Adam Jakubowski
Andrzej Klopotowski

Quelques remarques sur les démonstrations des théorèmes limite pour des vecteurs d-dimensionnels aléatoires non indépendants

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1980, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , exp. nº 3, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1980___1_A3_0>

QUELQUES REMARQUES SUR LES DEMONSTRATIONS DES THEOREMES LIMITE POUR DES VECTEURS d-DIMENSIONNELS ALEATOIRES NON INDEPENDANTS

Adam Jakubowski et Andrzej Kłopotowski

Université de Nicholas Copernicus, Toruń, Pologne,

Université de Bretagne Occidentale, Brest, France.

Le but de cet article est d'élucider la signification d'une condition qui joue un rôle fondamental dans les démonstrations des théorèmes limite.

D'habitude l'expression "théorèmes limite" caractérise cette partie du calcul des probabilités qui a pour but de décrire le comportement asymptotique des suites des distributions de certaines quantités aléatoires. La plupart des résultats concerne nt les distributions de sommes de quantités aléatoires qui sont des éléments d'un espace vectoriel réel usuel, ceci pour des raisons techniques et en vue des applications.

Une hypothèse fondamentale, qui d'habitude est faite a priori sur ces sommes, est l'infinitésimalité, c'est-à-dire que l'influence de chaque terme sur la somme décroit vers zéro quand le nombre de termes de la somme augmente. La justification courante de cette hypothèse est qu'elle permet l'observation de la tendance statistique de phénomènes. Sous l'hypothèse additionnelle d'indépendance des termes des sommes, le comportement asymptotique des distributions des sommes est entièrement connu dans de nombreux cas ; par exemple, si les termes sont des vecteurs de $\mathbb{R}^d$ ou des éléments d'un espace de Hilbert séparable. Plus précisément, on peut caractériser la classe des distributions limites possibles et donner

.../...

des conditions nécessaires et suffisantes de convergence faible vers une distribution donnée. Alors il faut se demander ce qui arrive sans les hypothèses d'infinitésimalité et d'indépendance. La réponse à cette question est soit évidente soit désespérée ; presque n'importe quoi peut se produire. En particulier, on ne peut espérer une condition nécessaire générale non triviale, mais on peut envisager des théorèmes du type : "si les quantités aléatoires satisfont aux propriétés a), b), c),..., alors leurs sommes convergent en loi vers une distribution limite". Les propriétés a),b),c),...s'expriment habituellement à l'aide d'espérances conditionnelles et l'hypothèse additionnelle d'indépendance ramène ces conditions aux conditions apparaissant dans les théorèmes classiques. La méthode générale pour démontrer un tel théorème peut être rapidement décrite de la façon suivante. En utilisant l'équivalence entre la convergence faible des distributions et la convergence ponctuelle de leurs transformés de Fourier (ou à défaut de transformés analogues) on construit deux suites de fonctions, l'une donnée immédiatement par les sommes étudiées et l'autre construite de telle façon que son comportement limite soit bien connu. Si ces deux suites ont la même limite, alors on obtient la distribution limite des sommes étudiées. L'idée précédente de "lois accompagnatrices" permet d'obtenir des théorèmes limite pour des sommes de variables aléatoires dépendantes [1] , de vecteurs d-dimensionnels [4], d'éléments d'un espace de Hilbert séparable [3], et de plus leurs généralisations aux mixtures de lois indéfiniment divisibles [5] . Il va sans dire que toute la théorie classique des théorèmes limites repose sur cette idée. Avant d'entrer dans les détails pour des sommes de vecteurs d-dimensionnels, remarquons que les conditions suffisantes pour la convergence faible peuvent être divisées en deux groupes. Les premières, qu'on peut appeler "propriétés structurales", sont utilisées pour construire des objets dont le comportement limite est connu ; les secondes, qu'on peut appeler "propriétés d'approximation", donnent l'égalité des limites respectives. Cette répartition apparaît parfois conventionnelle, comme dans le cas de la condition de Lindeberg pour la distribution normale où la possibilité d'approximation est contenue dans cette condition structurelle (nous ne savons pas si cela ne se produit pas dans d'autres cas).

Maintenant nous précisons les notations et définitions utilisées par la suite, sans rappeler celles qui sont standard.

Choisissons une distribution indéfiniment divisible $\mathcal{L}(a, A, \mu)$ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ qui a la fonction caractéristique $\varphi(t) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(t,x)} \mathcal{L}(dx)$, $t \in \mathbb{R}^d$, décomposée en forme de Lévy- Khinthine :

$$\varphi(t) = \exp\left\{ i(t,a) - \frac{1}{2}(t,At) + \int_{R^d} \left(e^{i(t,x)} - 1 - \frac{i(t,x)}{1+\|x\|^2}\right) \frac{1+\|x\|^2}{\|x\|^2}\mu(dx)\right\}, \; t \in \mathbb{R}^d,$$

où $a \in \mathbb{R}^d$ est le vecteur fixé, $A = [a_{ij}]$ est la matrice -dxd symétrique définie non-négative, μ est la mesure finie sur $(\mathbb{R}^d, B^d)$ telle que $\mu(\{0\}) = 0$.

Soit $\mathfrak{X} = \{X_{nk} \,;\, 1 \leq k \leq k_n \,,\, n \in \mathbb{N}\}$ une suite double de vecteurs aléatoires d-dimensionnels tous définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (que nous supposerons fixé dans la suite de cette note) et soit $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_{nk} \,;\, 0 \leq k \leq k_n \,,\, n \in \mathbb{N}\}$ une suite double de sous- σ- algèbres de $\mathcal{F}$ qui est croissante dans chaque ligne. Nous supposons que la $n^{\text{ième}}$ ligne de $\mathfrak{X}$ est adaptée relativement à la $n^{\text{ième}}$ ligne de $\mathbb{F}$.

Les propriétés structurales pour la convergence faible de sommes

$$S_n := \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} \,, \quad n \in \mathbb{N},$$

vers $\mathcal{L}(a, A, \mu)$ sont exprimées à l'aide d'espérances conditionnelles (par rapport aux σ-algèbres de $\mathbb{F}$) pour les vecteurs

$$Y_{nk} := X_{nk} - A_{nk} \,, \quad 1 \leq k \leq k_n \,, \; n \in \mathbb{N},$$

où $\mathfrak{A} = \{A_{nk} \,;\, 1 \leq k \leq k_n \,,\, n \in \mathbb{N}\}$ est une suite double de vecteurs aléatoires d-dimensionnels, telle que chaque $n^{\text{ième}}$ ligne de $\mathfrak{A}$ est prévisible relativement à la $n^{\text{ième}}$ ligne de $\mathbb{F}$.

Supposons que, pour $\mathfrak{X}$ donné, il existe $\mathbb{F}$ et $\mathfrak{A}$ vérifiant les conditions précédentes et de plus :

(C.1) $$\sum_{k=1}^{k_n} \left\{ A_{nk} + E\left(\frac{Y_{nk}}{1+\|Y_{nk}\|^2} \,\middle|\, \mathcal{F}_{n,k-1} \right) \right\} \xrightarrow{P} a,$$

(C.2) $$\sum_{k=1}^{k_n} E\left(\frac{Y_{nki}\, Y_{nkj}}{1+\|Y_{nk}\|^2} \,\middle|\, \mathcal{F}_{n,k-1} \right) \xrightarrow{P} a_{ij} + \int_{R^d} \frac{x_i x_j}{\|x\|^2}\mu(dx) \,, \quad 1 \leq i, j \leq d,$$

(C.3) $$\sum_{k=1}^{k_n} E\left(\frac{\|Y_{nk}\|^2}{1+\|Y_{nk}\|^2} I(Y_{nk} \in E) \,\middle|\, \mathcal{F}_{n,k-1} \right) \xrightarrow{P} \mu(E), \; E \in \mathrm{Cont}_\mu, \; 0 \notin \bar{E}.$$

Il apparaît que le choix concret de A_{nk} dans [4], [7] est sans importance et de même, comme là, nous pouvons vérifier que les conditions (C.1)-(C.3) impliquent

(1) $$W_n(t) \xrightarrow{P} \varphi(t) \,, \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

.../...

où

$$W_n(t) := \exp\Big\{ i \sum_{k=1}^{k_n} \Big(t, A_{nk} + E\Big(\frac{Y_{nk}}{1+\|Y_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\Big)\Big) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k_n} E\Big(\frac{(t,Y_{nk})^2}{1+\|Y_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\Big) + \sum_{k=1}^{k_n} E\Big(h(Y_{nk},t)\frac{\|Y_{nk}\|^2}{1+\|Y_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\Big)\Big\},$$

$$h(x,t) := \begin{cases} \Big(e^{i(t,x)} - 1 - \dfrac{i(t,x)}{1+\|x\|^2} + \dfrac{(t,x)^2}{2(1+\|x\|^2)}\Big)\dfrac{1+\|x\|^2}{\|x\|^2} & , x \neq 0,\ t \in \mathbb{R}^d, \\ 0 & , x = 0,\ t \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Une généralisation de l'idée de "lois accompagnatrices" est contenue dans (1), c'est-à-dire, pour toute suite $\mathfrak{X}$ de vecteurs aléatoires indépendants dans chaque ligne et pour toute suite $\mathfrak{A}$ non aléatoire nous obtenons ici la convergence ponctuelle de la suite de fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles.

Pour démontrer (de (1)) la convergence faible des distributions de S_n, $n \in \mathbb{N}$, il suffit de faire deux démarches : premièrement, il faut s'apercevoir que la propriété

$$f_n(t) := \prod_{k=1}^{k_n} E\big(e^{i(t,X_{nk})} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\big) \xrightarrow{P} \varphi(t),\ t \in \mathbb{R}^d, \tag{2}$$

implique le résultat demandé :

$$E\, e^{i(t,S_n)} \longrightarrow \varphi(t),\ t \in \mathbb{R}^d, \tag{3}$$

(regarder [3] théorème A, [7] théorème 4),

et puis examiner si l'inégalité suivante est vraie :

$$|f_n(t) - W_n(t)| \leq K(t,C) \sum_{k=1}^{k_n} \big| E\big(e^{i(t,Y_{nk})} - 1 \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\big)\big|^2,\ t \in \mathbb{R}^d. \tag{4}$$

(Attention : dans les considérations mentionnées ci-dessus nous avons passé sous silence le fait que dans les démonstrations de (1) ou (4) (par exemple) il faut profiter du fait que les variables à gauche de (C.2) sont bornées dans leur ensemble par la constante $C > 0$; la procédure qu'il faut faire ici est écrite en [4] ou [5] avec une modification non essentielle de A_{nk}.)

Nous avons obtenu ici très naturellement la propriété suivante d'approximation :

.../...

(C.4) $\sum_{k=1}^{k_n} | E(e^{i(t,Y_{nk})} - 1 \mid \mathcal{F}_{n,k-1})|^2 \xrightarrow{P} 0, \; t \in \mathbb{R}^d.$

Alors, manifestement la condition la plus générale et adaptée à la situation considérée est que

(5) $| f_n(t) - W_n(t) | \xrightarrow{P} 0 \;, t \in \mathbb{R}^d.$

Mais nous devons trouver une formulation nette et facilement utilisable pour de telles conditions. Ce n'est pas vrai pour (5). Maintenant, nous posons la question fondamentale de cette note :

Qu'est-ce que (C.4) ?

Au premier coup d'oeil (C.4) n'est pas lisible à cause de la fonction exponentielle qui y apparaît.

Lemme : *Pour toute suite double $\mathcal{Y}$ de vecteurs aléatoires d-dimensionnels ligne-adaptée relativement à $\mathbb{F}$, les 3 conditions suivantes sont équivalentes :*

(C.5) $\max_{1 \le k \le k_n} P(\|Y_{nk}\| > \varepsilon \mid \mathcal{F}_{n,k-1}) \xrightarrow{P} 0, \; \varepsilon > 0,$

(C.6) $\max_{1 \le k \le k_n} E\left(\frac{\|Y_{nk}\|^2}{1 + \|Y_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\right) \xrightarrow{P} 0,$

(C.7) $\max_{1 \le k \le k_n} |E(e^{i(t,Y_{nk})} - 1 \mid \mathcal{F}_{n,k-1})| \xrightarrow{P} 0, \; t \in \mathbb{R}^d.$

Ce lemme dans le cas classique de sommes des variables aléatoires indépendantes se trouve dans [9] avec la convergence ponctuelle presque uniforme sur t en (C.7). Il s'avère que cette hypothèse n'est pas essentielle pour l'implication (C.7) $\longrightarrow$ (C.6) ; il résulte que dans la théorie classique la convergence ponctuelle dans (C.7) implique la convergence presque uniforme sur t .

Démonstration : En vertu des inégalités de Tchebysheff, il ne reste plus qu'à montrer que l'implication (C.7) $\longrightarrow$ (C.6). Nous passerons en premier lieu dans le cas d = 1. Supposons donc que toutes les Y_{nk} soient des variables aléatoires et choisissons leurs distributions conditionnelles régulières par rapport aux σ-algèbres $\mathcal{F}_{n,k-1}$, c'est-à-dire que pour $B \in \mathcal{B}^1$ fixé $P(Y_{nk} \in B \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\cdot)$ est la version de cette distribution et pour chaque $\omega \in \Omega$ fixé $P(Y_{nk} \in \cdot \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\omega)$ est la probabilité sur $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$. Fixons un $\omega \in \Omega$.

.../...

L'égalité suivante :

(6) $$\frac{x^2}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-\cos xt)\,dt\,,\quad x\in\mathbb{R}^1,$$

implique pour chaque $T>0$ que

$$\int_{R^1} \frac{x^2}{1+x^2} P(Y_{nk}\in dx \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\omega) =$$

$$= \int_{R^1} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-\cos tx)\,dt \right) P(Y_{nk}\in dx \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\omega) \leq$$

$$\leq \int_{R^1} \left(\int_0^{T} e^{-t}(1-\cos tx)\,dt \right) P(Y_{nk}\in dx \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\omega) + 2\int_T^{+\infty} e^{-t}\,dt\,.$$

Nous pouvons choisir $T_0>0$ suffisamment grand pour que le second élément à droite soit suffisamment petit, disons $< \frac{\varepsilon}{2}$.

Nous passons maintenant au premier élément de cette somme. En utilisant le théorème de Fubini pour la mesure produit
nous obtenons :

$$\int_{R^1} \left(\int_0^{T_0} e^{-t}(1-\cos xt)\,dt \right) P(Y_{nk}\in dx \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\omega) =$$

$$= \int_0^{T_0} \left(\int_{R^1} e^{-t}(1-\cos xt)\, P(Y_{nk}\in dx \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\omega) \right) dt\,.$$

Considérons à présent l'intégrale

$$F(\omega,t) := \int_{R^1} f(x,t)\ P(Y_{nk}\in dx \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\omega),$$

où $f(x,t)\geq 0$ est une fonction continue et bornée dans $\mathbb{R}^1\times[0,T]$. Nous définissons une fonction $\tilde{f}$ sur $\Omega\times\mathbb{R}^1\times[0,T]$ par

$$\tilde{f}(\omega,x,t) := f(x,t),\quad \omega\in\Omega,\ x\in\mathbb{R}^1,\ t\in[0,T]\,;$$

elle est évidemment mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{n,k-1}\otimes\mathcal{B}^1\otimes\mathcal{B}_{[0,T]}$ et intégrable relativement à chaque mesure finie sur cette σ-algèbre.

Pour tout $\omega\in\Omega$ et $t\in[0,T]$ nous définissons une mesure sur $(\mathbb{R}^1,\mathcal{B}^1)$ par

$$P^{(\omega,t)}_{n,k-1}(\cdot) := P(Y_{nk}\in\cdot \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\omega)\,.$$

.../...

Pour tout $A \in \mathcal{B}^1$ la fonction $P^{\bullet}_{n,k-1}(A)$ est $\mathcal{F}_{n,k-1} \otimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ -mesurable. Ainsi

$$F(\omega,t) = \int_{R^1} \tilde{f}_{(\omega,t)}(x)\, P_{1,2}((\omega,t); dx) \, ,$$

où $\tilde{f}_{(\omega,t)}$ note la section de la fonction $\tilde{f}$ au point (ω,t) , et $P_{1,2} : \Omega \times [0,T] \times \mathcal{B}^1 \longrightarrow [0,1]$, $P_{1,2}((\omega,t); A) = P^{(\omega,t)}_{n,k-1}(A)$, a toutes les propriétés de la probabilité de transition de $(\Omega \times [0,T], \mathcal{F}_{n,k-1} \otimes \mathcal{B}_{[0,T]})$ dans $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$. En vertu de la proposition III-2-1 de [8] , la fonction F est $\mathcal{F}_{n,k-1} \otimes \mathcal{B}_{[0,T]}$-mesurable. En particulier, la fonction

$$F(\omega,t) = \int_{R^1} e^{-t}(1-\cos tx)\, P(Y_{nk} \in dx \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\omega)$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{n,k-1} \otimes \mathcal{B}_{[0,T]}$.

La fonction

$$Z_n(\omega,t) := \max_{1 \le k \le k_n} \int_{R^1} e^{-t}(1-\cos tx)\, P(Y_{nk} \in dx \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\omega), \ \omega \in \Omega, \ t \in [0,T_0],$$

est manifestement $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ -mesurable et bornée, ce qui implique la mesurabilité et l'intégrabilité des fonctions $Z_n(\cdot,t), Z_n(\omega,\cdot)$ pour tout t et ω fixés. La régularité des distributions conditionnelles de Y_{nk} implique que pour chaque $t \in \mathbb{R}^1$ fixé :

$$\int_{\mathbb{R}^1} e^{-t}(1-\cos tx)\, P(Y_{nk} \in dx \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\cdot) \overset{a.e.}{=\!=}$$

$$\overset{a.e.}{=\!=} e^{-t}(1 - E(\cos tY_{nk} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}))(\cdot) =$$

$$= e^{-t} \left| \mathrm{Re}\, E(e^{itY_{nk}} - 1 \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\cdot) \right| \le$$

$$\le \left| E(e^{itY_{nk}} - 1 \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\cdot) \right|$$

et alors avec (C.7) nous obtenons

(7) $$Z_n(\cdot,t) \xrightarrow{P} 0 \, , \ t \in \mathbb{R}^1.$$

Par le théorème de Fubini pour la mesure produit $P \otimes \lambda_{[0,T]}$ les fonctions

.../...

$$\tilde{Z}_n(\omega) := \int_0^{T_0} Z_n(\omega,t)\,dt \;,\; n \in \mathbb{N},$$

$$\lambda_n(t) := \int_\Omega Z_n(\omega,t)\,dP(\omega) \;,\; n \in \mathbb{N},$$

sont mesurables par rapport à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}_{[0,T_0]}$ respectivement. Par (7) et $0 \leq Z(\omega,t) \leq 2$ nous obtenons que la suite des fonctions $\lambda_n(t), n\in\mathbb{N}$, mesurables et bornées converge vers zéro pour tout $t \in [0,T_0]$,

ainsi

$$\int_0^{T_0} \Big(\int_\Omega Z_n(\omega,t)\,dP \Big) dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et

$$\int_\Omega \Big(\int_0^{T_0} Z_n(\omega,t)\,dt \Big) dP \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

grâce à la $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_{[0,T_0]}$-mesurabilité de Z_n. La fonction sous l'intégrale est bornée et non négative, donc cela implique

$$\int_0^{T_0} Z_n(\omega,t)\,dt \xrightarrow{P} 0 .$$

Enfin nous utilisons la régularité des distributions conditionnelles de Y_{nk} :

$$\max_{1\leq k\leq k_n} E\Big(\frac{Y_{nk}^2}{1+Y_{nk}^2} \,\Big|\, \mathcal{F}_{n,k-1} \Big) \overset{\text{a.e.}}{=} \max_{1\leq k\leq k_n} \int_{R^1} \frac{x^2}{1+x^2} P(Y_{nk}\in dx \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\cdot) \leq$$

$$\leq \max_{1\leq k\leq k_n} \int_0^{T_0} \Big(\int_{R^1} e^{-t}(1-\cos tx)\, P(Y_{nk}\in dx \mid \mathcal{F}_{n,k-1})(\cdot) \Big) dt + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \int_0^{T_0} Z_n(\cdot,t)\,dt + \frac{\varepsilon}{2} \;,$$

et il en résulte (C.6) (dans le cas d = 1).

Pour finir la démonstration dans le cas d-dimensionnel il suffit de noter que par l'application de (C.7) pour les vecteurs $t = s e_j$, $e_j = (0,\dots,0,\underset{j}{1},0,\dots,0)$,

.../...

$\lambda \in \mathbb{R}^1$, nous obtenons que chaque $j^{\text{ième}}$ coordonnée, $1 \leq j \leq d$, satisfait

$$\max_{1 \leq k \leq k_n} |E(e^{i\lambda Y_{nj}} - 1 \mid \mathcal{F}_{n,k-1})| \xrightarrow{P} 0, \ \lambda \in \mathbb{R}^1 .$$

Cette condition implique

$$\max_{1 \leq k \leq k_n} P(|Y_{nkj}| > \varepsilon \mid \mathcal{F}_{n,k-1}) \xrightarrow{P} 0, \ \varepsilon > 0, 1 \leq j \leq d,$$

qui est équivalente à (C.5). ■

Maintenant nous revenons à nos considérations à propos du rôle de (C.4). Par le lemme ci-dessus elle implique (C.5), c'est-à-dire, $\mathcal{Y}$ doit être conditionnellement infinitésimal. Pensons à l'implication réciproque. Il est possible de donner facilement des exemples dans la théorie classique, en utilisant suelement le nombre des éléments k_n , montrant que en toute généralité, elle n'est pas vraie.

L'inégalité

$$\sum_{k=1}^{k_n} |E(e^{i(t,Y_{nk})} - 1 \mid \mathcal{F}_{n,k-1})|^2 \leq$$
$$\leq \max_{1 \leq k \leq k_n} |E(e^{i(t,Y_{nk})} - 1 \mid \mathcal{F}_{n,k-1})| \cdot \sum_{k=1}^{k_n} |E(e^{i(t,Y_{nk})} - 1 \mid \mathcal{F}_{n,k-1})|, t \in \mathbb{R}^d,$$

implique le résultat suivant :

__*Corollaire*__: *Si, en supplément,*

(C.8) *la suite* $\sum_{k=1}^{k_n} |E(e^{i(t,Y_{nk})} - 1 \mid \mathcal{F}_{n,k-1})|, n \in \mathbb{N}$, *est bornée en probabilité,*

alors (C.5) *implique* (C.4). ■

Malheureusement, à nouveau on peut donner des exemples montrant que (C.8) n'est la conséquence ni de (C.4) ni de (C.5). Ainsi, en toute généralité, (C.4) n'est pas équivalent avec (C.5) ou avec (C.5) fortifié par (C.8) :

.../...

$$(C.5) \wedge (C.8) \underset{\not\leftarrow}{\rightarrow} (C.4) \underset{\not\leftarrow}{\rightarrow} (C.5).$$

En plus, (C.8) a ce défaut qu'il n'est pas vérifiable facilement. Mais nous nous rappelons que les conditions d'approximation sont secondaires en comparaison des propriétés structurelles. Alors c'est très naturel de supposer (C.2), ou, un peu plus généralement, que

(C.9) la suite $\sum_{k=1}^{k_n} E\left(\frac{\|Y_{nk}\|^2}{1+\|Y_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{n,k-1} \right)$, $n \in \mathbb{N}$, est bornée en probabilité.

On peut vérifier très facilement que (C.9) est équivalent avec

(C.10) il existe une constante $K > 0$ telle que les suites

$$\sum_{k=1}^{k_n} P(\|Y_{nk}\| > K \mid \mathcal{F}_{n,k-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} E(\|Y_{nk}\|^2 I(\|Y_{nk}\| \leq K) \mid \mathcal{F}_{n,k-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

sont bornées en probabilité,

ou, avec

(C.11) pour tout $K > 0$ la condition (C.10) est satisfaite.

Avec cette hypothèse on peut démontrer (théorème 3.6 [4]), que si l'on a (C.5) (et (C.2)), alors la propriété (C.4) est équivalente avec

(C.12) $$\sum_{k=1}^{k_n} \left\| E\left(\frac{Y_{nk}}{1+\|Y_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{n,k-1} \right) \right\|^2 \xrightarrow{P} 0 .$$

En présence du lemme ci-dessus, ce résultat peut être exprimé sous forme plus forte :

Théorème : *Soit $\mathcal{Y}$ et $\mathbb{F}$ jouissant de (C.9). Pour avoir la propriété (C.4) il faut et il suffit que les conditions (C.5) et (C.12) soient réalisées simultanément.* ■

.../...

En vertu de ce Théorème, après des calculs élémentaires, on peut démontrer que :

Corollaire : *Si* $\mathcal{Y}$ *et* $\mathbb{F}$ *satisfont* (C.9), *la propriété* (C.4) *est équivalente avec* (C.5) *et*

(C.13) *il existe une constante* $L>0$ *telle que*

$$\sum_{k=1}^{k_n} \| E(Y_{nk} I(\|Y_{nk}\| \leq L) \mid \mathcal{F}_{n,k-1})\|^2 \xrightarrow{P} 0 . \blacksquare$$

La condition (C.13) est plus agréable que (C.12). On peut vérifier que (C.4) et (C.9) impliquent (C.13) pour tout $L>0$.

Maintenant nous allons considérer quelques cas particuliers pour les A_{nk}.

I. Soit $A_{nk} = 0$ pour tout $1 \leq k \leq k_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Alors les conditions (C.1) - (C.4) prendront la forme

(ZC.1) $$\sum_{k=1}^{k_n} E\left(\frac{X_{nk}}{1+\|X_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\right) \xrightarrow{P} a ,$$

(ZC.2) $$\sum_{k=1}^{k_n} E\left(\frac{X_{nki}X_{nkj}}{1+\|X_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\right) \xrightarrow{P} a_{ij} + \int_{R^d} \frac{x_i x_j}{\|x\|^2}\mu(dx) , \quad 1 \leq i,j \leq d,$$

(ZC.3) $$\sum_{k=1}^{k_n} E\left(\frac{\|X_{nk}\|^2}{1+\|X_{nk}\|^2} I(X_{nk} \in E) \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\right) \xrightarrow{P} \mu(E), \quad E \in \mathrm{Cont}_\mu, \ 0 \notin \bar{E} ,$$

(ZC.4) $$\sum_{k=1}^{k_n} | E(e^{i(t,Y_{nk})} - 1 \mid \mathcal{F}_{n,k-1})|^2 \xrightarrow{P} 0 , \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

et par le même les propriétés suivantes sont équivalentes :

(ZC.5) $$\max_{1 \leq k \leq k_n} P(\|X_{nk}\| > \varepsilon \mid \mathcal{F}_{n,k-1}) \xrightarrow{P} 0 , \quad \varepsilon > 0 ,$$

(ZC.6) $$\max_{1 \leq k \leq k_n} E\left(\frac{\|X_{nk}\|^2}{1+\|X_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\right) \xrightarrow{P} 0 ,$$

(ZC.7) $$\max_{1 \leq k \leq k_n} | E(e^{i(t,X_{nk})} - 1 \mid \mathcal{F}_{n,k-1})| \xrightarrow{P} 0 , \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Si dans ce cas nous avions l'inégalité

(8) $$| E(e^{i(t,X_{nk})} - 1 \mid \mathcal{F}_{n,k-1})| \leq \Theta(t) E\left(\frac{\|X_{nk}\|^2}{1+\|X_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\right) ,$$

.../...

pour quelque constante $\theta(t)$, alors l'infinitésimalité conditionnelle de $\mathfrak{X}$ (c'est-à-dire (ZC.5)) avec en plus (ZC.1) - (ZC.3) implique la convergence faible demandée vers $\mathcal{L}(a,A,\mu)$. Mais malheureusement (8) n'est pas vrai, parce que, intuitivement la fonction $|e^{i(t,x)}-1|$ près de zéro est majorée par $\|x\|$ et ne l'est pas par $\|x\|^2$. Donc en vertu du Théorème, nous devons ajouter à (ZC.5) la propriété

(ZC.8) $$\sum_{k=1}^{k_n} \| E\left(\frac{X_{nk}}{1+\|X_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\right)\|^2 \xrightarrow{P} 0 ,$$

pour obtenir le même résultat.

Remarquons que le théorème limite suivant :

si $\mathfrak{X}$ et $\mathbb{F}$ satisfont (ZC.1) - (ZC.3), (ZC.5) et (ZC.8), leurs sommes S_n, $n \in N$, convergent faiblement vers $\mathcal{L}(a,A,\mu)$, a été formulé dans [2] pour la distribution normale unidimensionnelle (avec un autre choix pour $\mathbb{F}$ qui conduit à une faute signalée dans [6]), mais sous la forme plus générale ci-dessus il n'a jamais été présenté.

II. Nous considérons maintenant

$$A_{nk} = E(Y_{nk} I(Y_{nk} \in V) \mid \mathcal{F}_{n,k-1}) , \quad 1 \leq k \leq k_n , \quad n \in \mathbb{N},$$

où $V \in \mathcal{B}^d$ est un ensemble borné fixé, arbitraire tel que $0 \in \operatorname{Int} V$.

C'est très naturel de demander pourquoi dans tous les manuels et ouvrages où l'on considère la convergence faible vers une distribution indéfiniment divisible, les auteurs choisissent a priori cette sorte de A_{nk}. Mais ils admettent a priori aussi que $\mathfrak{X}$ a la propriété (ZC.5) d'infinitésimalité. Cela implique l'infinitésimalité (C.5) de $\mathcal{Y}$ (pour ce choix de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$) et toutes les autres difficultés sont évitées par l'inégalité

(9) $$| E(e^{i(t,Y_{nk})}-1 \mid \mathcal{F}_{n,k-1})| \leq \eta(t,V)\, E\left(\frac{\|Y_{nk}\|^2}{1+\|Y_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\right)$$

.../...

avec la constante $\eta(t,V)$ dépendant de t et V seulement (regardez la démonstration de (3.40) dans [4] ; elle est très fortement tributaire de toutes les propriétés du choix de V). Ainsi la propriété (ZC.5) seule avec les propriétés structurelles (C.1) - (C.3) implique la convergence faible vers $\mathcal{L}(a,A,\mu)$, voila la raison !

Remarquons que par un détour nous obtenons ici que (ZC.5) et (C.2) impliquent (C.12). Il n'est probablement pas facile de démontrer cette implication immédiatement.

III. Si tous les vecteurs de $\mathfrak{X}$ sont intégrables, nous pouvons définir

$$B_{nk} := E(X_{nk} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}),$$

$$Z_{nk} := X_{nk} - B_{nk} \quad , \quad 1 \le k \le k_n \, , \; n \in \mathbb{N},$$

et écrire les conditions (MC.1) - (MC.4) avec B_{nk} et Z_{nk} de façon analogue à (C.1)-(C.4), ce que nous omettons. Malheureusement, en général, la propriété (ZC.5) n'implique pas l'infinitésimalité (conditionnelle) de $\mathcal{Z}$:

(MC.5) $$\max_{1 \le k \le k_n} P(\|Z_{nk}\| > \varepsilon \mid \mathcal{F}_{n,k-1}) \xrightarrow{P} 0, \; \varepsilon > 0 ,$$

qui d'après le Lemme est nécessaire pour le bon résultat. D'après le Théorème, en présence de (MC.2), la condition (MC.4) est équivalente à (MC.5) et

(MC. 6) $$\sum_{k=1}^{k_n} \| E\left(\frac{Z_{nk}}{1+\|Z_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\right)\|^2 \xrightarrow{P} 0 \, ,$$

(ou

(MC.7) il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\sum_{k=1}^{k_n} \| E(Z_{nk}\, I(\|Z_{nk}\| \le L) \mid \mathcal{F}_{n,k-1})\|^2 \xrightarrow{P} 0 \;) .$$

Les conditions suffisantes pour (MC.4) (avec l'hypothèse (MC.5) sont :

(MC.8) pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ la suite

$$\sum_{k=1}^{k_n} | E(e^{i(t,Z_{nk})} - 1 \mid \mathcal{F}_{n,k-1})| \; , \; n \in \mathbb{N},$$

est bornée en probabilité,

.../...

ou, propriété plus forte

(MC.9) la suite

$$\sum_{k=1}^{k_n} E(\|Z_{nk}\| \mid \mathcal{F}_{n,k-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

est bornée en probabilité,

ou, finalement , si tous les vecteurs de $\mathfrak{X}$ ont des variances finies

(VMC.10) la suite

$$\sum_{k=1}^{k_n} E(\|Z_{nk}\|^2 \mid \mathcal{F}_{n,k-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

est bornée en probabilité.

Dans la dernière situation on peut appliquer les considérations ci-dessus pour obtenir la description complète des conditions suivantes pour la convergence faible vers la loi de Kolmogoroff. La théorie classique suppose habituellement (VMC.10) a priori (ou c'est implicite dans les conditions structurelles) et en ce cas (MC.4) est équivalent avec (MC.5).

Nous finissons cette note avec un fait pour la foi du lecteur (et non nécessairement pour la vérification) :

__Quasi-théorème__ : Après remplacement de $\sum_{k=1}^{k_n}$ *et* $\max_{1\leq k\leq k_n}$ *à chaque fois dans cette oeuvre par* $\sum_{k=1}^{\nu_n}$ *et* $\max_{1\leq k\leq \nu_n}$ *, où* ν_n *,* $n \in \mathbb{N}$ *, est une suite de temps d'arrêt, nous obtenons des théorèmes vrais pour des sommes de nombre aléatoire d'éléments.* ■

Nous tenons à exprimer à Monsieur le Professeur Y. DERRIENNIC notre très vive reconnaissance pour toutes les fructueuses discussions que nous avons eues avec lui et pour tous les précieux conseils qu'il nous a prodigués.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] BROWN, B.M., EAGLESON, G.K. :

Martingale convergence to infinitely divisible laws with finite variances,

Trans. Amer. Math. Soc. 162(1971), 449-453.

[2] DVOVETZKI, A. :

Asymptotic normality for sums of dependent random variables

Proc. of the Sixth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. (1970).

[3] JAKUBOWSKI, A. :

On limit theorems for sums of dependent Hilbert space valued random variables

Lecture Notes in Statistics, vol. 2, Springer Verlag (1980).

[4] KŁOPOTOWSKI, A. :

Limit theorems for sums of dependent random vectors in $\mathbb{R}^d$

Dissert. Math. CLI, 1-58 (1977)

[5] KŁOPOTOWSKI, A. :

Mixtures of infinitely divisible distributions as limit laws for sums of dependant random variables ,

Z. Wahr. 51, 101-113 (1980),

[6] KŁOPOTOWSKI, A. :

A remark on the conditioning in limit theorems for dependent random vectors in $\mathbb{R}^d$,

Banach Center Publ. Vol 6, 175-177, (1980)

[7] KŁOPOTOWSKI, A.;SŁOMIŃSKI, L. :

Limit theorems for random sums of dependent d-dimensional random vectors

To appear (1981).

[8] NEVEU, J. :

Bases mathématiques du calcul des probabilités ,

MASSON et Cie, Paris, 1964

[9] PETROV V.V. :

Sums of independent random variables

SPRINGER VERLAG (1975)