

JEAN MAROT

**Conservation des propriétés des fibres formelles d'un anneau semi-local noethérien par complétion adique**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1980, fascicule S3

« Colloque d'algèbre », , p. 119-122

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1980\\_\\_S3\\_119\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1980__S3_119_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONSERVATION DES PROPRIÉTÉS DES FIBRES FORMELLES  
D'UN ANNEAU SEMI-LOCAL NOETHÉRIEN PAR COMPLÉTION ADIQUE

Jean MAROT

Université de Bretagne Occidentale

0. INTRODUCTION

Donnons d'abord quelques définitions.

Définition 1

Un homomorphisme d'anneaux noethériens  $\psi : A \rightarrow B$  est dit régulier (normal, réduit, resp.) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- 1)  $\psi$  est plat.
- 2) Pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , la  $k(\mathfrak{p})$ -algèbre  $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$  est géométriquement régulière (géométriquement normale, géométriquement réduite, resp.).

Définition 2

Soit  $A$  un anneau noethérien. On dit que les fibres formelles de  $A$  sont géométriquement régulières (géométriquement normales, géométriquement réduites, resp.) si, pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , l'homomorphisme canonique  $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \widehat{A_{\mathfrak{p}}}$  (séparé complété radical-adique de  $A_{\mathfrak{p}}$ ) est régulier (normal, réduit, resp.).

Problèmes posés

Dans E.G.A., IV, 7.4.8 [2], A. Grothendieck pose, entre autres, le problème suivant :

Soit  $(A, \mathfrak{J})$  un anneau de Zariski complet. Si les fibres formelles de  $A/\mathfrak{J}$  sont géométriquement régulières (géométriquement normales, géométriquement réduites, resp.), en est-il de même de celles de  $A$  ?

Résultats

La réponse est positive, si en outre  $A$  est semi-local (cas réduit : Marot, 1975 ; cas régulier : Rotthaus, 1977 ; cas normal : Nishimura, 1979).

La réponse est négative, si  $A$  n'est pas semi-local (contre-exemple de Nishimura, 1979).

1. RESULTATS

Nous nous limitons au cas régulier et au cas normal. Les principaux résultats sont fournis par les théorèmes 1 et 2 qui suivent.

THEOREME 1 (Rotthaus, Nishimura) [4] [5]

Soit  $(A, \mathfrak{J})$  un anneau de Zariski complet semi-local tel que les fibres formelles de  $\frac{A}{\mathfrak{J}}$  soient géométriquement régulières (resp. géo-

métriquement normales). Alors les fibres formelles de  $A$  sont aussi géométriquement régulières (resp. géométriquement normales).

THEOREME 2 (Nishimura) [4]

Il existe un anneau noethérien intègre  $A$  de dimension 3, et un idéal  $\mathfrak{J}$  de  $A$  tels que :

- 1) les fibres formelles de  $A$  sont géométriquement régulières.
- 2) les fibres formelles du séparé complété  $\mathfrak{J}$ -adique  $B$  de  $A$  ne sont pas géométriquement réduites.

Les démonstrations seront trouvées dans [4] [5]. Signalons seulement que la démonstration du théorème 1 utilise de manière essentielle les deux résultats suivants :

THEOREME 3 (Rotthaus, Nishimura) [4] [5]

Soient  $(A, \mathfrak{J})$  un anneau de Zariski complet,  $B$  une  $A$ -algèbre noethérienne ;  $\mathfrak{k}$  un idéal de  $B$ ,  $\mathfrak{a} = \mathfrak{k} \cap A$  ; et, pour tout entier  $n > 0$ ,  $\mathfrak{k}_n = \mathfrak{k} + \mathfrak{J}^n B$ ,  $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{k}_n \cap A$ . On suppose que :

- 1)  $B$  est  $A$ -fidèlement plat.
- 2)  $\mathfrak{k}_n = \mathfrak{a}_n B$  pour tout  $n$ .
- 3)  $\mathfrak{J} B$  est contenu dans le radical de Jacobson de  $B$ .

Alors  $\mathfrak{k} = \mathfrak{a} B$ .

THEOREME 4 (André) [1]

Soient  $\psi : A \rightarrow B$  un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens ;  $\mathfrak{M}$ , l'idéal maximal de  $A$ ,  $k(\mathfrak{M})$  son corps résiduel. On suppose que :

- 1)  $\psi$  est plat.
- 2) l'homomorphisme  $\overline{\psi} : k(\mathfrak{M}) \rightarrow B \otimes_A k(\mathfrak{M})$ , induit par  $\psi$ , est régulier.
- 3) les fibres formelles de  $A$  sont géométriquement régulières.

Alors  $\psi$  est régulier.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ANDRE, Localisation de la lissité formelle,  
Manuscripta Math. 13 (1974), 297-307.
- [2] A. GROTHENDIECK, E.G.A., IV, Paris, 1964-1965.
- [3] J. MAROT, Sur les anneaux universellement japonais,  
Bull. S.M.F., 103 (1975), 103-111.
- [4] J. NISHIMURA, On ideal-adic completion of noetherian rings  
(à paraître), Kyoto University.
- [5] C. ROTTHAUS, Komplettierung semilokaler quasiansgezeichneter Ringe,  
Nagoya Math. J. 76 (1979), 173-180
- [6] H. SEYDI, Sur la complétion des anneaux excellents, I  
(à paraître).
-