. L'application $G \to G_*$, $\varphi \to \varphi_*$ est alors un isomorphisme de groupes.

En effet, on sait déjà que $(I_f)_* = \mathrm{Id}_{A[X]}$. Par ailleurs, soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$. On a $(\varphi_1 \circ_f \varphi_2)_* = I_f^{-1} \circ (\varphi_1 \circ_f \varphi_2) = I_f^{-1} \circ (\varphi_1^f \circ \varphi_2) = (I_f^{-1} \circ \varphi_1^f) \circ \varphi_2 = (I_f^{-1} \circ (\varphi_1 \circ I_f^{-1})) \circ \varphi_2 = (I_f^{-1} \circ \varphi_1) \circ (I_f^{-1} \circ \varphi_2) = (\varphi_1)_* \circ (\varphi_2)_*$.

1.5.6- Proposition. Soient $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ et G un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$. Alors $A[X]^G = I_f^{-1}(B[Y]^{G^f})$.

En effet, si $P \in A[X]^G$, on a $\varphi(P) = I_f(P)$ pour tout $\varphi \in G$, donc $\varphi^f(I_f(P)) = I_f(P)$, ce qui montre que $P \in I_f^{-1}(B[Y]^{G^f})$. Réciproquement, si $Q \in I_f^{-1}(B[Y]^{G^f})$, on a $\varphi^f(I_f(Q)) = I_f(Q)$ pour tout $\varphi \in G$, d'où $\varphi(Q) = I_f(Q)$ pour tout $\varphi \in G$.

On rapelle le résultat suivant, dû à P. Samuel (cf. [2]) : Soient A un anneau commutatif, intègre et unitaire et G un groupe fini de A-automorphisme de $A[X]$. Alors $A[X]^G = A[\prod_{\sigma \in G} \sigma(X)]$.

1.5.7- Corollaire. Soient $f : A \to B$ un isomorphisme d'anneaux et G un sous-groupe fini de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$. Alors $A[X]^G = A[\prod_{\varphi \in G} \varphi_*(X)]$.

En effet, on sait que $A[X]^G = I_f^{-1}(B[Y]^{G^f})$ et comme G est fini, il en est de même de G^f, donc $B[Y]^{G^f} = B[\prod_{\varphi \in G} \varphi^f(Y)]$. Comme f est bijectif, il en est de même de I_f, donc $A[X]^G = f^{-1}(B)[\prod_{\varphi \in G}(I_f^{-1} \circ \varphi^f)(Y)] = A[\prod_{\varphi \in G} \varphi_*(X)]$.

Finalement, on étudiera l'ensemble $A[X]^G$ quand G est un groupe infini de f-morphismes de A[X] dans B[Y] et pour ce faire, on utilisera le résultat suivant dû à B. Costillon (cf. [5]) : soient A un anneau commutatif, intègre et unitaire et G un groupe infini de A-automorphismes de A[X]. Alors $A[X]^G = A$.

1.5.8- Proposition. Soient $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ et G un sous-groupe infini de $\mathrm{Hom}_f(A[X], B[Y])$. Alors $A[X]^G = A + (\mathrm{Ker}\ f)[X]$.

En effet, on sait que l'application $\varphi \to \varphi^f$ de G dans G^f est injective, donc G infini entraîne G^f infini. On a donc $B[Y]^{G^f} = B$ et, par suite, $A[X]^G = I_f^{-1}(B) = A + (\mathrm{Ker}\ f)[X]$.

Note. Les techniques ci-dessus développées peuvent être étendues aux séries formelles (voir [7] pour le cas d'une variable) et aux séries formelles restreintes (voir [8] pour le cas d'une variable).

2 - Sur la structure des groupes finis de A-automorphismes de A[X]

Cette partie de notre travail est une étude simple et naïve qui analise la structure des groupes finis des A-automorphismes de A[X], A étant un anneau unitaire, intègre et commutatif.

Soit A un anneau commutatif, intègre et unitaire. On rappelle que, étant donné un A-automorphisme φ de A[X], alors $\varphi(X) = \alpha + \beta X$ avec α, β des éléments de A et $\beta \in U(A)$ (cf. [1]).

Si G est un groupe fini de A-automorphismes de A[X], soit g l'application de G dans A définie par $g(\varphi) = \beta$ où $\varphi \in G$ est tel que $\varphi(X) = \alpha + \beta X$. Il est clair que g ainsi défini est un morphisme multiplicatif de G dans $(A,\cdot)$. Si l'on pose $G_o = g(G)$ on voit que G_o est un sous-groupe de $(A,\cdot)$ et la suite $0 \to Ker(g) \to G \to G_o \to 0$ est exacte. Or, on sait que les seuls sous-groupes multiplicatifs d'un corps sont les groupes cycliques (cf. [6]), d'où on déduit que les seuls sous-groupes multiplicatifs finis d'un anneau intègre - par passage au corps des fractions - sont les groupes cycliques. Cela nous dit que G_o est cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour n convenable, $n \in \mathbb{N}$. Posons $G_o = < \beta >$, $\beta \in U(A)$ et soit φ un élément de G tel que $g(\varphi) = \beta$ (i.e. $\varphi(X) = \alpha + \beta X$). Comme $Ker(g)$ est un sous-groupe formé par les éléments ψ de G de la forme $\psi(X) = \gamma + X$ on a $\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \in Ker(g)$, donc le sous-groupe $< \varphi >$ opère sur $Ker(g)$ par des automorphismes intérieures d'où on déduit le résultat suivant :

2.1. Proposition. Sans les conditions précédentes, G est le produit semi-direct de $Ker(g)$ par $< \varphi >$.

On notera : $G = Ker(g) \rtimes < \varphi >$.

Mais on sait que $< \varphi >$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_n$ pour un entier n convenable, $n \in \mathbb{N}$ et comme $Ker(g)$ est réduit à l'élément neutre si la caractéristique de l'anneau est zéro, on a :

2.2. Proposition. Soit A un anneau de caractéristique zéro. Alors tout sous-groupe fini du groupe des A-automorphismes de A[X] est cyclique.

Supposons maintenant que carac(A) = p > 0 et soit ψ un A-automorphisme de la forme $\psi(X) = \gamma + X$. Il est clair que l'ordre de ψ est p, d'où on déduit :

2.3. Proposition. Soit G un groupe fini de A-automorphismes de A[X] où A est un anneau de caractéristique p. Si l'ordre $\sigma(G)$ de G est plus petit ou égal à p, G est cyclique. Plus précisément, si $\sigma(G) < p$ alors Ker(g) est réduit à l'élément neutre ; si $\sigma(G) = p$, G = Ker(g).

Si carac(A) = p on sait que tout élément de Ker(g) à ordre p, d'où on déduit que Ker(g) est isomorphe à $(\mathbb{Z}_p)^m$ pour un entier m convenable $m \in \mathbb{N}$. De plus si $\beta \in A$ est tel que $\beta^p = 1$ alors $\beta = 1$. Ainsi, si l'on note $\mathbb{Z}_0 = \{0\}$, on a :

2.4. Proposition : Soit G un sous-groupe fini du groupe des A-automorphismes de A[X]. Alors G est isomorphe au produit semi-direct de $(\mathbb{Z}_p)^m$ par $\mathbb{Z}_n$ où p = carac(A), n, $m \in \mathbb{N}$ et n et p premiers entre eux.

2.5. Proposition. Soit G un sous-groupe fini du groupe des A-automorphismes de A[X]. Alors l'ordre de G est paire si et seulement si il existe $\varphi \in G$ tel que $\varphi^2 = id_{A[X]}$.

En effet, on sait que G est isomorphe au produit semi-direct $(\mathbb{Z}_p)^m \propto \mathbb{Z}_n$ où p = carac(A), n, $m \in \mathbb{N}$ et (p,n) = 1, donc l'ordre de G est égal à $n.p^m$. Il suffit un simple calcul sur le nombre $n.p^m$ pour aboutir à l'énoncé de la proposition.

REFERENCES

[1] R. Gilmer, "R-automorphismes of R[X]", Proc. London Math. Soc. 18 (1968), 328-336.

[2] P. Samuel, "Groupes finis d'automorphismes des anneaux de séries formelles", Bull. Sc. Math. France 2ème série, 90 (1966), 97-101.

[3] M. Nagata, "On automorphisms group of K[X,Y]", Math., Kyoto Univ. Konokuniga, Tokio, 1972.

[4] S. Abhyankar, W. Heinzer et P. Eakin, "On the uniqueness of the coefficient ring in polynonnial rings", J. Algebre 23 (1972), 310-342.

[5] B. Costillon, "Réciproque à un théorème de Samuel", C.R. Acad. Sc. Paris, t. 283, série A, 141-142.

[6] P. Samuel, "Théorie algébrique des nombres", Hermann, Paris 1967.

[7] R. Gilmer, "R-automorphismes de R[[X]], Michigan Math. 17 (1970), 15-21.

[8] J. B. Castillon et A. Micali, "A-endomorphismes de A{X}", Manuscripta Mathematica 25 (1978), 249-261.