Marie-France Allain

Une méthode de construction de l'intégrale stochastique par rapport à des processus $(X_t)_{t\in T}$

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1979, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , exp. n° 1, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1979___1_A1_0>

UNE METHODE DE CONSTRUCTION DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE PAR RAPPORT A DES PROCESSUS $(X_t)_{t\in T}$

Marie-France ALLAIN

1.- Introduction

Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé, X un processus sur cet espace indexé par un espace topologique T non nécessairement totalement ordonné (dans cette rédaction on se restreindra à T ouvert de $\mathbb{R}^d$), $\mathcal{P}$ une tribu sur $T \times \Omega$, on désire associer à X une mesure stochastique μ sur $\mathcal{P}$ qui coïncide lorsque $T \subseteq \mathbb{R}_+$ ou $T \subseteq R_+^2$ avec la mesure stochastique "habituelle" ; par exemple quand T est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}_+$; si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale pour la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ continue, de carré intégrable, $\mathcal{P}$ la tribu prévisible engendrée par les rectangles de la forme $R =]s,t] \times F$, $s,t\in T$ et $F \in \mathcal{F}_s$ μ est définie par $\mu(R) = 1_F(X_t-X_s)$.

La méthode adoptée ici utilise largement les résultats démontrés par Métivier et Pellaumail dans [3] ; elle consiste à associer à X une fonctionnelle stochastique linéaire définie sur un espace $\mathcal{K}$ de processus à trajectoires continues qui engendrent $\mathcal{P}$, un théorème de Riesz permet alors d'affirmer l'existence et l'unicité d'une mesure stochastique μ associée, et sous des hypothèses convenables on caractérise μ sur un semi anneau engendrant $\mathcal{P}$.

2.- Notations et hypothèses

$(\Omega,\mathcal{A},P)$ est un espace probabilisé

T est un ouvert de $\mathbb{R}^d$

$\mathcal{A}$ est une famille de parties de T

$(\mathcal{G}_A)_{A\in\mathcal{A}}$ est une famille de sous-tribus de $\mathcal{F}$

$\mathcal{R} = \{R = A\times F \ , \ A \in \mathcal{A} \ , \ F \in \mathcal{G}_A\}$

La tribu prévisible $\mathcal{P}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{R}$; on suppose que $\mathcal{R}$ est un semi-anneau ;

$(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est une famille de sous-tribus de $\mathcal{F}$.

$\mathcal{H} = \{h : (h_t)_{t\in T}$ est un processus à trajectoires continues, adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}\}$

On suppose que la tribu $\mathcal{P}$ est engendrée par $\mathcal{H}$ (on écrira parfois $\mathcal{P} = \sigma(\mathcal{H})$) pour des exemples de telle situation voir [1] et [3].

$X = (X_t)_{t\in T}$ est un processus sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

D est un opérateur de dérivation ; si pour presque tout ω, $DX(.,\omega)$ existe on adoptera la notation suivante : $\Delta_A X = \int_A DX(s)\, ds$; si pour D donné $\Delta_A X$ peut s'écrire uniquement en fonction de $(X(s))_{s\in T}$ on définira de façon analogue $\Delta_A X$ pour X quelconque, par exemple $d = 2$ $\quad D = \dfrac{\partial^2}{\partial t^1\ \partial t^2}$ alors si $A =]s,t]$ et $s@t = (s^1,t^2)$

$\Delta_A X = X_t - X_{s@t} - X_{t@s} + X_s$

Pour la définition et les propriétés des mesures stochastiques et des fonctionnelles linéaires stochastiques on se réfère à [3], pour la définition et les propriétés des tribus prévisibles à [1].

3.- Différents espaces de Processus

Nous allons d'abord montrer que l'espace $\mathcal{H}$ peut être remplacé sous des hypothèses convenables, par un espace plus petit de processus dont les trajectoires sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3-1 Propriété

Soit T un F_σ

Soit $h \in \mathcal{H}$

alors il existe une suite $(h^n)_{n\in N}$ de processus tels que :

- $\forall n \quad h^n \in \mathcal{H}$
- $\forall n \quad \exists\, C^n \in \mathbb{R}_+ : \forall\,(t,\omega) \quad |h^n(t,\omega)| \leq C^n$
- $\forall n \quad \exists\, K^n$ compact inclus dans T tel que : $\forall t \notin K^n \Rightarrow h^n(t,\cdot)=0$
- $\forall (t,\omega) \quad \lim\limits_{n} h^n(t,\omega) = h(t,\omega)$

Démonstration :

Soit $(\phi^n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, continues, à supports compacts et telles que :

$$\begin{cases} \|\phi^n\|_\infty \leq 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \ \sup\limits_{x\in K} |\phi^n(x)-1| = 0 \quad \text{pour tout compact K de } \mathbb{R} \end{cases}$$

Soit $(\psi^n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de T dans $\mathbb{R}_+$ continues à supports compacts et telles que :

$$\begin{cases} \|\psi^n\|_\infty \leq 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \ \psi^n(t) = 1_T(t) \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre h^n tel que :

$$h^n(t,\omega) = h(t,\omega)\ \phi^n(h(t,\omega))\ \psi^n(t)$$

3-2 Propriété

On suppose qu'il existe une fonction δ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^\infty_K$ telle que si :

$v \in \operatorname{Supp}\delta$, alors $\mathcal{F}_{t-\frac{v}{n}} \subseteq \mathcal{G}_t \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ tel que $t-\frac{v}{n} \in T$

Soit h un processus uniformément borné, à support compact, à trajectoires continues, adapté à la famille $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$.

Alors il existe une suite $(h^n)_{n\in \mathbb{N}}$ de processus ayant les mêmes propriétés que h et ayant de plus leurs trajectoires équicontinues, de classe $\mathcal{C}^{\infty}_{K}$ et convergeant vers h uniformément pour chaque trajectoire.

Démonstration :

On peut supposer que $\int_{\mathbb{R}^d} \delta(u)\, du = 1$ et $h(t,\omega) = 0$ si $t \in \mathbb{R}^d$ et $t \notin T$. On définit h^n par :

$$h^n(t,\omega) = \int h(t-\frac{u}{n},\omega)\ \delta(u)\ du$$

3-3 Corollaire

Soit h un processus uniformément borné, à support compact, à trajectoires équicontinues, adapté à la famille $(\mathcal{M}_t)_{t \in T}$.

Alors, sous les mêmes conditions que pour la proposition 3-2, il existe une suite $(h^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de processus ayant les mêmes propriétés que h et ayant de plus leurs trajectoires de classe $\mathcal{C}^{\infty}_{K,b}$, et convergeant vers h uniformément sur $\Omega \times T$.

Démonstration :

On pose comme précédemment :

$$h^n(t,\omega) = \int h(t-\frac{u}{n},\omega)\ \delta(u)\ du$$

$$= n^d \int h(u,\omega)\ \delta(n(t-u))\ du$$

donc, si D est un opérateur de différentiation, on a :

$$D\ h^n(t,\omega) = n^{2d} \int h(u,\omega)\ D\ \delta(n(t-u))\ du$$

et Dh^n possède les mêmes propriétés que h.

Il suffit de montrer la convergence uniforme :

$$|h(t,\omega) - h^n(t,\omega)| \leq \int |h(t,\omega) - h(t-\frac{u}{n},\omega)|\ \delta(u)\ du$$

δ a un support compact et h a ses trajectoires équicontinues, donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon : \forall\ s,t \in T : \|s-t\| \leq \eta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow |h(t,\omega) - h(t-\frac{u}{n},\omega)| \leq \varepsilon$$

alors : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |h(t,\omega) - h^n(t,\omega)| \leq \varepsilon$

il suffit de prendre $N_\varepsilon : \forall u \in \text{Supp } \delta \quad \frac{\|u\|}{n_\varepsilon} < N_\varepsilon$

3-4 Espaces de processus

Soit $\mathcal{H}_{e\infty} = \{h : (h_t)_{t \in T}$ est un processus uniformément borné à support compact, à ~~trajectoires équicontinues, et de~~ classe $\mathcal{C}_{\infty b}$, adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}\}$

D'après ce qui précède, l'espace $\mathcal{H}_{e\infty}$ engendre la même tribu que $\mathcal{H}$

Soit $\mathcal{H}_b = \{h \in \mathcal{H}$: h est uniformément borné$\}$

pour $h \in \mathcal{H}_b$, on pose $\|h\|_\infty = \underset{t \in T}{\text{Sup}} \ \underset{\omega \in \Omega}{\text{ess sup}} |h(t,\omega)|$. $\mathcal{H}_b$ muni de cette norme est un espace de Banach,

soit $\mathcal{H}_{e,o} = \{h \in \mathcal{H}_b$, à trajectoires ~~équicontinues qui~~ s'annulent à l'infini$\}$

$\mathcal{H}_{e,o}$ est la fermeture de $\mathcal{H}_{e,\infty}$ dans $\mathcal{H}_b$, de plus si h_1 et $h_2 \in \mathcal{H}_{e,o}$ $h_1 \wedge h_2$ également. Dans toute la suite, on considère cet espace $\mathcal{H}_{e,o}$ qui satisfait aux hypothèses du Théorème de Riesz [3] et son sous-espace dense $\mathcal{H}_{e,\infty}$.

4.- Fonctionnelles linéaires stochastiques et mesures stochastiques

4-1 Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, soit D un opérateur de dérivation, on suppose que DX existe, que DX est mesurable pour $B(T) \otimes \mathcal{F}$ où $B(T)$ est la tribu borélienne sur T et que :

$$E([\int |DX_s| \, ds]^2) < +\infty$$

Pour $h \in \mathcal{H}_b$, on définit $m(h)$ par :

$$m(h) = \int_T h(s) \, DX_s \, ds$$

m ainsi définie est une 2_fonctionnelle linéaire stochastique, à laquelle est associée de façon unique une mesure stochastique d'ordre 2 sur $\mathcal{P}$ telle que $\forall\, h \in \mathcal{H}_b \quad m(h) = \int h \, d\mu$ (cf. [3])
De plus, si $R = A \times F \in \mathcal{P}$ on a $\mu(R) = 1_F \int_A D\, X_s d_s = 1_F \Delta_A X$.
En fait, si $T \subseteq \mathbb{R}^d$ et $D = \frac{\partial^d}{\partial t^1 \ldots \partial t^d}$, il suffit qu'il existe une application f de $(T \times \Omega,\ B(T) \otimes \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ telle que :

$$- \Delta_A X = \int_A f(s,\omega)\, ds \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$- E\Big(\int_T |f(s,\omega)|\, ds\Big)^2\Big) < +\infty$$

pour que l'on puisse associer à X une fonctionnelle linéaire stochastique μ telle que $\mu(A \times F) = 1_F\ \Delta_A X$.

<u>4-2</u> Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose maintenant que $D = \frac{\partial^d}{\partial t^1 \ldots \partial t^d}$, que T est borné et que X vérifie les hypothèses suivantes :

<u>4.2.1</u>

$$- E(\sup_{u \in T} |X(u)|^2) < +\infty$$

<u>4.2.2</u>

- Il existe un compact K_o d'intérieur non vide tel que $\forall u \in K_o, \ \forall s \in T$:

$$\lim_{n \to +\infty} E(|X(s-\tfrac{u}{n}) - X(s)|^2) = 0$$

où on pose : $X(s-\frac{u}{n}) = 0$ si $X(s-\frac{u}{n})$ n'est pas défini

4-3 Lemme

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus et soit $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de processus tels que :

- à chaque X^n est associée une 2-fonctionnelle linéaire stochastique m^n sur $\mathcal{H}_{e,o}$

- il existe une constante C telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sup_{\|h\|_\infty \leq 1} E([m^n(h)]^2) \leq C$$

- $\forall h \in \mathcal{H}_{e,\infty}$ $m^n(h) = \int D h_s \, X_s^n \, ds$ où D est un opérateur de dérivation et $\lim_n E([\int D h_s \, (X_s^n - X_s) ds]^2) = 0$

alors il existe une 2-fonctionnelle linéaire stochastique sur $\mathcal{H}_{e,o}$ associée à X telle que :

$$\forall h \in \mathcal{H}_{e,\infty} \quad m(h) = \int D h_s \, X_s \, ds$$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le Théorème de Riesz (iii) [3]. Puisque $\sup_n \sup_{\|h\|_\infty \leq 1} E([m^n(h)]^2) \leq C$, la suite $(m^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence simple, $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ étant muni de sa topologie faible.

Mais pour toute sous-suite $(m^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, la condition : $\lim_n E([\int D h_s (X_s^n - X_s) ds]^2) = 0$ pour $h \in \mathcal{H}_{e,\infty}$ implique que $(m^{n_k}(h))_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ et donc faiblement vers $\int D h_s \, X_s \, ds$.

$\mathcal{H}_{e,\infty}$ étant dense dans $\mathcal{H}_{e,o}$ pour la norme uniforme, il en résulte que toutes les sous-suites ont même limite et la suite (m^n) admet une limite m qui est une 2-fonctionnelle linéaire stochastique telle que : $\forall h \in \mathcal{H}_{e,\infty}$ $m(h) = \int D h_s \, X_s \, d_s$.

4-4 Lemme

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^d}$ un processus tel que $\int_{\mathbb{R}^d} |X_s| ds < +\infty$; soit D un opérateur de dérivation. On suppose qu'il existe une fonction f sur $(T \times \Omega, B(T) \otimes \mathcal{M}))$, à valeurs rélles telle que :

- $\forall h \in \mathcal{H}_{e,\infty}$ (T) on a au sens des distributions

$$\langle Dh, X\rangle = (-1)^{|D|} \langle h,f\rangle$$

- $E([\int_T |f(s)|ds]^2) < +\infty$

alors on peut associer à X une 2-fonctionnelle linéaire stochastique sur $\mathcal{H}_{e,o}(T)$ telle que : $\forall h \in \mathcal{H}_{e,\infty}(T)$

$$m(h) = (-1)^{|D|} \int Dh_s\ X_s\ d_s = \int h_s\ f(s)\ ds.$$

4-5 Lemme

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus satisfaisant aux hypothèses 4-2-1 et 4-2-2.

Alors il existe une suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de processus indexés par $\mathbb{R}^d$ qui satisfont aux hypothèses du lemme 4-4 et tels que :

* $\lim_n E(|X_t^n - X_t|^2) = 0$

* $\forall h \in \mathcal{H}_{e,\infty}(T)$

$$\lim_n E([\int Dh_s (X_s^n - X_s) ds]^2) = 0$$

Démonstration :

Soit δ une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$ de classe C^∞ à support compact inclus dans K_o. On pose $X_t = 0$ si $t \notin T$. On définit X^n par :

$$X_t^n = \int X(t-\frac{u}{n})\ \delta(u)du = n^d \int X(u)\ \delta(n(t-u))du$$

4-6 Lemme

Soit $T = [0,1]$.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus à trajectoires continues vérifiant l'hypothèse 4-2-1 et tel que : $X_{(o,t^2)} = X_{(t^1,o)} = 0$.

Soit $D = \dfrac{\partial^d}{\partial t^1 \partial t^2 \ldots \partial t^d}$

Alors il existe une suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de processus indexés par $\mathbb{R}^d$ qui satisfont aux hypothèses du lemme 4-4 et tels que :

* $\lim\limits_n \operatorname{Sup}\limits_t |X_t - X_t^n| = 0$

* $h \in \mathcal{H}_{e,\infty}(\overset{o}{T}) \quad \lim\limits_n E([\int Dh_s \; (X_s^n - X_s)ds]^2) = 0$

Démonstration :

Soit $(\pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de partitions de $]0,1]$ par des pavés et soit $\pi^n = (C^n{}_k)_{k=1\ldots k(n)}$.

Par exemple $]0,1] = \overset{2^n-1}{\underset{i=0}{\pi}} \left]\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right]$ et π^n est la partition produit.

Pour $C_k^n = \overset{d}{\underset{j=1}{\pi}} \left]\frac{i_j}{2^n}, \frac{i_j+1}{2^n}\right]$, on sait définir $\Delta_{C_k^n}(X)$ tel que si DX existe,

$$\Delta_{C_k^n}(X) = \int_{C_k^n} \frac{\partial^d}{\partial t^1 \partial t^2 \ldots \partial t^d} X(s)\, ds.$$

Soit $f^n(t,\omega) = \sum\limits_k 2^{nd} \Delta_{C_k^n + \frac{1}{2^n}}(X) \quad 1_{C_k^n}(t) \quad (s \in C_k^n + \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow (s^i - \frac{1}{2^n})_{i=1\ldots d} \in C_k^n)$

On définit alors X^n par : $X^n(t,\omega) = \int_{]-\infty,t] \cap T} f^n(s,\omega)\, ds \cdot 1_T(t)$

si X n'est pas nul sur $[0,1] -]0,1]$, on a le résultat voulu pour $\bar{X}$ tel que $\bar{X}_t = \Delta_{]o,t]} X$, on peut poser $X_t^n = \bar{X}_t^n + X_{(t^1,o)} + X_{(o,t^2)} - X_{(o,o)}$ alors X^n converge uniformément vers X, mais il est tout aussi intéressant de considérer $\bar{X}$.

4-7 Théorème

On suppose que $D = \frac{\partial^d}{\partial t^1 \ldots \partial t^d}$, que X est un processus satisfaisant à 4-2-1 et 4-2-2 et que la tribu prévisible $\mathcal{P}$ est engendrée par $\mathcal{R} = \{A \times F \,,\ A \in \mathcal{A},\ F \in \mathcal{G}_A\}$. On suppose que pour $u \in K_0$ $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_{A-\frac{u}{n}}$ $\forall A \in \mathcal{A}$. On suppose qu'il existe une constante C telle que $\forall Y = \sum_{i=1}^{r} a_i 1_{A_i \times F_i}$, $|a_i| \leq 1$, $A_i \times F_i \in \mathcal{R}$ on ait

$E([\sum_{i=1}^{r} a_i 1_{F_i} \Delta_{A_i} X]^2) \leq C$.

Alors il existe une 2-fonctionnelle linéaire stochastique sur $\mathcal{H}_{eo}$ (T) et une mesure stochastique μ sur $\mathcal{P}$, telles que
$\forall h \in \mathcal{H}_{e\infty}$ (T) $m(h) = (-1)^D \int Dh_s X_s d_s = \mu(h)$

Démonstration

On considère la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans la démonstration du lemme 4-5.

Il suffit de montrer qu'il existe une constante C telle que $\sup_n \sup_{\|h\|_\infty \leq 1} E[m^n(h)]^2 \leq C$

Pour cela il suffit de montrer que $\forall Y$ tel que

$$Y(t,\omega) = \sum_{i=1}^{r} a_i 1_{A_i \times F_i}(t,\omega) \qquad \text{où} \qquad \begin{array}{l} |a_i| \leq 1 \\ A_i \times F_i \in \mathcal{R} \end{array}$$

on a

$$\sup_n E[\mu^n(Y)]^2 \leq C$$

or $\mu^n(Y) = \sum_{i=1}^{r} a_i 1_{F_i} \Delta_{A_i}(X^n)$

et $\Delta_{A_i}(X^n) = \Delta_{A_i}(\int X(\cdot - \frac{u}{n})\, \delta(u)\, du)$

$= \int \Delta_{A_i - \frac{u}{n}}(X)\, \delta(u)\, du$

$\Rightarrow \mu^n(Y) = \int \sum_{i=1}^{r} a_i 1_{F_i} \Delta_{A_i - \frac{u}{n}}(X)\, \delta(u)\, du$

mais $F_i \in \mathcal{G}_{A_i} \subseteq \mathcal{G}_{A_i - \frac{u}{n}}$

en conséquence il suffit que

$$E([\sum_{i=1}^{r} a_i \, 1_{F_i} \, \Delta_{A_i}(X)]^2) \leq C$$

pour $|a_i| \leq 1 \qquad F_i \times A_i \in \mathcal{R}$

Si on suppose X continu, on vérifie facilement que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans la démonstration du lemme 4-6 satisfait à la condition de bornitude.

Le théorème de Riesz [3] permet d'associer de façon unique une mesure stochastique à toute fonctionnelle linéaire stochastique telle que

$$\forall h \in \mathcal{H}_{eo} \qquad m(h) = \int h \, d\mu$$

4-8 <u>Corollaire</u>

On suppose qu'il existe une mesure ν positive et bornée sur $(T \times \Omega, \mathcal{R})$, telle que :

$$\forall Y = \sum_{i=1}^{r} a_i \, 1_{A_i \times F_i} \qquad A_i \times F_i \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow$$

$$E((\sum_{i=1}^{r} a_i \, 1_{F_i} \, \Delta_{A_i} X)^2) \leq \nu([Y]^2)$$

On suppose également que $\forall u \in K_o$

$$\lim_n \nu((1_{A \times \Omega} - 1_{A - \frac{u}{n} \times \Omega})) = 0$$

alors la condition de bornitude est satisfaite et de plus

$\forall R \in \mathcal{R}, \quad R = A \times F \quad$ on a $\mu(R) = 1_F \, \Delta_A X$

5 <u>Quelques exemples</u>

On donne maintenant quelques exemples où toutes les conditions sont satisfaites pour $D = \dfrac{\partial^d}{\partial t^1 \ldots \partial t^d}$

5-1

$T = [\![0,1]\!] \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad , \quad \mathcal{A} = \{]\!]s,t]\!] \ , \ s,t \in \mathring{T}\}$

X est un processus sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ indexé par T de carré intégrable, à trajectoires continues à droite, on peut supposer X nul sur les axes puisque seul l'aspect mesure nous intéresse ici.

$(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est une famille de sous tribus de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s \ , \ s \in [\![0,t]\!])$

Pour les différentes notions de martingales et leurs propriétés on se réfère à Cairoli et Waslh [2] si $(X_t)_{t\in T}$ est une martingale pour la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ et si $\mathcal{F}_t^1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t^2 / \mathcal{F}_t \quad \forall t \in T$, toutes les hypothèses sont satisfaites pour $\mathring{T}$; en particulier il existe un processus croissant $\langle X\rangle_{t\in T}$ tel que $(X_t^2 - \langle X\rangle_t)_{t\in T}$ soit une martingale faible et

$$\forall \phi = \sum_{i=1}^{r} a_i \, 1_{A_i \times F_i} \quad \text{avec} \quad A_i \in \mathcal{A}, \quad F \in \mathcal{G}_{A_i} = \mathcal{F}_{s_i}$$

on a $E([\sum a_i \, 1_{F_i} \, \Delta_{A_i} X]^2) = E(\int \phi^2(s,\omega) \, d\langle X\rangle_s)$ il suffit alors de prendre ν : $d\nu = dP \otimes d\langle X\rangle$

Si $(X_t)_{t\in T}$ est une martingale forte, c'est en particulier une martingale qui peut entrer dans le cas précédent ; cependant on peut considérer les tribus prévisibles $\mathcal{P}^i$ $i = 1,2$ (pour $A =]\!]s,t]\!]$ on pose $\mathcal{G}_A^i = \mathcal{F}_s^i$ $i=1,2$) alors $\forall \phi = \sum_{k=1}^{r} a_k \, 1_{A_k \times F_k} \quad A_k \times F_k \in \mathcal{R}^i$

on a $E([\sum_{k=1}^{r} a_k \, 1_{F_k} \, \Delta_{A_k} X]^2) = E(\int \phi^2(t,\omega) \, d[X]_t^i)$

où $[X]^i$ est un processus croissant tel que $(X_t^2 - [X]_t^i)_{t\in T}$ est une i-martingale. On prend alors ν^i : $d\nu^i = dP \otimes d[X]^i$

5-2

Soit $T = [\![0,1]\!] \subseteq \mathbb{R}^2 \quad , \quad \mathcal{A} = \{]\!]s,t]\!], \ s,t \in \mathring{T}\}$

soit $T^{(2)} = \{(u,v) \quad , \quad u \text{ et } v \in \mathring{T} \quad , \quad u \text{ et } v \text{ non comparables}\}$

$\mathcal{A}^{(2)} = \{A \times B \quad , \quad A \in \mathcal{A}, \quad B \in \mathcal{A} \quad A \times B \subseteq T^{(2)}\}$

pour $(u,v) \in T^{(2)}$ on pose $\mathcal{G}^{(2)}_{u,v} = \mathcal{F}_{uVv}$

pour $A \times B \in \mathcal{A}^{(2)}$ on pose $\mathcal{G}^{(2)}_{A\times B} = \mathcal{F}_{uVv}$ si u et v sont les points initiaux de A et B respectivement.

On suppose que $(M_t)_{t\in T}$ est une martingale forte sur $(\Omega,\mathcal{R},(\mathcal{F}_t)_{t\in T},P)$ continue à droite et telle $\sup_{t\in T} E([M_t]^4) < +\infty$; on définit $(X_{(u,v)})_{(u,v)\in T^{(2)}}$ par $X_{(u,v)} = M_u M_v$.

$T^{(2)}$ est la réunion de deux ouverts disjoints, sur chacun de ces ouverts toutes les hypothèses sont satisfaites pour $D = \dfrac{\partial^4}{\partial u^1 \partial u^2 \partial v^1 \partial v^2}$, (en particulier, on peut trouver K_0 et une fonction δ convenable), l'hypothèse de majoration est satisfaite en prenant

$$d\nu = dP \otimes d[M]^1 \otimes d[M]^2 \quad \text{ou} \quad dP \otimes d[M]^2 \otimes d[M]^1$$

suivant l'ouvert considéré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLAIN M.F. : Tribus prévisibles et espaces de processus à trajectoires continues indexés par un espace localement compact et métrisable - Sém. de Rennes 1979.

[2] CAIROLI R. et WASLH J.B. : Stochastic integrals in the plane - Acta Mathematica, n° 134 - 1975.

[3] METIVIER M. et PELLAUMAIL J. : Mesures stochastiques à valeurs dans des espace Lo - Z. Wahrsch. Gebiete 40 - 101.114 - 1977.

[4] WONG E. et ZAKAI M. : Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter - Z. Wahrsch. Gebiete 29 - 109.122 - 1974.