PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

EMMANUEL LESIGNE

Existence et unicité d'une probabilité invariante pour des translations aléatoires de $\mathbb{R}^m$

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1979, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , exp. nº 6, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1979___1_A6_0>

EXISTENCE ET UNICITE D'UNE PROBABILITE INVARIANTE POUR DES TRANSLATIONS ALEATOIRES DE $\mathbb{R}^m$

Emmanuel LESIGNE

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$

$p_1, p_2, \dots, p_n$ des fonctions mesurables de $\mathbb{R}^m$ dans $[0,1]$ telles que $\sum_{i=1}^{n} p_i \equiv 1$

On considère l'opérateur markovien P défini par :

$$Pf(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\, f(x+a_i)$$

Ceci correspond au problème physique d'une particule se déplaçant dans l'espace en passant du point x au point $x + a_i$ avec une probabilité $p_i(x)$.

On s'intéresse ici à l'existence et l'unicité d'une probabilité invariante pour l'opérateur P. Ce faisant, on étend au cas multidimensionnel des résultats de F. Norman.

1. EXISTENCE

Proposition :

Si A est une partie de $\mathbb{R}^m$ on a équivalence entre :

i) $\forall\ K > 0, \quad \bigcap_{\alpha \in A} \{x \in \mathbb{R}^m \mid x.\alpha \leq K\}$ est un compact.

ii) Il n'existe pas d'hyperplan de $\mathbb{R}^m$ tel que A soit contenue dans un demi-espace fermé défini par cet hyperplan.

iii) Il n'existe pas de forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^m$ dont la restriction à A soit positive ou nulle.

Définition :

Une telle partie finie A sera dite bien répartie. On peut remarquer qu'une partie bien répartie a au moins (m+1) éléments. Un exemple de famille bien répartie est :

si $(e_1,\dots e_m)$ est une base de $\mathbb{R}^m$, on pose $A = \{e_1,\dots e_m, -e_1,\dots, -e_m\}$.
Posons $W(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, p_i(x)$

Théorème d'existence

Si les p_i sont continues et si il existe une partie bien répartie A de $\mathbb{R}^m$ telle que : $\forall\ \alpha \in A, \exists\ M,\varepsilon > 0, \quad \forall\ x\in \mathbb{R}^m, \quad x.\alpha > M \Rightarrow$ $W(x).\alpha < -\varepsilon$. Alors il existe une probabilité P-invariante.

Remarque : la condition ci-dessus énoncée est du type "l'infini est réfléchissant" pour la chaine de Markov. En dimension 1 elle de traduit par : $\limsup_{x\to+\infty} W(x) < 0$ et $\liminf_{x\to+\infty} W(x) > 0$

Preuve du théorème :

Soit $\alpha\in A$

pour $\lambda > 0$, on considère la fonction $x \to e^{\lambda(x-\alpha)}$

$$P(e^{\lambda(x-\alpha)}) = F_\alpha(x,\lambda)\, e^{\lambda(x-\alpha)} \text{avec } F_\alpha(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\, e^{\lambda(a_i-\alpha)}$$

$$F_\alpha(x,\lambda) = 1 + \lambda(W(x).\alpha) + \lambda^2 g_\alpha(x,\lambda) \quad \text{avec } g_\alpha(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (a_i\cdot\alpha)^{k+2}}{(k+2)\,!}$$

Pour $\lambda \leq 1$, $|g_\alpha(x,\lambda)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\, (a_i.\alpha)^2\, e^{|a_i.\alpha|} \leq \frac{1}{2} \max_{1\leq i\leq n} (a_i.\alpha)^2\, e^{|a_i.\alpha|} = G_\alpha$

On sait que : $\exists\ M,\varepsilon > 0$, $\forall\ x\in \mathbb{R}^m$, $x\cdot\alpha > M \Rightarrow W(x)\ \alpha < -\varepsilon$

Donc pour $x.\alpha > M$ et $\lambda < \varepsilon/_{2G}$, 1 on a :

$F_\alpha(x,\lambda) \leq 1 - \lambda\varepsilon + \lambda^2 G \leq 1 - \lambda\frac{\varepsilon}{2} = C_\alpha(\lambda)$
$C_\alpha(\lambda) < 1$

Pour $x\cdot\alpha \leq M$, on a : $P(e^{\lambda(x.\alpha)}) \leq \max_{1\leq i\leq n} e^{\lambda[(x+a_i).\alpha]} \leq \max_{1\leq i\leq n} e^{\lambda[(M+a_i).\alpha]} = D_\alpha(\lambda)$

Pour $x\in\mathbb{R}^m$ et $\lambda<\varepsilon/_{2G}$,1 on a : $P(e^{\lambda(x.\alpha)}) \leq C_\alpha(\lambda)\ e^{\lambda(x.\alpha)} + D_\alpha(\lambda)$

$$\forall\ k\in \mathbb{N}^*,\ P^k(e^{\lambda(x.\alpha)}) \leq C_\alpha(\lambda)\ P^{k-1}(e^{\lambda(x.\alpha)}) + D_\alpha(\lambda)$$

d'où $\forall\ k\in \mathbb{N}^*\ P^k(e^{\lambda(x.\alpha)}) \leq \dfrac{D_\alpha(\lambda)}{1 - C_\alpha(\lambda)} + C_\alpha(\lambda)\ e^{\lambda(x.\alpha)}$

Fixons λ suffisamment petit et $x \in \mathbb{R}^m$.

Posons $f_\alpha(y) = e^{\lambda(y-\alpha)}$ et $E_\alpha = \dfrac{D_\alpha(\lambda)}{1-C_\alpha(\lambda)} + C_\alpha(\lambda)\ e^{\lambda(x.\alpha)}$

On a : $\forall\ k\in\mathbb{N}^*$, $P^k\ (f_\alpha)(x) \leq E_\alpha$

On définit une suite de probabilités par $\mu_k = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} \varepsilon_x P^l$ $(k>0)$
où ε_x est la probabilité de Dirac au point x.

On a : $\forall k \in N^*$, $\mu_k(f_\alpha) = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} P^l(f_\alpha)(x) \leq E_\alpha$

Soit $\eta > 0$. $\exists a_\alpha > 0$, $\forall y \in R^m$, $y . \alpha > a_\alpha \Rightarrow f_\alpha(y) \geq \frac{E_\alpha}{\eta}$

$$E_\alpha \geq \mu_k(f_\alpha) \geq \frac{E_\alpha}{\eta} \mu_k \{y \in R^m | y.\alpha > a_\alpha\}$$

d'où $\mu_k\{y \in R^m \mid y.\alpha > a_\alpha\} \leq \eta$ $(k>0)$

Finalement :

$\forall \alpha \in A$, $\forall \eta > 0$, $\exists a_\alpha > 0$, $\forall k > 0$, $\mu_k\{y \in R^m \mid y.\alpha > a_\alpha\} \leq \eta$

soit $a = \max_{\alpha \in A} a_\alpha$

$\forall \eta > 0$, $\exists a > 0$, $\forall k > 0$, $\mu_k[\bigcup_{\alpha \in A} \{y\ R^m \mid y.\alpha > a\}] < \eta$. card A

$\forall \eta' > 0$, $\exists a > 0$, $\forall k' > 0$, $\mu_k[\bigcup_{\alpha \in A} \{y\ R^m \mid y.\alpha \leq a\}] \geq 1-\eta'$

d'où d'après l'hypothèse :

$\forall \eta' > 0$, $\exists$ c compact, $\forall k > 0$, $\mu_k(c) \geq 1-\eta'$

c'est-à-dire que la suite $(\mu_k)_{k>0}$ est équitendue, et donc vaguement relativement compacte. On peut en extraire une suite (μ_{n_k}) convergeant vaguement vers une probabilité μ . Les P_i étant continues, on a :
f continue bornée $\Rightarrow$ Pf continue bornée. Donc $\mu_{n_k} P$ converge vaguement vers μP.

Or $\mu_{n_k} P - \mu_{n_k}$ converge vers 0. d'où $\mu P = \mu$

On a ainsi trouvé une probabilité invariante.

2. UNICITE

On suppose à présent que : $\begin{cases} n = m+2 \\ a_{m+2} = 0 \\ P_1, \dots, P_{m+1} > 0 \end{cases}$

Théorème d'unicité

Si le semi-groupe engendré par $\{a_1,\ldots,a_{m+1}\}$ est dense dans R^m, alors il existe au plus une probabilité P-invariante et, si elle existe, elle est équivalente à la mesure de Lebesgue.

Proposition 1 :

Soient $a_1,\ldots,a_{m+1} \in R^m$; $a_i = (a_i^1,\ldots,a_i^m)$

On pose

$$D(a_1,\ldots,a_m) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^m \\ a_2^1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_m^1 & \ldots & & a_m^m \end{vmatrix} = D_{m+1}$$

On définit de même : $D_i = D(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{m+1})$ $(1 \leq i \leq m)$

On a : Les a_i engendrent un sous-groupe dense de R^m si et seulement si les D_i $(1 \leq i \leq m+1)$ sont algébriquement indépendants.

Proposition 2 :

Soient $a_1,\ldots,a_{m+1} \in R^m$

Les a_i engendrent un semi-groupe dense de R^m si et seulement ils engendrent un sous-groupe dense de R^m et $\{a_1,\ldots,a_{m+1}\}$ est bien répartie.

Preuve du théorème : elle se fait en trois étapes :

a) toute probabilité invariante est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.

b) toute probabilité invariante est équivalente à λ .

c) unicité.

a) Soit μ une probabilité invariante.

Soit f une fonction vérifiant $f(x) = f(x+a_i)$ $(x \in R^m,\ i=2,\dots,m+1)$ (1)

On a :

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \int Pf(x)\, d\mu(x) = \int \sum_{i=1}^{m+1} P_i(x) . f(x+a_i)\, d\mu(x) =$$

$$\int P_1(x)\, f(x+a_1)\, d\mu(x) + \int \Big(\sum_{i=2}^{m+1} P_i(x)\Big) f(x)\, d\mu(x) =$$

$$\int P_1(x)\, f(x+a_1)\, d\mu(x) + \int f(x)\, d\mu(x) - \int P_1(x)\, f(x)\, d\mu(x)$$

D'où :

$$\int f(x+a_1)\, P_1(x)\, d\mu(x) = \int f(x)\, P_1(x)\, d\mu(x)$$

La mesure $P_1 . \mu$ sur $G = \dfrac{R^m}{\sum_{i=2}^{m+1} a_i \mathbb{Z}}$ est invariante par la rotation $g \to g + a_1$

Le semi-groupe engendré par $\{a_1,\dots,a_{m+1}\}$ étant dense dans R^m, on a :

- $(a_2,\dots,a_{m+1})$ est une base de R^m, et donc G est un groupe compact.
- $\{k\, a_1 \bmod(a_2,\dots,a_{m+1}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans G.

La rotation $g \to g + a_1$ est donc uniquement ergodique.

La mesure $P_1 . \mu$ sur G est proportionnelle à la mesure de Lebesgue.

C'est-à-dire :

$$\int_{R^m} f(x)\, P_1(x)\, d\mu(x) = \text{cste} \times \int_{\sum_{i=2}^{m+1} [0,a_i[} f(x)\, dx \qquad (2)$$

Supposons : il existe B borélien de R^m vérifiant : $\lambda(B) = 0$ et $\mu(B) > 0$. Alors $\exists\, n_2,\dots,n_{m+1} \in \mathbb{Z}$ tels que

$B' = B \cap \prod_{i=2}^{m+1} [n_i\, a_i, (n_i+1)a_i[$ vérifie :

$$\lambda(B') = 0 \quad \text{et} \quad \mu(B') > 0 .$$

On pose $B'' = \bigsqcup_{k_2,\dots,k_{m+1} \in \mathbb{Z}} (B' + k_2\, a_2 + \dots + k_{m+1}\, a_{m+1})$

$1_{B''}$ vérifie (1), donc (2).

D'où : $0 = \int_{B''} P_1(x)\, d\mu(x)$; impossible car $P_1 > 0$ et $\mu(B'') > 0$

conclusion : $\mu \ll \lambda$

b) Soit $g = \frac{d\mu}{d\lambda}$ et $A_0 = \{g>0\}$

On a : $\mu(A_0) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \mu P(1_{A_0}) = \mu(A_0) = 1 \\ P(1_{A_0}) \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(1_{A_0}) = 1 \quad \mu\text{-p.p.}$$

On définit par récurence : $A_{n+1} = A_n \cap \{x | P(1_{A_n})(x) = 1\}$ $(n \geq 0)$

On vérifie facilement par récurrence que $\mu(A_n) = 1$

Posons $A = \bigcap_{n\geq 0} A_n$.

On a : $\mu(A) = 1$

$$x \in A \Rightarrow \forall n \geq 0,\ x \in A_{n+1} \Rightarrow \forall n \geq 0\ P(1_{A_n})(x) = 1 \Rightarrow$$

$$P(1_A)(x) = 1$$

Notons S le semi-groupe engendré par $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$.

$P_1, \ldots, P_{m+1}$ étant strictement positives, on a :

$$\forall x \in A,\ P(1_A)(x) = 1 \Rightarrow \forall x \in A,\ x+a_i \in A (i=1,\ldots,m+1)$$
$$\Rightarrow \forall x \in A,\ \forall s \in S,\ x+s \in A$$

$\mu(A) = 1 \Rightarrow \lambda(A) > 0$

Il existe K compact de R^m tel que $\lambda(A \cap K) > 0$.

$\forall s \in S$, $A^c \cap ((A \cap K) + s) = \emptyset$

$\forall s \in S$, $\int_{A^c} 1_{A\cap K}(y-s)\, dy = 0$

Or $\int_{A^c} 1_{A\cap K}(y-x)\, dy$ est une fonction continue de x (il suffit pour le voir d'approcher $1_{A\cap K}$ par des fonctions continues à support compact).

Cette fonction continue s'annule sur S, donc sur tout R^m

D'où :

$$0 = \iint_{A^c} 1_{A\cap K}(y-x)\, dy\, dx = \int_{A^c} \int 1_{A\cap K}(y-x)\, dx\, dy = \lambda(A\cap K)\, \lambda(A^c)$$

on en déduit : $\lambda(A^c) = 0$

Or $A_0 \supset A$; $\lambda(A_0^c) = 0$ c'est-à-dire $g > 0$ λ-p.p.

conclusion : $\mu \sim \lambda$

c) Soient μ et ν deux probabilités invariantes.

Supposons $\mu \neq \nu$

On a alors $(\mu-\nu)^+$ et $(\mu-\nu)^-$ sont deux mesures finies non nulles.

$$\left.\begin{array}{l} (\mu-\nu)P = \mu-\nu = (\mu-\nu)^+ - (\mu-\nu)^- \\ (\mu-\nu)P = (\mu-\nu)^+P - (\mu-\nu)^-P \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (\mu-\nu)^+ \leq (\mu-\nu)^+P \\ (\mu-\nu)^- \leq (\mu-\nu)^-P \end{array}$$

Or

$$\begin{array}{l} (\mu-\nu)^+P\,(1) = (\mu-\nu)^+(1) \\ (\mu-\nu)^-P\,(1) = (\mu-\nu)^-(1) \end{array} \quad \text{donc} \quad \begin{array}{l} (\mu-\nu)^+ = (\mu-\nu)^+P \\ (\mu-\nu)^- = (\mu-\nu)^-P \end{array}$$

Ceci est impossible car $(\mu-\nu)^+$ et $(\mu-\nu)^-$ qui sont mutuellement singulières ne peuvent être toutes deux équivalentes à la mesure de Lebesgue.

D'où l'unicité de la mesure P-invariante.

Démonstration de la proposition 1 :

Si $a_1,\dots,a_{m+1}$ engendrent un sous-groupe dense de R^m, on a nécessairement que $a_1,\dots,a_m$ est une base de R^m.

$G = \dfrac{\mathbb{R}^m}{a_1\mathbb{Z}+\dots+a_m\mathbb{Z}}$ est un groupe compact.

Le groupe engendré par $a_1,\dots,a_{m+1}$ est dense dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si la rotation induite par a_{m+1} sur G est ergodique. Pour cela, il faut et il suffit que $\forall \chi$ caractère de G, $\chi(a_{m+1}) = 1 \Rightarrow \chi \equiv 1$

les caractères de G sont les $x \to e^{2\pi i(\alpha . x)}$

avec $\alpha \in \mathbb{R}^m$ tel que $\alpha_i . a_i \in \mathbb{Z}$ pour $1 \leq i \leq m$.

On a donc :

Le groupe engendré par $a_1,\dots,a_{m+1}$ est dense dans R^m si et seulement si la seule solution du système $[\alpha.a_i \in \mathbb{Z}$ pour $1\leq i\leq m+1]$ est $\alpha = 0$.

Notons $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ et considérons le système (1) : $\alpha.a_i = k_i$ $1\leq i\leq m+1$.

On note $D(i,k)$ le déterminant obtenu en remplaçant dans D_{m+1} la ième colonne par $\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}$ $(1\leq i\leq m)$

le système (2) : $\alpha.a_i = k_i$ $1\leq i\leq m$ est un système de Cramer qui admet pour unique solution :

$$\alpha_i = \frac{D(i,k)}{D_{m+1}} \qquad 1\leq i\leq m$$

le système (1) est donc équivalent à :

$$\alpha_i = \frac{D(i,k)}{D_{m+1}} \qquad 1\leq i\leq m \quad \text{et} \quad \alpha.a_{m+1} = k_{m+1}$$

soit

$$\alpha_i = \frac{D(i,k)}{D_{m+1}} \qquad 1\leq i\leq m \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} a^i_{m+1}\, D(i,k) = k_{m+1}\, D_{m+1}$$

un calcul de déterminants montre que : $\sum_{i=1}^{m} a^i_{m+1}\, D(i,k) = -\sum_{i=1}^{m} k_i\, D_i$

le système (1) a donc une solution si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{m+1} k_i\, D_i = 0$$

Conclusion : le groupe engendré par $(a_1,\dots,a_{m+1})$ est dense dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si les D_i sont algébriquement indépendants.

Démonstration de la proposition 2

Soient $a_1,\dots,a_{m+1}$ $\mathbb{R}^m$ tels que

- ils engendrent un sous-groupe dense de $\mathbb{R}^m$
- il n'existe pas d'hyperplan de $\mathbb{R}^m$ tel que tous les a_i appartiennent

à un même demi-espace fermé défini par cet hyperplan.

Montrons tout d'abord:

il existe (m+1) suites croissantes (strict.) de $\mathbb{N}$ $(n_k^1)_{k\geq 0},\dots,(n_k^{m+1})_{k\geq 0}$ telles que :

la suite $\left(\sum_{i=1}^{m+1} n_k^i a^i\right)_{k\geq 0}$ est convergente.

Posons, pour $x \in \mathbb{R}^m$ $f(x) = \inf_{1\leq i\leq m+1} (x.a_i)$

f est continue.

$x\neq 0 \Rightarrow f(x) < 0$ d'après l'hypothèse.

f admet donc un minimum $-\eta(<0)$ sur la sphère unité.

Soit $K_1 = \sup_{1\leq i\leq m+1} \frac{||a_i||^2}{\eta}$ et $K_2 = \inf_{1\leq i\leq m+1} ||a_i||^2$

soit $x \in \mathbb{R}^m$ tel que $||x|| > K_1$

$\exists b_1 \in \{a_1,\dots,a_{m+1}\}$ tel que $x.b_1 < -\eta\,||x||$

$$||x+b_1||^2 = ||x||^2 + ||b_1||^2 + 2x.b_1 < ||x||^2 + ||b_1||^2 - 2\eta||x||$$
$$< ||x||^2 + ||b_1||^2 - 2\eta K_1 \leq ||x||^2 + ||b_1||^2 - 2||b_1||^2$$
$$= ||x||^2 - ||b_1||^2 \leq ||x||^2 - K_2$$

Donc : dès que $||x|| > K_1$

$\exists b_1 \in \{a_1,\dots,a_{m+1}\}$ tel que $||x+b_1||^2 \leq ||x||^2 - K_2$

Notons S le semi-groupe engendré par les a_i

On déduit de ce qui précède que :

$\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\exists s \in S$, $||x+s|| \leq K_1$

On définit une suite $(s_k)_{k\geq 0}$ dans S par récurence :

$s_0 = 0$

s_k étant obtenu, on pose $s'_k = s_k + a_1 + a_2 + \dots + a_{m+1}$

on choisit $s''_k \in S$ tel que $||s'_k + s''_k|| \leq K_1$

et on pose $s_{k+1} = s'_k + s''_k$

La suite $(\hat{s}_k)_{k\geq 0}$ ainsi définie est bien de la forme $(\sum_{i=1}^{m+1} n_k^i a_i)_{k\geq 0}$ avec les $(n_k^i)_{k\geq 0}$ strictement croissantes.

Cette suite est contenue dans le compact de $\mathbb{R}^m$: $\{x \mid ||x|| \leq K_1\}$. On peut donc en extraire une sous-suite convergente qui vérifie bien le résultat souhaité.

Appelons a la limite de la suite $(\sum_{i=1}^{m+1} n_k^i a_i)_{k\geq 0}$ ainsi obtenue.

Soit $x \in \mathbb{R}^m$ et $\varepsilon > 0$.

On va approcher x-a par un élément du groupe dense engendré par les a_i : $\exists\ g_1,\dots,g_{m+1} \in \mathbb{Z}$ tels que

$$||x-a-(g_1a_1+\dots+g_{m+1}\ a_{m+1})|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

d'autre part :

$$\exists k_0 \geq 0 \quad \text{tel que} \quad k \geq k_0 \Rightarrow ||a - \sum_{i=1}^{m+1} n_k^i a_i|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et pour $1 \leq i \leq m+1$

$$\exists\ k_i \geq 0 \quad \text{tel que} \quad k \geq k_i \Rightarrow z_i + n_k^i \geq 0$$

on choisit $k = \max(k_0,k_1,\dots,k_{m+1})$

on a :

$$||x - [(z_1 + n_k^1)\ a_1 + \dots + (z_{m+1} + n_k^{m+1})\ a_{m+1}]|| \leq$$

$$||x - (z_1a_1 + \dots + z_{m+1}a_{m+1}) - a|| + ||a - (n_k^1\ a_1 + \dots + n_k^{m+1}\ a_{m+1})|| \leq \varepsilon$$

et $(z_1 + n_k^1)a_1 + \dots + (z_{m+1} + n_k^{m+1})\ a_{m+1} \in S$.

Conclusion : S est dense dans $\mathbb{R}^m$.

REFERENCES

- M.F. NORMAN : Markov processes and learning models - Academic Press (1972).
- B. JAMISON et R. SINE : Uniqueness of invariant measure for two random translations (1975).