ALBERT RAUGI

Théorème de la limite centrale, sur les groupes de Lie nilpotents, pour des chaînes semi-markoviennes

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1980, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , exp. nº 5, p. 1-38
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1980___1_A5_0>

THEOREME DE LA LIMITE CENTRALE, SUR LES GROUPES DE LIE NILPOTENTS,

POUR DES CHAINES SEMI-MARKOVIENNES

Albert RAUGI

INTRODUCTION

Soient E un espace L.C.D. ; $(\Omega, \mathcal{F}, (X_n)_{n\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E})$ une chaine de Markov sur E, de probabilité de transition P admettant une mesure de probabilité invariante ν.

Soient $(N, \circ)$ un groupe de Lie simplement connexe et ρ une application borélienne de E dans N.

On s'intéresse à l'étude du théorème de la limite centrale pour la suite de v.a.

$$S_n = \rho(X_1) \circ \ldots \circ \rho(X_n) \quad , \; n \geq 1 .$$

Nous disons que S_n est un produit semi-Markovien.

Dans le cas où $(N, \circ)$ est le groupe additif des réels $(\mathbb{R},+)$, Rosenblatt ([3], théorème 2) a montré le résultat suivant :

Théorème : *Supposons que la mesure* $\mu = \rho(\nu)$ *possède un moment d'ordre 2 ; que l'opérateur P soit de rayon spectral* <1 *sur* $\mathbb{L}_0^2(E,\nu) = \{f \in \mathbb{L}^2(E,\nu) : \int f d\nu = 0\}$; *et que* $\mathrm{var}(\rho(X_1)+\ldots+\rho(X_n)) \sim n\sigma^2$ *avec* $\sigma>0$.

Alors la suite de v.a. $\left\{ \dfrac{\rho(X_1)+\ldots+\rho(X_n) - n\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)}{\sqrt{n}\;\sigma^2} \right\}_{n\geq 1}$ *définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\nu)$, *converge en loi vers la loi normale centrée de variance* 1 .

Nous montrons qu'un tel résultat subsiste, pour un groupe de Lie nilpotent simplement connexe quelconque, en supposant seulement que P est un opérateur quasi-compact, sans valeur propre 1, de $\mathbb{L}_0^2\ (E,\nu)$.

Une autre motivation de cette étude est la suivante. Lorsqu'on veut établir un théorème de la limite centrale, pour des v.a. indépendantes et équidistribuées, sur un groupe de Lie G ayant un nombre fini de composantes connexes, on est amené à étudier un produit semi-Markovien sur un groupe résoluble

Considérons, par exemple, le groupe G des matrices triangulaires supérieures d'ordre d, à coefficients complexes. Soient μ une mesure de probabilité sur G possédant un moment d'ordre 1 et $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de loi μ .

Si $g = ((a_{ij})) \in G$, posons

$$\theta_{ij}(g) = \log\left|\frac{a_{ii}(g)}{a_{jj}(g)}\right| \qquad \text{et} \quad \tau_{ij} = \int_G \theta_{ij}(g)\ \mu(dg)\ ,\ 1\leq i<j\leq d.$$

Considérons alors les trois sous-groupes suivants de G :

$$G_-^\mu = \{((a_{ij}))\in G : a_{ii} = 1\ ,\ i\in\{1,\ldots,d\} \text{ et } a_{ij} = 0 \text{ si } \tau_{ij}\geq 0,\ 1\leq i<j\leq d\}$$

$$G_0^\mu = \{((a_{ij}))\in G : a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad \tau_{ij} \neq 0,\ 1\leq i<j\leq d\}$$

$$G_+^\mu = \{((a_{ij}))\in G : a_{ii} = 1\ ,\ i\in\{1,\ldots,d\} \text{ et } a_{ij} = 0 \text{ si } \tau_{ij}\leq 0,\ 1\leq i<j\leq d\}$$

Le sous-groupe G_0^μ normalise les sous-groupes G_-^μ et G_+^μ et le groupe G possède la décomposition <u>unique</u> $G = G_-^\mu\, G_0^\mu\, G_+^\mu$. Appelons π_-, π_0 et π_+ les projections définies par cette décomposition.

Nous savons ([1] théorème (9.2)) que :

i) pour tout $g\in G$, la suite de v.a. $\{\pi_-(y_1\ldots y_n g)\}_{n\geq 1}$ converge p.s. vers une v.a. Z indépendante de g.

ii) pour tout $g\in G$, la suite de v.a. $\{\pi_+(g y_n\ldots y_1)\}_{n\geq 1}$ converge p.s. vers une v.a. $\tilde{Z}$ indépendante de g.

On en déduit que $\pi_-(y_1 \dots y_n)$ et $\pi_+(y_1 \dots y_n)$ convergent en loi respectivement vers les lois de Z et $\tilde{Z}$. Il nous reste donc à étudier $\pi_o(y_1 \dots y_n)$. S'il n'y a pas de "télescopage" (i.e. $\pi_o(G_+^\mu\, G_-^\mu) = \{e\}$), nous avons

$$\pi_0(Y_1 \dots Y_n) = \pi_0(Y_1) \dots \pi_0(Y_n) \ ;$$

autrement dit $\pi_0(Y_1 \dots Y_n)$ est un produit de v.a. indépendantes et de loi $\pi_0(\mu)$. Mais en général, il y a "des téléscopages" et nous avons

$$\pi_0(Y_1 \dots Y_n) = \pi_0(Y_1)\ \pi_0(\pi_+(Y_1)Y_2) \dots \pi_0(\pi_+(Y_1 \dots Y_{n-1})Y_n)\ .$$

En introduisant la chaine de Markov $(\pi_+(Y_1 \dots Y_{n-1}), Y_n)$ sur $G_+^\mu \times G$, on voit que $\pi_0(Y_1 \dots Y_n)$ et un produit semi-markovien sur le groupe résoluble G_0^μ.

Dans le cas où, pour tout $1 \leq i < j \leq d$, τ_{ij} est nul si et seulement si l'homomorphisme θ_{ij} est nul, G_0^μ est un groupe résoluble de type rigide ; G_0^μ se plonge alors dans un produit semi-direct d'un groupe nilpotent par un groupe compact L ; si bien que nous somme amenés à étudier un produit semi-Markovien sur le groupe nilpotent N...

Les principaux résultats sont énoncés dans les sections 2 et 3. Ils ont été résumés dans ([2]).

1.- PRELIMINAIRES

Soit $(N, [\,,\,])$ une algèbre de Lie nilpotente réelle de dimension p et de longueur r. Nous désignons par $N^1 = N \supset N^2 = [N,N] \supset \ldots \supset N^r = [N,N^{r-1}] \supset N^{r+1} = \{0\}$ sa série centrale descendante. Nous désignons par $\mathbb{C}[N]$ l'algèbre des fonctions polynômes sur l'espace vectoriel $N(\approx \mathbb{R}^p)$.

(1.1) Définitions. Pour tout élément T de $\mathbb{C}[N]$, la fonction qui au couple (u,v) associe $T([u,v])$ est une fonction polynôme sur $N\times N$. Nous disons qu'une notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$ est compatible avec la structure d'algèbre de Lie de $(N,[,])$ si pour toute fonction polynôme T sur N, $T([u,v])$ est la somme de monômes de la forme $A(u)B(v)$, avec $dgA + dgB \leq dgT$. Nous disons qu'une notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$ est homogènement compatible avec la structure d'algèbre de Lie de $(N,[,])$ si pour toute fonction polynôme T sur N, $T([u,v])$ est la somme de monômes de la forme $A(u)B(v)$, avec $dgA + dgB = dgT$.

(1.2) Une notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$ s'obtient en choisissant une base $\{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ de l'espace vectoriel N et en attribuant un degré à chacune des coordonnées $\{x_i\}_{1\leq i\leq p}$, associée à cette base. On convient que le degré [resp. la valuation du polynôme nul] est $(-\infty)$ [resp. $(+\infty)$]. Nous disons alors que $\{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ est une base de référence pour cette notion de degré.

Pour qu'une notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$ soit compatible avec la structure d'algèbre de Lie de N, il faut et il suffit que la propriété de définition soit vérifiée pour les fonctions coordonnées $\{x_i\}_{1\leq i\leq p}$, d'une base de référence. Comme

$$x_i([u,v]) = \sum_{1\leq \ell,k\leq p} x_\ell(u)x_k(v) \quad x_i([e_\ell, e_k]), \qquad u,v\in N,$$

il faut et il suffit que $x_i([e_\ell, e_k]) = 0$, pour tout triplet (ℓ,k,i) tel que $dgx_\ell + dgx_k > dgx_i$.

Nous avons alors, pour $s\in\{1,\ldots,r\}$, pour $u_1,\ldots u_s \in N$ et pour $i\in\{1,\ldots,p\}$:

(1) $x_i([u_1[u_2\ldots[u_{s-1},u_s]\ldots]]) = \sum_{\substack{(\ell_1,\ldots\ell_s)\in(\mathbb{N}-\{0\})^s : \\ dgx_{\ell_1}+\ldots+dgx_{\ell_s}\leq dgx_i}} C_{\ell_1,\ldots,\ell_s}\, x_{\ell_1}(u_1)\ldots x_{\ell_s}(u_s)$

En particulier, on voit que si $k = dgx_i$, alors $x_i(N^{k+1}) = 0$.

(1.3) Définition. On appelle suite graduée d'idéaux de N, toute suite décroissante d'idéaux $(\mathfrak{J}^i)_{i\geq 1}$ telle que

i) $\mathfrak{J}^1 = N$ et à partir d'un certain rang $\mathfrak{J}^i = (0)$

ii) $[\mathfrak{J}^i, \mathfrak{J}^j] \subset \mathfrak{J}^{i+j}$, pour tout $i,j \geq 1$.

Le plus grand entier r tel que $\mathfrak{J}^r \neq (0)$ est appelé la longueur de la suite graduée d'idéaux $(\mathfrak{J}^i)_{i\geq 1}$.

(1.4) Définition. Soit $(\mathfrak{J}^i)_{i\geq 1}$ une suite graduée d'idéaux de N de longueur r. Pour $i \in \{0,\ldots,r\}$, notons q_i la dimension de l'espace vectoriel $N/_{\mathfrak{J}^{i+1}}$. Nous disons qu'une base ordonnée $\{e_k\}_{1\leq k\leq p}$, $(p = q_r)$, de N est adaptée à la suite graduée d'idéaux $(\mathfrak{J}^i)_{i\geq 1}$, si pour tout $i \in\{1,\ldots,r\}$, $\{e_{q_{i-1}+1},\ldots,e_{q_i}\}$ est une base d'un supplémentaire de $\mathfrak{J}^{i+1}$ dans $\mathfrak{J}^i$.

(1.5) Définition. Nous disons qu'une notion de degré, notée dg, est "plus petite" qu'une notion de degré, notée dg', si pour pour toute fonction polynôme T sur N, $dgT \leq dg'T$.

(1.6) Notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$, associée à une suite graduée d'idéaux.

Soit $(\mathfrak{J}^\ell)_{\ell\geq 1}$ une suite graduée d'idéaux, choisissons une base $\{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ de N adaptée à cette suite. En posant

$$dgx_i = \sup\{\ell\in\mathbb{N} : e_i \in \mathfrak{J}^\ell\},$$

On obtient une notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$, compatible avec la structure d'algèbre de Lie de N, et indépendante du choix de la base adaptée $\{e_i\}_{1\leq i\leq p}$.

La notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$ ainsi obtenue à partir de la suite centrale descendante de N est appelée "notion de degré usuelle". C'est la plus petite des notions de degré sur $\mathbb{C}[N]$ compatible avec la structure d'algèbre de Lie de N.

Réciproquement, donnons nous une notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$ compatible avec la structure d'algèbre de Lie de N. Soit $\{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ une base de référence pour cette notion de degré. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, appelons $\mathfrak{J}^\ell$ l'idéal de $(N,[\ ,\ ])$ engendré par les e_i tels que $dgx_i \geq \ell$. On obtient alors une suite graduée d'idéaux et la base $\{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ est adaptée à cette suite. La notion de degré associée à la suite graduée $(\mathfrak{J}^\ell)_{\ell\geq 1}$ est alors plus petite que la notion de degré considérée.

(1.7) Munissons N du produit o défini par la formule de Campbell-Hausdorff,

$$u o v = u + v + \frac{1}{2}[u,v] + \ldots \qquad (u,v \in N)$$

(N,o) est alors un groupe de Lie nilpotent simplement connexe.

L'application qui au couple (u,v) de N×N associe T(uov) est une fonction polynôme sur N×N. Une notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$ est compatible avec la structure d'algèbre de Lie de N si et seulement si, pour tout élément T de $\mathbb{C}[N]$, vérifiant $T(0) = 0$, nous avons

$$(2)\quad T(uov) = T(u) + T(v) + A_T(u,v) \quad , \ (u,v \in N),$$

où A_T est une fonction polynôme sur N×N dont le degré global est inférieur à celui de T et les valuations partielles de A_T sont supérieures ou égales à 1.

[En effet il suffit de vérifier (2) pour une base de référence. (2) est alors une conséquence immédiate de (1). Tandis que (1), pour s = 2, s'obtient à partir de (2) en remarquant que :

$$[u,v] = \lim_{t\to 0} \left\{\frac{(tu)o(tv) - t(u+v)}{t^2}\right\}].$$

(1.8) Donnons nous une notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$ compatible avec la structure d'algèbre de Lie de N. Choisissons une base de référence $b = \{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ pour cette notion de degré et notons $\{x_i\}_{1\leq i\leq p}$ le système de fonctions coordonnées associées à cette base. Pour tout réel $t > 0$, posons

$$U_t^b(u) = \sum_{i=1}^{p} \frac{x_i(u)}{t^{dgx_i/2}} e_i, \qquad (u \in N).$$

Nous définissons ainsi une famille d'automorphismes d'e.v. sur N. En général les U_t^b , $t > 0$, ne sont pas des automorphismes d'algèbre de Lie de $(N,[\ ,\ ])$.

Des relations

$$x_i([u,v]) = \sum_{\{\ell,\ k\in\mathbb{N}^*:\ dgx_k+dgx_\ell\leq dgx_i\}} C_{\ell,k}\, x_\ell(u)\, x_k(v), \quad i\in\{1,\dots,p\},$$

il résulte que

$$[u,v]^b = \lim_{t\to 0_+} U_{1/t}^b[\,U_t^b(u)\ ,\ U_t^b(v)\,]$$

existe pour tous $u, v\in N$, et l'on a

$$[u,v]^b = \sum_{\{\ell,\ k\in\mathbb{N}^*:\ dgx_\ell+dgx_k = dgx_i\}} C_{\ell,k}\, x_\ell(u)\, x_k(v), \quad i\in\{1,\dots p\}.$$

On vérifie facilement que : $[\ ,\ ]^b$ est un crochet de Lie sur N ; $(N,[\ ,\ ]^b)$ est une algèbre de Lie nilpotente de longueur égale à celle de $(N,[\ ,\ ])$; la notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$ considérée est homogènement compatible avec la structure d'algèbre de Lie de $(N,[\ ,\ ]^b)$; et les U_t^b , $t > 0$, sont des automorphismes d'algèbre de Lie de $(N,[\ ,\ ]^b)$.

Appelons o^b le produit sur N associé au crochet de Lie $[\ ,\ ]^b$ par la formule de Campbell-Hausdorff. On vérifie que

i) $u\ o^b\ v = \lim\limits_{t\to 0_+} U_{1/t}^b\ (U_t^b(u)\ o\, U_t^b(v))$, $(u,v\in N)$

ii) Pour toute fonction monôme $T = x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\dots x_p^{\alpha_p}$, $\alpha\in\mathbb{N}^p-\{(0,\dots 0)\}$,

$$T(u \overset{b}{\circ} v) = T(u) + T(v) + \overline{A}_T(u,v) \;, \quad (u,v \in N),$$

où $\overline{A}_T$ se déduit de A_T, (voir (1.7) , en conservant uniquement les monômes de degré égaux à celui de T.

(1.9) <u>Définition</u> . Soit μ une mesure de probabilité sur les boréliens de N. Nous disons qu'une notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$ est <u>adaptée</u> à μ si pour toute fonction polynôme T de degré 1,

$$\int_N |T(u)| \; \mu(du) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_N T(u) \; \mu(du) = T(0)$$

(1.10) <u>Définition</u> . Une mesure de probabilité μ sur N est dite centrée si la notion de degré usuelle sur $\mathbb{C}[N]$ est adaptée à μ . Si π désigne l'application naturelle de N sur $N/_{[N,N]}$, nous avons alors

$$\int_N \pi(u) \; \mu(du) = 0 \; .$$

(1.11) <u>Suite graduée d'idéaux associée à un élément de N</u>

Considérons l'ensemble

$E = \{(\ell, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 0 \leq k \leq \ell\} \cup \{(1,1)\}$ muni de la relation d'ordre total $\geq$ définie par

$$(\ell,k) \geq (\ell',k') \Longleftrightarrow \begin{cases} \ell > \ell' \\ \text{ou} \\ \ell = \ell' \text{ et } k \geq k' \; . \end{cases}$$

On vérifie aisément que l'ordre ainsi défini sur E est celui qui est induit par la bijection :

$$\sigma : E \to \mathbb{N}^*$$
$$(\ell,k) \to \sigma(\ell,k) = \begin{cases} \ell(\ell-1)/2 + k + 2 & \text{si } \ell \geq 2 \\ k+1 & \text{si } \ell = 1 \end{cases}$$

Nous appelons suite graduée d'idéaux associé à un élément x de N, la suite graduée d'idéaux de N définie de la façon suivante :

$\mathfrak{J}^{1,0}(x) = N, \quad \mathfrak{J}^{1,1}(x) = \pi^{-1}(\pi(x))$

et $\mathfrak{J}^{\ell,k}(x)$, $(\ell,k) \in (E,\geq)$ avec $\ell \geq 2$, est l'idéal de N^{ℓ} engendré par $N^{\ell+1}$ et par les crochets de ℓ éléments de N dans lequel figure au moins k fois x.

Lorsque $x \in N^2$, la suite graduée d'idéaux associée à x n'est autre que la suite centrale descendante.

(1.12) <u>Définition</u> . Soit x un élément de N, nous appelons <u>notion de degré suivant x</u> la notion de degré sur C [N] induite par la suite graduée d'idéaux associée à x (voir (1.6) et (1.11)).

Lorsque $x \in N^2$, la notion de degré suivant x coincide avec la notion de degré usuelle.

2.- T.L.C. THEORIQUE : CAS HOMOGENE

(2.1.) Notations

Soit $(\Omega, F, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbb{P}_x)_{x\in M})$ une chaine de Markov sur un espace localement compact à base dénombrable M, de probabilité de transition P admettant une mesure de probabilité invariante ν.

Soit $(N, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie nilpotente ; nous désignons par $\mathbb{C}[N]$ l'algèbre des fonctions polynômes sur l'espace vectoriel N ; et nous notons $\circ$ le produit sur N associé au crochet de Lie $[\ ,\ ]$ par la formule de Campbell-Hausdorff.

Soit $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'applications boréliennes de M dans N, pour laquelle il existe une notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$, homogènement compatible avec la structure d'algèbre de Lie nilpotente de N et adaptée aux mesures $\mu_n = \rho_n(\nu)$ (voir définitions (1.1) et (1.9)). Nous désignons par $b = \{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ une base de référence pour cette notion de degré et par $\{x_i\}_{1\leq i\leq p}$ le système de fonctions coordonnées associé à cette base.

Nous appelons d_i le degré de chaque coordonnée x_i, $i\in\{1,\dots,p\}$. Pour tout $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in\mathbb{N}^p$, nous désignons par x^α la fonction monôme $x_1^{\alpha_1}\dots x_p^{\alpha_p}$ et par $d_\alpha = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i d_i$ le degré du monôme x^α. Nous posons

$$q = \sup\{d_i : 1\leq i\leq p\}$$
$$l(\mu_n) = \sup\{k\in\mathbb{N} : \int_N |x^\alpha(u)|\ \mu_n(du) < +\infty,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^p,\ d_\alpha\leq k\}$$

Pour tout entier naturel $n\geq 1$, nous définissons

$$U_n(u) = \sum_{i=1}^{p} \frac{x_i(u)}{n^{d_i/2}}\, e_i \qquad (u\in N)$$

$$S_n(t) = U_n(\rho_n(X_1)\circ\dots\circ\rho_n(X_{[nt]})\circ\{nt\}\rho_n(X_{[nt]+1})) \qquad (t\geq 0)$$

$$= U_n(\rho_n(X_1))\circ\dots\circ U_n(\rho_n(X_{[nt]}))\circ\{nt\}U_n(\rho_n(X_{[nt]+1}))$$

Enfin, pour tout élément v de N, nous définissons

$$D_v f(u) = \lim_{t\to 0} \frac{f(u \circ tv) - f(u)}{t} \qquad (u \in N) \quad ,$$

lorsque f est une fonction de classe C^1 sur N. Nous écrivons D_i au lieu de D_{e_i} , $i \in \{1, \ldots , p\}$.

(2.2) <u>théorème</u> : *Avec les notations de (2.1), supposons que*

i) (existence de moments d'ordre suffisant) :
pour tout $n \geq 1$, $\ell(\mu_n) \geq m = \sup\{4, 2q\}$

ii) (convergence des moments) :
pour tout monôme x^α , $\alpha \in \mathbb{N}^p$, $1 \leq d_\alpha \leq m$, *et pour tout* $t \geq 0$,

$$\lim_n \mathbb{E}_\nu [x^\alpha (S_n(\tfrac{[nt]}{n}))] = t^{d_\alpha/2} \quad \sigma(x^\alpha),$$

où $\sigma(x^\alpha)$ *est un réel indépendant de* t.

iii) *pour tout monôme* x^α *de degré 2 [resp. 1] , et pour tout* $t \geq 0$, *la suite de fonctions* $\{\mathbb{E}. [x^\alpha(S_n(\frac{[nt]}{n}))]\}_{n \geq 1}$ *converge, dans* $\mathbb{L}^1(M,\nu)$, *vers* $t\,\sigma(x^\alpha)$ *[resp. vers zéro]*.

iv) *pour tout monôme* x^α , $\alpha \in \mathbb{N}^p$, $1 \leq d_\alpha \leq m$, *la suite réelle*

$$\{n^{-\sup\{0, (d_\alpha/2)-1\}} \int_N |x^\alpha(u)| \, \mu_n(du)\}_{n \geq 1} \quad \text{est bornée.}$$

Alors, pour tout $t > 0$, *la suite de v.a.* $\{S_n(t)\}_{n \geq 1}$ *définie sur* $(\Omega, F, \mathbb{P}_\nu)$, *converge en loi vers la loi au temps* t *du semi-groupe de convolution* $(\nu_t)_{t>0}$ *sur* $(N, \circ)$ *de générateur infinitésimal*

$$A = \sum_{\{i: d_i = 2\}} \sigma(x_i)\, D_i + \frac{1}{2} \sum_{\{i,j: d_i = d_j = 1\}} \sigma(x_i x_j) \cdot D_i\, D_j$$

(2.3) <u>corollaire</u> . *Avec les notations du théorème (2.2), lorsque pour tout entier* $n \geq 1$, $\rho_n = \rho$, *les conclusions de ce théorème s'appliquent dès que :*

i) $\ell(\mu) \geq m = \sup\{4, 2q\}$

ii) *pour tout monôme* x^α , *non constant, de degré* $\leq m$, *la suite* $\{\mathbb{E}_\nu [x^\alpha(S_n(1))]\}_{n \geq 1}$ *converge vers un réel* $\sigma(x^\alpha)$.

iii) *pour tout monôme* x^α *de degré* 2[*resp.* 1] , *la suite de fonction* $\{\mathbb{E}_. [x^\alpha(S_n(1))]\}_{n \geq 1}$ *converge dans* $\mathbb{L}^1(M, \nu)$, *vers* $\sigma(x^\alpha)$ [*resp. vers zéro*].

Le théorème (2.2) suppose l'existence de moments supérieurs à 4. Cependant, dans le cas abélien (q = 1) nous avons :

(2.4) <u>théorème</u>. *Soit* $(\Omega, F, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbb{P}_x)_{x \in M})$ *une chaine de Markov sur un espace L.C.D.* M, *de probabilité de transition P admettant une mesure invariante* ν.

Soit $\{\rho_n\}_{n \geq 1}$ *une suite d'applications de M dans* $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$, *telle que les mesures de probabilité* $\mu_n = \rho_n(\nu)$ *soient centrées. Nous désignons par* $\{x_i\}_{1 \leq i \leq p}$ *les coordonnées de* $\mathbb{R}^p$ *et par* $\| \ \|$ *une norme sur* $\mathbb{R}^p$.

Pour tout $t > 0$, *nous posons*

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} (\rho_n(X_1) + \ldots + \rho_n(X_{[nt]}) + \{nt\}\rho_n(X_{[nt]+1})), \quad n \geq 1.$$

Supposons que :

i) $\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} ||u||^2 \mu_n(du) < +\infty$

ii) pour tous $\ell, k \in \{1, \ldots p\}$,

$$\mathbb{E}_.[x_\ell(S_n(\tfrac{[nt]}{n}))] \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{L}^1(M,\nu)} 0$$

$$\mathbb{E}_.[x_\ell\, x_k(S_n(\tfrac{[nt]}{n}))] \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{L}^1(M,\nu)} t\, \sigma_{\ell,k} ,$$

où $\sigma_{\ell,k}$ *est un réel indépendant de* t.

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(A_1) *Pour tout* $t > 0$, *la suite de v.a.* $\{S_n(t)\}_{n \geq 1}$, *définie sur* $(\Omega, F, \mathbb{P}_\nu)$, converge vers la loi gaussienne de matrice de covariance

$((t\,\sigma_{i,j}))_{i,j\in\{1,\ldots,p\}}$

(A_2) Pour tout réel $\alpha > 0$,

$$\lim_{t\to 0}\ \limsup_{n}\ \frac{1}{t}\ \mathbb{E}_\nu\Big[\ \|S_n(\tfrac{nt}{n})\|^2\ 1_{\{\|S_n(\frac{nt}{n})\|>\alpha\}}\Big] = 0.$$

(2.5) <u>Corollaire</u>. Avec les notations du théorème (2.4), lorsque $\rho_n = \rho$, $\forall n \geq 1$, supposons que :

i) $\int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^2\,\mu(du) < +\infty$ (avec $\mu = \rho(\nu)$)

ii) Pour tous $\ell, k \in \{1,\ldots,p\}$

$$\mathbb{E}_\cdot[x_\ell(S_n(1))] = \frac{1}{\sqrt{n}}\ \mathbb{E}_\cdot[x_\ell(\rho(X_1)+\ldots+\rho(X_n))] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^1(M,\nu)} 0$$

$$\mathbb{E}_\cdot[(x_\ell\, x_k)(S_n(1))] = \frac{1}{n}\ \mathbb{E}_\cdot[x_\ell\, x_k(\rho(X_1)+\ldots+\rho(X_n))] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^1(M,\nu)} \sigma_{\ell,k}\ .$$

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(A_1) Pour tout $t > 0$, la suite de v.a. $\{S_n(t)\}_{n\geq 1}$, définie sur $(\Omega, F, \mathbb{P}_\nu)$, converge vers la loi gaussienne de matrice de covariance $((t\,\sigma_{i,j}))_{i,j\in\{1,\ldots,p\}}$.

(A_2) La suite de v.a. $\{\|S_n(1)\|^2\}_{n\geq 1}$, définie sur $(\Omega, F, \mathbb{P}_\nu)$, est uniformément intégrable (i.e. $\lim_{C\to+\infty}\ \sup_n \int_{\{\|S_n(1)\|>c\}} \|S_n(1)\|^2\, d\mathbb{P}_\nu = 0$).

Les résultats de cette section sont prouvés dans la section 6.

3.- T.L.C. THEORIQUE : CAS NON HOMOGENE

(3.1) Notations

Soit $(\Omega, F, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbb{P}_x)_{x\in M})$ une chaine de Markov sur un espace localement compact à base dénombrable M, de probabilité de transition P admettant une mesure de probabilité invariante ν.

Soit $(N, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie nilpotente ; nous désignons par $\mathbb{C}[N]$ l'algèbre des fonctions polynômes sur l'espace vectoriel N ; et nous notons $\circ$ le produit sur N associé au crochet de Lie $[\ ,\ ]$ par la formule de Campbell-Hausdorff.

Soit $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'applications boréliennes de M dans N, pour pour laquelle il existe une notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$, compatible (non nécessairement homogènement compatible) avec la structure d'algèbre de Lie nilpotente de N et adaptée aux mesures $\mu_n = \rho_n(\nu)$, $n\geq 1$. (voir définitions (1.1) et (1.9)).
Nous désignons par $b = \{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ une base de référence pour cette notion de degré et par $\{x_i\}_{1\leq i\leq p}$ le système de fonctions coordonnées associé à cette base.

Nous appelons d_i le degré de chaque coordonnée x_i, $i\in\{1,\dots ,p\}$.
Pour tout $\alpha = (\alpha_1,\dots ,\alpha_p)\in\mathbb{N}^p$, nous désignons par x^α la fonction monôme $x_1^{\alpha_1}\dots x_p^{\alpha_p}$ et par $d_\alpha = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\, d_i$ le degré du monôme x^α. Nous posons

$$q = \sup\{d_i : 1\leq i\leq p\}$$

$$\phi(u) = \sup\{|x_i(u)|^{1/d_i} : i\in\{1,\dots ,p\}\},\ (u\in N)$$

$$\text{et}\qquad \tau(\mu_n) = \sup\{k\geq 1 : \int_N [\phi(u)]^k\,\mu_n(du) < +\infty\}$$

Pour tout entier naturel $n\geq 1$, nous définissons

$$U_n(u) = \sum_{i=1}^{p}\frac{x_i(u)}{n^{d_i/2}}\,e_i\qquad (u\in N),$$

et $\quad S_n(t) = U_n(\rho_n(X_1) \circ \dots \circ \rho_n(X_{[nt]}) \circ \{nt\}\rho_n(X_{[nt]+1}))$ $\quad , (t \geq 0)$.

[en général $S_n(t) \neq U_n(\rho_n(X_1)) \circ \dots \circ \{nt\}U_n(\rho_n(X_{[nt]+1}))$!]

Nous notons $\circ^b$ le produit sur N défini par

$$u \circ^b v = \lim_{n\to+\infty} U_n(U_{1/n}(u) \circ U_{1/n}(v)), \quad (u,v \in N). \text{ [voir (1.8)]}$$

(3.2) Supposons que pour tout entier $n \geq 1$, $\tau(\mu_n) \geq m = \sup\{4,2q\}$. (voir (3.1)). Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq m$, nous désignons par E_k le s.e.v. fermé de $\mathbb{L}^{m/k}(M,\nu)$ engendré par les éléments g de la forme

$$(*) \quad P^{l_k}[(T_k \circ \rho_n)[P^{l_{k-1}}[(T_{k-1} \circ \rho_n) \dots [P^{l_1}(T_1 \circ \rho_n)] \dots]]],$$

avec $\sum_{i=1}^{k} dg\, T_i \leq k$, $n \in \mathbb{N}^*$, $l_i \in \mathbb{N}$ $\forall i \in \{1,\dots,k\}$, avec $l_i \geq 1$ si $dg\, T_i \neq 0$

On convient que $P^0 = I$ et que E_0 est l'ensemble des fonctions constantes sur M.
[on notera que d'après l'inégalité de Hölder,

$$\|g\|_{\mathbb{L}^{m/k}(M,\nu)} \leq \prod_{i=1}^{k} \|T_i\|_{\mathbb{L}^{m/dgT_i}(N,\mu_n)} \text{]}.$$

Nous disons que le triplet $(P, \nu, \{\rho_n\}_{n\geq 1})$ vérifie l'hypothèse (H) si pour tout entier $k \leq m-1$, P est un opérateur quasi-compact, n'admettant pas la valeur propre 1, (il peut y avoir des valeurs propres de module 1, différentes de 1) sur

$$E_k^0 = \{g \in E_k : \int_M g(x)\,\nu(dx) = 0\}.$$

(3.3) Pour tout $n \geq 1$, nous désignons par Q_n la probabilité de transition sur $N \times M$ définie par

$$Q_n f(u,x) = P\,\phi_u(x), \text{ où } \phi_u(y) = f(u \circ \rho_n(y),\, y),\ (y \in M)$$

Alors $\{(\rho_n(X_1) \circ \ldots \circ \rho_n(X_n),\, X_n)\}_{n \geq 1}$ est une chaine de Markov sur $N \times M$, de probabilité de transition Q_n.

Pour toute fonction borélienne sur $N \times M$, nous posons

$$\tilde{P} f(u,x) = P[f(u,.)](x) \qquad (u \in N,\ x \in M)$$

et
$$\tilde{\nu} f(u,x) = \int_M f(u,x)\nu(dx) \qquad (u \in N),$$

lorsque ces expressions ont un sens.

$\tilde{P}$ et $\tilde{\nu}$ prolongent respectivement les opérateurs P et ν aux fonctions boréliennes sur $N \times M$.

Lorsque le triplet (P, ν, ρ_n) vérifie l'hypothèse (H), pour tout entier $k \leq m-1$, l'opérateur $(I-(\tilde{P}-\tilde{\nu}))$ de E_k est inversible. Nous appelons L_n l'opérateur défini par

$$L_n = \tilde{\nu}\,(Q_n - \tilde{P})\tilde{\nu} + \tilde{\nu}(Q_n - \tilde{P})\ (I-(\tilde{P}-\tilde{\nu}))^{-1}(Q_n - \tilde{P})\tilde{\nu}\ .$$

On voit aisément que, pour tout polynome T de $\mathbb{C}_m[N]$ et tout entier $n \geq 1$ $L_n T$ est un polynome de degré inférieur ou égal à $(dgT-2)$.

Lorsque T est un polynome de degré pair, pour tout entier $n \geq 1$, $L_n^{dgT/2}\, T$ est un scalaire qui ne dépend que des moments $\{\int_N x^\alpha(u)\ \mu_n(du) : \alpha \in \mathbb{N}^p,\ d_\alpha = 2\}$.

Si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^p$ tel que $d_\alpha = 2$, la suite $\{\int_N x^\alpha(u)\ \mu_n(du)\}_{n \geq 1}$ est convergente, alors la suite $\{L_n^{dgT/2}\ T\}_{n \geq 1}$ est aussi convergente ; nous notons alors $\sigma(T)$ le

réel $\lim_n \dfrac{1}{(dgT/2)!}\ L_n^{dgT/2}\ T$.

Nous avons :

(3.4) Proposition

Avec les notations de (3.1), supposons que :

i) $\tau(\mu_n) \geq m$, $\forall n \geq 1$

ii) le triplet $(P, \nu, \{\rho_n\}_{n\geq 1})$ *vérifie l'hypothèse (H) (voir (3.2))*

iii) pour tout monôme T de degré 2, la suite $\{\int_N T(u)\ \mu_n\ (du)\}_{n\geq 1}$ *converge*

iv) pour tout monôme T de degré ≥ 3 *et tout réel* $\delta \geq 1$ *tels que* $\delta dgT \leq m$,

$$\lim_n \frac{1}{n^{[(\delta\ dgT)/2]-1}} \int_N |T(u)|^\delta\ \mu_n(du)) = 0$$

Alors, pour tout $t > 0$ *et tout monôme T de degré* $\leq m$, *la suite de fonctions polynomes* $\{\frac{1}{n^{dgT/2}} \overset{\sim}{\nu}\ \mathcal{Q}_n^{[nt]}\ T\}_{n\geq 1}$ *converge vers zéro si dg T est impair, vers* $\sigma(T)\ t^{dgT/2}$, *si dgT est pair.*

De plus, si dg T $\leq m-1$, *alors pour tout* $u \in N$, *la suite de fonctions* $\{\frac{1}{n^{dgT/2}}\ \mathcal{Q}_n^{[nt]}\ T(u,\cdot)\}_{n\geq 1}$, *converge dans* $\mathbb{L}^{m/m-1}(M,\nu)$ *vers zéro si dg T est impair, vers* $\sigma(T) t^{dgT/2}$ *si dgT est pair (voir (3.3)).*

(3.5) Théorème

Avec les notations de (3.1), supposons vérifiées les hypothèses i), ii), iii) et iv) de la proposition (3.4)

Alors, pour tout $t > 0$, *la suite de v.a.* $\{S_n(t)\}_{n\geq 1}$, *définie sur* $(\Omega, F, \mathbb{P}_\nu)$ *converge en loi vers la loi au temps t du semi-groupe de convolution* $(\nu_t)_{t>0}$ *sur* $(N, \circ^b)$ *de générateur infinitésimal A.*

Lorsque $\circ = \circ^b$, le théorème (3.5) résulte immédiatement de la proposition (3.4) et du théorème (2.2).

La proposition (3.4) et le théorème (3.5) sont prouvés dans la section 7.

(3.6) Proposition

Pour $p \in [1,+\infty]$ *appelons* (H_p) *l'hypothèse :*

"P est un opérateur quasi-compact, sans valeur propre 1, sur l'espace $L_0^p(M,\nu) = \{f \in L^p(M,\nu) : \int_M f(u)\nu(du) = 0\}$.

Alors les hypothèses (H_p), $p \in]1,+\infty[$ *sont toutes équivalentes ; nous notons* (H_2) *l'hypothèse qu'elles définissent. Les hypothèses* (H_1) *et* (H_∞) *sont plus fortes que l'hypothèse* (H_2).

(3.7) Théorème

Avec les notations de (3.1), lorsque, pour tout entier $n \geq 1$, $\rho_n = \rho$, *les conclusions du théorème (3.5) s'appliquent dès que :*

i) *le couple* (P,ν) *vérifie l'hypothèse* (H_2)

ii) $\tau(\mu) = \tau(\rho(\nu)) \geq 2$.

Autrement dit, lorsqu'on remplace l'hypothèse (H) par celle plus forte (H_2), l'existence de moments d'ordre 2 devient suffisante.

Dans le cas où $(N,\circ) = (\mathbb{R},+)$ le résultat obtenu améliore celui de Rosenblatt ([4], théorème 2) qui suppose que P est un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à 1 sur $L_0^2(M,\nu)$.

4.- ETUDE DU SEMI-GROUPE $(\nu_t)_{t>0}$ ET T.L.C. PRATIQUE

Dans cette section, nous commençons par étudier l'absolue continuité du semi-groupe $(\nu_t)_{t>0}$. Nous montrons ensuite comment on utilise les résultats précédents pour obtenir, dans la pratique, un théorème de la limite centrale, sur les groupes nilpotents, pour une chaine semi-Markovienne.

A.- Etude du semi-groupe $(\nu_t)_{t>0}$

(4.1) Pour tout élément u de N, D_u est un champ analytique de vecteurs tangents, invariants à gauche sur $(N,\circ)$; D_u s'identifie à l'élément u de l'algèbre de Lie $(N, [\,,])$ de $(N,\circ)$.

Si pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$, $d_i \geq 2$, l'opérateur différentiel A s'identifie à l'élément $f_0 = \sum_{\{i:\ d_i=2\}} \sigma(x_i)\, e_i$ de $(N,[\,,])$. Alors, pour tout $t > 0$, ν_t est la mesure de Dirac ε_{tf_0}.

S'il existe des coordonnées x_i de degré 1, alors A s'écrit sous la forme

$$A = Z_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} Z_i^2 \quad , \text{ avec } \quad s \in \mathbb{N}^*$$

où les Z_i , $0 \leq i \leq s$, s'identifient à des éléments $(f_i)_{0\leq i\leq s}$ de $(N,[\,,])$.

Désignons par L_1 la sous-algèbre de Lie de $(N,[\,,])$ engendrée par les éléments $f_0,\dots,f_s$; et par L_2 l'idéal de L_1 formé par les éléments de L_1 de la forme $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i\, f_i + u$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $u \in [L_1,L_1]$.$(L_1,\circ)$ et $(L_2,\circ)$ sont des sous-groupes fermés de $(N,\circ)$ et $(L_2,\circ)$ est distingué dans $(L_1,\circ)$. Nous avons alors :

1) si $L_1 = L_2$, ν_t est absolument continue par rapport à la mesure de Haar de $(L_1,\circ)$ avec une densité de classe C^∞.

2) si $L_1 \neq L_2$, $L_1 = L_2 \oplus \mathbb{R}\, f_0$ et ν_t s'écrit $\lambda_t \otimes \varepsilon_{tf_0}$ où λ_t est absolument continue par rapport à la mesure de Haar de $(L_2,\circ)$ avec une densité de classe C^∞.

(4.2) Lorsque la matrice $((\sigma(x_i\ x_j)))_{\{i,j:d_i=d_j=1\}}$ est définie positive, l'algèbre de Lie engendrée par $\{f_1,\ldots,f_s\}$ est celle engendrée par les éléments $\{e_i : d_i = 1\}$. Nous nous trouvons dans le cas $L_1 = L_2 = N$ si et seulement si $\{e_i : d_i = 1\}$ engendre N ; c'est-à-dire si et seulement si $\{e_i : d_i = 1\}$ forme une base d'un supplémentaire de N^2 dans N.

Appelons τ le nombre de $i \in \{1,\ldots,p\}$ tel que $d_i = 1$. Quitte à réordonner la base b, nous pouvons supposer que $d_1 = \ldots = d_\tau = 1$. Pour tout $n \geq 1$, appelons $\bar{\rho}_n$ l'application borélienne de M dans $\mathbb{R}^\tau$ définie par

$$\bar{\rho}_n = (x_1 \circ \rho_n, \ldots, x_\tau \circ \rho_n) .$$

$\bar{\rho}_n$ appartient à $\mathbb{L}^2(M,\nu)$, (i.e. $\int_M ||\bar{\rho}_n(u)||^2\ \nu(du) = \sum_{i=1}^{\tau} \int_N x_i^2(u)\ \mu_n(du) < +\infty$) .

Nous avons :

(4.3) <u>Lemme</u>.

Supposons que pour tout $n \geq 1$, ρ_n s'écrive $(I-P)g_n$, où $\{g_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de $\mathbb{L}^2(M,\nu)$ convergeant vers g. Alors pour tout $\ell,k \in \{1,\ldots,\tau\}$,
$\sigma(x_\ell\ x_k) = \int_M [(x_\ell \circ g)(x_k \circ g) - (P(x_\ell \circ g))(P(x_k \circ g))]\,(u)\ \nu(du)$.

La matrice $((\sigma(x_\ell\ x_k)))_{\ell,k\in\{1,\ldots,\tau\}}$ n'est pas définie positive si et seulement s'il existe une combinaison linéaire T des x_ℓ, $1 \leq \ell \leq \tau$, telle

$$\sup_n \mathbb{E}_\nu[T^2(\rho(X_1)\circ\ldots\circ\rho(X_n))] < +\infty , \qquad \text{où } \rho = (I-P)g .$$

<u>Preuve</u>. Il suffit de noter que, pour tous $l,k \in \{1,\ldots,\tau\}$,

$$\mathbb{E}_\nu[(x_l\ x_k)(\rho_n(X_1)\circ\ldots\circ\rho_n(X_n))] = \mathbb{E}_\nu[(x_l\ x_k)(\rho_n(X_1)+\ldots+\rho_n(X_n))]$$

et que

$$\rho(X_1)+\ldots+\rho(X_n) = g_n(X_1) - g_n(X_{n+1}) + \eta_{1,n} + \ldots + \eta_{n,n} ,$$

où les $\eta_{l,n} = g_n(X_{l+1}) - g_n(X_l)$ sont des accroissements de martingales...

B.- Applications des résultats des sections 2 et 3 au T.L.C.

(4.4) D'après (4.2), nous voyons que si l'on veut obtenir des mesures ν_t absolument continues par rapport à la mesure de Haar nous sommes limité dans le choix de la notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$.

Dans la pratique pour obtenir un théorème de la limite centrale on opère de la façon suivante.

Soit $(\Omega, F, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbb{P}_x)_{x\in M})$ une chaine de Markov sur un espace L.C.D. M, de probabilité de transition P admettant une mesure invariante ν.

Soit $(N, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie nilpotente ; nous désignons par $\mathbb{C}[N]$ l'algèbre des fonctions polynômes sur l'espace vectoriel N ; et nous notons $\circ$ le produit sur N associé au crochet de Lie $[\ ,]$ par la formule de Campbell-Hausdorff.

Soit $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications boréliennes de M dans N.

Nous distinguons deux cas :

1er cas. Supposons que les $\mu_n = \rho_n(\nu)$, $n\geq 1$, soient centrées. Dans ce cas nous choisissons la notion de degré usuelle sur $\mathbb{C}[N]$ et nous nous trouvons dans la situation envisagée en (3.1).

2ème cas. Plus généralement, supposons que, pour tout entier $n\geq 1$,

$$u_n = \int_{N/[N,N]} \pi(u)\, \mu_n(du) = \lambda_n\, u_1 \quad ,$$

avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$ et $\pi : N \to N/[N,N]$.

Nous sommes alors amené à étudier

$$\textstyle\sum_n(t) = \rho_n(X_1)\circ\cdots\circ\rho_n(X_{[nt]})\circ\{nt\}\rho_n(X_{[nt]+1})\circ(-(nt)u_n) \quad ,$$

qui s'écrit

$$\textstyle\sum_n(t) = Z_{n,1} \circ \mathrm{Ad}\, u_n(Z_{n,2})\circ\cdots\circ\mathrm{Ad}([nt]\,u_n)(Z_{n,[nt]+1})$$

en posant $\quad Z_{n,k} = \rho_n(X_k) \circ (-u_n) \quad , \qquad \forall k\geq 1$

$$\text{et} \quad \mathrm{Ad}x(u) = x\circ u\circ x^{-1} \qquad \forall u,x \in N.$$

Considérons le groupe G obtenu en munissant l'espace $N\times\mathbb{R}$ du produit, encore noté $\circ$, défini par

$(u,s)_{\circ}(v,t) = (u_{\circ}[\mathrm{EXp}\, \mathrm{Ad}(su_1)](v),\ s+t)$.

G est un groupe nilpotent simplement connexe et nous avons

$(\sum_n(t),([nt]+1)\lambda_n) = (Z_{n,1}\ ,\ \lambda_n)_{\circ}\cdots{}_{\circ}(Z_{n,[nt]+1}\ ,\ \lambda_n)$

Nous choisissons pour $\mathbb{C}[N\times\mathbb{R}] = \mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[\mathbb{R}]$ la notion de degré suivante : si $T = T_1 \otimes T_2 \in \mathbb{C}[N\times\mathbb{R}]$ avec $T_1 \in \mathbb{C}[N]$ et $T_2 \in \mathbb{C}[\mathbb{R}]$, nous posons

$$dgT = dg^{u_1}T_1 + 2dg\, T_2\ ,$$

où $dg^{u_1}T_1$ est défini en (1.12) et dgT_2 est le degré usuel d'un élément de $\mathbb{C}[\mathbb{R}]$.

Nous nous trouvons alors dans la situation envisagée en (3.1). Nous pouvons donc appliquer les résultats de la section 3.

Désignons par $b = \{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ une base de référence pour la notion de degré suivant u_1 sur $\mathbb{C}[N]$ et par $\{x_i\}_{1\leq i\leq p}$ le système de fonctions coordonnées associé à cette base.

Pour tout réel $t > 0$, posons

$$U_t^b(u) = \sum_{i=1}^{p} \frac{x_i(u)}{t^{dg^{u_1}x_i/2}}\ e_i \quad (u\in N)$$

Appelons G^b le groupe obtenu en munissant l'espace $N\times\mathbb{R}$ du produit ${}_{\circ}b$ défini, à partir du produit ${}_{\circ}$, par

$$(u,s)\ {}_{\circ}{}^{b}\ (v,t) = \lim_n U_n([U_{1/n}(u,s)]\ {}_{\circ}\ [U_{1/n}(v,t)]),$$

où $U_t(u,s) = (U_t(u),\frac{s}{t})$, $\forall t > 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\forall u \in N$.

Nous avons alors les théorèmes :

(4.5) <u>Théorème</u>.

Avec les notations de (4.4) supposons que les hypothèses i), ii), iii) et iv) de la proposition (3.4) soient vérifiées par le triplet $(P,\nu,\{\rho_n\}_{n\geq 1})$. Supposons en outre que la suite réelle $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ converge vers λ.

Alors pour tout $t > 0$, $U_n^b(\sum_n(t))$ converge en loi vers une mesure de probabilité ν_t. $(\nu_t,\varepsilon_{\lambda t})_{t>0}$ est un semi-groupe de convolution sur le groupe nilpotent G^b.

(4.6) Théorème.

Avec les notations de (4.4), lorsque, pour tout entier $n \geq 1$, $\rho_n = \rho$, les conclusions de théorème (4.5) s'appliquent dès que :

i) le couple (P,ν) vérifie l'hypothèse (H_2)

ii) $\tau(\mu) = \tau(\rho(\nu)) \geq 2$

En outre lorsque $\rho_n = \rho$, $\forall n \geq 1$, les mesures ν_t (des théorèmes (4.5) et (4.6)) sont absolument continues par rapport à la mesure de Haar de N excepté s'il existe un hyperplan affine h de $N/_{[N,N]}$ tel que

$$\sup_n (\mathbb{E}\,[h^2(\pi_o\rho(X_1)+\ldots+\pi_o\rho(X_n))]) < +\infty.$$

5.- PREUVE DES RESULTATS DE LA SECTION 2

A.- Preuve du théorème (2.2)

Nous montrons d'abord que de toute suite d'entiers, on peut extraire une sous-suite $\{n_k\}_{k\geq 1}$ telle que, pour tout $t > 0$, la suite des v.a. $\{S_{n_k}(t)\}_{k\geq 1}$, définie sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_\nu)$, converge en loi vers une mesure de probabilité ν_t.

Nous montrons alors que toute valeur d'adhérence $(\nu_t)_{t>0}$ du processus $S_n(t)$ vérifie la relation

$$\nu_t(f) = f(0) + \int_0^t \nu_s(Af)ds, \qquad \forall f \in C_K^2(N)$$

Autrement dit, le semi groupe de convolution sur $(N,\circ)$ de générateur infinitésimal A est la seule valeur d'adhérence du processus $S_n(t)$. D'où le résultat.

1ère étape : Relative compacité du processus $S_n(t)$

Nous avons besoin du lemme suivant :

(5.1) Lemme. Avec les notations de (2.1), supposons que :

i) pour tout $n \geq 1$, $l(\mu_n) \geq 2q$

ii) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^p$, $d_\alpha \leq 2q$, la suite réelle $\{n^{-\sup\{0,(d_\alpha/2)-1\}} \int_N |x^\alpha(u)|\mu(du)\}_{n\geq 1}$ est bornée.

Alors pour toute fonction f de $C_K(N)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $C > 0$, tel que pour tout entier n et tous réels positifs s et t, $s \leq t$

$$|\mathbb{E}[f(S_n(t)) - f(S_n(s))]| \leq \varepsilon + C(\mathbb{E}[||S_n(\frac{[n(t-s)]}{n})||^2] + \frac{1}{n})$$

Preuve du lemme

Soient $f \in C_K(N)$ et s,t deux réels positifs vérifiant $s \leq t$.

La fonction f est uniformément continue à gauche ; c'est-à-dire

$$\forall\varepsilon > 0 , \exists \alpha > 0, \forall v, ||v|| < \alpha, \sup_{u\in N} |f(u\circ v) - f(u)| < \varepsilon$$

Pour tout entier $n \geq 1$, nous avons

$$[n(t-s)] = [nt] - [ns] \qquad \text{ou} \qquad [nt] - [ns] - 1$$

Si $[n(t-s)] = [nt] - [ns]$, nous écrivons

$$S_n(t) = S_n(\frac{[ns]}{n}) \circ W_n(s,t) \circ V_n(t) ,$$

avec

$$W_n(s,t) = U_n(\rho_n(X_{[ns]+1}) \circ \cdots \circ \rho_n(X_{[nt]})) ,$$

(v.a. ayant la même loi que la v.a. $S_n(\frac{[n(t-s)]}{n})$, par rapport à $\mathbb{P}_\nu$),

$$V_n(t) = \{nt\}\, U_n(\rho_n(X_{[nt]+1})) .$$

Nous avons

$$|\mathbb{E}_\nu[f(S_n(t)) - f(S_n(s))]| \leq \mathbb{E}_\nu[|f(S_n(t)) - f(S_n(\frac{[ns]}{n}) \circ W_n(s,t))|] + \\ + \mathbb{E}_\nu[|f(S_n(\frac{[ns]}{n}) \circ W_n(s,t)) - f(S_n(\frac{[ns]}{n}))|] + \mathbb{E}_\nu[|f(S_n(s)) - f(S_n(\frac{[ns]}{n}))|]$$

Par suite

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \alpha > 0$, $\forall n \geq 1$, $\forall 0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_\nu[f(S_n(t)) - f(S_n(s))]| &\leq 3\varepsilon + 2||f||_\infty(\mathbb{P}_\nu[||W_n(s,t)|| > \alpha] + \mathbb{P}_\nu[||V_n(t)|| > \alpha] \\ &\qquad + \mathbb{P}_\nu[||V_n(s)|| > \alpha]) \\ &\leq 3\varepsilon + \frac{2||f||_\infty}{\alpha^2}(\mathbb{E}_\nu[||S_n(\frac{[n(t-s)]}{n})||^2] \\ &\qquad + 2\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n^{d_i}} \int_N x_i^2(u)\, \mu_n(du)) \end{aligned}$$

Le résultat cherché se déduit alors de l'hypothèse ii).

Si $[n(t-s)] = [nt] - [ns] - 1$, nous écrivons

$$S_n(t) = S_n(\frac{[ns]+1}{n}) \circ W_n(s,t) \circ V_n(t),$$

avec

$$W_n(s,t) = U_n(\rho_n(X_{[ns]+2}) \circ \cdots \circ \rho_n(X_{[nt]})) ,$$

$$V_n(t) = \{nt\}\, U_n(\rho_n(X_{[nt]+1})) ;$$

et nous raisonnons comme précédemment...

(5.2) <u>Corollaire</u>. *Sous les hypothèses du lemme (5.1), nous avons*

$\forall f \in C_k(N)$, $\forall t > 0$, $\lim_n |\mathbb{E}_\nu[f(S_n(t)) - f(S_n(\frac{[nt]}{n}))]| = 0$

Si en outre l'hypothèse ii) du théorème (2.2) est satisfaite, alors

$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall f \in C_K(N), \exists\, C > 0, \quad \forall 0 \leq s \leq t$

$$\lim_n \sup |\mathbb{E}_\nu[f(S_n(t)) - f(S_n(s))]| \leq \varepsilon + C\Big(\sum_{i=1}^{p} \sigma(x_i^2)(t-s)^{d_i}\Big) .$$

Nous sommes à présent en mesure de prouver la relative compacité du processus $S_n(t)$.

Soit $\{t_i\}_{i \geq 1}$ une suite dense dans $\mathbb{R}_+$. Puisque, pour tout $t > 0$, $\sup_n \mathbb{E}_\nu[\,||S_n(\frac{[nt]}{n})||^2] < +\infty$ (hypothèse ii) du théorème (2.2)), il est possible, à partir de toute suite d'entiers, de construire, par le procédé diagonal, une sous-suite $\{n_k\}_{k \geq 1}$ telle que, pour tout $i \geq 1$, la suite de v.a. $\{S_{n_k}(\frac{[n_k t_i]}{n_k})\}_{k \geq 1}$ converge en loi vers une mesure de probabilité ν_{t_i}. Du corollaire (6.2), il résulte alors d'une part, que pour tout $i \geq 1$, la suite de v.a. $\{S_{n_k}(t_i)\}_{k \geq 1}$ converge en loi vers ν_{t_i} ; et d'autre part que

(*) $\forall \varepsilon > 0, \forall f \in C_K(N), \exists\, C > 0, \quad \forall i,j \geq 1$

$$|\nu_{t_i}(f) - \nu_{t_j}(f)| \leq \varepsilon + C\Big(\sum_{l=1}^{p} \sigma(x_l^2)\, |t_i - t_j|^{d_l}\Big).$$

Soient t un réel positif et $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$ une sous-suite de la suite $\{t_k\}_{k \geq 1}$ convergeant vers t. De (*) il résulte que la suite de mesure de probabilité $\{\nu_{\tau_k}\}_{k \geq 1}$ converge vaguement vers une mesure de probabilité ν_t , indépendante du choix de la sous-suite $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$. [On notera que pour tout $f \in C_K(N)$, $\{\nu_{\tau_k}(f)\}_{k \geq 1}$ est une suite de Cauchy] .

Soient $f \in C_K(N)$ et ε un réel > 0. Choisissons un entier l tel que

$|\nu_{\tau_l}(f) - \nu(f)| < \varepsilon$ et

$C(\sum_{i=1}^{p} \sigma(x_i^2)\, |t-\tau_l|^{d_i}) < \varepsilon$, nous avons :

$$\lim_k \sup |\mathbb{E}[f(S_{n_k}(t))] - \nu_t(f)| \leq \lim_k \sup |\mathbb{E}[f(S_{n_k}(t)) - f(S_{n_k}(\tau_l))]| + \varepsilon \leq 3\varepsilon$$

(d'après le corollaire (5.2)).

Ce qui prouve que la suite de v.a. $\{S_n(t)\}_{n \geq 1}$ converge en loi vers ν_t.

2ème étape :

Désignons par $\{n_k\}_{k\geq 1}$ une suite d'entiers telle que, pour tout $t > 0$, la suite de v.a. $\{S_{n_k}(t)\}_{k\geq 1}$ converge en loi vers une mesure de probabilité ν_t. Nous allons montrer que

$$\forall f \in C_K^2(N),\ \nu_t(f) = f(0) + \int_0^t \nu_s(Af)ds.$$

En posant $S'_k(t) = S_{n_k}(t)$, on se ramène au cas où $\{n_k\}_{k\geq 1}$ est la suite des entiers naturels. Pour alléger l'écriture, nous nous plaçons donc dans cette situation.

Soit f un élément de $C_K^2(N)$. D'après la formule de Taylor, pour tous u et $v \in N$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(u\circ v) &= f(u) + D_v f(u) + \frac{1}{2} D_v^2 f(u\circ\theta v) \\ &= f(u) + \sum_{l=1}^{p} x_l(u)\, D_l f(u) + \frac{1}{2} \sum_{1\leq l,k\leq p} (x_l\, x_k)(u) D_l\, D_k\, f(u\circ\theta v) \end{aligned}$$

Choisissons une partition $t_0 = 0 < t_1 <\ldots< t_q = t$ de $[0,t]$ et écrivons pour tout entier naturel n,

$$f(S_n(t)) - f(0) = f(S_n(t)) - f(S_n(\frac{[nt]}{n})) + \sum_{j=1}^{q} [f(Z_{n,j}) - f(Z_{n,j-1})]$$

avec $Z_{n,j} = S_n(\frac{[nt_j]+\varepsilon_j(n)}{n})$, $j \in \{1,\ldots,q\}$, où

$\varepsilon_q(n) = 0$ et les $\varepsilon_j(n)$, $j \in \{1,\ldots,q-1\}$, sont choisis parmi les entiers $\{-1,0,1\}$ de façon que les v.a.

$$W_{n,j} = (Z_{n,j-1})^{-1} \circ Z_{n,j} \quad \text{et} \quad S_n(\frac{[n(t_j-t_{j-1})]}{n})$$

possèdent la même loi par rapport à $\mathbb{P}_\nu$.

D'après la formule de Taylor, nous avons

$$f(Z_{n,j}) - f(Z_{n,j-1}) = \alpha_j(n) + \frac{1}{2}\beta_j(n),$$

avec

$$\alpha_j(n) = \sum_{l=1}^{p} x_l(W_{n,j})\, D_l f(Z_{n,j-1}) + \frac{1}{2} \sum_{1\leq l,k\leq p} (x_l\, x_k)(W_{n,j})\, D_l\, D_k f(Z_{n,j-1})$$

et

$$\beta_j(n) = \sum_{1\leq l,k\leq p} (x_l\, x_k)(W_{n,j})\, [D_l\, D_k f(Z_{n,j-1} \circ \theta W_{n,j}) - D_l\, D_k f(Z_{n,j-1})]$$

a) Pour $l,k \in \{1,\dots,p\}$ et pour $h \in C_K(N)$, nous avons

$$\limsup_n |\mathbb{E}_\nu[x_l(W_{n,j})\ h(Z_{n,j-1})]| \leq ||h||_\infty \lim_n (\mathbb{E}_\nu[x_l^2(W_{n,j})])^{1/2}$$

$$\leq ||h||_\infty\ (\sigma(x_l^2)(t_j-t_{j-1}))^{1/2}$$

et de même,

$$\limsup_n |\mathbb{E}_\nu[(x_l\ x_k)(W_{n,j})\ h(Z_{n,j-1})]| \leq ||h||_\infty\ (\sigma(x_l^2)(t_j-t_{j-1})^{d_l})^{1/2}$$

$$(\sigma(x_k^2)(t_j-t_{j-1})^{d_k})^{1/2}$$

b) Pour $\alpha \in \mathbb{N}^p$ avec $d_\alpha \leq 2$ et pour $h \in C_K(N)$,

posons

$$\gamma_j(n) = |\mathbb{E}_\nu[x^\alpha(W_{n,j})\ h(Z_{n,j-1})] - \sigma(x^\alpha)(t_j-t_{j-1})^{d_\alpha/2}\ \mathbb{E}_\nu[h(Z_{n,j-1})]|$$

nous avons

$$\gamma_j(n) = |\mathbb{E}_\nu[(\mathbb{E}_{X_{[nt_{j-1}]}}(x^\alpha(S_n(\frac{[n(t_j-t_{j-1})]}{n}))) - \sigma(x^\alpha)(t_j-t_{j-1})^{d_\alpha/2})\ h(Z_{n,j-1})]$$

(propriété de Markov)

$$\leq ||h||_\infty \int_N |\mathbb{E}_u[x^\alpha(S_n(\frac{[n(t_j-t_{j-1})]}{n}))] - \sigma(x^\alpha)(t_j-t_{j-1})^{d_\alpha/2}|\nu(du)$$

D'après l'hypothèse iii) du théorème (2.2), on en déduit que $\lim_n \gamma_j(n) = 0$; et par suite, (lemme (5.1)),

$$\lim_n \mathbb{E}_\nu[x^\alpha(W_{n,j})\ h(Z_{n,j-1})] = \sigma(x^\alpha)(t_j-t_{j-1})^{d_\alpha/2}\ \nu_{t_{j-1}}(h)\ .$$

c) Pour $l,k \in \{1,\dots,p\}$, avec $d_l = d_k = 1$, et pour $h \in C_k(N)$, posons
$\delta_j(n) = \mathbb{E}_\nu[(x_l\ x_k)(W_{n,j})\ [h(Z_{n,j-1} \circ \theta W_{n,j}) - h(Z_{n,j-1})]]$.

D'après l'uniforme continuité à gauche de h, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$|\delta_j(n)| \leq \varepsilon\, \mathbb{E}_\nu[(x_l\ x_k)(W_{n,j})] + 2||h||_\infty \mathbb{E}_\nu[(x_l\ x_k)(W_{n,j})\ 1_{\{||W_{n,j}||>\alpha\}}]$$

$$\leq \varepsilon\, \mathbb{E}_\nu[(x_l\ x_k)(W_{n,j})] + 2||h||_\infty [\mathbb{E}_\nu((x_l^2\ x_k^2)(W_{n,j}))]^{1/2} (\mathbb{P}_\nu[||W_{n,j}||>\alpha])^{1/2}$$

$$\leq \varepsilon\, \mathbb{E}_\nu[(x_l\ x_k)(W_{n,j})] + 2||h||_\infty \alpha^{-2} [\mathbb{E}_\nu((x_l^2\ x_k^2)(W_{n,j}))]^{1/2} [\mathbb{E}_\nu[||W_{n,j}||^2]]^{1/2}.$$

Par suite pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des réels positifs C_1 et C_2 tels que, pour toute partition $\mathcal{P} = \{t_i : i \in \{1,\dots,q\}\}$ de $[0,t]$,

$$\limsup_n |\delta_j(n)| \leq \varepsilon\, C_1(t_j - t_{j-1}) + C_2(t_j - t_{j-1})^{3/2} .$$

D'après a), b) et c), on en déduit que :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des réels positifs C'_1 et C'_2 tels que, pour toute partition $\mathcal{P} = \{t_i : i \in \{1,\dots,q\}\}$ de $[0,t]$,

$$|\nu_t(f) - f(0) - \sum_{j=1}^{q} (t_j - t_{j-1})\, \nu_{t_{j-1}}(Af)| \leq \varepsilon C'_1 t + C'_2 \sum_{j=1}^{q} (t_j - t_{j-1})^{3/2} .$$

On obtient alors le résultat cherché en faisant tendre le pas de la partition vers zéro et en tenant compte que pour tout $h \in C_K(N)$, la fonction $t \to \nu_t(f)$ est continue (corollaire (5.2)) donc intégrable au sens de Riemann.

B.- Preuve du théorème (2.4)

Tout ce qui a été fait pour prouver le théorème (2.2) reste valable, excepté le point c) de la 2ème étape, qui utilise l'existence de moments d'ordre 4.

Cependant si nous posons

$$\phi(t) = \limsup_n \frac{1}{t} \mathbb{E}_\nu[\, ||S_n(\tfrac{[nt]}{n})||^2\, 1_{\{||S_n(\frac{[nt]}{n})|| > \alpha\}}]$$

on voit facilement que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\limsup_n |\delta_j(n)| \leq \varepsilon\, \sigma_{1,k}(t_j - t_{j-1}) + 2||h||_\infty\, (t_j - t_{j-1})\, \phi(t_j - t_{j-1})$$

et l'assertion (A_2) permet de conclure.

C.- Enfin les corollaires se déduisent facilement des théorèmes en remarquant que, lorsque $\rho_n = \rho$, $\forall n \geq 1$, nous avons

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^p \quad , \qquad x^\alpha(S_n(\tfrac{[nt]}{n})) = (\tfrac{[nt]}{n})^{d_\alpha/2}\; x^\alpha(S_{[nt]}(1)).$$

6.- PREUVE DES RESULTATS DE LA SECTION 3

A) Preuve de la proposition (3.4)

Si G_1 (resp. G_2) est un espace vectoriel de fonctions sur N (resp.sur M), nous notons $G_1 \otimes G_2$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions $f_1 \otimes f_2$, ($f_1 \in G_1$, $f_2 \in G_2$), définies par

$$f_1 \otimes f_2(u,x) = f_1(u)\ f_2(x), \quad (u,x) \in N \times M.$$

Nous identifions G_1 et G_2 à des s.e.v. de $G_1 \otimes G_2$.

Pour simplifier l'écriture, nous notons respectivement P et ν les opérateurs $\tilde{P}$ et $\tilde{\nu}$.

On vérifie facilement le résultat suivant.

(6.1) Lemme. *Pour tout entier $n \geq 1$, nous avons :*

$$i)\quad Q_n(\mathbb{C}_k[N] \otimes E_\ell) \subset \sum_{s=0}^{k} \mathbb{C}_s[N] \otimes E_{\ell+(k-s)}, \quad (\ell+k \leq m)$$

$$ii)\quad (Q_n - P)(\mathbb{C}_k[N] \otimes E_\ell) \subset \sum_{s=0}^{k-1} \mathbb{C}_s[N] \otimes E_{\ell+(k-s)}, \quad (\ell+k \leq m)$$

$$iii)\quad \nu(Q_n - P)\ \nu(\mathbb{C}_k[N] \otimes E_\ell) = \nu(Q_n - P)(\mathbb{C}_k[N]) \subset \mathbb{C}_{k-2}[N]\ , \quad (k,\ell \leq m)$$

(6.2) Pour tout entier naturel $k \leq m$, posons

$$F_k = \sum_{s=0}^{k} \mathbb{C}_s[N] \times E_{k-s}\ ;$$

d'après le lemme précédent, les espaces F_k, $k \leq m$, sont stables par les opérateurs Q_n, $n \geq 1$.

Si $f_1 \times f_2$ est un élément de $\mathbb{C}[N] \times E_m$, nous appelons "degré de f" le degré du polynôme f_1. Nous définissons alors le degré d'un élément de F_k comme étant le degré de son terme de plus haut degré.

(6.3) L'opérateur $(P-\nu)$ est quasi-compact, sans valeur propre 1, sur les espaces E_k, $0 \le k \le m-1$. Nous pouvons donc écrire :

$$P = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \pi_i + \pi_{s+1}$$

où $\lambda_0 = 1$, $\pi_0 = \nu$; pour $i \in \{1,\dots,s\}$, $|\lambda_i| = 1$ avec $\lambda_i \neq 1$ et π_i est le projecteur sur l'espace propre, de dimension finie, associé à la valeur propre λ_i ; π_{s+1} est un opérateur de rayon spectral < 1 sur les espaces E_k, $0 \le k \le m-1$; et $\pi_i \pi_j = 0$, $\forall i,j \quad \{0,\dots,s+1\}$.

L'opérateur $(I - (P-\nu))$ est inversible et

$$(I - (P-\nu))^{-1} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\pi_i}{1-\lambda_i} + \sum_{k \ge 0} \pi_{s-1}^{k} \quad \text{avec la convention } \pi_{s+1}^{0} = I - \sum_{i=0}^{s} \pi_i .$$

(6.4) Cela dit, en écrivant

$$Q_n = (Q_n - P) + \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \pi_i + \pi_{s+1} ,$$

nous obtenons, pour tout polynome T de degré $\le m-1$,

$$(*) \quad Q_n^{[nt]} T = \sum_{\ell=1}^{dgT} \sum_{i \in \{0,\dots,s+1\}^{\ell}} A_{\ell}([nt],n,i) ,$$

où pour tous entiers k,n et tout $i \in \{0,\dots,s+1\}^{\ell}$,

$$A_{\ell}(k,n,i) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{N}^{\ell} : \alpha_1 + \dots + \alpha_{\ell} \le k\}} \lambda_1^{\beta_1} \dots \lambda_s^{\beta_s} B_{\ell}(n,i,\alpha)$$

avec $\beta_k = \sum_{\{j \in \{1,\dots,\ell\} : i_j = k\}} \alpha_j$, $\forall k \in \{1,\dots,s\}$,

$$B_{\ell}(n,i,\alpha) = \pi_{i_1}^{\alpha_1} (Q_n - P) \pi_{i_2}^{\alpha_2} \dots \pi_{i_{\ell}}^{\alpha_{\ell}} (Q_n - P) T .$$

[On convient que $\pi_j^0 = \pi_j$, $\forall j \in \{1,\dots,s\}$].

Lorsque T est de degré m, la relation (*) n'est pas forcément vraie car $(P-\nu)$ n'est pas supposé être quasi-compact sur E_m. Cependant dans ce cas on s'intéresse seulement à la quantité $\nu Q_n^{[nt]} T = \sum_{\ell=1}^{dgT} \sum_{i \in \{0\} \times \{0,\dots,s+1\}^{\ell-1}} A_{\ell}([nt],n,i)$

si bien que l'on peut considérer que cette relation est vérifiée même si T est de degré m.

Admettons un instant le lemme suivant.

(6.5) Lemme

Appelons $r(i)$ le nombre de zéro du ℓ-uple i. Alors pour $r(i) \geq dgT/2$, $B_\ell(n,i,\alpha) = 0$ excepté si $dgT = 2r(i)$, $i_1 = 0$ et $M(i) = \mathrm{card}\{j\in\{1,\dots,\ell-1\} : i_j$ et $i_{j+1} \neq 0\} = 0$.

On en déduit que $A_\ell(k,n,i) = 0$ pour $r(i) \geq [\frac{dgT}{2}] + 1$.

D'autre part, puisque

$$\pi_i^k = \pi_i \ , \quad \forall i \in \{0,\dots,s\} \ , \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ ,$$

$B_\ell(n,i,\alpha)$ ne dépend de $\alpha \in \mathbb{N}^\ell$ que pour les composantes $\alpha_j, j\in\{1,\dots,\ell\}$, telles que $i_j = s+1$. Lorsque $r(i) \leq [\frac{dgT}{2}]$, nous avons donc

$$A_\ell(k,n,i) = \sum_{m=0}^{k} C_1(n,i,m) \sum_{m'=0}^{k-m} \xi_{r(i)}(m')\ \tau(k-m-m')$$

en posant

$$\xi_\ell(k) = \mathrm{card}\{\alpha \in \mathbb{N}^\ell : \alpha_1+\dots+\alpha_\ell \leq k\}, \qquad \forall \ell,k \in \mathbb{N} \ .$$

$$\tau(k) = \sum_{\{\beta\in\mathbb{N}^s : \beta_1+\dots+\beta_s=k\}} \lambda_1^{\beta_1} \dots \lambda_s^{\beta_s} \ , \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ .$$

et

$$C_\ell(n,i,k) = \sum_{\{\beta_{s+1}\leq k\}} B_\ell(n,i,\alpha) \ , \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ ,$$

avec

$$\beta_{s+1} = \sum_{\{j\in\{1,\dots,\ell\} : i_j = s+1\}} \alpha_j$$

En utilisant les deux lemmes élémentaires suivants :

(6.6.) Lemme

Pour tout entier naturel k,

$$\tau(k) = -\sum_{i=1}^{s} [\lambda_i^{k+1} / Q'(1/\lambda_i)]$$

où $Q(x) = \prod_{i=1}^{s} (1-\lambda_i x)$.

(6.7.) Lemme

Pour tout entier naturel k, tout polynôme réel P et tout complexe $\lambda \neq 1$,

$$\sum_{m=0}^{k} P(m)\, \lambda^{k-m} = \frac{1}{1-\lambda} [P(k+1) + P_\lambda(k+1)], \quad \text{avec } dg\, P_\lambda < dg\, P\ .$$

nous obtenons,

$$(**) \quad A_\ell(k,n,i) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{s} (1-\lambda_j)} \sum_{m=0}^{k} C_\ell(n,i,m)\, \xi_{r(i)}(k+1-m)$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} \frac{\lambda_j}{(1-\lambda_j) Q'(1/\lambda_j)} \sum_{m=0}^{k} C_\ell(n,i,m)\, P_{\lambda_j}(k+1-m)$$

avec $dg\, P_{\lambda_j} < dg\, \xi_{r(i)} = r(i) - 1$.

Comme π_{s+1} est un opérateur de rayon spectral < 1 sur les espaces E_k, $0 \le k \le m-1$, il s'ensuit que, pour tout élément u de N

$$\lim_m \sup_n ||C_1(n,i,m)(u,\cdot) - D(n,i)(u,\cdot)||_{m/dg\,T} = 0\ ,$$

où $D(n,i) = \Gamma_{i_1}(Q_n - P)\Gamma_{i_2} \dots \Gamma_{i_1}(Q_n - P)T$,

avec $\Gamma_j = \pi_j$ si $j \in \{0,\dots,s\}$

$$\Gamma_{s+1} = \sum_{k \ge 0} \pi^k_{s+1}$$

D'autre part, admettons un instant le lemme suivant.

(6.8) Lemme

Pour $r(i) < dgT/2$, *pour* $u \in N$,

$$\lim_n \frac{1}{n^{(dgT/2) - r(i)}} ||D(n,i)(u,\cdot)||_{m/dgT} = 0$$

On en déduit que : si dg T est impair

$$\lim_n \frac{1}{n^{dgT/2}} Q_n^{[nt]} T = 0 \quad ;$$

si dg T est pair.

$$\lim_n \frac{1}{n^{dgT/2}} Q_n^{[nt]} T = \lim_n \sum_{\ell=dgT/2}^{dgT} \sum_{i\in J} \frac{A_\ell([nt],n,i)}{n^{dgT/2}}$$

avec $J = \{ i\in\{0,\dots,s+1\}^\ell : 2r(i) = dgT \ , \ i_1 = 0 \ , \ M(i) = 0 \}$

$$= \frac{t^{dgT/2}}{(dgT/2)!} \lim_n \Big(\sum_{\ell=dgT/2}^{dgT} \sum_{i\in J} D(n,i)\Big)$$

$$= \frac{t^{dgT/2}}{(dgT/2)!} \lim_n (L_n^{dgT/2} T)$$

$$= \sigma(T) \frac{t^{dgT/2}}{(dgT/2)!} .$$

La démonstration de la proposition (3.4) est donc ramenée à celle des lemmes (6.5) et (6.8).

(6.9) <u>Preuve du lemme</u> (6.5)

Nous avons besoin du lemme suivant.

<u>Lemme</u>.

Pour $i = (i_1,\dots,i_\ell) \in \{0,\dots,s+1\}^\ell$ *, posons* $N(i) = card\{j\in\{1,\dots,\ell-1\} : i_j = i_{j+1} = 0\}$.

Alors nous avons

$$N(i) = 2r(i) - \ell + M(i) + \tilde{i}_1 + \tilde{i}_\ell - 1$$

avec $\tilde{i}_j = \begin{cases} 1 & si \quad i_j \neq 0 \\ 0 & si \quad i_j = 0 \end{cases} \ , \ j \in \{1,2\}$.

Preuve

Soient $A = \{j\in\{1,\dots,\ell-1\} : i_j=0\}$, $B = \{j\ \{1,\dots,\ell-1\} : i_{j+1} = 0\}$.

Nous avons

$$N(i) = \text{card}(A\cap B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A\cup B)$$

$$= [r(i) - (1-\tilde{i}_\ell)] + [r(i) - (1-\tilde{i}_1)] - [(\ell-1) - M(i)]$$

$$= 2r(i) - 1 + M(i) + \tilde{i}_1 + \tilde{i}_\ell - 1 .$$

ceci dit, d'après le lemme (6.1), nous avons

$$\text{dg } B_\ell(n,i,\alpha) \le \text{dg } T - \ell - N(i) - (1-\tilde{i}_\ell)$$
$$\le \text{dg } T - 2r(i) - \tilde{i}_1 - M(i).$$

D'où le lemme (6.5).

(6.10) Preuve du lemme (6.8)

$D(n,i)$ est une somme d'un nombre fini (indépendant de n et de i) de termes de la forme :

$$T_o \otimes \Gamma_1 [f(n)] = T_o \otimes \Gamma_1 [P[(T_1 o\rho_n)\dots [\Gamma_\ell [P(T_\ell o\rho_n)]]\dots]] ,$$

avec $\sum_{k=0}^{\ell} dgT_k \le dgT$, $dgT_k \ge 1$ pour $k\in\{1,\dots,\ell\}$.

D'autre part, dans $\{1,\dots,\ell\}$, il y a $r(i)$ entiers j tels que $\Gamma_j = \nu$; nous notons $\sigma(1),\dots, \sigma(2(i))$ ces entiers. $f(n)$ s'écrit alors :

$$f(n) = f_o(n)\ \nu(f_1(n)\dots \nu(f_{r(i)}(n)) ,$$

où

$$f_o(n) = \begin{cases} 1 , & \text{si } \Gamma_1 = \nu \text{ (i.e. } \sigma(1) = 1) \\ P[(T_1 o\rho_n)[\ \dots[\Gamma_{\sigma(1)-1}(T_{\sigma(1)-1} o\rho_n)]\dots]] , & \text{si } \Gamma_1 \ne \nu \end{cases}$$

et pour tout $k \in \{1,\dots, r(i)\}$,

$$f_k(n) = P[(T_{\sigma(k)} o\rho_n)[\ \dots [\ \Gamma_{\sigma(k+1)-1}(T_{\sigma(k+1)-1} o\rho_n)]\dots]] .$$

Lorsque dg $f_k(n) = \sum_{\sigma(k) \leq j \leq \sigma(k+1)-1} dgT_j = 1$, alors $\nu(f_k) = 0$,

car la notion de degré considérée sur $C[\mathbb{N}]$ est adaptée aux mesures $\mu_n = \rho_n(\nu)$, $n \geq 1$.

Lorsque dg $f_k(n) \geq 2$, nous avons

$$|\nu(f_k(n)| \leq C \prod_{j=\sigma(k)}^{\sigma(k+1)-1} \| A_j \|_{\mathbb{L}^{m/q_j}(N,\mu_n)}$$

où les q_j sont des entiers tels que

$$\sum_{j=\sigma(k)}^{\sigma(k+1)-1} q_j = m \ , \ q_j \geq dg\ T_j \text{ et } \frac{m\ dg\ T_j}{q_j} \geq 2.$$

Le lemme (6.8) résulte alors des hypothèses iii) et iv) de la proposition (3.4).

La démonstration de la proposition (3.4) est ainsi achevée. Pour prouver le théorème (3.5) nous aurons besoin de la remarque suivante.

(6.11) Remarque. Reprenons les notations de (3.1). Appelons Q_n^b , $n \geq 1$, les probabilités de transition sur NxM définies par

$$Q_n^b\ f(u,x) = P\ \phi_u^b(x) \ ,$$

où $\phi_u^b(x) = f(u \circ b\ \rho_n(y),y)$, $(y \in M)$.

Q_n^b est définie de la même façon que Q_n , en remplaçant le produit $\circ$ par $\circ b$. De même appelons L_n^b l'opérateur défini par

$$L_n^b = \nu(Q_n^b - P)\nu + \nu(Q_n^b - P)(I-(P-\nu))^{-1}(Q_n^b - P)\nu$$

Supposons que le triplet $(P,\nu,\{\rho_n\}_{n \geq 1})$ vérifie les hypothèses i),ii),iii) et iv) de la proposition (3.4). D'après cette proposition, les suites de fonctions polynômes

$\{\frac{1}{n^{dgT/2}}\ \nu\ Q_n^{[nt]}T\}_{n \geq 1}$ et $\{\frac{1}{n^{dgT/2}}\ \nu\ (Q_n^b)^{[nt]}T\}_{n \geq 1}$ convergent respectivement vers

$$\frac{t^{dgT/2}}{(dgT/2)!}\lim_n (L_n^{dgT/2}T) \quad \text{et} \quad \frac{t^{dgT/2}}{(dgT/2)!}\lim_n ((L_n^b)^{dgT/2}T)$$

lorsque dgT est pair.

En fait ces deux limites sont égales. En effet pour tout $T \in C_m[N]$ et tout $n \geq 1$, on vérifie facilement que

$$dg(Q_n - Q_n^b)T \leq dgT - 2$$

et $$dg\ \nu(Q_n - Q_n^b)T \leq dgT - 3 \quad ;$$

par suite $$dg(L_n - L_n^b)T \leq dgT - 3$$

et $$L_n^{dgT/2}T = (L_n^b)^{dgT/2}\ T\ , \text{ si } dgT \text{ est pair.}$$

B.- Preuve du théorème (3.5)

Lorsque $\circ = \circ^b$, le théorème (3.5) se déduit, via la proposition (3.4), du théorème (2.2).

Dans le cas général, on se ramène au cas $\circ = \circ^b$ grâce à la proposition suivante.

(6.12) Proposition

Posons

$S_n^b(t) = U_n^b\,[\rho(X_1)\circ^b \ldots \circ^b \rho(X_{nt})\circ^b \{nt\}\,\rho(X_{nt+1})]$. *Alors pour tout $t > 0$, la suite de v.a. $\{S_n(t) - S_n^b(t)\}_{n \geq 1}$ converge vers zéro dans $\mathbb{L}^2$.*

Considérons le produit direct H des groupes $(N, \circ^b)$. Munissons $\mathbb{C}[H] = \mathbb{C}[N\times N]$ de la notion de degré suivante : si $T = T_1 \otimes T_2 \in \mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[N]$, alors $dgT = dgT_1 + dgT_2$. Appelons $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ les applications boréliennes de M dans H définies par

$$\phi_n(u,v) = (\rho_n(u), \rho_n(v)), \qquad (u,v) \in N\times N\ .$$

Le triplet $(P\otimes P,\ \nu\otimes\nu, \{\phi_n\}_{n\geq 1})$ vérifie les hypothèses de la proposition (3.4).

La proposition (6.12) est alors une conséquence immédiate de la remarque (6.11).

C.- Preuve de la proposition (3.6)

Soit $q \in [1,+\infty[$. P vérifie l'hypothèse (H_q) si l'on a :

$$Pf = \nu(f) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \, \nu(\psi_i f) \, \phi_i + Qf \quad , \quad (f \in \mathbb{L}^q) ,$$

où pour $i \in \{1,\ldots,s\}$, $\phi_i \in \mathbb{L}^q$, $\psi_i \in \mathbb{L}^{q'}$ avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $|\lambda_i| = 1$, $\lambda_i \neq 1$; Q est un opérateur de rayon spectral < 1 sur $\mathbb{L}^q$; $\nu(\psi_i \, \phi_j) = \delta_i^j$ et $Q\phi_i = 0$, $\forall i,j \in \{0,\ldots,s\}$, avec $\phi_0 = \psi_0 = 1$.

Pour $\lambda \in \{1,\lambda_1,\ldots,\lambda_s\}$ et $f \in \mathbb{L}^q$, nous avons

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \lambda^{-k} P^k f \xrightarrow{\mathbb{L}^q} \sum_{\{i:\lambda_i=\lambda\}} \nu(\psi_i f)\phi_i \quad .$$

En prenant une sous-suite convergeant ν-p.s., on obtient

$$\Big\| \sum_{\{i:\lambda_i=\lambda\}} \nu(\psi_i f)\phi_i \Big\|_\infty \leq ||f||_\infty \quad , \quad \forall f \in \mathbb{L}^\infty$$

Ce qui entraîne, de façon évidente, que les ϕ_i, $i \in \{1,\ldots,s\}$, appartienne à $\mathbb{L}^\infty$.

De même, en remplaçant P par son dual, on obtient que les ψ_i , $1 \leq i \leq s$, appartiennent à $\mathbb{L}^\infty$.

On en déduit donc que, pour tout $p \in [1,+\infty]$, Q opère sur $\mathbb{L}^p$ et

$$\sup_{k \in \mathbb{N}^*} ||Q^k||_p \leq 2 + \sum_{i=1}^{s} ||\psi_i||_\infty \, ||\phi_i||_\infty$$

D'après un théorème de convexité de Riesz, nous savons que pour tout $k \geq 1$, l'application

$$p \in [1+\infty] \rightarrow \mathrm{Log}\, ||Q^k||_{1/p}$$

est une fonction convexe.

Comme Q est un opérateur de rayon spectral < 1 sur $\mathbb{L}^q$, il s'ensuit que Q est un opérateur de rayon spectral < 1, sur $[1,+\infty]$ si $q = 1$, sur $]1,+\infty[$ si $q \in]1,+\infty[$.

Les hypothèses (H_p), $1<p<+\infty$, sont donc équivalentes ; et l'hypothèse (H_1) implique l'hypothèse (H_2).

Supposons à présent que P vérifie l'hypothèse (H_∞). Alors, nous avons

$$Pf = \nu(f) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \, \nu_i(f) \, \phi_i + Qf \quad , \quad (f \in \mathbb{L}^\infty),$$ avec des notations évidentes.

De

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} \, P^k \, f \xrightarrow{\mathbb{L}^\infty} \sum_{\{i:\lambda_i=\lambda\}} \nu_i(f) \, \phi_i \quad ,$$

il résulte que

$$\Big|\Big| \sum_{\{i:\lambda_i=\lambda\}} \nu_i(f) \, \phi_i \Big|\Big|_1 \leq ||f||_1 \; ,$$

qui montre que les formes linéaires continues ν_i sur $\mathbb{L}^\infty$ sont aussi des formes linéaires continues sur $\mathbb{L}^1$.

Par suite, nous avons

$$\nu_i(f) = \nu(\psi_i f),$$

avec $\psi_i \in \mathbb{L}^\infty$.

L'assertion "$H_\infty \Rightarrow H_2$" résulte alors du théorème de convexité de Riesz.

D.- <u>Preuve du théorème</u> (3.7)

Le théorème (3.7) se déduit du théorème (3.5) par un procédé de troncature déjà utilisé dans [ ].

Pour tout entier $n \geq 1$, désignons par α_n l'élément de N défini par

$$\forall i \in \{1,\ldots,p\} \quad , \quad x_i(\alpha_n) = \begin{cases} 0, & \text{si } d_i \geq 2 \\ -\dfrac{\int_{\{\phi \leq \sqrt{n}\}} x_i \, d\mu}{\mu(\{\phi > \sqrt{n}\})} \quad , & \text{si } d_i = 1 \end{cases}$$

Nous posons alors, pour tout $n \geq 1$,

$$T_n(u) = \begin{cases} u & \text{si } \phi(u) \leq \sqrt{n} \\ \alpha_n & \text{si } \phi(u) > \sqrt{n} \end{cases} \qquad (u \in N)$$

$$\rho_n(u) = T_n \circ \rho(u) \quad , \qquad (u \in N) \quad ,$$

et

$$\sum_n(t) = \rho_n(X_1)\circ\ldots\circ\rho_n(X_{[nt]}) \circ \{nt\}\rho_n(X_{[nt]+1}) \ , \ (t>0).$$

Les mesures de probabilité $\{\rho_n(\nu)\}_{n\geq 1}$ possèdent des moments de tous ordres et sont adaptées à la notion de degré considérée sur C[N].

D'autre part, les hypothèses iii) et iv) de la proposition (3.4) sont vérifiées par les mesures $\mu_n = \rho_n(\nu)$. (Voir [3] lemmes (4.11),(3.2) et (3.3)).

Puisque le couple (P,ν) vérifie l'hypothèse (H_2), les hypothèses du théorème (3.5) sont donc vérifiées par le triplet $\{P,\nu,\{\rho_n\}_{n\geq 1}\}$.

Le théorème (3.7) résulte alors du théorème (3.5), appliqué à la suite de v.a. $\{U_n^b(\sum_n(t))\}_{n\geq 1}$, et du lemme suivant.

Lemme.

Pour tout $t > 0$, appelons respectivement $\sigma_n(t)$ et $\lambda_n(t)$ les lois des v.a. $\sum_n(t)$ et $\Lambda_n(t) = \rho(X_1)\circ\ldots\circ\rho(X_{[nt]}) \circ \{nt\}\rho(X_{[nt]+1})$.

Alors, pour tout $t > 0$, $\lim\limits_n ||\sigma_n(t) - \lambda_n(t)|| = 0$.

Preuve : Nous avons

$$||\sigma_n(t) - \lambda_n(t)|| = \sup_A ||\mathbb{P}_\nu[\sum_n(t)\in A] - \mathbb{P}_\nu[\Lambda_n(t)\in A]||$$

$$\leq \mathbb{P}_\nu[\{\sum_n(t) \neq \Lambda_n(t)\}]$$

$$\leq \mathbb{P}_\nu[\{\exists i\in\{1,\ldots,[nt]+1\} = \phi(X_i) > \sqrt{n}\}]$$

$$\leq ([nt]+1)\ \nu(\{\phi>\sqrt{n}\})$$

$$\leq (t+\frac{1}{n}) \int_{\{\phi>\sqrt{n}\}} \phi^2\, d\nu$$

qui tend vers zéro quand $n\to+\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. RAUGI : Bull. Soc. math. Fr., mémoire 54, 1977, 118p.

[2] A. RAUGI : Comptes rendus, 290, série A, 1980, P.103.

[3] A. RAUGI : Théorème de la limite centrale sur les groupes Nilpotents. Z. Wahr. verw Gebiete 149-172, 1978.

[4] M. ROSENBLATT : Markov Processes structure and Asymptotic behavior - Springer Verlag, Berlin-Heidelbert, New-York.