RAUGEL

Résolution numérique par une méthode d'éléments finis de problèmes elliptiques du second ordre dans des ouverts avec coins

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule S4
« Journées éléments finis », , p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___S4_A11_0>

RESOLUTION NUMERIQUE PAR UNE METHODE D'ELEMENTS FINIS DE PROBLEMES ELLIPTIQUES DU SECOND ORDRE DANS DES OUVERTS AVEC COINS.

- *Melle RAUGEL* -

I. ENONCE DU PROBLEME.

Soit Ω un ouvert plan polygonal borné dont la frontière Γ a N sommets S_j d'angles ω_j (on supposera que $\omega_j \not\equiv 0\ (\pi)$). Et on pose $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \overline{\Gamma}_j$ où les Γ_j sont des segments ouverts d'origine S_j et d'extrémité S_{j+1}. Par convention, $S_{N+1} = S_1$.

Dans cet ouvert Ω, on étudie le problème modèle :

$$(1.1)\quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que :} \\ Au = -\sum_{i,j=1}^{2} \partial_j(a_{ij}\ \partial_i\ u) + a\ u = f \text{ dans } \Omega \\ u_{|\Gamma_j} = g_j \text{ où } g_j\ (S_{j+1}) = g_{j+1}(S_{j+1}) \end{cases}$$

et où f est donnée dans l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ et g_j dans $H^{m+3/2}(\Gamma_j)$.

Grâce au théorème de trace de Grisvard ([4]), on peut se ramener au problème

$$(1.2)\quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que :} \\ Au = f \text{ dans } \Omega \\ u_{|\Gamma} = 0 \end{cases}$$

Pour simplifier, on ne considère ici que le problème de Dirichlet. Mais les résultats seront les mêmes dans le cas d'un problème de Neumann.

On supposera, par exemple, que les fonctions a_{ij} et a sont dans $W^{m+2,\infty}(\Omega)$ et qu'elles vérifient les conditions :

$$(1.3)\qquad a \geqslant 0 \text{ p.p dans } \Omega$$

$$(1.4)\qquad \exists\beta > 0,\ \forall\xi_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 2,\ \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \beta(\xi_1^2 + \xi_2^2) \text{ p.p. dans } \Omega$$

Le problème (1.2) a pour formulation variationnelle :

$$(1.5)\quad \begin{cases} \text{Chercher } u \in H_o^1(\Omega) \text{ telle que :} \\ a(u,v) = (f,v) \qquad \forall v \in H_o^1(\Omega) \end{cases}$$

où
$$\begin{cases} (f,v) = \int_\Omega fv \, dX \\ a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\, \partial_i u \, \partial_j v + a\, u\, v \right) dX \end{cases}$$

Puisque la forme $(u,v) \mapsto a(u,v)$ est $H_o^1(\Omega)$-elliptique, les problèmes (1.2) et (1.5) ont une solution unique dans $H_o^1(\Omega)$ dont on va étudier la régularité. Il est bien connu que u ne sera plus dans $H^{m+2}(\Omega)$ (sauf dans des cas particuliers), cependant les dérivées d'ordre m+2 de u auront encore une certaine régularité. C'est pourquoi nous introduirons des espaces de Sobolev avec poids. Etant donné un N-uple $\underline{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N) \in \mathbb{R}^N$, on lui associe une fonction $\varphi_{\underline{\alpha}}$ ayant les propriétés suivantes :

$$(1.6)\quad \begin{cases} 1)\ \varphi_{\underline{\alpha}} \in \mathscr{C}^o(\bar{\Omega}) \\ 2)\ \text{il existe deux constantes } C_1 \text{ et } C_2 \text{ telles que :} \\ \qquad 0 < C_1 < \dfrac{\varphi_{\underline{\alpha}}(X)}{r_j^{\alpha_j}(X)} \leqslant C_2 \text{ pour } X \in O_j \cap \bar{\Omega} \\ \quad \text{où } O_j \text{ est un voisinage de } S_j \text{ et où } r_j(X) = \| X - S_j \| \\ 3)\ \varphi_{\underline{\alpha}} > 0 \text{ sur } \Omega \end{cases}$$

On prendra, par exemple, $\varphi_{\underline{\alpha}}(X) = \prod_{j=1}^{N} r_j(X)^{\alpha_j}$

On introduit alors l'espace de Sobolev avec poids :

$$W_{\underline{\alpha}}^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathscr{D}'(\Omega) / \ \varphi_{\underline{\alpha}}\, \partial^\ell u \in L^p(\Omega),\ 0 \leqslant |\ell| \leqslant m\}$$

où $\partial^\ell u = \dfrac{\partial^{|\ell|} u}{\partial^{\ell_1} x_1\, \partial^{\ell_2} x_2}$, $\ell = (\ell_1,\ell_2)$, $|\ell| = \ell_1 + \ell_2$, $X = (x_1,x_2)$

que l'on munit de la norme et de la semi-norme suivantes :

$$(1.7)\qquad \| u \|_{m,p,\underline{\alpha},\Omega} = \Big(\sum_{|\ell| \leqslant m} |\varphi_{\underline{\alpha}}\, \partial^\ell u|^p_{o,p,\Omega} \Big)^{1/p}$$

(1.8) $$|u|_{m,p,\underline{\alpha},\Omega} = \Big(\sum_{|\ell|=m} |\varphi_\alpha\, \partial^\ell\, u|^p_{o,p,\Omega}\Big)^{1/p}$$

De même, si O_j est un voisinage de S_j, on définit l'espace $W^{m,p}_\alpha(O_j)$

$$W^{m,p}_\alpha(O_j) = \{u \in \mathcal{D}'(O_j)/r_j^\alpha\, \partial^\ell\, u \in L^p(\Omega),\ 0 \leqslant |\ell| \leqslant m\}$$

que l'on munit de la norme et de la semi-norme :

(1.9) $$\|u\|_{m,p,\alpha,O_j} = \Big(\sum_{|\ell|\leqslant m} |r_j^\alpha\, \partial^\ell\, u|^p_{o,p,O_j}\Big)^{1/p}$$

(1.10) $$|u|_{m,p,\alpha,O_j} = \Big(\sum_{|\ell|=m} |r_j^\alpha\, \partial^\ell\, u|^p_{o,p,O_j}\Big)^{1/p}$$

A) <u>Propriétés des espaces</u> $W^{m,2}_\alpha(O_j)$

<u>Théorème 1.1</u>. *Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$ et q un réel vérifiant* $1 \leqslant q < \frac{2}{1+\alpha}$

Alors on a l'injection continue :

(1.11) $$W^{m,2}_\alpha(O_j) \hookrightarrow W^{m,q}(O_j)\ ,\ m \in \mathbb{N}$$

C'est une conséquence de l'inégalité de Hölder.

<u>Théorème 1.2</u>. *Soit α un réel, $\alpha > 0$, alors on a l'injection continue :*

(1.12) $$W^{1,2}_\alpha(O_j) \hookrightarrow L^2_{\alpha-1}(O_j)$$

Ce théorème se montre facilement à l'aide de l'inégalité de Hardy (cf. Kufner [6]).

<u>Théorème 1.3</u>. *Soit α un réel, $\alpha \geqslant 0$, alors l'injection ci-dessous est compacte :*

(1.13) $$W^{1,2}_\alpha(O_j) \subset\subset\!\!\rightarrow L^2_\alpha(O_j)$$

On en déduit immédiatement que l'injection suivante est aussi compacte :

$$W^{m,2}_\alpha(O_j) \subset\subset\!\!\rightarrow W^{m-1,2}_\alpha(O_j) \quad \text{pour } m \geqslant 1,\ \alpha \geqslant 0$$

Le théorème 1.3 permet de démontrer le

Théorème 1.4. *Soit* α *un réel,* $\alpha \geq 0$.

Alors la semi-norme $|\cdot|_{m,2,\alpha,O_j}$ *est une norme sur l'espace* $W_\alpha^{m,2}(O_j)/P_{m-1}(O_j)$ *équivalente à la norme quotient où* $P_{m-1}(O_j)$ *désigne l'espace des polynômes de degré* $\leqslant m-1$ *sur* O_j.

B) Retournons aux problèmes (1.2) et (1.5)

On a le théorème fondamental suivant :

Théorème 1.5. *Il existe des réels* ω_j', $0 < \omega_j' < 2\pi$ *pour* $1 \leqslant j \leqslant N$ *tels que la solution* u *du problème (1.2) soit dans l'espace* $W_{\underline{\alpha}}^{m+2,2}(\Omega)$ *où le* N*-uple* $\underline{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$ *vérifie :*

(1.14) $$\alpha_j = 0 \text{ si } \omega_j' < \frac{\pi}{m+1}$$

(1.15) $$\alpha_j > m+1-\frac{\pi}{\omega_j'} \text{ si } \omega_j' \geq \frac{\pi}{m+1}$$

On a, de plus, $\omega_k' = \varphi(S_k,\Gamma_k,\omega_k,a_{ij}(S_k))$ *pour* $1 \leqslant k \leqslant N$, *où* φ *est une fonction que l'on ne précisera pas ici.*

Dans le cas du laplacien, on a : $\omega_k' = \omega_k$, $1 \leqslant k \leqslant N$.

Dans le cas du laplacien, on démontre facilement que $u \in W_{\underline{\alpha}}^{m+2,2}(\Omega)$ avec $\alpha_j > m+1-\frac{\pi}{\omega_j}$ pour $\omega_j \geq \frac{\pi}{m+1}$, en utilisant les résultats de Grisvard ([4]) et la théorie de l'interpolation. Grâce aux résultats de Kondratiev ([5]), on démontre encore que, si la partie principale de A en S_k est égale au laplacien, on a les assertions (1.14) et (1.15) pour α_k avec $\omega_k' = \omega_k$. Dans le cas contraire, il existe un changement de variables affine qui transforme la partie principale de A en S_k en le laplacien ; ce changement de variables transforme l'angle ω_k en un angle noté ω_k' où $\omega_k' = \varphi(S_k,\Gamma_k,\omega_k,a_{ij}(S_k))$ et on a les assertions (1.14) et (1.15) pour α_k et ω_k'.

Théorème 1.6. *Soit* A^* *l'adjoint de* A *(ie* $A^*v = -\sum_{i,j=1}^{2} \partial_j(a_{ji}\,\partial_i v) + av$) *alors l'application* $T : g \mapsto v_g$ *où* v_g *est solution de*

$$(1.16) \qquad \begin{cases} A^* v_g = g \\ v_{g|\Gamma} = 0 \end{cases}$$

est une application linéaire continue de $L^2(\Omega)$ *dans* $W^{2,2}_{\underline{\beta}}(\Omega)$ *où le* N-*uple* $\underline{\beta} = (\beta_1 \ldots \beta_N)$ *vérifie les conditions :*

$$(1.17) \qquad \beta_j = 0 \qquad si \quad \omega'_j \leqslant \pi$$

$$(1.18) \qquad \beta_j > 1 - \frac{\pi}{\omega'_j} \quad si \quad \omega'_j > \pi$$

où ω'_j *sont les réels définis dans le théorème 1.5.*

Le théorème 1.6 se démontre comme le théorème 1.5 en remarquant que A et A^* ont même partie principale en S_k, $1 \leqslant k \leqslant N$.

Dans la suite, on posera :

$$. \ \alpha_j = m+1 - \frac{\pi}{\omega'_j} + \varepsilon_j \ \text{ si } \omega'_j \geqslant \frac{\pi}{m+1} \quad \text{où} \quad \varepsilon_j > 0$$

$$. \ \beta_j = 1 - \frac{\pi}{\omega'_j} + \varepsilon_j \ \text{ si } \omega'_j > \pi \quad \text{et } \varepsilon_j < \frac{\pi}{\omega'_j}$$

II. PROBLEME APPROCHE.

On va approcher la solution u du problème (1.2) en utilisant une méthode d'éléments finis. On ne s'intéresse qu'aux éléments finis de Lagrange. Dans ce but, on se donne une triangulation $\mathcal{T}_h$ de classe $\mathcal{C}^0$ formée d'un nombre fini de triangles K et associée à un élément fini de référence $(\hat{K},\hat{\Sigma},\hat{P})$ où $\hat{K}$ désigne classiquement le triangle de sommets $\hat{a}_1 = (1,0)$, $\hat{a}_2 = (0,1)$, $\hat{a}_3 = (0,0)$, où $\hat{P}$ est un espace de dimension finie (nous prendrons dans la suite, $\hat{P} = P_{m+1}(\hat{K})$) et où $\hat{\Sigma}$ est un ensemble de points $\hat{P}$-unisolvant contenant les points $\hat{a}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.

On désignera par h_K le diamètre de K, et on posera

$$\rho_K = \sup \{\text{diamètres des cercles C inscrits dans K}\}$$

$$\hat{\rho} = \rho_{\hat{K}} \ , \ \hat{h} = h_{\hat{K}} \ .$$

Et on dira que la famille de triangulations $(\mathcal{C}_h)$ est régulière s'il existe une constante $\sigma > 0$ indépendante de K telle que $h_K \leqslant \sigma \rho_K$.

Lemme 2.1. *Soit* $\alpha_j \in \mathbb{R}$, *tel que :*

(2.1) $$0 \leqslant \alpha_j < m+1$$

alors on a les injections continues :

(2.2) $$W^{m+2,2}_{\alpha_j}(\hat{K}) \hookrightarrow W^{1,2}(\hat{K})$$

(2.3) $$W^{m+2,2}_{\alpha_j}(\hat{K}) \hookrightarrow \mathcal{C}^o(\hat{K})$$

C'est une conséquence immédiate des théorèmes (1.1) et (1.2). On peut ainsi démontrer le

Théorème 2.1. *Soit* α_j *un réel,* $0 \leqslant \alpha_j < m+1$.
Supposons que la famille $(\mathcal{C}_h)$ *est régulière, que* K_j *est un triangle de sommet* S_j *dont le diamètre* h_{K_j} *vérifie :*

(2.4) $$h_{K_j} \leqslant C\, h^{\frac{m+1}{m+1-\alpha_j}}$$

Alors il existe une constante $C > 0$ *indépendante de* h *et de* K_j *telle que :*

(2.5) $$\forall u \in W^{m+2,2}_{\alpha_j}(K_j),\ \ell = 0 \text{ ou } 1$$

$$|u-\pi_{K_j} u|_{\ell,2,K_j} \leqslant C\, h^{m+2-\ell} |u|_{m+2,2,\alpha_j,K_j}$$

où $\pi_{K_j} u$ *désigne le* P_{K_j}*-interpolé de* u.

Démonstration. On fera ici la démonstration pour $\ell = 1$ (pour $\ell = 0$, elle se fait de manière analogue).

On sait qu'il existe une application affine inversible F_{K_j} qui envoie $\hat{K}$ sur K_j et l'origine $\hat{a}_3$ sur S_j.

$$F_{K_j} : \hat{X} = (\hat{x},\hat{y}) \in \hat{K} \longmapsto X = (x,y) = F_{K_j}(\hat{X}) = B_{K_j}\hat{X} + b_j$$

Si $\hat{v}$ est une fonction définie sur $\hat{K}$, alors on note v la fonction $v = \hat{v} \circ F_{K_j}^{-1}$ et on a : $\hat{v}(\hat{X}) = v(X)$.

A l'aide des résultats classiques (voir, par exemple, Ciarlet-Raviart [1]), on peut écrire :

(2.6) $$|u-\pi_{K_j} u|_{1,2,K_j} \leqslant C \, \|B_{K_j}^{-1}\| \;\; |\det B_{K_j}|^{1/2} \; |\hat{u}-\hat{\pi}\hat{u}|_{1,2,\hat{K}}$$

où $\hat{\pi}\hat{u}$ désigne le $\hat{P}$-interpolé de $\hat{u}$.

Grâce aux inclusions continues (2.2) et (2.3), $I - \hat{\pi} \in \mathcal{L}(W_{\alpha_j}^{m+2,2}(\hat{K}), W^{1,2}(\hat{K}))$

Puisque $\hat{P} = P_{m+1}(\hat{K})$, on a l'identité :

$$\forall \hat{p} \in \hat{P}, \; \hat{u} - \hat{\pi}\hat{u} = (I-\hat{\pi})(\hat{u}+\hat{p})$$

d'où

(2.7) $$|\hat{u}-\hat{\pi}\hat{u}|_{1,2,\hat{K}} \leqslant \|I-\hat{\pi}\| \; \inf_{\hat{p}\in\hat{P}} \|\hat{u}+\hat{p}\|_{m+2,2,\alpha_j,\hat{K}}$$

En vertu du théorème 1.4, on déduit de (2.7) :

(2.8) $$|\hat{u}-\hat{\pi}\hat{u}|_{1,2,\hat{K}} \leqslant C \; |\hat{u}|_{m+2,2,\alpha_j,\hat{K}}$$

or $$|\hat{u}|_{m+2,2,\alpha_j,\hat{K}} = \Big(\int_{\hat{K}} \sum_{|i|=m+2} |\partial^i \, \hat{u}(\hat{X})|^2 \; \hat{r}^{2\alpha_j}(\hat{X}) \; d\hat{X}\Big)^{1/2}$$

et

(2.9) $$|\hat{u}|_{m+2,2,\alpha_j,\hat{K}} \leqslant C \; \Big(\int_{\hat{K}} \|D^{m+2} \; \hat{u}(\hat{X})\|^2 \; \hat{r}^{2\alpha_j} \; d\hat{X}\Big)^{1/2}$$

(2.10) $$\|D^{m+2} \; \hat{u}(\hat{X})\| \leqslant \|D^{m+2} \; u\| \;\; \|B_{K_j}\|^{m+2}$$

(2.11) $$\hat{r}^{2\alpha_j}(\hat{X}) \leqslant \|B_{K_j}^{-1}\|^{2\alpha_j} \; r_j^{2\alpha_j}(X)$$

Les majorations (2.6) à (2.11) entraînent :

(2.12) $$|u-\pi_{K_j} u|_{1,2,K_j} \leqslant C \; \|B_{K_j}\|^{m+2} \; \|B_{K_j}^{-1}\|^{1+\alpha_j} \; |u|_{m+2,2,\alpha_j,K_j}$$

Or on a les estimations classiques :

$$(2.13) \qquad \| B_{K_j} \| \leqslant \frac{h_{K_j}}{\hat{\rho}} \quad , \quad \| B_{K_j}^{-1} \| \leqslant \frac{\hat{h}}{\rho_{K_j}}$$

Grâce à (2.13), (2.12) s'écrit :

$$|u - \pi_{K_j} u|_{1,2,K_j} \leqslant C\, h_{K_j}^{m+2}\, \rho_{K_j}^{-(1+\alpha_j)}\, |u|_{m+2,2,\alpha_j,K_j}$$

D'où, puisque la famille ($\mathcal{E}_h$) est régulière :

$$(2.14) \qquad |u - \pi_{K_j} u|_{1,2,K_j} \leqslant C\, h_{K_j}^{m+1-\alpha_j}\, |u|_{m+2,2,\alpha_j,K_j}$$

On obtient alors l'estimation (2.5) grâce à l'hypothèse (2.4).

●

On peut montrer facilement que si on utilise les méthodes d'éléments finis classiques pour approcher la solution u du problème (1.2), on n'obtient plus les majorations d'erreurs optimales du cas régulier. De nombreux travaux montrent comment améliorer la convergence en choisissant pour espace $\hat{P}$ un espace un peu plus "grand" que $P_{m+1}(\hat{K})$. Cet espace pourra, par exemple, contenir des fonctions "singulières" ou des approximations de ces fonctions singulières (voir, par exemple, Fix [3] , Djaoua [2] , Lelièvre [7]). Ici nous envisagerons le problème sous un autre angle. Nous garderons encore l'espace $P_{m+1}(\hat{K})$ comme espace de fonctions, mais au lieu de choisir une triangulation uniforme, nous construirons un maillage dont les triangles deviennent plus petits au voisinage des sommets S_j.

Plus précisément, soit h un réel destiné à tendre vers 0 (h > 0). On considère alors une famille <u>régulière</u> de triangulations ($\mathcal{E}_h$) qui vérifie l'hypothèse :

$(H_{\underline{\alpha},m})$
$$\left\{\begin{array}{l} \text{1) L'ensemble des noeuds } \Sigma_h \text{ contient les sommets } S_j \text{ et si } K_j \text{ est} \\ \text{un triangle de sommet } S_j\text{, alors :} \\ \qquad h_{K_j} \leq C\, h^{\frac{m+1}{m+1-\alpha_j}} \\ \text{2) Si } K \text{ est un triangle de } \mathcal{T}_h \text{ n'ayant aucun } S_j \text{ pour sommet, son} \\ \text{diamètre } h_K \text{ vérifie :} \\ \qquad h_K \leq C\, h\, (\inf_K \varphi_{\underline{\alpha}})^{\frac{1}{m+1}} \end{array}\right.$$

On définit ensuite l'espace d'approximation V_h :

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^o(\bar{\Omega}) / v_{h|K} \in P_{m+1}(K),\ v_h = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

Le problème discret associé à (1.2) consiste à chercher une fonction $u_h \in V_h$ telle que :

(2.15) $$a(u_h,v_h) = (f,v_h) \qquad \forall v_h \in V_h$$

On a ainsi le

Théorème 2.2. *Si* u *est la solution du problème* (1.2), u_h *celle du problème* (2.15), *si la famille* $(\mathcal{T}_h)$ *est régulière et vérifie l'hypothèse* $(H_{\underline{\alpha},m})$, *on a :*

(2.16) $$|u-u_h|_{1,2,\Omega} \leq C\, h^{m+1}\ |u|_{m+2,2,\underline{\alpha},\Omega}$$

(2.17) $$|u-u_h|_{0,2,\Omega} \leq C\, h^{m+2}\ |u|_{m+2,2,\underline{\alpha},\Omega}$$

Démonstration.

1) Puisque $V_h \subset H^1_o(\Omega)$, on a :

$$a(u-u_h,u-u_h) = a(u-u_h,u-v_h),\ \forall v_h \in V_h$$

En utilisant la coercivité et la continuité de la forme bilinéaire a(.,.) sur $H^1_o(\Omega)$, on a :

(2.18) $$|u-u_h|_{1,2,\Omega} \leq C \inf_{v_h \in V_h} |u-v_h|_{1,2,\Omega}$$

$\Longrightarrow$

(2.19) $$|u-u_h|^2_{1,2,\Omega} \leq C \{ \sum_{j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M_j} |u-\pi_h\ u|^2_{1,2,K_{j,\ell}} + |u-\pi_h\ u|^2_{1,2,\Omega'} \}$$

où $\begin{cases} - K_{j,\ell} \text{ sont les triangles de sommet } S_j \ (1 \leq j \leq N) \\ - \Omega' = \Omega - \bigcup_{j,\ell} K_{j,\ell} \\ - \pi_h\ u \text{ est le } V_h\text{-interpolé de } u. \end{cases}$

Les résultats classiques d'interpolation (voir Ciarlet-Raviart [1]) nous donnent, puisque la famille $(\mathcal{T}_h)$ est régulière:

$$|u-\pi_h\ u|^2_{1,2,K} \leq C\ h_K^{2(m+1)}\ |u|^2_{m+2,2,K} \qquad K \neq K_{j,\ell}$$

$$\Longrightarrow \qquad |u-\pi_h\ u|^2_{1,2,K} \leq C\ h^{2(m+1)}\ (\inf_K \varphi_{\underline{\alpha}})^2\ |u|^2_{m+2,2,K}$$

d'où $\quad |u-\pi_h\ u|^2_{1,2,K} \leq C\ h^{2(m+1)}\ |u|^2_{m+2,2,\underline{\alpha},K}$

et enfin

(2.21) $$|u-\pi_h\ u|^2_{1,2,\Omega'} \leq C\ h^{2(m+1)}\ |u|^2_{m+2,2,\underline{\alpha},\Omega'}$$

D'autre part, en appliquant le théorème 2.1, on obtient, si $K_{j,\ell}$ est un triangle de sommet S_j :

(2.22) $$|u-\pi_h\ u|^2_{1,2,K_{j,\ell}} \leq C\ h^{2(m+1)}\ |u|^2_{m+2,2,\underline{\alpha},K_{j,\ell}}$$

Les inégalités (2.21) et (2.22) nous donnent l'assertion (2.16).

2) En utilisant la technique de dualisation d'Aubin-Nitsche, on obtient :

(2.23) $$|u-u_h|_{0,2,\Omega} \leq C\ |u-u_h|_{1,2,\Omega}\ \left(\sup_{g\in L^2(\Omega)} \frac{1}{|g|_{0,2,\Omega}} \inf_{v_h\in V_h} |v_g-v_h|_{1,2,\Omega} \right)$$

où, pour tout $g \in L^2(\Omega)$, v_g est l'unique solution du problème :

(2.24) $$\begin{cases} A^* v_g = g \\ v_{g|\Gamma} = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème 1.6, v_g est dans l'espace $W^{2,2}_{\underline{\beta}}(\Omega)$ et il existe une constante C telle que $\|v_g\|_{2,2,\underline{\beta},\Omega} \leq C\ |g|_{0,2,\Omega}$

Donc (2.23) peut encore s'écrire :

(2.25) $$|u-u_h|_{0,2,\Omega} \leq C|u-u_h|_{1,2,\Omega}\ \frac{1}{\|v_g\|_{2,2,\underline{\beta},\Omega}}\quad |v_g-\pi_h\ v_g|_{1,2,\Omega}$$

Or, comme ci-dessus, on peut montrer que :

(2.26) $$|v_g-\pi_h\ v_g|_{1,2,\Omega} \leq C\ h\ |v_g|_{2,2,\underline{\beta},\Omega}$$

Les estimations (2.25) et (2.26) nous donnent :

(2.27) $$|u-u_h|_{0,2,\Omega} \leq C\ h^{m+2}\ |u|_{m+2,2,\underline{\alpha},\Omega}$$

III. INTEGRATION NUMERIQUE.

On considère toujours le problème (1.2), mais où maintenant f est aussi régulière que voulue. Dans le paragraphe II, nous cherchions u_h dans V_h telle que :

$$\forall v_h \in V_h,\quad \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K \Big(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\ \partial_i\ u_h\ \partial_j\ v_h + a\,u_h\ v_h\Big)dx = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K f\ v_h\ dx$$

Mais malheureusement, dans la pratique, les intégrales ci-dessus ne sont pas calculées exactement, mais bien de façon approchée. De manière plus précise, on se donne une formule de quadrature sur l'élément fini de référence $\hat{K}$

(3.1) $$\int_{\hat{K}} \hat{\varphi}(\hat{X})\ d\hat{X} \simeq \sum_{\ell=1}^{L} \hat{\omega}_\ell\ \hat{\varphi}(\hat{b}_\ell)$$

où $\hat{\omega}_\ell \in \mathbb{R}^{+*}$, $\hat{b}_\ell \in \hat{K}$, $1 \leq \ell \leq L$; on lui associe la fonctionnelle d'erreur :

(3.2) $$\hat{E}(\hat{\varphi}) = \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}(\hat{X})\ d\hat{X} - \sum_{\ell=1}^{L} \hat{\omega}_\ell\ \hat{\varphi}(\hat{b}_\ell)$$

Si F_K est une application affine qui envoie $\hat{K}$ sur K telle que $J_K = \det B_K > 0$, on a :

(3.3) $$\int_K \varphi(X)\ dX = J_K \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}(\hat{X})\ d\hat{X}$$

de sorte que (3.1) induit la formule de quadrature sur K :

$$(3.4)\quad \begin{cases} \int_K \varphi(X)\, dX \simeq \sum_{\ell=1}^{L} \omega_{\ell,K}\, \varphi(b_{\ell,K}) \\ \text{où } \omega_{\ell,K} = J_K\, \hat{\omega}_\ell,\quad b_{\ell,K} = F_K(\hat{b}_\ell),\ 1 \leqslant \ell \leqslant L \end{cases}$$

et on définit la fonctionnelle d'erreur correspondante sur K :

$$(3.5)\qquad E_K(\varphi) = \int_K \varphi(X)\, dX - \sum_{\ell=1}^{L} \omega_{\ell,K}\, \varphi(b_{\ell,K})$$

On définit ensuite le nouveau problème discret :

Trouver $u_h^* \in V_h$ tel que :

$$(3.6)\qquad a_h(u_h^*, v_h) = (f, v_h)_h \qquad \forall v_h \in V_h$$

où

$$(3.7)\qquad a_h(u_h^*, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sum_{\ell=1}^{L} \omega_{\ell,K} \Big(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\, \partial_i u_h^*\, \partial_j v_h + a\, u_h^*\, v_h \Big)(b_{\ell,K})$$

et

$$(3.8)\qquad (f, v_h)_h = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sum_{\ell=1}^{L} \omega_{\ell,K} (f\, v_h)(b_{\ell,K})$$

On va supposer qu'il existe une constante $\tilde{\alpha} > 0$ indépendante de h telle que :

$$(3.9)\qquad \forall v_h \in V_h,\ a_h(v_h, v_h) \geqslant \tilde{\alpha}\, \| v_h \|^2_{1,2,\Omega}$$

On a alors le résultat suivant :

<u>Théorème 3.1.</u> *Si* u *est la solution du problème* (1.2), u_h^* *celle du problème* (3.9), *si la famille de triangulations* $(\mathcal{C}_h)$ *est régulière et vérifie l'hypothèse* $(H_{\underline{\alpha},m})$, *si, en outre, la formule de quadrature vérifie la condition*

$$(3.10)\qquad \forall\, \hat{\varphi} \in P_{2m} \cup P_{m+1}\ ,\ \hat{E}(\hat{\varphi}) = 0$$

Alors, si $f \in H^{m+2}(\Omega)$, *on obtient la majoration :*

$$(3.11)\quad \| u - u_h^* \|_{0,2,\Omega} + h \| u - u_h^* \|_{1,2,\Omega} \leqslant C\, h^{m+2} \left(\| u \|_{m+2,2,\underline{\alpha},\Omega} + \| f \|_{m+2,2,\Omega} \right)$$

Il nous reste à construire une famille de triangulations $(\mathcal{C}_h)$ régulière qui vérifie l'hypothèse $(H_{\underline{\alpha},m})$.

IV. CONSTRUCTION D'UNE FAMILLE REGULIERE DE TRIANGULATIONS $(\mathcal{C}_h)$ VERIFIANT L'HYPOTHESE $(H_{\underline{\alpha},m})$

Il suffit de procéder de la manière suivante. Soit n un entier destiné à tendre vers l'infini.

a) On divise le domaine Ω en "grands" triangles T fixes ayant au plus un sommet qui soit aussi sommet du polygone Ω.

b) Si aucun sommet du triangle T n'est sommet du polygone Ω, on divise le triangle T en n^2 triangles égaux suivant la méthode classique.
Si le triangle T_j $(T_j = S_j\, A_j\, B_j)$ a pour sommet S_j, on le divise en n^2 triangles de la manière particulière suivante. Notons pour λ_1, λ_2, λ_3 les coordonnées barycentriques relatives respectivement aux points S_j, A_j, B_j.
Pour i = 1,2,...n, on trace le segment de droite d'équation :

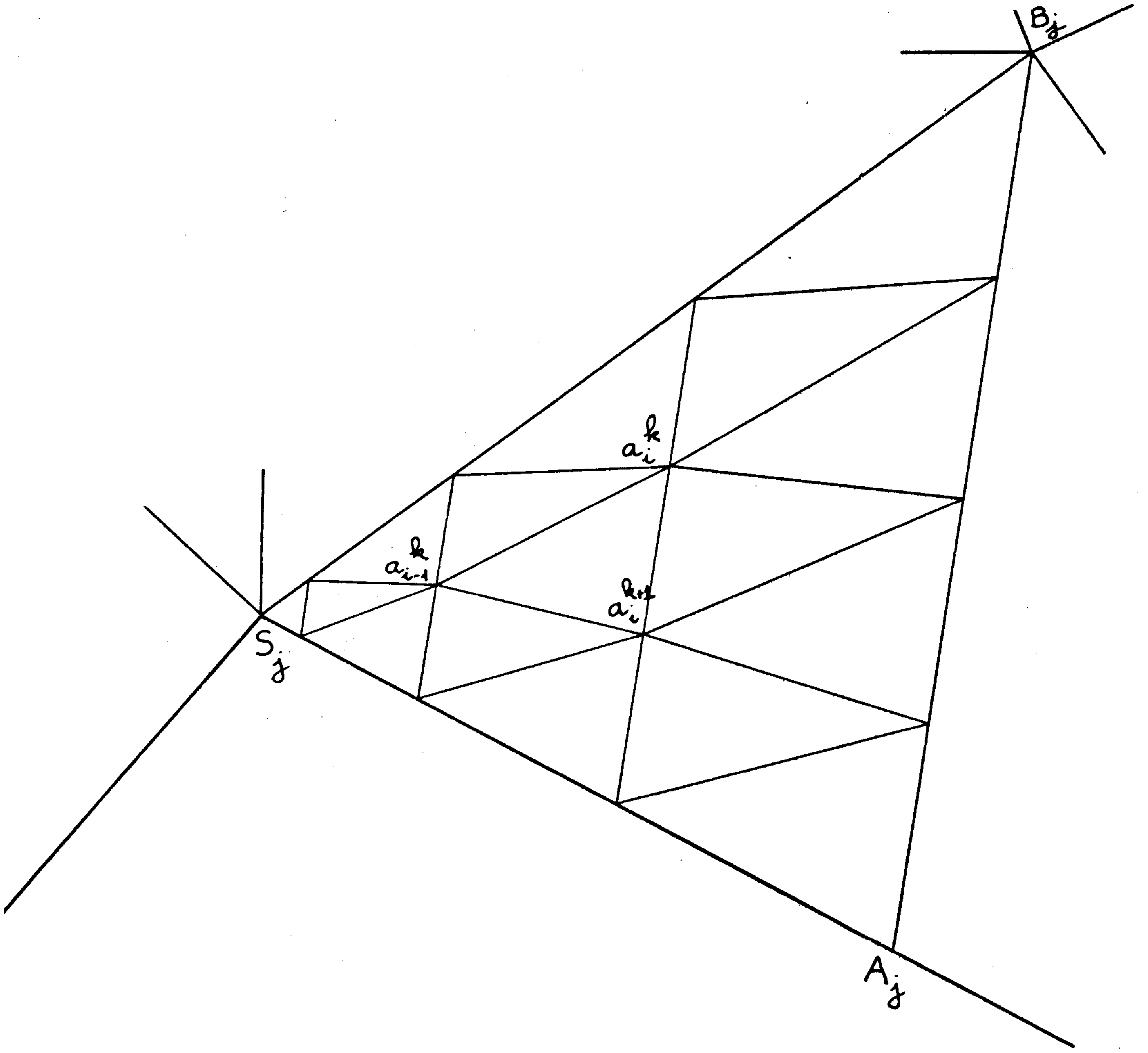
$$\lambda_1 = 1 - \left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{m+1}{m+1-\alpha_j}} , \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0$$

et on divise ce segment en i parties égales, ce qui nous donne les (i+1) points a_i^k $(0 \leq k \leq i)$ de coordonnées barycentriques :

$$\lambda_1(a_i^k) = 1-\left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{m+1}{m+1-\alpha_j}} , \quad \lambda_2(a_i^k) = \frac{k}{i}\,(1-\lambda_1(a_i^k)), \quad \lambda_3(a_i^k) = 1-\lambda_1(a_i^k)-\lambda_2(a_i^k)$$

Finalement, on trace les segments $a_i^k\, a_{i+1}^k$ et $a_i^k\, a_{i+1}^{k+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $0 \leq k \leq i$.

Proposition 4.1. *Quand* n *tend vers l'infini, la suite de triangulations* $(\mathcal{C}_h)$ *ainsi construite est régulière et vérifie l'hypothèse* $(H_{\underline{\alpha},m})$.


B_j
a_i^k
a_{i-1}^k
a_i^{k+1}
S_j
A_j

Remarquons aussi qu'avec ce procédé de raffinement de maillage la matrice de rigidité conserve les mêmes dimensions et la même structure que si on avait divisé tous les triangles T en n^2 triangles égaux.

Remarques.

1) Si on remplace le problème (1.1) ou (1.2) par un problème de Neumann, le théorème 1.5 reste vrai. De plus, si la famille de triangulations $(\mathcal{C}_h)$ est régulière et vérifie l'hypothèse $(H_{\underline{\alpha},m})$, on a encore le théorème (2.2).

2) Si on remplace l'ouvert polygonal Ω par un ouvert à frontière courbe ayant des "coins" S_j, on obtient encore les majorations optimales du cas régulier en utilisant des triangulations vérifiant des hypothèses analogues à l'hypothèse $(H_{\underline{\alpha},m})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CIARLET P.G. et RAVIART P.A., Arch. Rat. Mech. Anal., 46, 1972, p 177-199.

[2] DJAOUA M., Equations intégrales pour un problème singulier dans le plan, 1977, Thèse de 3ème cycle, Université de Paris VI.

[3] FIX G et STRANG G., An Analysis of the finite element method, Prentice Hall, New-York, 1973.

[4] GRISVARD P., Behavior of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyedral domain in Numerical Solution of Partial Differential Equations III, Synspade 1975, Bert Hubbard, ed. Academic Press, New-York, 1976.

[5] KONDRATIEV V.A., Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. Trudi Mosk. Mat. Obšč, 16, 1966, 209-292.

[6] KUFNER A., Einige Eigenschaften der Sobolevschen Raüme mit Belegungsfunktion, Czech. Math. J. 15, 90, 1965, p.597-620.

[7] LELIEVRE J., Utilisation des fonctions singulières dans la méthode des éléments finis. Thèse de Doctorat de Spécialité, 1977, Université de Marseille.