MARIE-FRANCE ALLAIN

Tribus prévisibles et espaces de processus à trajectoires continues indexés par un espace localement compact et métrisable

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1979, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , exp. n° 2, p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1979___1_A2_0>

TRIBUS PREVISIBLES ET ESPACES DE PROCESSUS A TRAJECTOIRES CONTINUES INDEXES PAR UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT ET METRISABLE

Marie-France ALLAIN

Introduction

On se donne un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$ et un espace topologique T non nécessairement ordonné, à cet espace T sont associées de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On définit alors une tribu $\mathcal{P}$ sur $\Omega \times T$ appelée tribu prévisible.

Le cas $T = R_+$ est bien connu ; si $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est une famille croissante, continue à droite, de sous tribus de $\mathcal{F}$, classiquement la tribu $\mathcal{P}$ est engendrée par les ensembles de la forme $]s,t] \times F$, $F \in \mathcal{F}_s$ on sait également que dans ce cas $\mathcal{P}$ est engendrée par les processus à trajectoires continues adaptés à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.

Quand $T = R_+^2$, soit β le mouvement brownien défini par Wong et Zakaï et $\mathcal{F}_t = \sigma(\beta_s, s \in [\![0,t]\!])$ on peut alors définir différente tribus qui correspondent à différentes notions du "passé", qui ont toutes leur intérêt pour la construction des intégrales stochastiques, cependant le fait de les associer à un ordre sur T alourdit l'écriture La formalisation adoptée ici contient les exemples précédents, ainsi que celui qui apparaît dans [1] et [3].

On se donne $\mathcal{A}$ une famille de parties de T, on suppose qu'il existe $(\mathcal{G}_A)_{A\in\mathcal{A}}$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ deux familles de sous tribus de $\mathcal{F}$; on définit les rectangles prévisibles par : $R = A \times F$, $A \in \mathcal{A}$, $F \in \mathcal{G}_A$ et on donne des conditions suffisantes sur T, $\mathcal{A}$, $(\mathcal{G}_A)_{A\in\mathcal{A}}$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ pour que les rectangles prévisibles forment un semi anneau et que la tribu $\mathcal{P}$ soit engendrée par les processus à trajectoires continues, adaptés à $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. Ces conditions sont regroupées en 2-8 et le théorème est énoncé en 2-9. Auparavant, chaque condition a été examinée séparément afin de mettre en évidence la façon dont elle intervient. On montre également que la donnée de l'une des familles de tribu permet de définir l'autre, et que les hypothèses 2-8 sont satisfaites dans quelques cas classiques.

1.- Tribu prévisible

1-1 Données et Notations

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ est un espace probabilisé.

T est un espace topologique

$\mathcal{A}$ est une famille de parties de T

$(\mathcal{G}_A)_{A\in\mathcal{A}}$ est une famille de sous-tribus de $\mathcal{F}$

1-2 Définition

Tribu des prévisibles

Soit $\mathcal{R} = \{A\times F$ tels que $A\in\mathcal{A}$ et $F\in\mathcal{G}_A\}$

$\mathcal{R}$ est l'ensemble des rectangles prévisibles

La tribu des prévisibles est la tribu engendrée par $\mathcal{R}$, on la note $\mathcal{P}$.

1-3 Proposition

On suppose que $\mathcal{A}$ est un semi anneau et que

$\forall\ A_1\ ,\ A_2 \in\mathcal{A} :\ A_1 \subsetneq A_2 \Rightarrow \mathcal{G}_{A_2} \subsetneq \mathcal{G}_{A_1}$

Alors $\mathcal{R}$ est un semi-anneau.

Démonstration

Soient $A\times F$ et $A'\times F'$ éléments de $\mathcal{R}$

$(A\times F)\cap(A'\times F') = (A\cap A')\times(F\cap F')$

$\mathcal{A}$ étant un semi-anneau $A \cap A' \in \mathcal{A}$

D'autre part $F \cap F' \in \mathcal{G}_A \vee \mathcal{G}_{A'} \subseteq \mathcal{G}_{A \cap A'}$ d'après l'hypothèse faite sur la famille $(\mathcal{G}_A)_{A \in \mathcal{A}}$

En conséquence $\mathcal{R}$ est stable par intersection.

Maintenant si $A x F \subseteq A' x F'$

$[A' x F'] - [A x F] = [(A'-A) \times F'] \cup [A x (F'-F)]$

$\mathcal{A}$ étant un semi-anneau $A'-A = \bigcup_{i=1} C_i, C_i \in \mathcal{A}$

D'autre part $C_i \subseteq A' \Rightarrow \mathcal{G}_{A'} \subseteq \mathcal{G}_{C_i} \Rightarrow C_i x F' \in \mathcal{R}$

et $F'-F \in \mathcal{G}_{A'} \vee \mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_A \Rightarrow [A x (F'-F)] \in \mathcal{R}$ ce qui achève la démonstration.

1-4 <u>Exemples</u>

1.4.1. Soient $T = R_+$ et $(\Omega, \mathcal{F}, P, \beta)$ un mouvement brownien.

Soit $\mathcal{A} = \{]s,t] \; , s,t \in R_+\}$

$\mathcal{G}_{]s,t]} = \mathcal{F}_s = \sigma(\beta_u \; u \leq s)$

alors $\mathcal{R} = \{]s,t] x F \; , F \in \mathcal{F}_s\}$

1.4.2. Soient $T = \mathbb{R}^2_+$, $(\Omega, \mathcal{F}, P, \beta)$ un mouvement brownien sur T tel qu'il est défini par Wong et Zakaï [6].

Soit $\mathcal{A} = \{]s^1, t^1] x]s^2, t^2] \; , s^i, t^i \in R_+\}$

Pour chaque t on peut définir les tribus :

$\mathcal{F}_t = \sigma(\beta_s \; s \in [0,t])$

$\mathcal{F}^1_t = \sigma(\beta_s \; s \in [0,t^1] x \mathbb{R}_+)$

$\mathcal{F}^2_t = \sigma(\beta_s \; s \in \mathbb{R}_+ x [0,t^2])$

$\mathcal{F}^*_t = \mathcal{F}^1_t \vee \mathcal{F}^2_t$

A chaque A de $\mathcal{A}$ on peut associer les tribus :

$$\mathcal{G}_A = \bigcap_{t \in A} \mathcal{F}_t \; , \mathcal{G}^i_A = \bigcap_{t \in A} \mathcal{F}^i_t \; , \mathcal{G}^*_A = \bigcap_{t \in A} \mathcal{F}^*_t$$

ce qui conduit à différentes tribus de prévisibles telles que

$\mathcal{P} = \mathcal{P}^1 \cap \mathcal{P}^2 \; , \mathcal{P}^* = \mathcal{P}^1 \vee \mathcal{P}^2$

Mais on peut également associer à $\mathcal{A}$ une famille notée $\mathcal{A}^{(2)}$ de parties de $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ définie de la façon suivante :

$$A^{(2)} \in \mathcal{A}^{(2)} \iff \begin{cases} A^{(2)} = A \times B \quad A \text{ et } B \in \mathcal{A} \\ \text{et } \forall u \in A \quad \forall v \in B \quad u \text{ et } v \text{ ne sont pas comparables} \end{cases}$$

$\mathcal{A}^{(2)}$ est un semi anneau et pour $A^{(2)} \in \mathcal{A}^{(2)}$ tel que $A^{(2)} =]u,s] \times]v,t]$ on pose $\mathcal{G}_{A^{(2)}} = \mathcal{F}_{u \vee v}$ la tribu prévisible associée est celle définie par Wong et Zakaï pour la construction de l'intégrale de 2ème type et des intégrales mixtes [3].

1.4.3. Soient $T = \mathbb{R}^d$ et $(\Omega, \mathcal{F}, P, \beta)$ un mouvement brownien sur T tel qu'il est défini par P. Lévy.

Soit $\mathcal{A} = \{A : A = \{x : a^2 < ||x||^2 = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \leq b^2\} \quad a, b \in R_+^* \; a<b\}$

$\mathcal{G}_A = \sigma(\beta_t : ||t|| \leq a)$

1-5 Propriété

Soit T un espace, $\mathcal{A}$ une famille de parties de T, $(\mathcal{A}^n)_{n\in N}$ une suite de familles de parties de T.

On suppose donné pour tout élément A de $\mathcal{A} \cup (\bigcup_{n\in N} \mathcal{A}^n)$ une tribu $\mathcal{G}_A$ et que les hypothèses suivantes sont satisfaites

i) si $A^n \in \mathcal{A}^n$ alors $A^n = \sum_k A_k$ avec $A_k \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{G}_{A_k} \supseteq \mathcal{G}_{A^n}$

ii) si $A \in \mathcal{A}$ alors $A = \bigcap_n A^n$ avec $A^n \in \mathcal{A}^n$

$A^{n+1} \subseteq A^n$ et $\mathcal{G}_A = \bigvee_n \mathcal{G}_{A^n}$ avec $\mathcal{G}_{A^n} \subseteq \mathcal{G}_{A^{n+1}}$

soit $\mathcal{P}$ la tribu prévisible associée à $\mathcal{A}$ et $(\mathcal{G}_A)_{A\in\mathcal{A}}$

$\mathcal{P}^n$ la tribu prévisible associée à $\mathcal{A}^n$ et $(\mathcal{G}_A)_{A\in\mathcal{A}^n}$

Alors $\mathcal{P} = \bigvee_n \mathcal{P}^n$

Démonstration

Soit $\mathcal{R} = \{A \times F \quad A \in \mathcal{A} \quad F \in \mathcal{G}_A\}$

et soit $R = A \times F \in \mathcal{R}$, par suite des hypothèses (ii) il existe une suite

$(g_n)_{n\in N}$ de fonctions $\mathcal{F}^n$-mesurables telles que $\lim g_n = 1_R$. Il suffit pour cela de prendre $g_n = f_n \, 1_{A^n}$; f_n $\mathcal{G}_{A^n}$-mesurable et $\lim\limits_n f_n = 1_F$.
en conséquence $\mathcal{R} \subseteq \bigvee_n \mathcal{F}^n$ et donc $\mathcal{F} \subseteq \bigvee_n \mathcal{F}^n$.

Réciproquement
soit $\mathcal{R}^n = \{A \times F \quad A \in \mathcal{A}^n \quad , \quad F \in \mathcal{G}_A\}$
et soit $R = A \times F \in \mathcal{R}^n$ par suite des hypothèses (i) R appartient à $\mathcal{F}$.

En effet $R = \sum\limits_k (A_k \times F)$ mais $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_{A_k} \Rightarrow A_k \times F \in \mathcal{R} \Rightarrow R \in \mathcal{F}$
en conséquence $\mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{F}$ et $\bigvee_n \mathcal{F}^n \subseteq \mathcal{F}$.

1-6 Exemples

1) soit $T = \mathbb{R}^N$

$\mathcal{A} = \{]s,t] \; : \; u \in]s,t] \Leftrightarrow s^i < u^i \leq t^i \quad \forall i \in N\}$

$\mathcal{A}^n = \{\bar{\pi}^n(]s,t]) \; : \; u \in \bar{\pi}^n(]s,t]) \Leftrightarrow s^i < u^i \leq t^i \quad i = 1,\dots,n\}$

soit X un processus sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indexé par T pour t fixé soit
$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \not< t$ c.a.d. il existe $i \, : \, s^i \leq t^i)$
pour $A \in \mathcal{A}$ et $A =]s,t]$ on pose $\mathcal{G}_A = \mathcal{F}_s$
pour $A \in \mathcal{A}^n$ et $A = \bar{\pi}^n(]s,t])$ on pose $\mathcal{G}_A = \sigma\{X_u : \exists i \in \{1 \dots n\}$ tel que $u^i \leq s^i\}$

2) soit $T = \mathbb{R}_+^N$
on définit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^n$ comme précédemment, pour t fixé, on définit $\mathcal{F}_t$ par :
$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s \, , \, s \leq t$ c.a.d. $s^i \leq t^i \quad \forall i)$
pour $A \in \mathcal{A}$ et $A =]s,t]$ on pose $\mathcal{G}_A = \mathcal{F}_s$
pour $A \in \mathcal{A}^n$ et $A = \bar{\pi}^n(]s,t])$ on pose $\mathcal{G}_A = \sigma(X_s \quad s \leq u \quad \forall u \in A)$

On suppose que ii) est satisfaite, sinon on modifie la définition de $\mathcal{G}_A$ pour $A \in \mathcal{A}$

1-7 La propriété précédente est vraie si ii) est remplacé par :

iii) si $A \in \mathcal{A}$ alors $A = \bigcap_{n \in I} A^n$ avec $A^n \in \mathcal{A}^n$

et $\mathcal{G}_A = \bigvee_{n \in I} \mathcal{G}_{A^n}$

En effet, soit $R = A \times F$ $A \in \mathcal{A}$ et $F = \mathcal{G}_A$.

$A = \bigcap_{n \in I} A^n$; $\mathcal{G}_A$ est engendrée par $\bigcap_{i \in I} F_i = F$ $F_i \in \mathcal{G}_{A^i}$

alors $A \times F = (\bigcap_{n \in I} A^n) \times (\bigcap_{i \in I} F_i) = \bigcap_{n \in I} (A^n \times F_n)$ et

$A^n \times F_n \in \mathcal{R}^n \Rightarrow A \times F \in \bigvee_n \mathcal{P}^n$

si $F \in \mathcal{G}_A$ il existe (g_n) telle que g_n soit une fonction simple $g_n \to 1_F$ et $g_n 1_A \in \bigvee_n \mathcal{P}^n$.

1-8 Exemple

$T = \mathbb{R}_+^2$ β brownien sur T

$\mathcal{A}^1 = \{ \ ]s',t'] \times \mathbb{R}_+^* \ \}$

$\mathcal{A}^2 = \{ \mathbb{R}_+^* \times]s^2,t^2] \}$

$\mathcal{A} = \{ \ ]s,t] \ , s, t \in \mathbb{R}_+ \}$

pour $A \in \mathcal{A}^1$ $\mathcal{G}_A = \sigma(\beta_u \ u' \leq s')$

pour $A \in \mathcal{A}^2$ $\mathcal{G}_A = \sigma(\beta_u \ u^2 \leq s^2)$

pour $A \in \mathcal{A}$ $\mathcal{G}_A = \sigma(\beta_u \ u' \leq s'$ ou $u^2 \leq s^2)$

On a si $A \in \mathcal{A}$ $A = A^1 \cap A^2$ avec $A^i \in \mathcal{A}^i$

et $\mathcal{G}_A = \mathcal{G}_{A_1} \vee \mathcal{G}_{A_2}$

d'autre part si $A \in \mathcal{A}^1$

$$A =]s',t'] \times \mathbb{R}_+^* = \sum_{k=0}^{+\infty}]s^1, t^1] \times]k, k+1]$$

$$= \sum_k A_k$$

où $A_k \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{G}_{A_k} \supseteq \mathcal{G}_A$ d'où $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^1 \vee \mathcal{P}^2$

1-9 Propriété

Soit $I \subseteq \mathbb{N}$ I fini ou dénombrable, pour tout i de I on suppose donné $\mathcal{A}^i$ et $(\mathcal{G}^i_A)_{A \in \mathcal{A}^i}$

Soit $\mathcal{P}^i$ la tribu prévisible correspondante. On définit $\mathcal{A}$ et $(\mathcal{G}_A)_{A\in\mathcal{A}}$ par : $\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}^i$ et pour $A \in \mathcal{A}$ $\mathcal{G}_A = \bigvee_{i\in I} \mathcal{G}^i_A$ (si $A \notin \mathcal{A}^i$ on pose $\mathcal{G}^i_A = \{\emptyset, \Omega\}$). Soit $\mathcal{P}$ la tribu prévisible correspondante. Alors

$$\mathcal{P} = \bigvee_{i\in I} \mathcal{P}^i$$

<u>Démonstration</u>

$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{R}^i \subseteq \{A \times F \ : A \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}^i,\ F \in \bigvee_{i\in I} \mathcal{G}^i_A\} = \mathcal{R}$$

$$\Rightarrow \bigvee_{i\in I} \mathcal{P}^i \subseteq \mathcal{P}$$

réciproquement.

Soit $A \times F \in \mathcal{R}$

* si $A \in \mathcal{A}^i$ et $A \notin \mathcal{A}^j$ $\forall i \neq j$ alors $\mathcal{G}_A = \mathcal{G}^i_A$ et $A \times F \in \mathcal{R}^i$

* sinon supposons que

$$A \in \bigcap_{i\in I_0} \mathcal{A}^i \quad \text{et} \quad A \notin \bigcup_{i\in I-I_0} \mathcal{A}^i$$

alors $\mathcal{G}_A = \bigvee_{i\in I_0} \mathcal{G}^i_A$ et $\mathcal{G}_A$ est engendrée par

$$\{\bigcap_{i\in I_0} F^i \quad F^i \in \mathcal{G}^i_A \quad i \in I_0\}$$

supposons que $F = \bigcap_{i\in I_0} F^i$ dans ce cas

$A \times F = \bigcap_{i\in I_0} (A \times F^i)$ et $A \times F^i \in \mathcal{R}^i$ donc

$A \times F \in \bigvee_{i\in I} \mathcal{P}^i$

on en déduit que $\mathcal{R} \subseteq \bigvee_{i\in I} \mathcal{P}^i$ et donc $\mathcal{P} \subseteq \bigvee_{i\in I} \mathcal{P}^i$

1-10 <u>Propriété</u>

Soit $(\mathcal{A}^i)_{i\in I}$ une suite croissante de familles de parties de T, soit $\mathcal{A} = \{A : A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n \quad A^n \subseteq A^{n+1} \quad A^n \in \mathcal{A}^n\}$

on suppose que pour chaque $A \in \mathcal{A}$ il existe une tribu $\mathcal{G}_A$ telle que :

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{G}_B \subseteq \mathcal{G}_A.$$

Soit $\mathcal{P}^i$ la tribu prévisible associée à $(\mathcal{A}^i, (\mathcal{G}_A)_{A\in\mathcal{A}^i})$

$\mathcal{P}$ la tribu prévisible associée à $(\mathcal{A}, (\mathcal{G}_A)_{A\in\mathcal{A}})$

alors $\mathcal{P} = \bigvee_{i\in I} \mathcal{P}^i$

Démonstration

Si $R = F \times A \in \mathcal{R}^i$, $A \in \mathcal{A}^i$ et $F \in \mathcal{G}_A$ et donc $R \in \mathcal{R}$

$\Rightarrow \bigvee_{i\in I} \mathcal{P}^i \subseteq \mathcal{P}$

Si $R = F \times A \in \mathcal{R}$ $\quad 1_R = 1_F \cdot \lim_n 1_{A_n}$ mais $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_{A_n}$

donc $R_n = F \times A_n \in \mathcal{R}^n$ en conséquence $\mathcal{R} \subset \bigvee_{i\in I} \mathcal{P}^i$

1-11 Définitions

1.11.1 Un champ aléatoire X sur T est un processus sur $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ indexé par T

1.11.2 Un champ aléatoire X est $(\mathcal{A}, \mathcal{G}.)$ prévisible si l'application : $(t,\omega) \to X(t,\omega)$ est mesurable pour la tribu $\mathcal{P}$ associée aux famille $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}_\cdot = (\mathcal{G}_A)_{A\in\mathcal{A}}$

1.11.3 Un champ aléatoire est adapté à une famille $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$ si pour chaque t X_t est $\mathcal{G}_t$-mesurable.

On suppose toujours $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{G}$

1-12 Proposition

Les champs aléatoires prévisibles sont adaptés à la famille $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$ si et seulement si pour tout A de $\mathcal{A}$ et tout t de A $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_t$

Démonstration

Si tout champ aléatoire prévisible est adapté en particulier $X = 1_{A\times F}$ où $A \times F \in \mathcal{R}$ est adapté.

Soit t fixé $\quad X_t = \begin{cases} 0 \text{ si } t \notin A \\ 1_F \text{ si } t \in A \end{cases}$

Il en résulte que si $t \in A$ $F \in \mathcal{G}_t$, en faisant varier F dans $\mathcal{G}_A$ on en déduit que $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_t$.

Réciproquement :

si $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_t$ pour tout t de A le processus prévisible $X = 1_{A\times F}$ où $F \in \mathcal{G}_A$ est adapté et donc tout processus prévisible est adapté.

1-13 Corollaire

Si $\mathcal{G}_A = \bigcap_{t\in A} \mathcal{G}_t$ les champs aléatoires prévisibles sont adaptés à la famille $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$

1-14 Corollaire

Si pour tout t de T $\mathcal{A}_t = \{A \in \mathcal{A} : t \in A\} \neq \phi$
on définit $(\mathcal{G}_t)_{t \in T}$ par $\mathcal{G}_t = \bigvee_{A \in \mathcal{A}_t} \mathcal{G}_A$
alors les champs aléatoires prévisibles sont adaptés à la famille $(\mathcal{G}_t)_{t \in T}$

2. - Relation entre champs aléatoires prévisibles et processus adaptés à trajectoires continues

2-1 Hypothèses

2.1.1. T est un espace topologique localement compact et métrisable.

2.1.2. Soit $\mathring{\mathcal{A}} = \{\mathring{A} : A \in \mathcal{A}\}$ on suppose que $\mathring{\mathcal{A}}$ contient une base de la topologie de T.

2-2 Proposition

Soit $(\mathcal{G}_t)_{t \in T}$ une famille de sous tribus de $\mathcal{G}$ telle que $\forall A \in \mathcal{A}$ et $\forall t \in A$ $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_t$

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que :

$$A_{n+1} \subseteq A_n \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{A_n} \subseteq \mathcal{G}_{A_{n+1}}$$

soit $A = \bigcap_n \mathring{A}_n$ et $F \in \bigvee_n \mathcal{G}_{A_n}$

Alors $A \times F$ appartient à la tribu $\mathcal{C}$ engendrée par les processus à trajectoires continues, adaptées à $(\mathcal{G}_t)_{t \in T}$

Démonstration

Soit $R = A \times F$, $F \in \bigvee_n \mathcal{G}_{A_n}$ alors il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions telles que

$$\begin{cases} f_n \text{ est } \mathcal{G}_{A_n}\text{-mesurable} \\ f_n \to 1_F \end{cases}$$

Soit $X_n(t,\omega) = f_n(\omega)\, 1_{\mathring{A}_n}(t)$, $X_n(t,\omega) \to 1_R(t,\omega)$ $\mathring{A}_n$ étant ouvert et T localement compact, il existe une suite $(\phi^n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues telles que :

$$\begin{cases} \operatorname{supp} \phi^n_k \subseteq \mathring{A}_n \\ \lim\limits_{k \to \infty} \phi^n_k = 1_{\mathring{A}_n} \end{cases}$$

Soit alors $X^n_k(t,\omega) = f_n(\omega)\, \phi^n_k(t)$

et $\forall t \in A$ $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_t$.

On suppose que $\forall$ $A \in \mathcal{A}$, il existe une famille $(A^n_k)_{\substack{n\in \mathbb{N}\\ k\in \mathbb{N}}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que :

- $A = \bigcup_n \bigcap_k A^n_k$
- $A^n_{k+1} \subseteq A^n_k$ $\quad \mathcal{G}_{A^n_k} \subseteq \mathcal{G}_{A^n_{k+1}}$
- $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A^n_k \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A^{n+1}_k$
- $\mathcal{G}_A \subseteq \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_{A^n_k}$

Alors la tribu prévisible est contenue dans la tribu $\mathcal{C}$ engendrée par les processus à trajectoires continues, adaptés à $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$

- $X^n_k(\cdot,\omega)$ est continue
- $X^n_k(t,\cdot)$ est nul si $t \notin A_n$ et est $\mathcal{G}_{A_n}$-mesurable si $t \in A_n$ mais alors $\mathcal{G}_{A_n} \subseteq \mathcal{G}_t$, donc X^n_k est adapté à la famille $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$

2-3 <u>Corollaire</u>

Si les hypothèses de la proposition 2-2 sont satisfaites, pour tout A de $\mathcal{A}$ et si de plus $\mathcal{G}_A \subseteq \bigvee_n \mathcal{G}_{A_n}$ alors la tribu prévisible est contenue dans la tribu engendrée par les processus à trajectoires continues, adaptés à $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$

<u>Démonstration</u>

Tout rectangle prévisible est de la forme $A \times F$, $A\in \mathcal{A}$

Démonstration

Soit $R = A \times F$ un rectangle prévisible, alors $1_R = \lim\limits_n 1_{A^n \times F}$ où $A^n = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} A^n_k$

$F \in \mathcal{G}_A$ donc $F \in \bigvee\limits_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_{A^n_k}$

alors d'après la proposition 2-2 $A^n \times F$ appartient à $\mathcal{C}$, en conséquence $R \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$.

2-5 Applications

2.5.1. On suppose que $\mathcal{P}$ est la tribu prévisible considérée dans la pro- propriété 1-10, alors si pour chaque i $\mathcal{A}^i$ satisfait aux hypothèses du corollaire 2-3 la tribu $\mathcal{P}$ est contenue dans $\mathcal{C}$.

2.5.2. Soit $A \times B =]u,s] \times]v,t]$: $u,s,v,t \in \mathbb{R}^2$ et $s^1 \leq v^1$, $u^2 \geq t^2$

Soit $\mathcal{A}^{(2)}$ la famille des ensembles de ce type, elle intervient dans la définition des intégrales de 2-type [6]

si $u^2 > t^2$ et $s^1 < v^1$ $A \times B$ peut s'écrire :

$$A \times B = \bigcap_n \overbrace{A_n \times B_n}^{\circ} \qquad A_n \times B_n \in \mathcal{A}^{(2)}$$

mais si $u^2 = t^2$ et $s^1 \leq v^1$ (ou $u^2 \geq t^2$, $s^1 = v^1$) ce n'est plus possible en effet, supposons que $A \times B \subset \overbrace{A_i \times B_i}^{\circ}$, le point $t \in$ B, et il existe $h^2 > 0$ tel que $\bar{t} = (t^1, t^2 + h^2) \in \mathring{B}_1$, alors le point $\bar{u} = (u^1, u^2 + \frac{h^2}{2}) \in A$ et $(\bar{u}, \bar{t}) \in A_1 \times B_1$ mais $u^1 < t^1$ et $u^2 + \frac{h^2}{2} < t^2 + h^2$ donc $A_i \times B_i \notin \mathcal{A}^{(2)}$

Par contre, on peut écrire $A \times B = \bigcup\limits_n (A_n \times B_n)$, $A_n \times B_n \in \mathcal{A}^{(2)}$ et $A_n \times B_n$ satisfaisant aux hypothèses du corollaire 2-3, par exemple

$A_n =]u + h_n, s]$, $B_n =]v + h_n, t]$

avec $h_n = \frac{1}{2n}\left((s^1 - u^1) \wedge (t^1 - v^1), (s^2 - u^2) \wedge (t^2 - v^2)\right)$ pour $n \geq 1$

Soit alors, pour n fixé $A^n_k =]u + h_n, s + \frac{h_k \wedge h_n}{2}]$

et

$$B^n_k =]v + h_n, t + \frac{h_k \wedge h_n}{2}]$$

On a

$$A_n \times B_n = \bigcap_k \overbrace{A^n_k \times B^n_k}^{\circ}$$

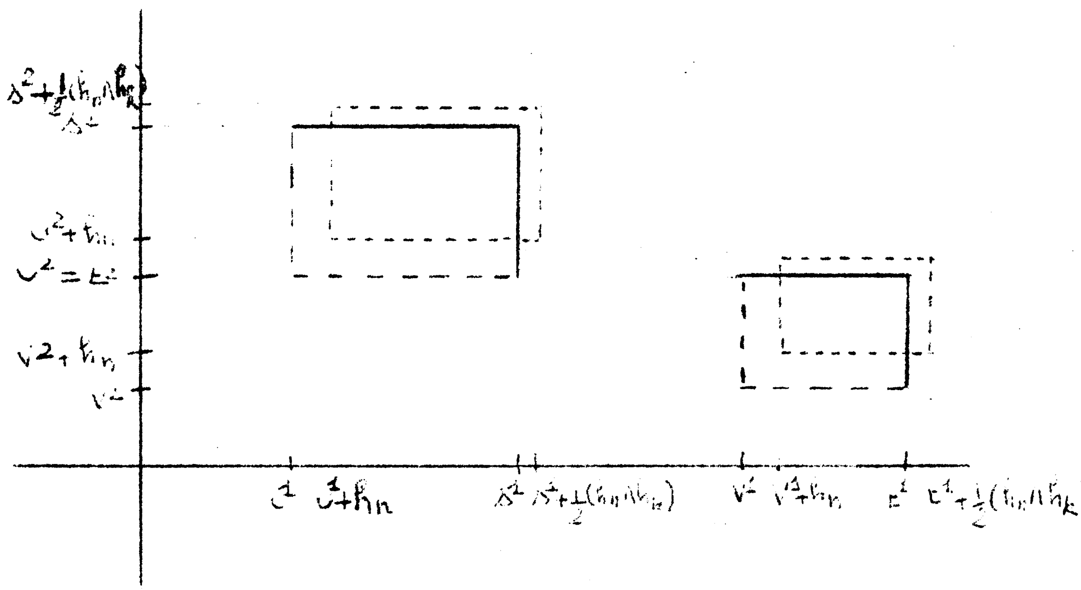
Soit $\mathcal{G}^{(2)}_{A \times B} = \mathcal{F}_{u \vee v}$; $\mathcal{F}^{(2)}(u,v) = \mathcal{F}_{u \vee v}$

Alors $\mathcal{G}^{(2)}_{A_k^n \times B_k^n} = \mathcal{F}_{(u+h_n) \vee (v+h_n)} = \mathcal{G}^{(2)}_{A_n \times B_n} \supseteq \mathcal{G}^{(2)}_{A \times B}$

Les hypothèses du corollaire 2-3 sont donc satisfaites

Remarquons qu'on peut utiliser 2-5.1. en posant

$$\mathcal{A}_n^{(2)} = \{A \times B \ : \ A \times B \in \mathcal{A}^{(2)} \text{ et } \inf_{i=1,2} \ \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} |x^i - y^i| \geq \frac{1}{n} \},$$



2-6 <u>Définition</u>

2.6.1. Soit $A \in \mathcal{A}$, A possède un point initial relativement à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ s'il existe $t_A \in \bar{A}$ tel que $\mathcal{F}_{t_A} \subseteq \mathcal{G}_A$.

2.6.2 <u>Exemples</u>

* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \beta, P)$

  $A =]s,t]$ $\mathcal{G}_A = \mathcal{F}_s$ alors $t_A = s$

* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+^2}, \beta, P)$

$A =]s,t]$ $\begin{cases} - \text{si } \mathcal{G}_A = \mathcal{F}_s \quad \text{alors} \quad t_A = s \\ - \text{si } \mathcal{G}_A = \mathcal{F}_s^1 \quad \text{alors tout point de la forme } (s^1, v^2), \\ \quad v^2 \in [s^2, t^2] \quad \text{peut être pris comme point initial} \end{cases}$

2-7 Proposition

On suppose que tout A de $\mathcal{A}$ possède un point initial relativement à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$.

Alors les processus à trajectoires continues adaptés à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ sont prévisibles.

Démonstration

Soit X et $A \in \mathcal{A}$ tel que Supp $X \subseteq A$

Soit $(V^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de recouvrements ouverts de $\bar{A}$ tels que : $\begin{cases} V^n = (V_k^n)_{k=1\ldots k(n)} \quad V_k^n = \mathring{A}_k^n \quad A_k^n \in \mathcal{A} \\ \bar{A} = \bigcap_n \left(\bigcup_{k=1}^{k(n)} V_k^n \right) \quad \lim_{n \to +\infty} \operatorname{Sup}_k \delta(A_k^n) = 0 \end{cases}$

Soit $(\phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de partitions de l'unité sur $\bar{A}$ associée à la suite $(V^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour chaque V_k^n, il existe $t_k^n \in \overline{A_k^n}$ tel que

$\mathcal{F}_{t_k^n} \subseteq \mathcal{G}_{A_k^n}$

Alors $X^n(t,\omega) = \sum_{k=1}^{k(n)} X_{t_k^n}(\omega)\, \phi_k^n(t)$ est prévisible car $\phi_k^n(t)$ est nulle en dehors de A_k^n et $\mathcal{G}_{A_k^n}$ - mesurable si $t \in A_k^n$, puisque $X_{t_k^n}$ est $\mathcal{F}_{t_k^n}$ - mesurable.

D'autre part,

$$|X^n(t,\omega) - X(t,\omega)| \leq \operatorname*{Sup}_{k=1\ldots k(n)} \operatorname*{Sup}_{t \in A_k^n} |X(t_k^n,\omega) - X(t,\omega)|$$

X étant continu, à support compact, le terme majorant tend vers zéro. Il suffit alors de noter que tout processus à trajectoires continues adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est limite simple d'une suite de processus adaptés à $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ à supports compacts, à trajectoires continues

D'après tout ce qui précède sous certaines hypothèses, la tribu prévisible est engendrée par les processus à trajectoires continues adaptés à une certaine famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. Pour plus de clarté nous appelons H ce groupe d'hypothèses et nous le réécrivons :

2-8 Hypothèses

1- T est un espace topologique localement compact et métrisable

2- $(\Omega,\mathcal{F},P)$ est un espace probabilisé

3- $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est une famille de sous tribus de $\mathcal{F}$

4- $\mathcal{A}$ est une famille de parties de T telle que $\mathring{\mathcal{A}} = \{\mathring{A}, A\in\mathcal{A}\}$ contient une base de la topologie de T

5- $(\mathcal{G}_A)_{A\in\mathcal{A}}$ est une famille de sous-tribus de $\mathcal{F}$ telle que

- $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \mathcal{G}_{A_2} \subseteq \mathcal{G}_{A_1}$
- $\forall A \in \mathcal{A} \quad \forall t \in A \quad \mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{F}_t$
- $\forall A \in \mathcal{A} \; \exists t_A \in \bar{A} : \mathcal{F}_{t_A} \subseteq \mathcal{G}_A$

6- $\forall A\in\mathcal{A}$, il existe $(A_k^n)_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k\in\mathbb{N}}}$ famille d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que :

- pour chaque n $A^n{}_{k+1} \subseteq A_k^n$
- $\bigcap_{k\in N} \mathring{A}_k^n \subseteq \bigcap_{k\in N} \mathring{A}_k^{n+1}$
- $\underline{A} = \bigcup_n (\bigcap_k \mathring{A}_k^n)$
- $\mathcal{G}_A \subseteq \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{k\in N} \mathcal{G}_{A_k^n}$

7- $\mathcal{R} = \{A\times F,\ A \in\mathcal{A},\ F \in\mathcal{G}_A\}$; la tribu prévisible $\mathcal{P}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{R}$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème dont la démonstration a été faite étape par étape dans ce paragraphe 2.

2-9 THEOREME

Sous les hypothèses H, la tribu prévisible est engendrée par les processus à trajectoires continues sur T, adaptés à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.

2-10 Quelques exemples

2.10.1 Si on se donne une famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ on peut définir $\mathcal{G}_A$ par $\mathcal{G}_A = \underset{t\in A}{\cap}\mathcal{F}_t$, c'est le cas qui est considéré dans [3], et qui généralise le cas classique quand $T \subseteq \mathbb{R}_+$ et la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ continue à droite ; pour cette définition de $\mathcal{G}_A$ on a évidemment :

- $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \mathcal{G}_{A_2} \subseteq \mathcal{G}_{A_1}$

- $\forall t \in A$, $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{F}_t$ et si $(\mathcal{G}'_A)_{A\in\mathcal{A}}$ est une autre famille de tribus vérifiant cette propriété, on a $\mathcal{G}'_A \subseteq \mathcal{G}_A$ l'existence du point initial se traduit par : $\forall A \in \mathcal{A}$ $\exists t_A \in \bar{A}$ tel que $\mathcal{F}_{t_A} \subseteq \underset{t\in A}{\cap}\mathcal{F}_t$. Cette condition est satisfaite, quand $T \subseteq \mathbb{R}^d$ $\mathcal{A} = \{A =]s,t] \subseteq T\ ,\ s,t \in \mathbb{R}^d\}$ et $t \geq s \Rightarrow \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ alors s est point initial de $A =]s,t]$. Notons également que si on pose par analogie avec le cas d = 1

$$\mathcal{F}_{s+} = \underset{t>s}{\cap} \mathcal{F}_t \qquad \text{on a} \qquad \mathcal{G}_A = \mathcal{F}_{t_A+}$$

De plus, la condition 2-8-6 est automatiquement satisfaite ; soit

$A =]s,t]$, $A^n =]s,t+h_n]$ avec $h_n^i > h_{n+1}^i > 0$ $i=1,2$ et

$\lim\limits_n h_n = (0,0)$ $A = \underset{n}{\cap} A^n$, $\mathcal{G}_A = \mathcal{G}_{A^n}$

Définissons alors $\overline{\mathcal{F}}_t = \underset{A\in\mathcal{A}_t}{\vee} \mathcal{G}_A$, il est facile de voir que

$\overline{\mathcal{F}}_t = \underset{s<t}{\vee} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{t-}$ $(s<t \iff s^1 < t^1\ ,\ s^2 < t^2)$

En effet, $A\in\mathcal{A}_t \iff A =]t-h_n, t']$ $h_n > 0$ alors on a

$$\mathcal{F}_{t-h_n} \subseteq \mathcal{G}_A = \mathcal{F}_{(t-h_n)+} \subseteq \mathcal{F}_{t-\frac{h_n}{2}}$$

si $t \in A$ on a $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{F}_t$, et comme $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{H}_t$ $\forall A \in \mathcal{A}$ il existe $t_A \in \bar{A}$ tel que $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_A$. On peut énoncer le corollaire :

2-10-2 <u>Corollaire</u>

Soit $T \subseteq \mathbb{R}^d$, $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ un espace probabilisé, $(\mathcal{H}_t)_{t \in T}$ une famille de sous tribus de $\mathcal{H}$ telle que $s \leq t \Rightarrow \mathcal{H}_s \subseteq \mathcal{H}_t$.
Soit $\mathcal{A} = \{]s,t] \subseteq T \; ; \; s < t, \; s,t \in \mathbb{R}^d\}$

$$\mathcal{R} = \{A \times F \;,\; A \in \mathcal{A} \quad F \in \mathcal{G}_A = \bigcap_{t \in A} \mathcal{H}_t\}$$

Alors la tribu prévisible $\mathcal{P}$ est engendrée par les processus à trajectoires continues sur T, adaptés à la famille $(\mathcal{H}_t)_{t \in T}$ (ou à la famille $(\mathcal{H}_{t-})_{t \in T}$. Remarquons que si $\mathcal{G}_A = \bigcap_{t \in \bar{A}} \mathcal{H}_t$ alors $\mathcal{H}_{t_A} = \mathcal{G}_A$

2-10-3

On peut envisager le problème sous un aspect différent en supposant donnée $\mathcal{A}$ et la famille $(\mathcal{G}_A)_{A \in \mathcal{A}}$, on définit alors une famille $(\mathcal{H}_t)_{t \in T}$ de tribus par $\mathcal{H}_t = \bigvee_{A \in \mathcal{A}_t} \mathcal{G}_A$

. si $t \in A \Rightarrow \mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{H}_t$

. si pour $s \leq t$ et $A \in \mathcal{A}_s$ il existe $B \in \mathcal{A}_t$ tel que $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_B$
  alors $\mathcal{H}_s \subseteq \mathcal{H}_t$

. si $\forall \; A \in \mathcal{A} \; \exists \; t_A \in \bar{A}$ tel que $\forall \; B \in \mathcal{A}(t_A)$ $\mathcal{G}_B \subseteq \mathcal{G}_A$
  alors tout A possède un point initial.

La famille de tribus $(\mathcal{H}_t)_{t \in T}$ définie par $\mathcal{H}_t = \bigvee_{A \in \mathcal{A}_t} \mathcal{G}_A$ est la plus petite au sens suivant :

si $(\mathcal{H}'_t)_{t \in T}$ est une famille de tribus qui satisfait aux hypothèses 2-8-5 alors $\forall \; t \in T \quad \mathcal{H}_t \subseteq \mathcal{H}'_t$

en effet $\forall \; t \in T \quad \forall \; A : t \in A \quad \mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{H}'_t$

$$\Rightarrow \quad \forall \; t \in T \quad \mathcal{H}_t = \bigvee_{A \in \mathcal{A}_t} \mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{H}'_t$$

Définissons alors $\overline{\mathcal{G}}_A = \bigcap_{t\in A} \mathcal{F}_t \supseteq \mathcal{G}_A$

Alors $\mathcal{R} = \{A\times F,\ A \in \mathcal{A},\ F \in \mathcal{G}_A\}$ et

$\overline{\mathcal{R}} = \{A\times F,\ A \in \mathcal{A},\ F \in \overline{\mathcal{G}}_A\}$ engendrent la même tribu prévisible.

Notons que $\overline{\mathcal{F}}_t = \bigvee_{A\in\mathcal{A}_t} \overline{\mathcal{G}}_A = \mathcal{F}_t$, en effet

$\mathcal{F}_t = \bigvee_{A\in\mathcal{A}_t} \mathcal{G}_A \subseteq \bigvee_{A\in\mathcal{A}_t} \overline{\mathcal{G}}_A = \overline{\mathcal{F}}_t \subseteq \mathcal{F}_t$

De la même façon si on se donne $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$; $\mathcal{G}_A = \bigcap_{t\in A} \mathcal{F}_t$,
$\overline{\mathcal{F}}_t = \bigvee_{A\in\mathcal{A}_t} \mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{F}_t$; et $\overline{\mathcal{G}}_A = \bigcap_{t\in A} \overline{\mathcal{F}}_t = \mathcal{G}_A$, on a en effet :

$\mathcal{G}_A = \bigcap_{t\in A} \mathcal{F}_t \supseteq \overline{\mathcal{G}}_A = \bigcap_{t\in A} \overline{\mathcal{F}}_t \supseteq \mathcal{G}_A$

En un certain sens, si l'on se donne l'une des familles de tribus on peut trouver un couple optimal pour la définition de la tribu prévisible.

2.10.4 Corollaire

Soit $T \subseteq \mathbb{R}^d$, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ une famille de sous tribus de $\mathcal{F}$ telle que $s\leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$

Soit $T^{(2)} = \{(u,v),\ u \text{ et } v \in T \quad u \text{ et } v \text{ non comparables}\}$

$\mathcal{A}^{(2)} = \{A\times B =]\!]u,s]\!] \times]\!]v,t]\!] \subseteq T^{(2)}\}$

$\mathcal{R}^{(2)} = \{(A\times B) \times F\ ,\ A\times B \in \mathcal{A}^{(2)} \quad F \in \mathcal{G}_{A\times B} = \bigcap_{(x,y)\in A\times B} \mathcal{F}_{x\vee y}\}$

Alors la tribu prévisible $\mathcal{P}$ est engendrée par les processus à trajectoires continues sur $T^{(2)}$, adaptés à la famille $(\mathcal{F}^{(2)}_{u,v})_{(u,v)\in T^{(2)}}$
où $\mathcal{F}^{(2)}_{(u,v)} = \mathcal{F}_{u\vee v}$

Démonstration

1.- $T^{(2)}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

si u et v ne sont pas comparables, il existe I^1, I^2, I^3

tels que $\{1,2\ldots d\} = \sum_{i=1}^{3} I^i$, I^1 et I^2 non vides

et $\forall i \in I^1 \quad u^i < v^i$

$\forall i \in I^2 \quad u^i > v^i$

$\forall i \in I^3 \quad u^i = v^i$

soit $\quad \eta = \frac{1}{4} \operatorname{Inf}_{i \in I^1 + I^2} |v^i - u^i|$

soit $A^i =]u^i - \eta, u^i + \eta[\quad$ et $\quad A = \prod_{i=1}^{d} A^i$

$B^i =]v^i - \eta, v^i + \eta[\quad$ et $\quad B = \prod_{i=1}^{d} B^i$

AxB est un ouvert de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

soit $(\bar{u},\bar{v}) \in A \times B \iff \begin{cases} u^i - \eta < \bar{u}^i < u^i + \eta & \forall i = 1,\ldots,d \\ v^i - \eta < \bar{v}^i < v^i + \eta \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \forall i \in I^1 \quad u^i - \eta < \bar{u}^i < u^i + \eta < v^i - \eta < \bar{v}^i < v^i + \eta \\ \forall i \in I^2 \quad v^i - \eta < \bar{v}^i < v^i + \eta < u^i - \eta < \bar{u}^i < u^i + \eta \end{cases}$

en conséquence $A \times B \subseteq T^{(2)}$ et $T^{(2)}$ est ouvert, de plus pour tout élément $(\bar{u},\bar{v})$ de $T^{(2)}$, il existe $A \times B \in \mathcal{A}^{(2)}$ tel que $A \times B$ soit un voisinage ouvert de $(\bar{u},\bar{v})$ dans $T^{(2)}$.

2.- Si on pose $\mathcal{H}^2_{(\bar{u},\bar{v})} = \mathcal{H}_{\bar{u} \vee \bar{v}}$, et $\mathcal{G}_{A \times B} = \bigcap_{\substack{\bar{u} \in A \\ \bar{v} \in B}} \mathcal{H}^2_{(\bar{u},\bar{v})}$, les hypothèses 2-8-5 sont bien satisfaites.

Pour le point initial, remarquons que si $(u,v) \in \overline{A \times B}^{T^{(2)}}$ et $u \vee v \leq \bar{u} \vee \bar{v} \quad \forall (\bar{u},\bar{v}) \in A \times B$ alors par suite de l'hypothèse faite sur la monotonie de la famille $(\mathcal{H}_t)_{t \in T}$ on a $\mathcal{H}_{u \vee v} \subseteq \mathcal{G}_{A \times B}$

3.- Il reste à montrer que l'hypothèse 2-8-6 est satisfaite soit $A \times B =]\!]u,s]\!] \times]\!]v,t]\!]$ (pour d=2 voir 2-5-2).

On montre d'abord qu'il existe I^1 et I^2 non vides tels que :

si $i \in I^1$ $\quad u^i < s^i \leq v^i < t^i$

si $i \in I^2$ $\quad s^i > u^i \geq t^i > v^i$

soit (s,t), s et t sont non comparables alors il existe

$J_j(s,t)$ $\quad j=1,2,3$ tels que

$J_1(s,t)$ et $J_2(s,t)$ sont non vides et

si $i \in J_1(s,t)$ $\quad s^i < t^i$

si $i \in J_2(s,t)$ $\quad t^i < s^i$

si $i \in J_3(s,t)$ $\quad s^i = t^i$

Considérons s et v

<u>1er cas</u> : s et v sont non comparables alors il existe $J_1(s,v)$, $J_2(s,v)$, non vides, tels que :

si $i \in J_1(s,v) \Rightarrow s^i < v^i$

si $i \in J_2(s,v) \Rightarrow v^i < s^i$

on a $J_1(s,v) \subseteq J_1(s,t)$ et $J_2(s,t) \subseteq J_2(s,v)$

alors pour $i \in J_1(s,v)$ $\quad u^i < s^i < v^i \leq t^i$

$\qquad\qquad i \in J_2(s,t)$ $\quad v^i < t^i < s^i$

et $\complement((J_1(s,v) \cup J_2(s,t)) = \{i : v^i \leq s^i\} \cap \{i : s^i \leq t^i\}$

$\{i : v^i \leq s^i \leq t^i\}$

<u>2ème cas</u> : s et v sont comparables; comme $J_2(s,t) \neq \emptyset$ nécessairement

$v \leq s$

Soit $J_1(v,s) = \{i : v^i < s^i\}$

$J_3(v,s) = \{i : v^i = s^i\}$

J_3 est non vide, car sinon $v < s$ et le point $\bar{v}$ défini par

$\bar{v}^i = v^i + \frac{1}{2}((t^i - v^i) \wedge (s^i - v^i))$ serait dans B et majoré par $s \in A$

D'autre part $J_2(s,t) \subseteq J_1(v,s)$, $J_3(s,t) \subseteq J_1(v,s)$

alors nécessairement $J_1(s,t) \cap J_3(v,s) \neq \emptyset$ et pour

$i \in J_1(s,t) \cap J_3(v,s)$ $\quad u^i < s^i = v^i < t^i$

$i \in J_2(s,t)$ $\quad v^i < t^i < s^i$

et $\complement(\ (J_1(s,t) \cap J_3(v,s)) \cup J_2(s,t)\ ) = \{i : s^i = t^i\} \cup \{i : \ v^i < s^i \leq t^i\}$

Considérons maintenant u et t

<u>1er cas</u> : u et t ne sont pas comparables alors il existe

$J_j(u,t)$ $j = 1,2$ non vides tels que :

. si $i \in J_1(u,t)$ $\quad u^i < t^i$

. si $i \in J_2(u,t)$ $\quad u^i > t^i$

mais $J_1(s,t) \subseteq J_1(u,t)$ et $J_3(v,s) \subseteq J_1(u,t)$

$J_1(s,v) \subseteq J_1(u,t)$

$J_2(u,t) \subseteq J_2(s,t)$

il suffit alors de prendre

$$I_1 = \begin{cases} J_1(s,t) \cap J_3(v,s) & \text{s'il est non vide} \\ J_1(s,v) & \text{sinon} \end{cases}$$

$I_2 = J_2(u,t)$

<u>2ème cas</u> : u et t sont comparables; pour $i \in J_1(s,t)$ on a $u^i < t^i$

donc nécessairement $u^i \leq t^i$ $\forall\ i = 1 \ldots d$

soit $J_1(u,t) = \{i : \ u^i < t^i\}$

$J_3(u,t) = \{i : \ u^i = t^i\}$

comme précédemment $J_3(u,t)$ est non vide, car sinon $u < t$ et le point $\bar{u}$ tel que $\bar{u}^i = u^i + \frac{1}{2}\ (\ (t^i - u^i) \wedge (s^i - v^i)\ )$ serait dans A et majoré ... $t \in B$

D'autre part $J_1(s,t) \subseteq J_1(u,t)$; $J_1(s,v) \subseteq J_1(u,t)$

$J_3(v,s) \subseteq J_1(u,t)$;

$\complement((J_1(s,v) \cup J_2(s,t)) = \{i : v^i \leq s^i \leq t^i\} \subseteq J_1(u,t)$

On en déduit que $J_2(s,t) \cap J_3(u,t) \neq \phi$

Il suffit alors de prendre

$$I_1 = \begin{cases} J_1(s,t) \cap J_3(v,s) & \text{s'il est non vide} \\ J_1(s,v) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$I_2 = J_2(s,t) \cap J_3(u,t)$$

Soit alors $\delta = (\delta^i)_{i=1\ldots d}$ tel que $\delta^i = 1$ si $i \in I^1 \cup I^2$

$\delta^i = 0$ sinon.

Soit $(AxB)^n =]\!]u + \frac{\delta}{n}, s]\!] \times]\!]v + \frac{\delta}{n}, t]\!]$; pour $n \geq n_0$.

$(AxB)^n \subseteq AxB$ donc $(AxB)^n \in \mathcal{A}^{(2)}$

De plus, pour $(\bar{u},\bar{v}) \in (AxB)^n$ on a

$$\inf_{i \in I_1 \cup I_2} |\bar{v}^i - \bar{u}^i| \geq \frac{1}{n}$$

et de plus $\inf_{i \in I_1} |v^i + \frac{\delta^i}{n} - s^i| \geq \frac{1}{n}$

$$\inf_{i \in I_2} |t^i - (u^i + \frac{\delta^i}{n})| \geq \frac{1}{n}$$

Soit alors $(AxB)^{nk}$ défini par :

$$(AxB)^{nk} =]\!]u + \frac{\delta}{n}, s + \frac{\delta_n}{k}]\!] \times]\!]v + \frac{\delta}{h}, t + \frac{\delta_n}{k}]\!]$$

avec δ_n tel que $\delta_n^i = 0$ si $i \notin I_1 \cup I_2$

$$\delta_n^i = \frac{1}{2^n} \quad \text{si} \quad i \in I_1 \cup I_2$$

On a $(AxB)^n = \bigcap_k \overset{\circ}{\widehat{(AxB)^{nk}}}$

$(AxB)^{nk} \supseteq (AxB)^{nk+1}$

On vérifie que $(A\times B)^{nk} \in \mathcal{A}^{(2)}$

pour $(\bar{u},\bar{v}) \in (A\times B)^{nk}$ on a

si $i \in I_1$ $\quad u^i + \frac{1}{n} < \bar{u}^i \leq s^i + \frac{1}{2^{nk}} \leq s^i + \frac{1}{n} \leq v^i + \frac{1}{n} < \bar{v}^i$

si $i \in I_2$ $\quad \bar{u}^i > u^i + \frac{1}{n} \geq t^i + \frac{1}{n} \geq t^i + \frac{1}{2^n{}_k} \geq \bar{v}^i$

en conséquence $\bar{u}$ et $\bar{v}$ ne sont pas comparables.

Il ne reste plus qu'à vérifier que :

$$\mathcal{G}_{A\times B} \subseteq \bigwedge_{n\in N} \bigvee_{k\in N} \mathcal{G}_{(A\times B)^{nk}}$$

mais $\mathcal{G}_{A\times B} = \bigcap_{\substack{\bar{u}\in A \\ \bar{v}\in B}} \mathcal{F}_{\bar{u}\vee\bar{v}}$

alors par suite de la monotonie de la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$

on a $\mathcal{G}_{(A\times B)^{nk}} = \mathcal{G}_{(A\times B)^n}$

et $\mathcal{G}_{A\times B} \subseteq \mathcal{G}_{(A\times B)^n}$ d'où le résultat.

La proposition suivante étend le résultat du théorème 2-9 à certains espaces T non localement compact.

2.11 Proposition

Soit T un espace vectoriel normé séparable

Soit $(T^n)_{n\in N}$ une suite de sous-espaces vectoriels de T de dimension finie, telle que :

i) $T_n \subseteq T_{n+1}$ et $\overline{\bigcup_n T_n} = T$

ii) pour chaque n T^n admet un supplémentaire topologique

Soient $\mathcal{A}$ et $(\mathcal{A}^n)_{n\in N}$ des familles de parties de T telles que

iii) si π_n est la projection de T sur T^n et si $A \in \mathcal{A}^n$ alors $A = \pi_n^{-1}(\pi_n(A))$

iv) Les familles $\mathcal{A}$ et $(\mathcal{A}^n)_{n\in N}$ vérifient les hypothèses de la propriété 1-5.

Soit $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$ une famille de sous tribus de $\mathcal{H}$ telle que :

v) $\forall A \in \bigcup_n \mathcal{A}^n$ et $\forall t \in A \Rightarrow \mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_t$

vi) $\forall n$ $\forall A \in \mathcal{A}^n$ $\exists t \in \bar{A} \cap T^n$ tel que $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{G}_A$

vii) $\forall n$ $\forall t \in T$ $\mathcal{G}_{\pi^n(t)} \subseteq \mathcal{G}_t$

viii) on suppose que les familles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}(T^n) = \pi^n(\mathcal{A}^n)$ vérifient les hypothèses 2-8 (pour $A \in \mathcal{A}(T^n)$ on pose $\mathcal{G}_A = \mathcal{G}_{(\pi^n)^{-1}(A)}$)

Alors la tribu $\mathcal{P}$ des prévisibles sur T associée à $(\mathcal{A},\mathcal{G})$ est engendrée par les processus à trajectoires continues adaptés à la famille $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$.

<u>Démonstration</u>

A.- Soit $\mathcal{P}(T^n)$ la tribu prévisible sur T^n associée à $(\mathcal{A}(T^n),\mathcal{G})$.

Par suite des hypothèses :

- T^n est localement compact
- $\mathcal{A}(T^n)$ vérifie les hypothèses 2-5
- $\forall A \in \mathcal{A}(T^n)$ et $\forall t \in A$ $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_t$

en effet, si $A \in \mathcal{A}(T^n)$ $\exists ! A^* \in \mathcal{A}^n$ tel que $A^* = \pi_n^{-1}(A)$ alors si $t \in A \Rightarrow t \in A^*$ et $\mathcal{G}_A = \mathcal{G}_{A^*}$

et par suite de l'hypothèse V) $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_t$.

- Tout A de $\mathcal{A}(T^n)$ possède un point initial relativement à $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$.

Soit $A \in \mathcal{A}(T^n)$, $A = \pi^n(A^*)$ $A^* \in \mathcal{A}^n$, d'après l'hypothèse (vi) $\exists t \in \bar{A}^* \cap T^n$ tel que $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{G}_{A^*} = \mathcal{G}_A$ π^n étant continue (d'après ii) t appartient à $\bar{A} \subseteq T^n$ en conséquence t est un point initial pour A relativement à $(\mathcal{G}_t)_{t\in T^n}$.

D'après le théorème 2-9, la tribu prévisible $\mathcal{P}(T^n)$ est engendrée par les processus sur T^n à trajectoires continues et adaptés à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T^n}$.

B.- Soit H^n l'application :

$$T \times \Omega \xrightarrow{H^n} T^n \times \Omega$$
$$(t,\omega) \longmapsto (\pi^n(t),\omega) = H^n(t,\omega)$$

$\mathcal{P}(T^n)$ est engendrée par $\mathcal{R}(T^n) = \{\pi^n(A) \times F,\ A \in \mathcal{A}^n,\ F \in \mathcal{G}_A\}$

Soit $\mathcal{P}^n$ la tribu sur $T \times \Omega$ engendrée par :

$$\mathcal{R}^n = \{A \times F,\ A \in \mathcal{A}^n,\ F \in \mathcal{G}_A\}$$

d'après l'hypothèse iii)

$H^n(A\times F) = \pi^n(A) \times F$ et $(H^n)^{-1}(\pi_n(A) \times F) = A \times F$

en conséquence H^n échange les tribus $\mathcal{P}^n$ et $\mathcal{P}(T^n)$; de plus par application de la propriété 1-5.

$$\mathcal{P} = \bigvee_n \mathcal{P}^n .$$

C.- Soit X un processus à trajectoires continues sur T adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.

Soit $X^n = X_{/T^n}$

X^n est un processus à trajectoires continues sur T^n adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\in T^n}$, alors X^n est $\mathcal{P}(T^n)$ mesurable et $X^n \circ H^n$ est $\mathcal{P}^n$-mesurable.

Soit $Y^n = X^n \circ H^n$,

$$\forall t \in T \quad Y^n_t = X^n_{\pi^n(t)} = X_{\pi^n(t)}$$

X étant à trajectoires continues

$$\lim_{n\to\infty} Y^n(t,\omega) = X(t,\omega)$$

et Y^n étant $\mathcal{P}^n$-mesurable X est $\mathcal{P}$ - mesurable.

D.- Réciproquement

soit X un processus $\mathcal{P}$-mesurable alors il existe une suite $(X^{n_k})_{k\in N}$ telle que X^{n_k} soit $\mathcal{P}^{n_k}$-mesurable et $X = \lim_k X^{n_k}$.

X^{n_k} étant $\mathcal{P}^{n_k}$-mesurable, il existe une suite $(Y_j^{n_k})_{j\in N}$ de processus à trajectoires continues sur T^{n_k} adaptés à $(\mathcal{F}_t)_{t\in T^{n_k}}$ telle que

$$X^{n_k} = \lim_{j\to\infty} Y_j^{n_k} \circ H^{n_k}$$

$(Y_j^{n_k} \circ H^{h_k})$ est un processus à trajectoires continues sur T adapté à la famille $(\mathcal{F}_{\pi^{n_k}(t)})_{t\in T}$ et d'après l'hypothèse vii), il est adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.

En conséquence X est limite d'une suite de processus à trajectoires continues sur T adaptés à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.

<u>Remarque</u> :

Si l'hypothèse vii) n'est pas satisfaite, $\mathcal{P}$ est engendré par les processus X à trajectoires continues sur T tels que

$$\begin{cases} \exists n : X = X_{/T^n} \circ H^n \\ \text{et } X_{/T^n} \text{ est adapté à } (\mathcal{F}_t)_{t\in T^n} \end{cases}.$$

2.12 <u>Remarque</u>

Dans les exemples, on suppose en fait que T est un pavé de $\mathbb{R}^d$ et que $\mathcal{A} = \{]s,t], s,t \in T\}$ si T n'est pas ouvert $\mathring{\mathcal{A}}$ ne contient pas nécessairement une base de la topologie de T (il suffit de prendre $T = R_+$ pour le voir), pour être rigoureux il faut soit ajouter des éléments à $\mathcal{A}$, soit considérer la tribu prévisible sur V tel que $\mathring{T} \subseteq V \subseteq T$ et la condition 2-8-4 est satisfaite pour V (si $T = R_+$, $V = \mathring{T} = \mathbb{R}_+^*$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] METIVIER M. : Mesures vectorielles et intégrale stochastique ; Séminaire Rennes, 1972.

[2] METIVIER M. : Un théorème de Riesz pour mesures stochastiques multi-indices ; CRAS t. 281 (1 sept. 1975), série A 277.

[3] METIVIER M., PELLAUMAIL J. : Sur l'intégrale stochastique ; Séminaire de Rennes, 1975.

[4] METIVIER M., PELLAUMAIL J. : Stochastic integration ; Ecole polytechnique, rapport interne n°44.

[5] WONG et ZAKAI : Differentiation formulas for stochastic integrals in the plane ; Memorendum n° ERL M540 (1975), Elect. Research Laboratory Berkeley.

[6] WONG et ZAKAI : Martingales and Stochastic integrals for Processus with a multidimensional parameter ; Z. Wahrsch. Gebiete 29, 109-122 (1974).