PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JEAN NOURRIGAT

Paramétrixes pour des opérateurs du type de Fuchs

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 3
« Séminaire d'analyse fonctionnelle », , exp. nº 4, p. 1-47
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___3_A4_0>

PARAMETRIXES POUR DES OPERATEURS DU TYPE DE FUCHS

par Jean NOURRIGAT

Introduction :

Le but de cet article est de construire des paramétrixes pour des opérateurs différentiels du type de Fuchs, au sens de [1],[2], vérifiant des conditions suffisantes d'hypoellipticité partielle énoncées dans [3].

Plus précisément, soient Ω un ouvert de R^{n-1} $(n \geq 2)$ et $T > 0$. On considère un opérateur différentiel L dans l'ouvert $Q = \Omega \times]-T,T[$:

$$(0.1) \qquad L(x,t,D_x,tD_t) = \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \mu|\alpha| \in \mathbb{N}}} a_{\alpha j}(x,t)\, t^{\mu|\alpha|} D_x^{\alpha} (tD_t)^j ,$$

où μ est un rationnel > 0, tel que μm soit un entier, et où les $a_{\alpha j}$ sont des fonctions complexes, C^∞ dans Q. Ces opérateurs sont un cas particulier de ceux qui sont étudiés dans [3]. (Dans [3] intervenait un autre paramètre, noté σ, qui est ici égal à 0).

On dit que l'opérateur L est partiellement hypoelliptique dans Q, si pour tout ouvert $\omega \subset Q$, l'implication suivante est vérifiée (en posant $I =]-T,T[$) :

$$(0.2) \qquad \left.\begin{array}{l} u \in C^\infty(I, \mathcal{D}'(\Omega)) \\ Lu \in C^\infty(\omega) \end{array}\right\} \Longrightarrow u \in C^\infty(\omega)$$

Il est naturel de chercher à construire une paramétrixe qui opère dans $L^2_{loc}(Q)$, mais cela n'est pas possible en général sous la seule hypothèse d'hypoellipticité partielle. Nous ferons donc sur l'opérateur L un système d'hypothèses tel que l'implication suivante, plus forte, soit vérifiée, pour tout ouvert $\omega \subset Q$:

$$(0.3) \qquad \left.\begin{array}{l} u \in L^2_{loc}\ (Q) \\ Lu \in C^\infty\ (\omega) \end{array}\right\} \Longrightarrow u \in C^\infty\ (\omega)$$

On a énoncé dans [3] deux conditions (ici notées H2 et H3) suffisantes pour que L soit partiellement hypoelliptique dans Q. Nous leur ajoutons l'hypothèse H1 suivante, pour que l'implication (0.3) soit vérifiée :

En tout point x de Ω, on définit le polynôme $F(x,\lambda)$ suivant :

$$(0.4) \qquad F(x,\lambda) = \sum_{0\leq j\leq m} a_{o,j}(x,0)(-i)^j\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-j+1)$$

L'équation déterminante de L est $F(x,\lambda) = 0$. L'hypothèse H1 s'énonce ainsi :

$$(H1) \qquad \forall x \in \Omega \qquad \forall \lambda \in C \qquad \mathrm{Re}\ \lambda \geq -\frac{1}{2} \Longrightarrow F(x,\lambda) \neq 0.$$

Rappelons les hypothèses H2 et H3 de [3]. On suppose tout d'abord l'opérateur L elliptique pour $t \neq 0$, et l'on fait l'hypothèse "d'ellipticité transverse" suivante :

(H2) Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $(x,t,\xi,\theta) \in \Omega \times I \times R^{n-1} \times R$, on ait :

$$(0.5) \qquad \Big|\sum_{|\alpha|+j=m} a_{\alpha j}(x,t)\xi^\alpha\theta^j\Big| \geq C(|\xi|+|\theta|)^m \quad .$$

On définit ensuite, pour tout (x,ξ) dans $\Omega \times R^{n-1}$, un opérateur différentiel ordinaire $L_o(x,t,\xi,tD_t)$ en posant :

$$(0.6) \qquad L_o(x,t,\xi,tD_t) = \sum_{\substack{|\alpha|+j<m \\ \mu|\alpha|\in N}} a_{\alpha j}(x,0)t^{\mu|\alpha|}\xi^\alpha(tD_t)^j \quad .$$

On fait l'hypothèse suivante :

(H3) Pour tout (x,ξ) dans $\Omega \times R^n$ tel que $|\xi| = 1$, l'équation différentielle :

$$L_o(x,t,\xi,tD_t)\ u(t) = 0$$

n'admet que la solution $u = 0$ dans $\mathcal{S}(R)$.

Nous nous proposons de construire, quand les hypothèses H1, H2 et H3 sont vérifiées, une paramétrixe à gauche pour l'opérateur L. Bien entendu, le sens du mot "paramétrixe" doit être précisé, puisque l'opérateur L n'est pas hypoelliptique. Pour cela on définit un espace de distributions, noté V(Q), qui contient $L^2_{loc}(Q)$, et qui contient aussi l'espace $C^o_{-\infty}(I,\mathcal{D}'(\Omega))$ défini dans [2]. Cet espace est défini de telle sorte que L opère dans V(Q). On convient d'appeler "opérateur régularisant" toute application linéaire de $V(Q)\cap \mathcal{E}'(Q)$ dans $C^\infty(Q)$, et "paramétrixe" tout opérateur $E = V(Q)\to V(Q)$, proprement supporté, tel que pour tout u dans V(Q) on ait :

$$\text{sing supp } Eu \subset \text{sin supp } u$$

et tel que l'opérateur R = E L-I soit régularisant.

Dans l'article [3] on a construit des paramétrixes (dans un sens différent) pour l'opérateur L, en utilisant des symboles à valeurs vectorielles, c'est à dire de manière non explicite.

La paramétrixe que nous construisons ici sera une somme $E = E_1 + E_2$ de deux termes. Pour le premier terme E_1, on définit un formalisme analogue à celui des opérateurs pseudo-différentiels, mais utilisant la transformation de Mellin au lieu de celle de Fourier. (La restriction de E_1 à tout ouvert où $t \neq 0$ est un opérateur pseudo-différentiel). La construction de E_1 est explicite et n'utilise pas l'hypothèse H3. Quant au second terme E_2, il est défini comme un symbole à valeurs vectorielles, mais il est beaucoup plus régulier que le terme explicite E_1. Pour la définition de E_2, nous nous sommes inspirés de [6].

Signalons que dans [4] on utilise aussi le calcul pseudo-différentiel pour étudier des opérateurs du type de Fuchs.

Plan de l'article :

Au & I-1 et I-2, on définit les espaces de distributions utilisés, et on donne l'énoncé du théorème principal.

Au & I-3 et I-4, on définit une classe d'opérateurs destinée à contenir le second terme E_2 de la paramétrixe.

Au & II, on définit une classe destinée à contenir le premier terme E_1.

Aux §III et IV, on construit successivement les deux termes E_1 et E_2.

I - ESPACES DE DISTRIBUTIONS ET OPERATEURS REGULARISANTS

I-1 - ESPACES DE DISTRIBUTIONS :

Les espaces dont nous rappelons la définition ici ont été introduits dans [3].

Définition 1-1.

Soient $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$ et $\mu > 0$. On définit un espace de distributions $W_\mu^{m,p,q}(Q)$ sur l'ouvert $Q = \Omega \times I$ par :

$$(1.1) \qquad W_\mu^{m,p,q}(Q) = \{u \in \mathcal{D}'(Q) \ , \ t^{\mu|\alpha|} D_t^h (tD_t)^j u \in L^2(I, H^{\frac{p-h}{\mu}+|\alpha|+q}(\Omega))$$

$$\text{si } |\alpha|+j \leq m \ , \ \mu|\alpha| \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq h \leq p\} .$$

Si m est un entier ≤ 0, on définit l'espace $W_\mu^{m,p,q}(Q)$ comme l'ensemble des distributions u dans Q qui s'écrivent :

$$(1.2) \qquad u = \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq |m| \\ \mu|\alpha| \in \mathbb{N}}} t^{\mu|\alpha|} (tD_t)^j \, u_{\alpha j}$$

où les $u_{\alpha j}$ sont dans $W_\mu^{o,p,q-|\alpha|}(Q)$. On munit tous ces espaces de leurs normes naturelles d'espace de Hilbert.

On posera :

$$W_{\mu,\mathrm{comp}}^{m,p,q}(Q) = \mathcal{E}'(Q) \cap W_\mu^{m,p,q}(Q)$$

On sait que, pour tout φ dans $C_o^\infty(Q)$, la multiplication par φ opère continument dans $W_\mu^{m,p,q}(Q)$.

On définit l'espace $W_{\mu,\mathrm{loc}}^{m,p,q}(Q)$ comme l'ensemble des distributions $u \in \mathcal{D}'(Q)$ telles que, pour tout φ dans $C_o^\infty(Q)$, φu soit dans $W_\mu^{m,p,q}(Q)$.

Si L est un opérateur différentiel de la forme (0.1), alors, pour tous $s \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$, on a :

$$(1.3) \qquad L(x,t,D_x,tD_t) \ : \ W_{\mu,\mathrm{loc}}^{s,p,q}(Q) \longrightarrow W_{\mu,\mathrm{loc}}^{s-m,p,q}(Q)$$

On a l'inclusion :

(1.4) $$\bigcap_{s,p,q} W^{s,p,q}_{\mu,loc}(Q) \subset C^\infty(Q).$$

Pour tout $\mu > 0$, on définit un espace $V_\mu(Q)$ par :

(1.5) $$V_\mu(Q) = \{ u \in \mathcal{D}'(Q) \ , \ \forall \varphi \in C_o^\infty(Q), \exists\ m \in \mathbb{Z}, \exists\ q \in \mathbb{R} \text{ tels que } \varphi u \in W_\mu^{m,o,q}(Q) \}.$$

Cet espace est indépendant de $\mu > 0$. On notera donc $V(Q)$. Il résulte de (1.3) que, si L est l'opérateur différentiel (0.1), on a :

(1.6) $$L(x,t,D_x,tD_t) \ : \ V(Q) \longrightarrow V(Q) \ .$$

La paramétrixe de l'opérateur L opérera elle aussi dans V(Q).

L'espace V(Q) contient $L^2_{loc}(Q)$, et il contient aussi l'espace $C^o_{-\infty}(I,\mathcal{S}'(\Omega))$ défini dans [2].

I-2 - OPERATEURS REGULARISANTS :

Définition 1-2.

On appellera opérateur régularisant toute application linéaire de $V(Q) \cap \mathcal{E}'(Q)$ dans $C^\infty(Q)$.

La proposition suivante donne un exemple d'opérateur régularisant.

Proposition 1.1 :

Soit une distribution $A(x,t,y,s) \in L^2_{loc}(QxQ)$, telle que, pour tout compact K de QxQ, pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, on ait :

(1.7) $$D_x^\alpha D_t^\beta D_y^\gamma (s.D_s)^\delta \ A(x,t,y,s) \in L^2(K) \quad .$$

Alors l'opérateur A : $C_o^\infty(Q) \to C^\infty(Q)$ défini par :

$$Au(x,t) = \int_Q A(x,t,y,s)\ u(y,s)\ dy\,ds \qquad \forall u \in C_o^\infty(Q)$$

se prolonge en un opérateur régularisant.

En effet, toute distribution $u \in V(Q) \cap \mathcal{E}'(Q)$ peut s'écrire comme une somme finie de la forme :

$$u(y,s) = \sum_{\gamma,\delta} D_y^{\gamma} (sD_s)^{\delta} f_{\gamma\delta}(y,s)$$

où les $f_{\gamma\delta}$ sont dans $L^2(Q) \cap \mathcal{E}'(Q)$. L'opérateur dont le noyau est $D_y^{\gamma}(sD_s)^{\delta} A(x,t,y,s)$ envoie $L^2(Q) \cap \mathcal{E}'(Q)$ dans $C^{\infty}(Q)$ d'après (1.7). Par un nombre fini d'intégrations par parties, on en déduit que $Au \in C^{\infty}(Q)$.

On peut énoncer maintenant le théorème principal :

THEOREME 1.1. :

Soit $L = L(x,t,D_x,tD_t)$ un opérateur différentiel d'ordre m dans Q, de la forme (0.1), vérifiant les hypothèses H1, H2 et H3 (avec $\mu > 0$). Alors il existe une application $E = V(Q) \to V(Q)$, proprement supportée, ayant les trois propriétés suivantes :

1) - Pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$, on a :

(1.8) $$E = W_{\mu,loc}^{o,p,q}(Q) \longrightarrow W_{\mu,loc}^{m,p,q}(Q)$$

2) - Pour tout u dans $V(Q)$, on a :

(1.9) $$\text{sing supp } E\, u \subset \text{sing supp } u$$

3) - L'opérateur $R = EL - I$ est régularisant.

I-3 - ESPACES DE DISTRIBUTIONS SUR R :

Pour tous entiers m et $p \geq 0$, on a défini dans [3] un espace de distributions $W_{\mu}^{m,p}(R)$ par :

(1.10) $$W_{\mu}^{m,p}(R) = \{u \in L^2(R)\ ,\ t^{\mu\alpha}\ (tD_t)^j D_t^h\ u \in L^2(R) \text{ si } 0 \leq \mu\alpha + j \leq m\ ,\ 0 \leq h \leq p,\ \mu\alpha \in \mathbb{N}\}$$

Si m est un entier ≤ 0, on définit l'espace $W_{\mu}^{m,o}(R)$ comme l'ensemble des distributions $u \in \mathcal{D}'(R)$ qui s'écrivent :

(1.11) $$u = \sum_{\substack{\mu\alpha+j\leqslant m \\ \mu\alpha\in\mathbb{N}}} t^{\mu\alpha}(tD_t)^j\, f_{\alpha j}$$

où les $f_{\alpha j}$ sont dans $L^2(R)$. Ces espaces sont munis d'une norme naturelle d'espace de Hilbert.

Suivant un procédé classique, utilisé dans [3], on munit les espaces $W_\mu^{m,p}(R)$ d'une norme dépendant d'un paramètre ξ décrivant R^{n-1}.

On pose :

$$<\xi> = (1+|\xi|^2)^{1/2}$$

Pour tout $\xi \in R^{n-1}$ et pour tout $u \in W^{m,p}(R)$, on pose (si $m \geqslant 0$ et $p \in \mathbb{R}$) :

(1.12) $$||u||^2_{m,p,\xi} = \sum_{\substack{\mu\alpha+j\leqslant m \\ \mu\alpha\in\mathbb{N} \\ 0\leqslant h\leqslant p}} <\xi>^{2|\alpha+\frac{p-h}{\mu}|} ||t^{\mu\alpha+j}D_t^{j+h}u||^2_{L^2(R)}$$

Si m est un entier $\leqslant 0$, on définit de manière analogue l'espace $W_\mu^{m,p}(R)$ d'une norme dépendant du paramètre $\xi \in R^{n-1}$. Pour tout $\xi \neq 0$, cette norme est équivalente à la norme "naturelle" de l'espace $W_\mu^{m,p}(R)$.

Une distribution tempérée $u \in \mathcal{S}'(R^n)$ est dans $W_\mu^{m,p,q}(R^n)$ si et seulement si sa transformée de Fourier partielle $\hat{u}(\xi,t)$ vérifie :

(1.13) $$\int_{R^{n-1}} <\xi>^{2q}\, ||\hat{u}(\xi,.)||^2_{m,p,\xi}\, d\xi < \infty .$$

I-4 - OPERATEURS SEMI-REGULARISANTS :

Définition 1-4.

Pour tout m réel, on désigne par $\mathcal{H}_\mu^m(Q)$ l'espace des applications $(x,\xi) \to A(x,\xi)$ C^∞ de $\Omega \times \mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathcal{L}(L^2(R))$ ayant les propriétés suivantes :

1) - Pour tous entiers s, s', et $p \geqslant 0$, A se prolonge en une application C^∞ de $\Omega \times R^{n-1}$ dans $(W_\mu^{-s',0}(R), W_\mu^{s,p}(R))$.

2) - Pour tout compact $K \subset \Omega$, pour tout multi-indice (α,β), pour tous entiers s, s' et $p \geqslant 0$, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

$$(1.14) \qquad \|D_x^\alpha D^\beta A(x,\xi)u\|_{s,p,\xi} \leqslant C\|u\|_{-s',0,\xi}(1+|\xi|)^{m-|\beta|+\frac{p}{\mu}}$$

pour tout $(x,\xi) \in K \times R^{n-1}$ et pour tout $u \in C_o^\infty(R)$.

A tout élément A de $\mathcal{H}_\mu^m(Q)$, on fait correspondre une application, aussi notée A, de $C_o^\infty(Q)$ dans $C^\infty(Q)$, définie par :

$$(1.15) \qquad Au(x,t) = \int e^{ix.\xi} \left[A(x,\xi)\ \hat{u}(\xi,\ )\right](t)\ đ\xi \ . \qquad \forall u \in C_o^\infty(Q)$$

où $\hat{u}\ (\xi,\bullet)$ désigne la transformée de Fourier partielle de u par rapport à x. On pose $đ\xi = (2\pi)^{1-n}d\xi$.

On désignera par $OP\mathcal{H}_\mu^m(Q)$ l'ensemble des applications de $C_o^\infty(Q)$ dans $C^\infty(Q)$ qui sont la somme d'une application A définie par l'intégrale (1.15), avec $A(x,\xi)$ dans $\mathcal{H}_\mu^m(Q)$, et d'un opérateur régularisant.

La propriété suivante des opérateurs semi-régularisants se déduit immédiatement des propriétés classiques des symboles à valeurs vectorielles.

<u>Proposition 1.2</u> :

Si A est un élément de $OP\mathcal{H}_\mu^m(Q)$ (m réel, $\mu > 0$), proprement supporté, alors A se prolonge, pour entiers s, s' et $p \geqslant 0$, et pour tout réel q, en une application linéaire continue de $W_{\mu,\,comp}^{-s',o,p}(Q)$ dans $W_{\mu,loc}^{s,p,q_1}(Q)$, avec $q_1 = q-m-\frac{p}{\mu}$. Si l'opérateur A est proprement supporté, il définit une application de V(Q) dans lui-même.

La proposition suivante exprime le caractère pseudo-local des opérateurs définis ci-dessus, et le fait qu'ils sont régularisants pour $t \neq 0$.

<u>Proposition 1.3</u> :

Soit A dans $OP\mathcal{H}_\mu^m(Q)$ (m réel, $\mu > 0$), proprement supporté :

i) Si, pour tout m' réel, A est dans $OP\mathcal{H}_{\mu}^{m'}(Q)$, alors A est régularisant.

ii) Si φ est dans $C_0^{\infty}(Q_+)$, alors l'opérateur $u \longrightarrow \varphi Au$ est régularisant. (On désigne par Q_+ l'ouvert $\Omega \times]0,T[$).

iii) Si ψ est dans $C_0^{\infty}(Q_+)$, alors l'opérateur $u \longrightarrow A\psi u$ est régularisant.

iv) Si deux fonctions φ et ψ de $C_0^{\infty}(Q)$ ónt leurs supports disjoints, alors l'opérateur $u \longrightarrow \varphi A\psi u$ est régularisant.

Démonstration :

Pour qu'un opérateur T soit régularisant, il suffit que, pour tous entiers s, s', et $p \geqslant 0$, pour tous réels q et q', on ait :

$$T = \mathcal{E}'(Q) \cap W_{\mu}^{-s',o,q'}(Q) \longrightarrow W_{\mu,\,loc}^{s,p,q}(Q)$$

Le point i) se déduit immédiatement de la proposition 1.2.

Pour le point ii) on remarque que, si u est dans $W_{\mu}^{-s',o,q'}(Q)$, la distribution φAu, qui a son support dans Q_+, vérifie d'après la proposition 1.2.

$$\varphi Au \in \bigcap_{\substack{s\geqslant 0\\ p\geqslant 0}} W_{\mu}^{s,p,q'-m-\frac{p}{\mu}}(Q) .$$

D'après la définition des espaces $W_{\mu}^{s,p,q}(Q)$ une distribution qui a ces deux propriétés est dans $C^{\infty}(Q)$.

Point iii). Si u est dans $W_{\mu,loc}^{s',o,q'}(Q)$, la distribution ψu, qui a son support dans Q_+, est dans $W_{\mu}^{-s'-r,o,q'+r}(Q)$, pour tout $r > 0$ (cela résulte de la définition des espaces). D'après la proposition 1.2, la distribution $A\psi u$ vérifie :

$$A\psi u \in \bigcap_{p\geqslant 0,\, r\geqslant 0} W_{\mu,loc}^{o,p,q'+r-\frac{p}{\mu}-m}(Q) ,$$

donc est dans $C^{\infty}(Q)$.

Point iv). On peut, quitte à effectuer une partition de l'unité sur les supports de φ et ψ, supposer qu'il existe des compacts K_1 et K_2 de Ω, et des intervalles I_1 et I_2 inclus dans I, tels que :

$$\operatorname{supp}\varphi(x,t) \subset K_1 \times K_1 \qquad \operatorname{supp}\psi(x,t) \subset K_2 \times K_2$$

On est alors nécessairement dans l'une des trois situations suivantes :

a) $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

b) $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ et $0 \not\subset I_1$

c) $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ et $0 \not\subset I_2$

Dans le cas a) l'opérateur $u \longrightarrow \varphi A \psi u$ est dans $OP\mathcal{H}_\mu^{m'}(Q)$ pour tout réel m' (celà résulte des propriétés classiques des symboles à valeurs vectorielles), et d'après le point i) cet opérateur est régularisant. Dans les cas b) et c) la propriété résulte des points ii) et iii).

Les opérateurs de $\mathcal{H}_\mu^o(Q)$ ont donc les propriétés 1) et 2) annoncées dans le théorème 1.1 pour la paramétrixe de l'opérateur différentiel (0.1).

Les deux propositions suivantes se déduisent immédiatement des propriétés classiques des symboles à valeurs vectorielles.

Proposition 1.4 :

Soit m_j une suite de réels, strictement décroissante et tendant vers $-\infty$. Pour tout j, soit A_j un élément de $\mathcal{H}_\mu^{m_j}(Q)$. Alors il existe un élément A de $\mathcal{H}_\mu^{m_o}(Q)$ tel que, pour tout N, on ait :

$$(1.16) \qquad A - \sum_{j<N} A_j \in \mathcal{H}_\mu^{-m_N}(Q) \quad .$$

Soit maintenant $L(x,t,D_x,tD_t)$ un opérateur différentiel dans Q, d'ordre m, de la forme (0.1). On lui fait correspondre l'opérareur différentiel ordinaire $L_o(x,t,\xi,tD_t)$ défini en (0.8).

Proposition 1.5 :

Soit $(x,\xi) \to A(x,\xi)$ un élément de $\mathcal{H}_\mu^p(Q)$ (p réel), et soit A l'opérateur associé. Pour tout (x,ξ) dans $\Omega \times R^{n-1}$, définissons un opérateur $B(x,\xi) = C_o^\infty(R) \to C^\infty(R)$ par :

$$B(x,\xi) = A(x,\xi) o\, L_o(x,t,\xi,tD_t) \tag{1.17}$$

Alors :

i) L'opérateur AoL est dans $OP\mathcal{H}_\mu^p(Q)$

ii) L'application $(x,\xi) \to B(x,\xi)$ définie en (1.17) est dans $\mathcal{H}_\mu^p(Q)$. Soit B l'opérateur associé.

iii) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait :

$$B - AoL \in OP\mathcal{H}_\mu^{p-\varepsilon}(Q)$$

II - UNE CLASSE D'OPERATEURS

Nous allons décrire une classe d'opérateurs qui contiendra le premier terme de la paramétrixe à gauche de l'opérateur différentiel (0.1).

Posons :

(2.1) $\quad Q_+ = \Omega \times]o,T[\qquad \underline{Q_+} = \Omega \times [o,T[$,

Au lieu de définir des opérateurs par la formule usuelle utilisant la transformation de Fourier :

$$Au\ (x) = \int e^{ix.\xi}\ a(x,\xi)\ \hat{u}(\xi)\ d\!\!{}^-\xi\ ,$$

nous allons définir une famille d'opérateurs $A = C_o^\infty(\underline{Q_+}) \longrightarrow C^\infty(\underline{Q_+})$ en utilisant la transformation de Mellin.

Au &1, nous rappelons les propriétés de cette transformation. Au &2, nous énonçons les propriétés des symboles utilisés. Au &3, nous leur associons des opérateurs $A = C_o^\infty(\underline{Q_+}) \longrightarrow C^\infty(\underline{Q_+})$, puis $A = C_o^\infty(Q) \longrightarrow C^\infty(Q)$. Au & 4 et 5, nous montrons que les opérateurs ainsi définis ont les propriétés 1 et 2 annoncées dans le théorème 1.1.

II - 1 - RAPPELS SUR LA TRANSFORMATION DE MELLIN :

A toute fonction $u(x,t)$ dans $C_o^\infty(\underline{Q_+})$ on fait correspondre sa transformée de Fourier partielle en x :

(2.2) $$\hat{u}(\xi,t) = \int e^{-ix\xi}\ u(x,t)\,dx$$

et la transformée de Mellin en t de la fonction précédente :

(2.3) $$\tilde{\hat{u}}(\xi,\theta) = \int_0^\infty t^{-i\theta}\ \hat{u}(\xi,t)\frac{dt}{t}\ .$$

Rappelons les propriétés classiques de cette transformation.

Proposition II-1 :

Si $u \in C_o^\infty(Q_+)$:

i) La fonction $\theta \longrightarrow \tilde{u}(\xi,\theta)$ est holomorphe dans

$$\{(\xi,\theta) \in C^n x C \qquad Im\,\theta > 0\}.$$

ii) Pour tout $\xi \in R^{n-1}$, la fonction $\theta \to \tilde{u}(\xi,\theta)$ se prolonge en une fonction méromorphe dans C, admettant pour pôles simples les nombres complexes de la forme $-ki (k \in \mathbb{N})$, les résidus correspondant étant :

$$\frac{i}{k!} \; \partial_t^k \hat{u}(\xi,o)$$

iii) Pour tous $A > 0$, $\varepsilon > 0$ et $N > 0$, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

(2.4) $$|\tilde{u}(\xi,\theta)| \leqslant C(1+|\xi|+|\theta|)^{-N}$$

pour tout (ξ,θ) dans $\mathbb{R}^{n-1} x C$ tel que :

$$-A \leqslant Im\,\theta \leqslant o \text{ et } \quad |\theta+ki| \geqslant \varepsilon \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

II - 2 - DEFINITION D'UNE CLASSE DE SYMBOLES :

Soit μ un réel > o fixé.

Posons, pour tout $(t,\xi,\theta) \in I \times R^{n-1} \times C$:

(2.5) $$\Phi(t,\xi,\theta) = 1 + |t^\mu \xi| + |\theta|$$

(2.6) $$\psi(t,\xi) = \inf\,(|t| \; |\xi|^{\frac{1}{\mu}},1)$$

Désignons par P le demi-plan :

(2.7) $$P = \{\ \theta \in C, \quad Im\,\theta < \frac{1}{2}\ \}.$$

Définition II.1 :

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $p \geqslant 0$. On désigne par $F_\mu^{m,p}(Q)$ l'ensemble des fonctions $a(x,t,\xi,\theta)$ C^∞ sur $\Omega \times I \times \mathbb{R}^{n-1} \times \bar{P}$ ayant les propriétés suivantes :

1) Pour tout (x,t,ξ) dans $\Omega \times I \times \mathbb{R}^{n-1}$ la fonction $\theta \longrightarrow a(x,t,\xi,\theta)$ est holomorphe dans P.

2) Pour tout compact K de Ω, pour tout réel $A \leqslant \frac{1}{2}$, pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

(2.8) $$|D_x^\alpha t^\beta D_t^\beta D_\xi^\gamma D_\theta^\delta \; a(x,t,\xi,\theta)| \leqslant C \; \psi^{\sup(\beta,p)} \; \Phi^{m-|\gamma|-\delta} \; t^{\mu|\gamma|}$$

pour tout (x,t,ξ,θ) dans $K \times I \times R^{n-1} \times \bar{P}$ tel que :

$$A \leqslant \operatorname{Im} \theta \leqslant \frac{1}{2} \quad .$$

Exemple 2.1. :

Considérons l'opérateur différentiel (0.1) :

$$L(x,t,D_x,tD_t) = \sum_{\substack{|\alpha|+j\leqslant m \\ \mu|\alpha|\in\mathbb{N}}} a_{\alpha j}(x,t) \; t^{\mu|\alpha|} D_x^\alpha (tD_t)^j$$

et associons-lui le symbole :

(2.9) $$L(x,t,\xi,\theta) = \sum_{\substack{|\alpha|+j\leqslant m \\ \mu|\alpha|\in\mathbb{N}}} a_{\alpha j}(x,t) \; t^{\mu|\alpha|} \xi^\alpha \theta^j .$$

Ce symbole est dans $F_\mu^{m,o}(Q)$.

Remarque 2.1 :

On a, pour tous $p \geqslant 0$, $\mu > 0$, $m \in \mathbb{R}$:

(2.10) $$F_\mu^{m,p}(Q) \subset F_\mu^{m,o}(Q)$$

Le produit d'un symbole dans $F_\mu^{m,p}(Q)$ par un symbole dans $F_\mu^{m',p'}(Q)$ est dans $F_\mu^{m+m',p+p'}(Q)$.

A l'exception des symboles associés selon (2.9) aux opérateurs différentiels (0.1), les seuls symboles utilisés dans les constructions de paramétrixes seront dans $F_\mu^{o,o}(Q)$, ou dans des classes incluses dans celles-ci. Nous nous limiterons à cette valeur de m et p dans la suite de ce &.

II - 3 - OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS :

Pour tout $\varepsilon > 0$, désignons par Γ_ε le contour formé de l'intervalle $]-\infty,-\varepsilon]$, du demi-cercle $\{|\theta| = \varepsilon, \operatorname{Im}\theta \leqslant 0\}$, et de l'intervalle $[\varepsilon,+\infty[$, parcourus successivement.

Soient $u \in C_0^\infty(Q_+)$, et $a(x,t,\xi,\theta)$ un symbole dans $F_\mu^{o,o}(Q)$. Alors pour tout $(x,t) \in Q_+$ et pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, l'intégrale :

$$(2.11) \qquad Au(x,t) = \int_{\xi\in R^{n-1}} e^{ix.\xi} \int_{\theta\in\Gamma_\varepsilon} t^{i\theta}\, a(x,t,\xi,\theta)\, \hat{u}\,(\xi,\theta)\, đ\xi\, đ\theta$$

converge absolument, et est indépendante de ε. On utilise la notation classique:

$$(2.12) \qquad đ\xi = (2\pi)^{1-n}\, \xi \qquad\qquad đ\theta = (2\pi)^{-1} d\theta$$

On vérifie, en utilisant le point iii) de la proposition 2.1, que Au est dans $C^\infty(Q_+)$. Pour tout entier $q \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in C$ tel que $\operatorname{Re} p > 0$, désignons par $A_p^{(q)}$ l'opérateur associé selon (2.11) au symbole $\partial_t^q\, a(x,t,\xi,\theta-ip)$, qui est aussi dans $F_\mu^{o,o}(Q)$. On a :

Proposition II-2 :

Si u est dans $C_0^\infty(\underline{Q_+})$ et a dans $F_\mu^{o,o}(Q)$, alors la fonction Au défibie par (2.11) est dans $C^\infty(\underline{Q_+})$, et l'on a :

1) Pour tout entier $n \geqslant 0$

$$(2.13) \qquad \partial_t^n\, Au = \sum_{p=o}^{n} \binom{n}{p} A_p^{(n-p)}\, \partial_t^p u$$

$$(2.14) \qquad \partial_t^n Au|_{t=0} = \sum_{p=o}^{n} \binom{n}{p} \left[\partial_t^{n-p} a(x,o,D_x,-ip)\right] \partial_t^p u(.,o)$$

2) Pour tout λ tel que $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$

$$(2.15) \qquad t^{-\lambda} A t^{\lambda} = A_\lambda^{(o)}$$

La proposition II-2 s'obtient immédiatement par des intégrations dans le plan complexe.

Pour le point 2, on remarque que si a est dans $F_\mu^{o,o}(Q)$ l'application

$$(x,\xi) \longrightarrow \partial_t^{n-p}\ a(x,o,\xi,-ip)$$

est dans $S_{1,o}^{\frac{n-p}{\mu}}(Q)$. Celà résulte de la majoration

$$\frac{|t|^\mu}{\Phi} = \frac{|t|^\mu}{1+|t|^\mu|\xi|+|\theta|} \leqslant C\ (1+|\xi|)^{-1} \tag{2.16}$$

L'opérateur $\partial_t^{n-p}\ a(x,o,D_x,-ip)$ est donc un opérateur pseudo-différentiel classique dans Ω.

On a définit ainsi une application $A_+ = C_o^\infty(Q_{\underline{+}}) \longrightarrow C^\infty(Q_{\underline{+}})$

On définit aussi, de manière analogue une application :

$$A_- = C_o^\infty(Q_-) \longrightarrow C^\infty(Q_-)$$

Si $u \in C^\infty(Q)$, désignons par u_+ et u_- ses restrictions à Q_+ et Q_-. Définissons une fonction $Au \in C^\infty(Q_+ \cup Q_-)$, en posant :

$$Au(x,t) = \begin{cases} A_+u_+(x,t) & \text{si } t > 0 \\ \\ A_-u_-(x,t) & \text{si } t < 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

D'après le point 2) de la proposition II-2, on a pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\partial_t^n\ A_+u_+(x,t)\big|_{t=o} = \partial_t^n\ A_-u_-(x,t)\big|_{t=o}$$

La fonction Au définie par (2.17) est donc C^∞ dans Q.

L'opérateur $A = C_o^\infty(Q) \longrightarrow C^\infty(Q)$ ainsi défini sera noté symboliquement $a(x,t,D_x,tD_t)$.

Remarque 2.2 :

A toute fonction u C^∞ dans Q_+ associons la fonction u_* définie dans R^n par :

$$u_*(x,y) = u(x,e^y) \qquad \forall (x,y) \in R^n$$

Alors on a, formellement :

$$(2.18) \qquad (Au)_* = a(x,e^y,D_x,D_y)u_* \quad .$$

Le premier terme de la paramétrixe de l'opérateur différentiel (0.1) sera défini comme dans ce &, et correspondra à un symbole dans $F_\mu^{o,o}(Q)$ qui sera déterminé au & IV.

Dans la suite de ce &, nous allons montrer que les opérateurs A correspondant aux symboles a dans $F_\mu^{-m,o}(Q)$ ont les propriétés (1) et (2) annoncées dans le théorème 1.1.

II - 4 - ACTION DANS LES ESPACES DE SOBOLEV :

On se propose de démontrer les résultats suivants :

Proposition II-3 :

Soit $a(x,t,\xi,\theta)$ un symbole dans $F_\mu^{o,o}(Q)$. Alors, pour tous entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, pour tout $r \in \mathbb{R}$; l'opérateur $a(x,t,D_x,tD_t)$ se prolonge en une application linéaire de $W_{\mu,comp}^{p,q,r}(Q)$ dans $W_{\mu,loc}^{p,q,r}(Q)$.

Corollaire 1 :

Si de plus l'opérateur $A = a(x,t,D_x,tD_t)$ est proprement supporté, il se prolonge en une application de l'espace V(Q) (défini au & I-1) dans lui-même.

Corollaire 2 :

Si le symbole a est dans $F_\mu^{-m,o}(Q)$, $(m \in \mathbb{N})$, alors pour tous entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, pour tout $r \in \mathbb{R}$, l'opérateur $a(x,t,D_x,tD_x)$ se prolonge en une application linéaire de $W_{\mu,comp}^{p,q,r}(Q)$ dans $W_{\mu,loc}^{p+m,q,r}(Q)$.

Les corollaires 1 et 2 se déduisent immédiatement de la proposition II-3, que nous allons démontrer au moyen du lemme suivant.

Lemme II-1 :

Si a est dans $F_\mu^{o,o}(Q)$, alors pour tout k dans $\mathbb{N}$, pour tout q dans $\mathbb{R}$, l'opérateur $A^{(k)}$ correspondant au symbole $\partial_t^k a(x,t,\xi,\theta)$ se prolonge en une application linéaire continue de $W_{\mu,comp}^{o,o,q}(\Omega)$ dans $W_{\mu,loc}^{o,o,q-\frac{k}{\mu}}(Q)$.

Démonstration du lemme 2.1 :

Pour tout réel q, on a, d'après la définition 1.1 :

$$W_\mu^{o,o,q}(Q) = L^2(I,H^q(\Omega)).$$

Il nous suffit de démontrer que, pour tous φ et ψ dans $C_o^\infty(Q)$, il existe C > 0 tel que l'on ait :

$$(2.19) \qquad \|\varphi A^{(k)}\psi u\|_{L^2(I,H^{q-\frac{k}{\mu}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \leqslant C\,\|u\|_{L^2(I,H^q(R^{n-1}))}$$

pour tout u dans $C_o^\infty(Q_+)$. Associons à tout μ dans $C^\infty(Q_+)$ la fonction $\mu_* \in C^\infty(R^n)$ définie par :

$$u_*(x,y) = u(x,e^y) \qquad \forall (x,y) \in R^n .$$

L'estimation (2.19) est équivalente, d'après la remarque 2.2, à :

$$(2.20) \qquad \|e^{y/2}\,\varphi_*\, a^{(k)}(x,e^y,D_x,D_y)\,\psi_*\, u_*\|_{L^2(R,H^{q-\frac{k}{\mu}}(R^{n-1}))} \leqslant$$

$$\leqslant C\|e^{y/2}\, u_*\|_{L^2(R,H^q(R^{n-1}))} .$$

On peut écrire, grâce à une intégration dans le plan complexe :

$$(2.21) \qquad e^{y/2}\,\varphi_*\, a^{(k)}(x,e^y,D_x,D_y)\,\psi_*\, e^{-\frac{y}{2}} = \varphi_*\, a^{(k)}(x,e^y,D_x,D_y+\tfrac{i}{2})\,\psi_*$$

Il nous reste à démontrer que l'opérateur T écrit ci-dessus envoie $L^2(R,H^q(R^{n-1}))$ dans $L^2(R,H^{q-\frac{k}{\mu}}(R^{n-1}))$. Or l'opérateur T défini en (2.21) est un opérateur pseudo-différentiel, dont le symbole

$$T(x,y,\xi,\eta) = a^{(k)}(x,e^y,\xi,\eta+\tfrac{i}{2})$$

vérifie, pour tout compact $K \subset R^n$, et pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ une majoration de la forme :

$$|D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma D_\eta^\delta T| \leqslant C(1+|\xi|)^{\frac{k}{\mu}-|\gamma|}(1+|\eta|)^{-\delta}$$

avec $C > 0$. Ces majorations suffisent à assurer que l'opérateur T envoie, pour tout q réel, $L^2(R,H^q(R^{n-1}))$ dans $L^2(R,H^{q-\frac{k}{\mu}}(R^{n-1}))$.

Démonstration de la proposition 2.3. :

On a, pour tous $p \geqslant 0$ et $q \in \mathbb{R}$:

$$(2.22) \qquad W_\mu^{o,p,q}(Q) = \{u \in W_\mu^{o,o,q}(Q),\ D_t^j u \in W_\mu^{o,o,q+\frac{p-j}{\mu}}(Q) \text{ si } 0 \leqslant j \leqslant p\}.$$

D'autre part, d'après la proposition 2.2, pour tout entier k, on a :

$$(2.23) \qquad \partial_t^k(Au) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} A_\ell^{(k-\ell)}\ \partial_t^\ell u \quad ,$$

en désignant par $A_\ell^{(k-\ell)}$ l'opérateur correspondant au symbole $\partial_t^{k-\ell} a(x,t,\xi,\theta-i\ell)$.

D'après le lemme 2.1, pour tout réel r, on a :

$$(2.24) \qquad A_\ell^{(k-\ell)} \ : \ W_{\mu,comp}^{o,o,r}(Q) \longrightarrow W_{\mu,loc}^{o,o,r-\frac{k-\ell}{\mu}}$$

La proposition 2.3 résulte immédiatement de (2.22), (2.23) et (2.24).

II - 5 - CARACTERE PSEUDO-LOCAL :

Proposition 2.4 :

Soit a est un élément de $\dot{F}_\mu^{o,o}(Q)$. Soient φ et ψ dans $C_o^\infty(Q)$, dont les supports sont disjoints. Alors l'opérateur :

$$u \longrightarrow \varphi a(x,t,D_x,tD_x)\ \psi\ u$$

est régularisant (au sens du & I-2).

Démonstration :

On peut se ramener, en utilisant des partitions de l'unité sur les supports de φ et ψ, au cas où il existe des compacts K_1 et K_2 de Ω et des intervalles I_1 et I_2 inclus dans I, tels que :

$$\operatorname{supp} \varphi(x,t) \subset K_1 \times I_1 \qquad \operatorname{supp} \psi(x,t) \subset K_2 \times I_2$$

On est alors nécessairement dans l'une des trois situations suivantes :

a) $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

b) $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ et $0 \notin I_1$

c) $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ et $0 \notin I_2$

Désignons par $A(x,t,y,s)$ le noyau distribution de l'opérateur $u \longrightarrow \varphi a(x,t,D_x,tD_t)\psi\, u$. Il nous suffit, d'après la proposition 1.1, de démontrer que, pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, il existe $C > 0$ tel que :

$$\text{(2.25)} \qquad \int_{K_2 \times I_2} |D_x^\alpha D_t^\beta D_y^\gamma (sD_s)^\delta A(x,t,y,s)|^2 \, dy\, ds \leqslant C \, .$$

pour tout (x,t) dans $K_1 \times I_1$.

Le noyau distribution $A(x,t,y,s)$ est défini, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, par l'intégrale oscillante :

$$A(x,t,y,s) = I(f)$$

en posant :

$$f(x,t,\xi,\theta,y,s) = \varphi(x,t)\ \psi(y,s)\ a(x,t,\xi,\theta+\frac{i}{2}-i\lambda) \left[\frac{t}{s}\right]^\lambda .$$

et en désignant par $I(f)$ l'intégrale oscillante :

$$\text{(2.26)} \qquad I(f) = (st)^{-\frac{1}{2}} \int e^{i\xi.(x-y)+i\theta(\log t/s)}\ f(x,t,\xi,\theta,y,s)\ đ\xi\ đ\theta \, .$$

(sur le support de f, on a $st > 0$).

Exprimons maintenant, au moyen d'intégrales oscillantes analogues, les dérivées du noyau $A(x,t,y,s)$.

Lemme 2.2 :

Pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, il existe un nombre fini de fonctions f_j telles que l'on ait :

$$D_x^{\alpha} D_t^{\beta} D_y^{\gamma} (s D_s)^{\delta} A(x,t,y,s) = \sum_j I(f_j) \quad .$$

Il existe, pour tout j, un multi-indice $(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\delta_j,\varepsilon)$ et un entier p_j tel que l'on ait :

(2.27) $$f_j = t^{-p_j} \xi^{\alpha_j} \theta^{\beta_j} D_x^{\gamma_j} D_t^{\delta_j} (sD_s)^{\varepsilon_j} \left[\varphi \psi \, a(x,t,\xi,\theta+\frac{i}{2})\right]$$

De plus, pour tout λ tel que $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$, on a :

(2.28) $$I(f_j) = I((\frac{t}{s})^{\lambda} f(x,t,\xi,\theta - i\lambda,y,s)) \quad .$$

La vérification de ce lemme est immédiate à partir de l'écriture du noyau A.

On pourra déduire les majorations (2.25) du noyau A à partir de majorations des f_j au moyen du lemme suivnat.

Lemme 2.3 :

Soit une fonction $g(x,t,\xi,\theta,y,s)$ C^{∞} sur $\Omega \times I \times R^{n-1} \times \mathbb{R} \times \Omega \times I$. On suppose qu'il existe une fonction $h \in L^2(R^n)$ telle que, pour tout (x,t,y,s) on ait :

$$|g(x,t,\xi,\theta,y,s)| \leqslant |h(\xi,\theta)|$$

Alors l'intégrale I(f) définie en (2.26) vérifie, pour tout (x,t) dans $\Omega \times I$:

$$\int |(f)|^2 \, dy \, ds \leqslant \frac{1}{t} \int |h(\xi,\theta)|^2 \, d\xi \, d\theta \quad .$$

La vérification de ce lemme est immédiate en faisant le changement de variable $s = e^{\tilde{s}}$.

Nous allons chercher, pour chaque fonction f_j de la forme (2.27), une fonction g_j vérifiant l'hypothèse du lemme 2.3, telle que l'on ait $I(f_j) = I(g_j)$. Les majorations (2.25) s'en déduiront aussitôt, puisque α est arbitraire. Le choix de la fonction g_j est différent selon les 3 cas a), b) et c).

Cas a) - Si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, il existe $C_1 > 0$ tel que, dans le support des f_j, on ait :

$$|x-y| \geq C_1$$

Posons :

$$L = |x-y|^{-2}(-\Delta_\xi)$$

On a, pour tout entier N :

$$I(f_j) = I(L^N f_j) \quad .$$

Si a est dans $F_\mu^{o,o}(Q)$, pour toute fonction f_j de la forme (2.27), il existe un entier N_j tel que la fonction $g_j = L^{N_j} f_j$ vérifie :

(2.29) $$|g_j(x,t,\xi,\theta,y,s)| \leq (1+|\xi|+|\theta|)^{-n} \quad ,$$

c'est à dire l'hypothèse du lemme 2.3.

Cas b) - Si $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ et $0 \notin I_1$, il existe $C_2 > 0$ tel que, dans le support des f_j, on ait :

(2.30) $$|s| \geq C_2 \qquad \left|\log \frac{t}{s}\right| \geq C_2 \quad .$$

D'après le lemme 2.2, on a $I(f_j) = I(\tilde{f}_j)$, en posant :

$$\tilde{f}_j = \left(\frac{t}{s}\right)^{p_j} f_j(x,t,\xi,\theta-ip_j,y,s)$$

(2.31) $$= s^{-p_j}\xi^{\alpha_j}(\theta-ip_j)^{\beta_j}D_x^{\gamma_j}D_t^{\delta_j}(sD_s)^{\varepsilon_j}[\varphi\psi\, a(x,t,\xi,\theta-ip_j)] \quad .$$

Puisque (2.30) est vérifiée, la fonction $s \longrightarrow s^{-p_j}$ est C^∞ sur le support de f_j. Considérons l'opérateur différentiel :

$$L_1 = (\log t/s)^{-1} D_\theta .$$

On a, pour tout entier N :

$$I(f_j) = I(\tilde{f}_j) = I(L_1^N \tilde{f}_j) .$$

Si a est dans $F_\mu^{o,o}(Q)$, pour toute fonction $\tilde{f}_j$ de la forme (2.31), il existe un entier N_j tel que la fonction $g_j = L_1^{N_j} \tilde{f}_j$ vérifie (2.29).

<u>Cas c)</u> - Si $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ et $0 \notin I_2$, il existe $C_3 > 0$ tel que dans le support des f_j on ait :

$$|t| \geqslant C_3 \qquad |\log \frac{t}{s}| \geqslant C_3 .$$

On termine comme dans le cas b, sans utiliser cette fois la fonction $\tilde{f}_j$.

III - CONSTRUCTION DU PREMIER TERME DE LA PARAMETRIXE

Le but de ce chapitre est de démontrer la :

Proposition 3.1 :

Soit $L = L(x,t,D_x,tD_t)$ un opérateur différentiel d'ordre m dans Q, de la forme (0.1), vérifiant les hypothèses H_1 et H_2 du théorème 1.1 (avec $\mu > 0$). Alors il existe E dans $F_\mu^{-m,o}(Q)$ tel que l'opérateur $R = EL - I$ soit dans $OP\mathcal{H}^o_{\sqrt{\mathcal{E}}\,\mu}(Q)$.

Pour cela on établira d'abord :

1 - Un résultat sur l'inversion du symbole de L.

2 - Un résultat sur la composition des symboles.

3 - Un résultat sur les séries.

III - 1 - INVERSION D'UN SYMBOLE :

Le but de ce & est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.2 :

Soit $L(x,t,D_x,tD_t)$ un opérateur différentiel d'ordre m dans Q, vérifiant les hypothèses du théorème 1.1 (avec $\mu > 0$). Soit $L(x,t,\xi,\theta)$ le symbole correspondant dans $F_\mu^{m,o}(Q)$. Alors il existe un symbole $e_o(x,t,\xi,\theta)$ dans $F_\mu^{-m,o}(Q)$ tel que le symbole :

(3.1) $\qquad e_o(x,t,\xi,\theta)\ L(x,t,\xi,\theta) - 1$

soit dans $F_\mu^{-1,1}(Q)$.

1ère étape : L'hypothèse H_1 du théorème 1.1 équivaut pour le symbole $L(x,t,\xi,\theta)$ à la propriété suivante :

(3.2) $\qquad L(x,o,\xi,\theta) \neq 0 \qquad \forall (x,\theta) \in \Omega \times C \qquad$ tel que $\mathrm{Im}\,\theta \leq \frac{1}{2}$.

D'après la forme (0.1) de l'opérateur, $L(x,o,\xi,\theta)$ est indépendant de ξ. L'application $\theta \longrightarrow L(x,o,o,\theta)$ est un polynôme dont les coefficients dépendent de manière C^∞ de x et dont le terme de plus haut degré est θ^m. On en déduit la propriété suivante :

Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_1 > 0$ tel que l'on a :

$$|L(x,o,\xi,\theta)| \geqslant C_1(1+|\theta|)^m \tag{3.3}$$

pour tout (x,θ) dans $K \times C$ tel que $\operatorname{Im}\theta \leqslant \frac{1}{2}$.

Puisque le symbole $L(x,t,\xi,\theta)$ est dans $F_\mu^{m,o}(Q)$, il existe $C_2 > 0$ tel que l'on ait :

$$|D_t\, L(x,t,\xi,\theta)| \leqslant \leqslant C_2 |\xi|^{\frac{1}{\mu}}(1+|t^\mu\xi|+|\theta|)^m \tag{3.4}$$

pour tout (x,t,ξ,θ) dans $K \times I \times R^{n-1} \times C$ (il n'y a pas ici de restriction sur la partie imaginaire de θ, puisque le symbole est un polynôme en θ).

On en déduit l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait :

$$|L(x,t,\xi,\theta)| \geqslant \frac{C_1}{2}\,(1+|t^\mu\xi|+|\theta|)^m \qquad \text{si } |t|\,|\xi|^{\frac{1}{\mu}} \leqslant \varepsilon \,. \tag{3.5}$$

Soit d'autre part $\varphi_1 \in C_o^\infty(R)$, nulle hors de $[-\varepsilon,\varepsilon]$, égale à 1 dans $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ et posons $\varphi_2 = 1 - \varphi_1$.

Le symbole $E_1 = \varphi_1(t|\xi|^{\frac{1}{\mu}})\; L(x,t,\xi,\theta)^{-1}$ est dans $F_\mu^{-m,o}(Q)$, et le symbole $R_1 = E_1(x,t,\xi,\theta)\; L(x,t,\xi,\theta) - \varphi_1(t|\xi|^{1/\mu})$ est dans $F_\mu^{-1,1}(Q)$.

On souhaite maintenant trouver un symbole E_2 dans $F_\mu^{-m,o}(Q)$ tel que le symbole $R_2 = E_2\, L - \varphi_2(t|\xi|^{1/\mu})$ soit dans $F_\mu^{-1,1}(Q)$. Pour cela, on va utiliser l'hypothèse H_2 et inverser le symbole principal de L. Cette inversion est facile dans le domaine réel, mais on n'a fait aucune hypothèse sur les zéros complexes du symbole principal. C'est pourquoi nous précèderons en 2 étapes.

2ème étape : Inversion du symbole principal pour θ réel.

Définition III-1 :

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, on désigne par $\tilde{F}_{\mu}^{m,p}(Q)$ l'espace des fonctions $a(x,t,\xi,\theta)$ C^{∞} sur $\Omega \times I \times R^{n-1} \times R$, telles que, pour tout compact K de Ω pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

$$|D_x^{\alpha} t^{\beta} D_t^{\beta} D_{\xi}^{\gamma} D_{\theta}^{\delta} a(x,t,\xi,\theta)| \leqslant C\, \psi^{\sup(\beta,p)}\, \Phi^{m-|\gamma|-\delta}\, t^{\mu|\gamma|} \tag{3.6}$$

pour tout (x,t,ξ,θ) dans $K \times I \times R^{n-1} \times R$.

On va démontrer le :

Lemme 3.1 :

Si L vérifie l'hypothèse H_2 du théorème 1.1, il existe $\tilde{e}_2(x,t,\xi,\theta) \in \tilde{F}_{\mu}^{m,p}(Q)$ tel que le symbole :

$$\tilde{r}_2 = \tilde{e}_2\, L(x,t,\xi,\theta) - \varphi_2(t|\xi|^{\frac{1}{\mu}}) \tag{3.7}$$

soit dans $\tilde{F}_{\mu}^{-1,1}(Q)$.

Démonstration :

L'hypothèse H_2 implique l'existence, pour tout compact $K \subset \Omega$, de deux réels $A > 0$ et $C > 0$ tels que l'on ait :

$$|L(x,t,\xi,\theta)| \geqslant C\,(1+|\theta|+|t^{\mu}\xi|)^m \tag{3.8}$$

pour tout $(x,t,\xi,\theta) \in K \times I \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\Phi = 1 + |\theta|+|t^{\mu}\xi| \geqslant A .$$

Choisissons une fonction $\chi(u)$ dans $C^{\infty}(\mathbb{R})$ égale à 1 si $u \geqslant A + 2$ et à 0 si $u \leqslant A + 1$, et posons :

$$\tilde{e}_2(x,t,\xi,\theta) = \chi(\Phi)(L(x,t,\xi,\theta))^{-1} \tag{3.9}$$

Le symbole $\tilde{e}_2(x,t,\xi,\theta)$ a les propriétés annoncées dans le lemme 3.1.

3ème étape : Prolongement analytique approximatif d'un symbole.

Pour tout a dans $F_\mu^{m,p}(Q)$, désignons par ρa sa restriction à $(x,t,\xi,\theta) \in \Omega \times I \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. On définit ainsi une application :

(3.10) $$\rho : F_\mu^{m,p}(Q) \longrightarrow \tilde{F}_\mu^{m,p}(Q)$$

Nous allons essayer d'en construire un inverse approximatif. Posons :

(3.11) $$F_\mu^{-\infty,p}(Q) = \bigcap_{m\in R} F_\mu^{m,p}(Q) \ .$$

Lemme 3.2 :

i) Si $a \in F_\mu^{m,p}(Q)$ et $\rho a \in \tilde{F}_\mu^{-\infty,p}(Q)$, alors on a $a \in F_\mu^{-\infty,p}(Q)$.

De plus, il existe un opérateur $\pi : F_\mu^{m,p}(Q) \longrightarrow F_\mu^{m,p}(Q)$ tel que

(3.12) ii) $\forall a \in F_\mu^{m,p}(Q) \qquad a - \pi\rho a \in F_\mu^{-\infty,p}(Q)$

(3.13) iii) $\forall a \in \tilde{F}_\mu^{m,p}(Q) \qquad a - \rho\pi a \in F_\mu^{-\infty,p}(Q)$.

On en déduira facilement que, pour tous a dans $\tilde{F}_\mu^{m,p}$ et b dans $\tilde{F}_\mu^{m',p'}$, on a :

(3.14) $$\pi(a\ b) - \pi(a)\pi(b) \in F^{-\infty,p+p'}$$

En effet, on sait que $\pi(ab)-\pi(a)\pi(b)$ est dans $F_\mu^{m+m',p+p'}$ et d'après iii) la restriction de ce symbole à l'axe réel est dans $\tilde{F}_\mu^{-\infty,p+p'}$. Le point i) permet d'affirmer (3.14).

Démonstration du lemme 3.2 :

Point i) - Soit $a \in F_\mu^{m,p}$ tel que $\rho a \in \tilde{F}_\mu^{-\infty,p}$. Il nous faut montrer que pour tout $A \leqslant \frac{1}{2}$, $N \geqslant 0$, et pour tout compact K, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

(3.15) $$|a(x,t,\xi,\theta)| \leqslant C\ \Phi^{-N}\ \psi^p$$

pour tout $(x,t,\xi,\theta) \in K \times I \times R^{n-1} \times C$ tel que :

$$A \leqslant \operatorname{Im}\theta \leqslant \frac{1}{2} \ .$$

On majorera de même les dérivées. Posons $\theta = \sigma + i\tau$, avec $A \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{2}$, et σ réel. Pour tout τ, la fonction :

$$\sigma \longrightarrow T_N = \sum_{k=o}^{m+N-1} \frac{(i\tau)^k}{k!} \partial_\sigma^k \rho a(x,t,\xi\ ,\sigma)$$

est dans $\mathfrak{F}_\mu^{-\infty,p}$ par hypothèse, donc il existe $C_N > 0$ tel que :

$$|T_N| \leqslant C_N\ \Phi^{-N}\ \psi^p$$

pour tout $(x,t,\xi,\sigma+i\tau)$ tel que $A \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{2}$.

La différence $a - T_N$ vérifie une majoration de la forme :

$$|(a-T_N)(x,t,\xi,\theta)| \leqslant C \sup_{A\leqslant\tau\leqslant\frac{1}{2}} |\partial_\theta^{m+N} a(x,t,\xi,\sigma+i\tau)|$$

$$\leqslant C' \; \Phi(x,t,\xi,\theta)^{-N} \; \psi^p$$

puisque a est dans $F^{m,p}$ par hypothèse. On a bien montré (3.15).

<u>Définition de π</u> :

Soit $\chi \in C_0^\infty(R)$ égale à 1 sur un voisinage de 0. On définit l'opérateur π, pour tout $a \in \tilde{F}_\mu^{m,p}$, par :

$$\pi a(x,t,\xi,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(\theta,\sigma) \; a(x,t,\xi,\sigma) \; d\sigma \; . \qquad \forall\theta \in C$$

Rappelons que $\hat{\chi}(\theta)$ est analytique entière, que sa restriction à toute parallèle à l'axe réel est dans $\mathcal{S}(R)$ et que, pour tout $\theta \in C$, on a :

$$(3.16) \qquad \int_{\infty}^{\infty} \hat{\chi}(\theta-\sigma)d\sigma = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(\theta-\sigma)(\theta-\sigma)^n \; d\sigma = 0 \qquad \text{si } n \geqslant 1 \; .$$

La fonction $\theta \longrightarrow \pi a(x,t,\xi,\theta)$ est donc analytique entière. Si a est dans $\tilde{F}_\mu^{m,p}$, on a :

$$|\pi a(x,t,\xi,\theta)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\chi}(\theta-\sigma)| \; |a(x,t,\xi,\sigma)| \; d\sigma$$

$$\leqslant C \int_{\infty}^{\infty} |\hat{\chi}(\theta-\sigma)| \; \psi(t,\xi)^p \; \Phi(t,\xi,\sigma)^m \; d\sigma$$

$$\leqslant C \, \psi(t,\xi)^p \; \Phi(t,\xi,\theta)^m \int_{\infty}^{\infty} |\hat{\chi}(\theta-\sigma)| \; (1+|\theta-\sigma|)^{|m|} \; d\sigma \; .$$

On a utilisé l'inégalité de Peetre. La dernière intégrale est convergente et bornée quand θ décrit une bande parallèle à l'axe réel. On majore de même les dérivées du symbole πa, ce qui permet d'affirmer que πa est dans $F_\mu^{m,p}$.

Point ii) : Soit a dans $F_\mu^{m,p}$. On a d'après (3.16), pour tout entier n :

$$(a-\pi\rho a)(x,t,\xi,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(\theta-\sigma)\Big[a(x,t,\xi,\theta) - a(x,t,\xi,\sigma) \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \frac{(\theta-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!}\,\partial_\sigma^{n-1}\, a(x,t,\xi,\sigma)\Big]\, d\sigma \;.$$

La parenthèse est majorée par :

$$C|\theta-\sigma|^n \sup_{\lambda\in[0,1]} \Phi(x,t,\xi,\theta+\lambda(\sigma-\theta))^{m-n}\, \psi(t,\xi)^P$$

$$\leq C\, \Phi(t,\xi,\theta)^{m-n}\, (1+|\theta-\sigma|)^{n+|m-n|}\, \psi(t,\xi)^P \;.$$

On a donc, pour tout (x,t,ξ,θ), quand (x,t) décrit un compact et θ une bande parallèle à l'axe réel :

$$|(a-\pi\rho a)\ (x,t,\xi,\theta)| \leq$$

$$\leq C\, \Phi(t,\xi,\theta)^{m-n}\, \psi(t,\xi)^P \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\chi}(\theta-\sigma)|\ (1+|\theta-\sigma|)^{n+|m-n|}\, d\sigma \;.$$

L'intégrale est bornée sur toute bande parallèle à l'axe réel. On majore de même les dérivées du symbole $a-\pi\rho a$, et l'on conclut que ce symbole est dans $F_\mu^{-\infty,p}$. On vérifie de même le point iii).

Fin de la démonstration de la proposition 3.2 :

Posons :

$$e_2(x,t,\xi,\theta) = \pi(\tilde{e}_2) \tag{3.17}$$

où $\tilde{e}_2$ désigne le symbole dans $\tilde{F}_\mu^{-m,o}$ construit dans le lemme 3.1, et π l'opérateur de prolongement du lemme 3.2. Le symbole e_2 est dans $F_\mu^{-m,o}$. De l'égalité :

$$\tilde{e}_2\, L - \varphi_2(t|\xi|^{\frac{1}{\mu}}) = \tilde{r}_2, \text{ où } \tilde{r}_2 \in \tilde{F}_\mu^{-1,1}$$

et de la relation (3.14) on déduit que

$$e_2 L - \varphi_2(t|\xi|^{\frac{1}{\mu}}) \in F_\mu^{-1,1}$$

ce qui démontre la proposition 3.2.

III - 2 - COMPOSITION DES SYMBOLES :

Proposition 3.3 :

Soient m, m' deux réels, p et μ deux réels > 0. Soit $a(x,t,\xi,\theta)$ un symbole dans $F_\mu^{m,p}(Q)$, et $b(x,t,\xi,\theta)$ un symbole dans $F_\mu^{m',o}(Q)$. On suppose que les opérateurs $A = a(x,t,D_x,tD_t)$ et $B = b(x,t,D_x,tD_t)$ sont proprement supportés. ALors il existe un symbole, noté aob, dans $F_\mu^{m+m',p}(Q)$ tel que :

(3.18) $$a(x,t,D_x,tD_t)\ b(x,t,D_x,tD_t) = aob(x,t,D_x,tD_t)\ .$$

De plus le symbole r = aob - ab est dans $F_\mu^{m+m'-1,p+\varepsilon}(Q)$,

où $\varepsilon = \inf(\mu,1)$.

Puisque les restrictions Au et Bu à Q_+ ne dépendent que de la restriction de u à Q_+, il nous suffira de calculer $AoBu$, quand u est dans $C_o^\infty(Q_+)$.

On utilise alors la remarque 2.2. Posons, pour tout $u \in C_o^\infty(Q_+)$:

$$u_*(x,y) = u(x,e^y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n$$

On a :

$$(Au)_*(x,y) = a(x,e^y,D_x,D_y)u_*(x,y)$$

Le symbole C = aob est donc défini par :

(3.19) $$C(x,e^y,D_x,D_y) = a(x,e^y,D_x,D_y)\ b(x,e^y,D_x,D_y)$$

On a classiquement :

(3.20) $$C(x,e^y,\xi,\eta) = \int e^{i\varphi}\ a(x,e^y,\xi',\eta')\ b(x',e^{y'},\xi,\eta)\ dx'dy'đ\xi'đ\eta'\ .$$

en posant pour abréger :

$$\varphi = -(x-x').(\xi-\xi') - (y-y')(\eta-\eta') .$$

Le symbole r = aob-ab est donné par la formule de Taylor. Posons, pour tout λ dans $[0,1]$:

(3.21) $$f_o = D_\eta a(x,e^y,\xi+\lambda(\xi'-\xi),\eta+\lambda(\eta'-\eta))\ D_{y'}b(x',e^{y'},\xi,\eta)$$

et pour tout $j \leqslant n$, posons :

$$f_j = D_{\xi_j} a(x,e^y,\xi+\lambda(\xi'-\xi),\eta+\lambda(\eta'-\eta))\ D_{x'_j} b(x',e^{y'},\xi,\eta)$$

Le symbole $r(x,e^y,\xi,\eta)$ est une combinaison linéaire de la forme :

(3.22) $$r(x,e^y,\xi,\eta) = \sum_{j=o}^{n} c_j \int_{\lambda\in[o,1]} \int e^{i\varphi} f_j dx'dy'đ\xi'đ\eta'đ\lambda.$$

Pour toute fonction $f(x,y,\xi,\eta,x',y',\xi',\eta')$ telle que cette intégrale oscillante ait un sens, posons :

(3.23) $$I(f)\ (x,y,\xi,\eta) = \int e^{i\varphi} f\ dx'dy'đ\xi'đ\eta' \quad .$$

Montrons que le symbole r est dans $F_\mu^{m+m'-1,p+\varepsilon}(Q)$. Tout d'abord l'application $\eta \longrightarrow I(f_j)(x,y,\xi,\eta)$, définie pour η réel, se prolonge en une fonction holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Im}\eta \leqslant \frac{1}{2}$. On a, en n'écrivant pour abréger que la variable η, et en la notant $\eta = \sigma+i\tau$: $(\tau\leqslant\frac{1}{2})$.

(3.24) $$I(f)(\sigma+i\tau) = \int e^{-i(x-x').(\xi-\xi')-i(y-y')(\sigma-\sigma')} f(\sigma+i\tau,\sigma'+i\tau)\ d\mu$$

avec $d\mu = dx'dy'đ\xi'đ\sigma'$.

Montrons maintenant que le symbole $r(x,t,\xi,\theta)$ défini par (3.23) vérifie les majorations définissant la classe $F_\mu^{m+m'-1,p+\varepsilon}(Q)$. Pour simplifier l'écriture, majorons seulement le symbole lui-même. Les majorations des dérivées s'obtiennent de manière analogue.

Il nous faut donc démontrer que, pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour tout $A \leqslant \frac{1}{2}$, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

(3.25) $$|r(x,e^y,\xi,\eta)| \leqslant C\ \Phi(x,e^y,\xi,\eta)^{m+m'-1}\ \psi(y,\xi)^{P+\varepsilon}$$

si $x \in K$, $y \leqslant 0$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in C$, et $A \leqslant \mathrm{Im}(\eta) \leqslant \frac{1}{2}$.

On pose :

$$\Phi = 1 + e^{\mu y}|\xi|+|\eta|$$

$$\psi = \inf(1,e^y|\xi|^{\frac{1}{\mu}})$$

$$\varepsilon = \inf(\mu,1)$$

$$P = \{\eta \in C,\ \mathrm{Im}\eta < \frac{1}{2}\}$$

Examinons maintenant les majorations vérifiées par les fonctions f_j et leurs dérivées.

Pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour tout $A \leqslant \frac{1}{2}$, posons :

(3.26) $$E_{K,A} = \{(x,y,\xi,\eta),\ x \in K,\ y \leqslant 0,\ \xi \in R^{n-1},\ \eta \in C,\ A \leqslant \mathrm{Im}\eta \leqslant \frac{1}{2}\}$$

<u>Lemme 3.3</u> :

On suppose $m' \geqslant 0$. Pour tout compact $K \subset \Omega$, pour tout $A \leqslant \frac{1}{2}$, et pour tout multi-indice (α,β), il existe C, C_1 et $C_2 > 0$ tels que l'on ait :

(3.27) $$|D^{\alpha}_{x'}D^{\beta}_{y'}f_j| \leqslant C\ \Phi(e^y,\xi,\eta)^{m+m'-1}\psi(e^y,\xi)^{P+\varepsilon}\ .$$
$$\times \left[1+e^{C_1(y'-y)}\right]\ (1+|\xi'-\xi|+|\eta'-\eta|)^{C_2}\ .$$

pour tout $(x,y,\xi,\eta,x',y',\xi',\eta')$ dans $E_{K,A} \times E_{K,A}$.

Ce lemme s'obtient à partir de la définition II-1, en utilisant les inégalités suivantes :

$$\Phi(e^{y'},\xi,\eta) \leqslant \Phi(e^{y},\xi,\eta)\ (1+e^{y'-y}) \ .$$

$$\psi(e^{y'},\xi) \leqslant \psi(e^{y},\xi)\ (1+e^{y'-y}) \ .$$

$$\Phi(e^{y},\xi',\eta') \leqslant C\ \Phi(e^{y},\xi,\eta)\ (1+|\xi'-\xi|+|\eta'-\eta|) \ .$$

$$\psi(e^{y},\xi') \leqslant C\ \psi(e^{y},\xi)\ (1+|\xi'-\xi|+|\eta'-\eta|) \ .$$

La proposition 3.3 se déduit donc immédiatement du lemme 3.3 et du lemme suivant.

<u>Lemme 3.4</u> :

Soit une fonction $f(x,y,\xi,\eta,x',y',\xi',\eta')$ C^∞ sur $(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})^2$ ayant les propriétés suivantes :

1) f est nulle quand $y' \geqslant 0$, ou $x' \notin K'$ (K' étant un compact de Ω);

2) Pour tout $(x,y,\xi,\eta,x',y',\xi')$ la fonction $\eta' \longrightarrow f(x,y,\xi,\eta,x',y',\xi',\eta')$ est holomorphe dans P.

3) Pour tout compact $K \subset \Omega$, pour tout $A \leqslant \frac{1}{2}$ et pour tout multi-indice (α,β) il existe C, C_1 et $C_2 > 0$ tels que l'on ait :

$$|D^\alpha_{x'} D^\beta_{y'} f| \leqslant C\ (1+e^{C_1(y'-y)})\ (1+|\xi'-\xi|+|\eta'-\eta|)^{C_2} \ . \tag{3.28}$$

pour tous $(x,y,\xi,\eta) \in E_{K,A}$ et $(x',y',\xi',\eta') \in E_{K',A}$.

Alors pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour tout $A \leqslant \frac{1}{2}$, l'intégrale $I(f)$ définie par (3.23) est bornée quand $(x,y,\xi,\eta) \in E_{K,A}$.

<u>Démonstration du lemme 3.4</u> :

Soit $\chi(u) \in C^\infty(R)$ égale à 1 si $u \leqslant 1$ et à 0 si $u \geqslant 2$. Posons

$\chi_2 = 1-\chi_1$ et :

$$f_j = \chi_j(y'-y)\ f(x,y,\xi,\eta,x',y',\xi',\eta') \quad (j=1,2)$$

La fonction f_1 vérifie :

$$|D^{\alpha}_{x'}D^{\beta}_{y'}f_1| \leqslant C\ (1+|\xi'-\xi|+|\eta'-\eta|)^{C_2} \tag{3.29}$$

On en conclut, au moyen d'un lemme classique sur les intégrales oscillantes, que l'intégrale $I(f_1)$ est bornée quand (x,y,ξ,η) décrit E_A.

Pour majorer $I(f_2)$, on remarque que l'on a, pour tout $\lambda \in C$ tel que $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$:

$$I(f_2) = I(g) \tag{3.30}$$

avec

$$g = e^{\lambda(y-y')}f_2(x,y,\xi,\eta,x',y',\xi',\eta'-i\lambda)\ . \tag{3.31}$$

En effet dans le support de f_2, on a $y-y' \leqslant -1$, et une intégration dans le plan complexe permet d'obtenir (3.31). Si la fonction f vérifie (3.28), la fonction g définie par (3.31) vérifie (3.29) si l'on choisit $\lambda = C_1$. Le lemme classique sur les intégrales oscillantes permet de conclure que l'intégrale $I(g)$, ou $I(f_2)$, est bornée.

III- 3 - SERIES :

On veut démontrer la proposition suivante (on pose $\varepsilon = \inf(1,\mu)$.

Proposition 3.4 :

Pour tout $j \geqslant 0$, soit a_j un élément de $F^{-j,-j\varepsilon}_{\mu}(Q)$.
Alors il existe A dans $F^{o,o}_{\mu}(Q)$ tel que l'on ait pour tout n :

$$A - \sum_{j<n} A_j \in F^{-n,n\varepsilon}_{\mu}(Q)\ . \tag{3.32}$$

Résumé de la démonstration :

Soit $\varphi \in C_0^\infty(R)$, égale à 1 au voisinage de 0.

Posons pour tout $\alpha > 0$:

$$\varphi_\alpha(t,\xi) = \varphi\left(\frac{t|\xi|^{\frac{1}{\mu}}}{\alpha}\right).$$

On montre tout d'abord, en utilisant l'argument classique de Mittag-Leffler, qu'on peut trouver une suite $\alpha_j \longrightarrow 0$ telle que, pour tout $n \geqslant 0$, la série $\sum_n^\infty \varphi_{\alpha_j}\, a_j$ converge dans $F_\mu^{-n,n\varepsilon}(Q)$. (Cet espace de symboles est muni d'une structure naturelle d'espace de Fréchet).

On choisit ensuite une fonction $\chi \in C^\infty(R)$ égale à 0 si $\mu \leqslant 1$ et à 1 si $\mu \geqslant 2$. Pour tout $r \geqslant 1$, on pose :

$$\chi_R = \chi\left(\frac{\Phi(t,\xi,\theta)}{R}\right) .$$

On montre ensuite qu'on peut trouver une suite $R_j \longrightarrow \infty$ telle que, pour tout $n \geqslant 0$, la série :

$$\sum_n^\infty \chi_{R_j}(1 - \varphi_{\varepsilon_j})\rho a_j$$

converge dans $\tilde{F}_\mu^{-n,n}(Q)$. Cette classe de symboles a été introduite dans la définition 3.1. Bien entendu, la fonction de troncature χ_R fait perdre le caractère holomorphe en θ. On utilise alors l'opérateur π de prolongement approximatif défini dans le lemme 3.2, et l'on pose :

$$A = \sum_0^\infty \varphi_{\varepsilon_j}\, a_j + \pi\left(\sum_0^\infty (1-\varphi_{\varepsilon_j})\, \chi_{R_j}\, \rho a_j\right) .$$

L'opérateur A vérifie bien (3.32).

III - 4 - FIN DE LA DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.1 :

On convient de noter par la même lettre symboles et opérateurs. En utilisant les propositions 3.2 et 3.3, on construit par récurrence une suite d'éléments E_j de $F_\mu^{-m-j,j\varepsilon}(Q)$, telle que pour tout n, le symbole R_n défini par :

$$R_n = I - (E_o + \ldots + E_{n-1}) \circ L$$

soit dans $F_\mu^{-n,n\varepsilon}(Q)$. Il suffit de poser :

$$E_n = E_o R_n$$

D'après la proposition 3.4, il existe un symbole E dans $F_\mu^{-m,o}(Q)$ tel que pour tout n on ait :

$$E - \sum_{j<n} E_j \in F_\mu^{-m-n,n\varepsilon}(Q).$$

On vérifie que le symbole $R = E \circ L - I$ est dans l'intersection :

$$\bigcap_{n>o} F_\mu^{-n,n\varepsilon}(Q) .$$

La proposition 3.1 se déduit donc du lemme suivant, qui prouvera que R est dans $OP\mathcal{H}_\mu^o(Q)$.

<u>Lemme 3.5</u> :

Soit une fonction $a(x,t,\xi,\theta)$ C^∞ sur $\Omega \times I \times R^{n-1} \times \bar{P}$. On suppose que pour tout (x,t,ξ) dans $\Omega \times I \times R^{n-1}$, la fonction $\theta \longrightarrow a(x,t,\xi,\theta)$ est holomorphe dans P. On suppose que, pour tout compact $K \subset \Omega$, pour tout $A \leqslant \frac{1}{2}$, pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, et pour tous entiers M et N, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

$$(3.33) \qquad |D_x^\alpha D_t^\beta D_\xi^\gamma D_\theta^\delta a(x,t,\xi,\theta)| \leqslant C\,(1+|\xi|)^{\frac{\beta}{\mu}-|\gamma|}(1+|t^\mu\xi|+|\theta|)^{-N}$$

$$\times \inf\,(|t^\mu\xi|,1)^M$$

pour tout $(x,t,\xi,\theta) \in K \times I \times R^{n-1} \times \bar{P}$ tel que :

$$A \leqslant \operatorname{Im} \theta \leqslant \frac{1}{2} .$$

Alors l'opérateur $A = a(x,t,D_x,tD_t)$ correspondant à ce symbole est dans $OP\mathcal{H}^o_\mu(Q)$ (défini au & I.4).

On constate (définition II-1) que si :

$$a \in \bigcap_n F_\mu^{-n,n\varepsilon}(Q) ,$$

alors le symbole $a(x,t,\xi,\theta)$ satisfait à l'hypothèse du lemme 3.5.

On peut prolonger le symbole $a(x,t,\xi,\theta)$ quand $t \not\in I$ de telle sorte que les relations (3.33) soient vérifiées pour tout t réel.

<u>Démonstration</u> :

Pour tout (x,ξ) dans $\Omega \times R^{n-1}$, définissons un opérateur $A(x,\xi) : C_o^\infty(R) \longrightarrow C^\infty(R)$ en posant :

(3.34) $$A(x,\xi)u(t) = \int e^{i\theta \log t/s} a(x,t,\xi,\theta)\, u(S) \frac{ds}{S}\, đ\theta .$$

L'intégrale porte sur la demi-droite où s du même signe que t. On a, pour tout u dans $C_o^\infty(Q)$:

$$Au(x,t) = \int e^{ix.\xi}\left[A(x,\xi)\hat{u}(\xi,.)\right](t)\, đ\xi .$$

Montrons que l'application $(x,\xi) \longrightarrow A(x,\xi)$ est dans $\mathcal{H}^o_\mu(Q)$. Il suffit de montrer que, pour tout multi-indice (α,β), et pour tous entiers m,p,m',p', l'opérateur $A_{mp\alpha\beta m'p'}(x,\xi)$ défini par :

(3.35) $$A_{mp\alpha\beta m'p'}(x,\xi) = (t^m D_t^p) \circ (D_x^\alpha D_\xi^\beta A(x,\xi) \circ t^{m'} (tD_t)^{p'}$$

est borné dans $L^2(R)$, et que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

$$(3.36) \qquad ||A_{mp\alpha\beta m'p'}(x,\xi)||_{\mathcal{L}(L^2(R))} \leqslant C\ (1+|\xi|)^{\frac{p-m-m'}{\mu} - |\beta|}$$

pour tout $(x,\xi) \in K \times R^{n-1}$. Pour cela, on remarque que l'opérateur défini par (3.35) correspond au symbole $f(x,t,\xi,\theta)$ suivant :

$$f(x,t,\xi,\theta) = t^m(D_t + \frac{\theta}{t})^p\ t^{m'}\ a(x,t,\xi,\theta-im')\ \theta^{p'}\ .$$

Si a vérifie les hypothèses du lemme 3.5, alors, pour tous entiers q et r, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

$$|(tD_t)^q D_\theta^r\ f(x,t,\xi,\theta+\frac{i}{2})| \leqslant C\ (1+|\xi|)^{\frac{p-m-m'}{\mu} - |\xi|}\ (1+|\theta|)^{-r}$$

pour tout $(x,t,\xi,\theta) \in K \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. On en déduit, pour l'opérateur correspondant sur R, la majoration de norme (3.35) (au moyen du changement de variable $t = e^{\tilde{t}}$).

IV - CONSTRUCTION DU SECOND TERME DE LA PARAMETRIXE

Le but de ce & est de démontrer la :

Proposition IV - 1 :

Soit $L = L(x,t,D_x,tD_t)$ un opérateur différentiel dans Q, d'ordre m, vérifiant les hypothèses du théorème 1.1 (avec $\mu > 0$). Soit A un élément de $\mathcal{H}^o_\mu(Q)$. Alors il existe B dans $\mathcal{H}^o_\mu(Q)$ tel que l'opérateur A - BL soit régularisant (au sens du & I).

Ce résultat, joint à la proposition III-1, achèvera la démonstration du théorème 1.1. En effet, on sait d'après la proposition III-1 qu'il existe E_1 dans $F^{-m,o}_\mu(Q)$ et R_1 dans $OP\mathcal{H}^o_\mu(Q)$ tels que :

$$E_1\ L = I + R_1$$

Soit alors E_2 dans $\mathcal{H}^o_\mu(Q)$ tel que l'opérateur $R_2 = E_2L - R_1$ soit régularisant. Alors l'opérateur $E = E_1+E_2$ a toutes les propriétés annoncées dans le théorème 1.1.

Pour démontrer la proposition IV-1, nous allons rappeler quelques résultats de régularité pour des opérateurs différentiels ordinaires.

IV - 1 - REGULARITE POUR DES OPERATEURS DIFFERNTIELS ORDINAIRES :

Soit Λ une variété C^∞. On considère un opérateur différentiel ordinaire de la forme suivante :

$$(4.1)\qquad L(\lambda,t,tD_t) = \sum_{\substack{|\alpha|+j\leqslant m \\ \mu|\alpha|\in\mathbb{N}}} a_{\alpha j}(\lambda)t^{\mu|\alpha|}\ (tD_t)^j\ .$$

où les $a_{\alpha j}$ sont des fonctions C^∞ sur Λ, à valeurs complexes. On fait sur cet opérateur les trois hypothèses suivantes, qui sont voisines de celles du théorème 1.1 :

1) Une hypothèse sur l'équation déterminante de L qui se traduira par :

(4.2) $\quad L(\lambda,0,\theta) \neq 0 \qquad$ si $\lambda \in \Lambda \qquad$ et $\operatorname{Im} \theta \leqslant \frac{1}{2}$

2) Une hypothèse d'ellipticité :

(4.3) $\quad \forall \lambda \in \Lambda\ ,\ \forall (t,\theta) \in R^2 - \{0,0\}\ ,\ L_m(\lambda,t,\theta) \neq 0\ .$

où L_m désigne la partie principale de l'opérateur L.

3) On suppose qu'il existe $\lambda_o \in \Lambda$ tel que :

(4.4) $\quad \ker L(\lambda_o,t,tD_t) \cap \mathcal{S}(R) = 0\ .$

On veut montrer la :

<u>Proposition 4.2</u> :

Sous les trois hypothèses ci-dessus, il existe un voisinage V de λ_o dans Λ, et une application $\lambda \longrightarrow Q(\lambda)$, C^∞ de V dans $\mathcal{L}(L^2(R))$, tels que pour tout λ dans V et pour tout u dans $\mathcal{S}(R)$, on ait :

(4.5) $\quad Q(\lambda)\ L(\lambda,t,tD_t)u = u$

De plus :

1) Pour tout λ dans V, $Q(\lambda)$ est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(R)$ dans $\mathcal{S}(R)$.

2) Pour tout entier $s \geqslant 0$, l'application $\lambda \longrightarrow Q(\lambda)$ se prolonge en une application C^∞ de V dans $\mathcal{L}(W_\mu^{-s,o}(R),\ W_\mu^{-s+m,o}(R))$.

On déduit facilement cette proposition des estimations à priori démontrées dans [3]. Montrons brièvement qu'on peut retrouver ce résultat à partir de l'étude faite dans [5] d'une classe d'opérateurs pseudo-différentiels sur R -{0}.

On a défini dans [5], pour tout $m \in \mathbb{N}$, une classe de symboles, notée $F_\mu^{-m}(R)$, munie d'une structure d'espace de Fréchet, et une classe d'opérateurs $A = C_o^\infty(R) \longrightarrow C^\infty(R)$, notée aussi $F_\mu^{-m}(R)$ pour simplifier, telles que, pour tout s dans $\mathbb{Z}$, on ait l'inclusion algébrique et topologique :

$$(4.6) \qquad F_\mu^{-m}(R) \subset \mathcal{L}(W_\mu^{s,o}(R),\ W_\mu^{s+m,o}(R)) \ .$$

On a montré dans [5] que, sous les hypothèses (4.2) et (4.3), il existe une application $\lambda \longrightarrow E_\lambda$, C^∞, de Λ dans $F_\mu^{-m}(R)$, telle que les applications R_λ et R'_λ suivantes :

$$(4.7) \qquad R_\lambda = E_\lambda . L(\lambda,t,tD_t) - I$$

$$(4.8) \qquad R'_\lambda = L(\lambda,t,tD_t).E_\lambda - I$$

soient pour tout entier $s \geqslant 0$, C^∞ de Λ à valeurs dans $\mathcal{L}(W_\mu^{-s,o}(R),\ \mathcal{S}(R))$.

On déduit facilement de (4.7) que pour tout λ dans Λ, on a :

$$(4.9) \qquad \ker L(\lambda,t,tD_t) \cap W_\mu^{m,o}(R) \subset \mathcal{S}(R) \ ,$$

que ce noyau est de dimension finie (car il est inclus dans celui de $I+R_\lambda$, et R_λ est compact dans $L^2(R)$), et que l'image de $W_\mu^{m,o}(R)$ par l'opérateur L est fermée dans $L^2(R)$.

Sous l'hypothèse (4.4), il existe donc une application $Q : L^2(R) \longrightarrow W_\mu^{m,o}(R)$ telle que l'on ait :

$$(4.10) \qquad QoL(\lambda_o,t,tD_t)u = u \qquad\qquad \forall u \in W_\mu^{m,o}(R) \ ,$$

et Q est continue de $\mathcal{S}(R)$ dans lui-même. On déduit de (4.8) et (4.10) que la différence $Q-E_{\lambda_o}$ est une application continue de $W_\mu^{-s,o}(R)$ dans $\mathcal{S}(R)$ (pour tout $s \geqslant 0$). Quitte à modifier la paramétrixe E_λ (on suppose que la classe $F_\mu^{-m}(R)$ contient tous les opérateurs ayant la même régularité que R_λ), on peut supposer que $E_{\lambda_o} = Q$ et $R_{\lambda_o} = 0$.

Soit V un voisinage de λ_o dans Λ tel que :

(4.11) $$||R_\lambda||_{\mathcal{L}(L^2(R))} \leqslant \frac{1}{2}$$

pour tout λ dans V. L'opérateur $I+R_\lambda$ est donc inversible dans $\mathcal{L}(L^2(R))$ pour tout λ dans V. Désignons par $I+S_\lambda$ son inverse. L'application $\lambda \longrightarrow S_\lambda$ est C^∞ de V dans $\mathcal{L}(L^2(R))$. De l'égalité :

(4.12) $$S_\lambda = - R_\lambda + R_\lambda^2 + R_\lambda S_\lambda R_\lambda$$

on conclut que S_λ a les mêmes propriétés de régularité que R_λ (plus précisément, l'application $\lambda \longrightarrow S_\lambda$ est C^∞ de Λ dans $\mathcal{L}(W_\mu^{-s,o}(R), \mathcal{S}(R))$ $(\forall s \geqslant 0)$.

Posons alors :

(4.13) $$Q_\lambda = (I+S_\lambda)\, E_\lambda$$

Cet opérateur a les propriétés annoncées dans la proposition 4.2. C'est un inverse à gauche pour L, et c'est la somme de E_λ, qui a les propriétés de régularité 1) et 2), et d'un terme ayant une régularité plus forte.

IV - 2 - DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION IV - 1 :

Elle se déduira du lemme suivant :

Lemme IV -1 :

Soit $L = L(x,t,D_x,tD_t)$ un opérateur différentiel dans Q, d'ordre m, vérifiant les hypothèses du théorème 1.1 (avec $\mu>0$). Alors il existe un $\varepsilon > 0$ ayant la propriété suivante. Pour tout r réel, et pour tout A dans $OP\mathcal{H}_\mu^r(Q)$, il existe B dans $OP\mathcal{H}_\mu^r(Q)$, tel que l'opérateur A-BL soit dans $OP\mathcal{H}_\mu^{-\varepsilon}(Q)$.

La proposition IV-1 s'en déduit facilement. Si A est dans $OP\mathcal{H}^{o}_{\mu}(Q)$, on construit par récurrence une suite d'éléments B_j de $OP\mathcal{H}^{-j\varepsilon}_{\mu}(Q)$, tels que les opérateurs :

(4.14) $$R_j = A - (B_o+\ldots+B_j) \circ L$$

soient dans $OP\mathcal{H}^{-(j+1)\varepsilon}_{\mu}(Q)$. D'après la proposition I-4, il existe un élément B de $OP\mathcal{H}^{o}_{\mu}(Q)$ tel que, pour tout j, $B-(B_o+\ldots+B_j)$ soit dans $OP\mathcal{H}^{-(j+1)\varepsilon}_{\mu}(Q)$. L'opérateur A-BL est alors dans $OP\mathcal{H}^{-j\varepsilon}_{\mu}(Q)$ pour tout $j > 0$. D'après la proposition 1.3, c'est donc un opérateur régularisant.

<u>Démonstration du lemme 4.1</u> :

Si L vérifie les hypothèses du théorème 1.1, désignons pour tout (x,ξ) dans $\Omega \times R^{n-1}$, par $Q(x,\xi)$ l'inverse à gauche de l'opérateur $L_o(x,t,\xi,tD_t)$ construit dans la proposition 4.2. (Le paramètre λ étant le couple (x,ξ)). D'après la proposition 4.2, pour tout $s \geqslant 0$, l'application $(x,\xi) \longrightarrow Q(x,\xi)$ est C^∞ de $\Omega \times R^{n-1}-\{0\}$ dans $\mathcal{L}(W^{-s,o}_{\mu}(R), W^{-s+m,o}_{\mu}(R))$.

Si x décrit un compact K de Ω et ξ décrit la sphère unité de R^{n-1}, pour tout multi-indice (α,β), il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

(4.15) $$||D^{\alpha}_{x}D^{\beta}_{\xi}Q(x,\xi)u||_{W^{-s+m,o}_{\mu}(R)} \leqslant C||u||_{W^{-s,o}_{\mu}(R)} \qquad \forall u \in C^{\infty}_{o}(R) .$$

On en déduit, à cause de la quasi-homogénéité de l'opérateur L_o et donc de son inverse, l'estimation suivante :

(4.16) $$||D^{\alpha}_{x}D^{\beta}_{\xi}Q(x,\xi)u||_{-s+m,o,\xi} \leqslant C\ ||u||_{-s,o,\xi}\ (1+|\xi|)^{-|\beta|}$$

pour tout u dans $C^{\infty}_{o}(R)$, pour tout (x,ξ) dans $K \times R^{n-1}-\{o\}$. Les espaces $W^{s,o}_{\mu}(R)$ sont munis de la norme dépendant du paramètre ξ définie au & I-3. Pour tout $A \in \mathcal{H}^{r}_{\mu}(Q)$ et pour tout (x,ξ) dans $\Omega \times R^{n-1}-\{o\}$, on définit un opérateur $B(x,\xi) = C_o^\infty(R) \longrightarrow C^\infty(R)$ par :

(4.17) $\quad B(x,\xi) = A(x,\xi) \circ Q(x,\xi)$.

Par définition, pour tous s,s' et $p \geqslant 0$, l'application $(x,\xi) \longrightarrow A(x,\xi)$ est C^∞ de $\Omega \times R^{n-1}$ dans $\mathcal{L}(W_\mu^{-s',o}(R), W_\mu^{s,p}(R))$. De plus, pour tout compact $K \subset \Omega$, pour tout multi-indice (α,β), il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

(4.18) $$||D_x^\alpha D_\xi^\beta A(x,\xi)u||_{s,p,\xi} \leqslant C\,||u||_{-s',o,\xi}\,(1+|\xi|)^{r-|\beta|+\frac{p}{\mu}}$$

pour tout u dans $C_o^\infty(R)$, pour tout (x,ξ) dans $K \times R^{n-1}$.

Des relations (4.16), (4.17) et (4.18) on déduit que $B(x,\xi)$ vérifie des majorations analogues à (4.18), donc est un élément de $\mathcal{H}_\mu^r(Q)$.

On lui associe, selon (1.15), un opérateur $B = C_o^\infty(Q) \longrightarrow C^\infty(Q)$, défini par :

$$Bu(x,t) = \int e^{ix.\xi}[B(x,\xi)\hat{u}(\xi,.)](t)\,d\!\!\!{}^-\xi\,.$$

L'opérateur B est donc dans $OP\mathcal{H}_\mu^r(Q)$. On a, pour tout (x,ξ) dans $\Omega \times R^{n-1}$:

$$B(x,\xi) \circ L_o(x,t,\xi,tD_t) = A(x,\xi)\ .$$

D'après la proposition 1.4, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'opérateur $R = BL - A$ soit dans $OP\mathcal{H}_\mu^{r-\varepsilon}(Q)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC - Cauchy problem with characteristic initial hyper surface - C.P.A.M. XXVI n° 4 (1973) 455-473.

[2] - M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC - Cauchy problem with multiple characteristics in space of regular distributions - Russian Math Survey 29 n° 2 (1974) 72-78.

[3] - P. BOLLEY - J. CAMUS - B. HELFFER - Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques - J. Math. pures et appl. 55 (1976).

[4] - N. HANGES - Thesis - Purdue University (1976).

[5] - J. NOURRIGAT - Une classe d'opérateurs pseudo-différentiels à une variable - C.R.A.S. 283 (1976) 457-460

[6] - BOUTET de MONVEL - HYpoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators - C.P.A.M. XXVII (1974) 585-639.