PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MARIE-FRANÇOISE COSTE
MICHEL COSTE
LOUIS MAHE

Contribution à l'étude de l'objet des entiers naturels d'un topos élémentaire

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 2
« Séminaires d'algèbre et logique », , p. 1-58
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___2_A1_0>

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'OBJET DES ENTIERS NATURELS D'UN TOPOS ELEMENTAIRE

par

Marie-Françoise COSTE

Michel COSTE

Louis MAHE

Ce travail aborde quelques aspects de l'étude des objets des entiers naturels dans les topos élémentaires.

Il y a essentiellement deux démarches :

- la première que l'on peut appeler "logique", repose sur le fait que la théorie intuitionniste des types (arithmétique d'ordre supérieur), est un système formel correct et complet pour la réalisation du langage de l'arithmétique donnée par les objets des entiers naturels (OEN) des topos élémentaires. Ceci permet de transposer des résultats connus de la théorie des types aux topos avec OEN;
- la deuxième, que l'on peut appeler "catégorique", utilise les procédés de fabrication des topos élémentaires pour exhiber des exemples concrets d'OEN, et permettre ainsi une étude précise de la façon dont les OEN se comportent en quelque sorte "vus de l'extérieur".

Ces deux démarches se retrouvent dans la question qui est au coeur de ce travail : "Que peut-on dire des flèches de N dans N ? Dans quelle mesure les choses se passent-elles comme dans les ensembles" ?

D'un côté, on étudie les flèches que l'on sait définir dans tout topos : les flèches récursives partielles. On démontre que le traitement de ces fonctions est absolument semblable au traitement ordinaire, mais que la différence entre les résultats des contructions est très sensible : c'est tout simplement l'écart entre ce qui est vrai (dans les ensembles) et démontrable (dans la théorie intuitionniste des types). La deuxième partie n'est qu'un commentaire de cette idée élémentaire.

D'un autre côté, on étudie la façon dont la connaissance de la valeur d'une flèche pour certains points, permet de connaître cette flèche. Ceci amène à distinguer et à classer un certain nombre de propriétés, et montre la diversité de situations que l'on peut rencontrer, et à laquelle on ne s'attendait pas a priori, il n'y a jamais plus d'un OEN dans un topos, et dans les topos de Grothendieck par exemple, tout OEN est somme directe de 1 $\mathbb{N}$ fois.

Ces deux démarches s'appuient mutuellement. La démarche "logique" permet de savoir ce qui est vrai ou pas uniformément dans tous les topos et est utile quand on veut faire de l'arithmétique. La démarche "catégorique" permet une interprétation de la théorie des types très riche, bien plus que ce qui existait déjà (sémantique de Kripke, modèles topologiques) bien concrète et très maniable. Un premier (petit) pas dans cette voie est la démonstration d'indépendance du principe de Markov (qui repose syntaxiquement sur l'élimination des coupures).

La rédaction en 3 parties correspond à la part de chacun dans le travail commun : la première partie est due à M. COSTE, la deuxième à M.F. COSTE et la troisième à L. MAHE.

Naturellement de nombreuses discussions collectives, dans lesquelles M. MASSERON et J.P. ESCOFIER ont joué un grand rôle, ont amené chacun à se poser de nouvelles questions et à reconsidérer son travail.

L'élaboration et la rédaction de cet article aurait été impossible sans l'aide et les encouragements constants de J. BENABOU et l'esprit d'équipe qui s'est crée dans son séminaire de théorie des catégories.

La troisième partie doit beaucoup aux conseils critiques et constructifs quasi-quotidiens de J. HOUDEBINE ainsi qu'à des conversations avec les membres du séminaire de logique qu'il dirige à Rennes, spécialement R. ROLLAND, et la deuxième partie au cours de théorie de la démonstration fait par J.Y. GIRARD à Paris VII.

PREMIERE PARTIE

THEORIE INTUITIONNISTE DES TYPES ET OBJETS DES ENTIERS NATURELS

I) LA THEORIE INTUITIONNISTE DES TYPES AVEC EXTENSIONNALITE

a) Les types sont formés suivant les règles que voici :

- $\mathbb{O}$ est un type (type des entiers).
- Si $\tau_1,\ldots,\tau_n$ est une suite finie (éventuellement vide) de types, $[\tau_1,\ldots,\tau_n]$ est un type (type des parties du produit $\tau_1 \times \ldots \times \tau_n$).

b) Le langage comprend la constante 0 de type $\mathbb{O}$, le symbole fonctionnel unaire S qui va du type $\mathbb{O}$ dans le type $\mathbb{O}$, et des symboles relationnels binaires $=_\tau$ pour l'égalité de chaque type τ (on écrira = au lieu de $=_{\mathbb{O}}$).

Les formules atomiques sont les suivantes :

- $\bot$ (l'absurde).
- $s =_\tau t$ pour s et t termes de type τ.
- $Tt_1\ldots t_n$ pour T terme de type $[\tau_1,\ldots,\tau_n]$ et $t_1,\ldots,t_n$ termes de types $\tau_1,\ldots,\tau_n$ (ici T est nécessairement une variable).

Les formules du langage se construisent à partir des formules atomiques en utilisant les connecteurs propositionnels $\wedge, \vee, \rightarrow$ et les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ portant sur des variables de n'importe quel type. $\neg A$ sera une abréviation de $A \rightarrow \bot$, $A \leftrightarrow B$ de $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

c) Les axiomes et les règles.

On les écrit dans un système de séquents ayant une suite finie de formules à gauche et une formule à droite.

1) Axiomes et règles logiques :

$$A \vdash A \qquad\qquad \bot \vdash A$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma' \vdash A}$$ quand Γ' contient toutes les formules de Γ.

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Introductions :

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A(x)} \quad (1)$$

Eliminations :

$$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \qquad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash C}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash B}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash B} \quad (2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x A(x)}\ (2) \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash B}\ (1)$$

(1) : x variable de n'importe quel type qui n'est libre ni dans Γ ni dans B .

(2) : x variable de n'importe quel type , t terme du même type .

2) Axiomes de l'égalité :

$$\vdash t =_\tau t \qquad t =_\tau u \vdash u =_\tau t \qquad t =_\tau u\ ,\ u =_\tau v \vdash t =_\tau v$$
$$A(t)\ ,\ t =_\tau u \vdash A(u)$$

t , u , v termes de type τ , A formule atomique .

3) Compréhension :

$$\vdash \exists X \forall x_1 \dots x_n (X x_1 \dots x_n \leftrightarrow A)$$

X variable de type $[\tau_1,\dots,\tau_n]$, x_i variable de type τ_i , A formule quelconque .

4) Extensionnalité :

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (X x_1 \dots x_n \leftrightarrow Y x_1 \dots x_n) \vdash X =_\tau Y$$

X et Y variables de type $\tau = [\tau_1,\dots,\tau_n]$, x_i variable de type τ_i .

5) Axiomes propres de l'arithmétique :

$$St = Su \vdash t = u \qquad\qquad St = 0 \vdash \perp$$

t , u termes de type $\mathbb{O}$.

Induction : $X0\ ,\ \forall x(Xx \rightarrow XSx) \vdash \forall x Xx$

X variable de type $\mathbb{O}$, x variable de type $\mathbb{O}$.

Notation : V (pour vrai) désignera 0 = 0

d) Variantes dans la formulation .

1) Formulation sans égalité pour les types différents de $\mathbb{O}$:

Le langage ne comprend plus que l'égalité pour le type $\mathbb{O}$. On convient alors que $X =_{[\tau_1,\dots,\tau_n]} Y$ abrège $\forall x_1 \dots \forall x_n (X x_1 \dots x_n \leftrightarrow Y x_1 \dots x_n$

Les axiomes de l'égalité ne portent plus que sur = (pour le type $\mathbb{O}$).

L'extensionnalité (e4) est supprimée comme schéma d'axiome , mais on a maintenant le schéma suivant (que l'on a l'habitude d'appeler encore extensionnalité) :

$$X t_1 \dots t_n\ ,\ t_1 =_{\tau_1} u_1\ ,\dots,\ t_n =_{\tau_n} u_n \vdash X u_1 \dots u_n$$

X variable de type $[\tau_1,\dots,\tau_n]$, t_i et u_i termes de type τ_i .

2) Formulation avec des termes d'abstraction :

Quand on construit le langage , on définit en même temps les termes et les formules en ajoutant la clause :

- Si A est une formule et $x_1,\dots,x_n$ des variables de type $\tau_1,\dots,\tau_n$ $\lambda x_1 \dots x_n A$ est un terme de type $[\tau_1,\dots,\tau_n]$ (appelé terme d'abstract

Les termes de type différent de $\mathbb{O}$ ne sont donc plus nécessairement des variables . Le schéma d'axiome de compréhension (c3) est remplacé par le schéma :

$$\vdash (\lambda x_1 \dots x_n A) t_1 \dots t_n \leftrightarrow A(t_1, \dots, t_n)$$

où $A(x_1, \dots, x_n)$ est une formule quelconque et t_i un terme de même type que x_i .

3) Formulation avec des termes d'abstraction et convention pour la substitution d'un terme d'abstraction à une variable :

On se place déja dans le cadre de la variante 1 ci-dessus .
On construit les termes et les formules comme dans la variante 2 , mais on écarte les formules où apparait une expression du genre $(\lambda x_1 \dots x_n A) t_1 \dots t_n$. Pour les substitions , il faut alors procéder ainsi : Si $B(X)$ est une formule , X une variable de type $[\tau_1, \dots, \tau_n]$, $B(\lambda x_1 \dots x_n A)$ désignera la formule obtenue en substituant mécaniquement $\lambda x_1 \dots x_n A$ à X dans B , puis en remplaçant toutes les sous-formules atomiques illicites du genre $(\lambda x_1 \dots x_n A) t_1 \dots t_n$ par $A(t_1, \dots, t_n)$.
Comme dans les règles de $\forall$-élimination et de $\exists$-introduction

$$\frac{\Gamma, A(T) \vdash B}{\Gamma, \forall X A(X) \vdash B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A(T)}{\Gamma \vdash \exists X A(X)}$$

T peut être un terme d'abstraction , on n'a plus besoin du schéma d'axiome de substitution qui devient démontrable par application de la $\exists$- introduction :

$$\frac{\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n (A(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow A(x_1, \dots, x_n))}{\vdash \exists X \forall x_1 \dots \forall x_n (X x_1 \dots x_n \leftrightarrow A(x_1, \dots, x_n))}$$

e) Sous-systèmes de la théorie des types

1) Arithmétique intuitionniste :

On ne considère plus que le type $\mathbb{O}$. Les axiomes et les règles logiques sont les mêmes (à ceci près que les quantificateurs ne portent que sur des variables de type $\mathbb{O}$) . Il n'y a plus besoin de compréhension ni d'extensionnalité . L'axiome d'induction est remplacé par le schéma :

$$A(0) , \forall x (A(x) \leftrightarrow A(Sx)) \vdash \forall x A(x)$$

A formule quelconque du premier ordre .

2) Analyse intuitionniste imprédicative :

Les types considérés sont $\mathbb{O}$ et les $[\mathbb{O}, \dots, \mathbb{O}]$ pour toute suite finie de $\mathbb{O}$. Il n'y a rien à changer pour les axiomes et les règles .

f) Nomenclature et quelques références .

HA_ω désignera la théorie intuitionniste des types avec extensionnalité .
HA_1 l'arithmétique intuitionniste .
HA_2 l'analyse intuitionniste imprédicative .
PA_ω, PA_1 , PA_2 désigneront les précédents systèmes munis en supplément du tiers-exclus : $\vdash A \vee \neg A$, A formule quelconque du langage considéré .
Si QA est un de ces systèmes , $\Gamma \vdash_{QA} A$ voudra dire que $\Gamma \vdash A$ est un théorème de QA .
On peut comparer au système HA_ω donné ici un certain nombre de systèmes introduits en théorie de la démonstration ou dans l'étude de la logique des topos élémentaires grace au tableau suivant :

Référence	Appelation	Formulation	Observations
Takeuti	Simple type theory with extensionality	du genre d1 + d3	Pas d'égalité pour le type 0 Pas d'arithmétique (c5) Système classique (avec tiers-exclus
Takahashi	Intuitionistic type theory with extensionality (ITE)	du genre d1 + d2	Pas d'égalité pour le type 0 Pas d'arithmétique
Girard	Théorie des ordres avec extensionnalité (HA_ω+ Ext)	du genre d1 + d3	Système exactement équivalent à celui donné ici
Fourman	Higher order logic	nettement différente des autres (avec un prédicat d'existence pour tenir compte des types éventuellement vides)	Pas d'arithmétique
Coste		du genre d3 avec utilisation de séquents "à niveaux" pour tenir compte des types éventuellement vides	Pas d'arithmétique
Boileau	Théorie des types	idem	Pas d'arithmétique

g) Addition de symboles pour les fonctions et les prédicats primitifs récursifs

On pourra ajouter au langage des symboles désignant certaines fonctions ou certains prédicats primitifs récursifs . On se limitera toujours à un nombre fini de tels symboles .

Une fonction primitive récursive est obtenue à partir des fonctions de base qui sont la constante 0 , la fonction successeur et les projections par composition et récursion . Quand on ajoute au langage un symbole pour dénoter une fonction primitive récursive , on ajoute en même temps des symboles qui dénotent les fonctions qui ont servi à la construire , ainsi que les axiomes de définition de toutes ces fonctions . Ces axiomes de définition sont :

$$\vdash h(x_1,\ldots,x_n) = g(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n))$$

dans le cas où h est obtenue par composition de g et $f_1,\ldots,f_m$

$$\vdash h(0,x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n)$$
$$\vdash h(Sy,x_1,\ldots,x_n) = g(h(y,x_1,\ldots,x_n),y,x_1,\ldots,x_n)$$

dans le cas où h est obtenue par récursion à partir de f et g .

Un prédicat P est primitif récursif quand sa fonction caractéristique K_P qui vaut 0 pour les arguments pour lesquels on a P et 1 ailleurs est primitive récursive . L'axiome de définition de P à partir de K_P est bien sur : $\vdash P(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow K_P(x_1,\ldots,x_n) = 0$

L'introduction de symboles pour les fonctions et les prédicats primitifs récursifs ne constitue qu'une extension par définition de HA_ω (resp. HA_2 , PA_ω, PA_2) puisque pour toute fonction primitive récursive n-aire h que l'on introduit , on a :

$\vdash_{HA}$ "Il existe un unique X du type des relations n+1-aires qui est fonctionnel et partout défini en ses n premiers arguments et qui vérifie les axiomes de définition de h ."

Il est donc indifférent de savoir si dans HA_ω (resp. HA_2 , PA_ω, PA_2) le langage comprend des noms pour les fonctions et prédicats primitifs récursifs .

Il faut être un peu plus soigneux pour le premier ordre . HA désignera le système HA_1 auquel on rajoute les symboles + , × , < et les axiomes :

$\vdash x+0 = x$	$\vdash x+Sy = S(x+y)$
$\vdash x\times 0 = 0$	$\vdash x\times Sy = (x\times y)+x$
$\vdash \neg(x<0)$	$\vdash x<Sy \leftrightarrow (x<y \vee x = y)$

Les axiomes de définition de < ne sont pas exactement ceux que donneraient le procédé décrit précédemment mais ils sont équivalents .

Ce choix est celui de [Shoenfield] et se justifie par le fait qu'il permet de représenter toutes les fonctions récursives partielles dans le langage .

II) OBJET DES ENTIERS NATURELS DANS UN TOPOS ELEMENTAIRE

a) Rappel de la définition .

Un objet des entiers naturels (OEN) d'un topos élémentaire $\underline{E}$ est un objet N muni de flèches $1 \xrightarrow{0} N$ et $N \xrightarrow{S} N$ tel que pour tout objet X de $\underline{E}$ muni de $1 \xrightarrow{a} X$ et $X \xrightarrow{f} X$, il existe une unique flèche $N \xrightarrow{k} X$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "a"'] & N \arrow[r, "S"] \arrow[d, "k"] & N \arrow[d, "k"] \\ & X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

L'OEN de $\underline{E}$ est , s'il existe , unique à isomorphisme unique près .

b) L'OEN comme modèle de HA_ω .

Une réalisation du langage de HA_ω dans un topos élémentaire $\underline{E}$ est la donnée d'un objet $|0|$ qui interprète le type 0 et de flèches $1 \xrightarrow{|0|} |0|$ et $|0| \xrightarrow{|S|} |0|$ qui interprètent les symboles 0 et S .

L'interprétation des types se définit par induction : Si $\tau_1,\dots,\tau_n$ ont été interprété par les objets $|\tau_1|,\dots,|\tau_n|$,le type $[\tau_1,\dots,\tau_n]$ est interprété par $\Omega^{\tau_1 \times \dots \times \tau_n}$ ($[-]$ est interprété par Ω) .

Un terme t de type τ (resp. une formule A) dont les variables libres sont parmi $x_1,\dots,x_n$ (de types $\tau_1,\dots,\tau_n$) est interprété relativement à la suite $(x_1,\dots,x_n)$ par une flèche $|\tau_1| \times \dots \times |\tau_n| \xrightarrow{|t;x_1,\dots,x_n|} |\tau|$ (resp. $|\tau_1| \times \dots \times |\tau_n| \xrightarrow{|A;x_1,\dots,x_n|} |\tau|$) . Cette interprétation se construit ainsi :

1) Pour les termes :

- Si t est une variable x_i figurant parmi $x_1,\dots,x_n$, $|x_i;x_1,\dots,x_n|$ est la projection canonique $|\tau_1| \times \dots \times |\tau_n| \longrightarrow |\tau_i|$.
- Si t est 0 , $|0;x_1,\dots,x_n|$ est $|\tau_1| \times \dots \times |\tau_n| \longrightarrow 1 \xrightarrow{|0|} |0|$.
- Si t est Su , $|t;x_1,\dots,x_n|$ est $|\tau_1| \times \dots \times |\tau_n| \xrightarrow{|u;x_1,\dots,x_n|} |0| \xrightarrow{|S|} |0|$.

2) Pour les formules :

- Si A est $t =_{\tau} u$, $|A;x_1,\dots,x_n|$ est

$$|\tau_1|\times\dots\times|\tau_n| \xrightarrow{(|t;x_1,\dots,x_n|,|u;x_1,\dots,x_n|)} |\tau|\times|\tau| \xrightarrow{\chi_\Delta} \Omega$$

où χ_Δ est la flèche caractéristique de la diagonale .

- Si A est $Tt_1\dots t_p$, $t_1,\dots,t_p$ de types $\tau_1,\dots,\tau_p$, $|A,x_1,\dots,x_n|$ est

$$|\tau_1|\times\dots\times|\tau_n| \xrightarrow{(|T;x_1,\dots,x_n|,|t_1;x_1,\dots,x_n|,\dots,|t_p;x_1,\dots,x_n|)}$$

$$\Omega^{|\sigma_1|\times\dots\times|\sigma_p|}\times|\sigma_1|\times\dots\times|\sigma_p| \xrightarrow{\varepsilon} \Omega$$

où ε est la flèche d'adjonction .

-Si A est $\perp$, $|A;x_1\dots x_n|$ est $|\tau_1|\times\dots\times|\tau_n| \longrightarrow 1 \xrightarrow{f} \Omega$

où f est la flèche "faux" .

- Si A est $B\wedge C$ (resp. $B\vee C$, $B\rightarrow C$) , $|A;x_1,\dots,x_n|$ est

$$|\tau_1|\times\dots\times|\tau_n| \xrightarrow{(|B;x_1,\dots,x_n|,|C;x_1,\dots,x_n|)} \Omega\times\Omega \xrightarrow{\wedge(\text{resp. } \vee,\rightarrow)} \Omega.$$

- Si A est $\exists x B$ (resp. $\forall x B$) , x ne figurant pas dans la suite $x_1,\dots,x_n$

$|A;x_1,\dots,x_n|$ est la flèche obtenue à partir de

$|\tau_1|\times\dots|\tau_n|\times|\tau| \xrightarrow{|B;x_1,\dots,x_n|} \Omega$ par quantification existentielle (resp. universelle) le long de la projection

$|\tau_1|\times\dots\times|\tau_n|\times|\tau| \longrightarrow |\tau_1|\times\dots\times|\tau_n|$.

3) Si l'on adopte la formulation avec des termes d' abstraction , les choses se passent ainsi : Si la formule A a été interprétée relativement à $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p$ par la flèche

$$|\tau_1|\times\dots\times|\tau_n|\times|\sigma_1|\times\dots\times|\sigma_p| \xrightarrow{|A;x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p|} \Omega$$

le terme $\lambda x_1\dots x_n A$ sera interprété relativement à $y_1,\dots,y_p$ par la flèche $|\sigma_1|\times\dots\times|\sigma_p| \xrightarrow{|\lambda x_1\dots x_n A;y_1,\dots,y_p|} \Omega^{|\tau_1|\times\dots\times|\tau_n|}$

obtenue par adjonction cartésienne .

Un séquent $\Gamma \vdash A$ dont les variables libres sont $x_1,\dots,x_n$ sera satisfait par la réalisation si $\bigwedge_{B\in\Gamma} |B;x_1,\dots x_n| \leq |A;x_1,\dots,x_n|$. la réalisation sera un modèle de HA_ω si elle satisfait les axiomes

$$St = Su \vdash t = u \qquad\qquad St = 0 \vdash \bot$$

$$X0 \;,\; \forall x(Xx \rightarrow XSx) \vdash \forall x Xx$$

En effet les autres axiomes sont satisfaits et les règles sont valides dans toute réalisation dans tout topos élémentaire ([Fourman], [Coste] , [Boileau] ; il faut signaler que puisque l'interprétation de tout type τ possède un point $1 \longrightarrow |\tau|$, on n'a pas à tenir compte des modifications destinées à englober le cas des types "vides") .

Un OEN induit une réalisation du langage de HA_ω : $\mathbb{O}$ est interprété par N , les symboles 0 et S par les flèches de même nom . On exprimera le fait que $\Gamma \vdash A$ est satisfait par l'OEN d'un topos élémentaire $\underline{E}$ par la notation $\Gamma \models_{\underline{E}} A$.

Proposition : Une réalisation du langage de HA_ω est un modèle de HA_ω si et seulement si c'est un OEN .

Le paragraphe 5.4. de [Freyd] contient tout ce qui est nécessaire à la démonstration .

c) Théorème de complétude .

Théorème : Un séquent $\Gamma \vdash A$ est un théorème de HA_ω si et seulement si il est satisfait par l'OEN de tout topos élémentaire qui en possède un .

Une partie de ce théorème n'est que la reformulation de la proposition précédente . L'autre résulte des propriétés de la construction suivante . cette construction est un cas particulier de constructions effectuées pour n'importe quelle théorie formulée dans le calcul des prédicats intuitionniste d'ordre supérieur dans [Fourman] , [Coste] , [Boileau] . Elle figure pour l'essentiel dans [Volger] .

On suppose énumérées les variables de chaque type τ :

$x_1^\tau, x_2^\tau, \ldots, x_n^\tau, \ldots$, ceci pour éviter les collisions de variables .

On pourra à volonté oublier les types en exposant , remplacer x par y ou z et une suite finie $x_1, \ldots, x_n$ par la notation $\vec{x}$.

Soit $\mathcal{C}(HA_\omega)$ la catégorie dont

- les objets sont les $(A; \tau_1, \ldots, \tau_n)$ où $\tau_1, \ldots, \tau_n$ est une suite finie de types et A une formule dont les variables libres sont parmi $x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n}$,
- les flèches $(A; \tau_1, \ldots, \tau_n) \longrightarrow (B; \sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ sont les classes d'équivalence de formules I dont les variables libres sont parmi $x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n}, y_{n+1}^{\sigma_1}, \ldots, y_{n+p}^{\sigma_p}$ et telles que :

$$I(\vec{x}, y_{n+1}^{\sigma_1}, \ldots, y_{n+p}^{\sigma_p}) , I(\vec{x}, y_{n+p+1}^{\sigma_1}, \ldots, y_{n+2p}^{\sigma_p}) \vdash_{HA_\omega} y_{n+1} = y_{n+p+1} \wedge \ldots \wedge y_{n+p} = y_{n+2p}$$

$$\exists y_{n+1}^{\sigma_1} \ldots \exists y_{n+p}^{\sigma_p} I(\vec{x}, y_{n+1}, \ldots, y_{n+p}) \underset{HA_\omega}{\vdash\dashv} A(\vec{x})$$

$$I(\vec{x}, \vec{y}) \vdash_{HA_\omega} B(\vec{y})$$

(I est prouvablement une relation fonctionelle de domaine A et d'image incluse dans B) modulo l'équivalence I $\underset{HA_\omega}{\vdash\dashv}$ I' .

L'identité de $(A; \tau_1, \ldots, \tau_n)$ est représentée par

$A(x_1, \ldots, x_n) \wedge x_1 =_{\tau_1} x_{n+1} \wedge \ldots \wedge x_n =_{\tau_n} x_{2n}$ et la composée des flèches représentées par $I(\vec{x}, y_{n+1}, \ldots, y_{n+p})$ et par $J(y_1, \ldots y_p, z_{p+1}, \ldots, z_{p+q})$ est représentée par

$\exists y_{n+q+1} \ldots \exists y_{n+q+p} (I(\vec{x}, y_{n+q+1}, \ldots, y_{n+q+p}) \wedge J(y_{n+q+1}, \ldots, y_{n+q+p}, z_{n+1}, \ldots, z_{n+}$

<u>Proposition</u> : $\mathcal{C}(HA_\omega)$ est un topos avec OEN , et pour tout séquent $\Gamma \vdash A$, on a $\Gamma \models_{\mathcal{C}(HA_\omega)} A$ si et seulement si $\Gamma \vdash_{HA_\omega} A$.

Le théorème résulte immédiatement de cette proposition, qui n'est que la formulation dans un cas particulier de résultats que l'on peut trouver avec les démonstrations dans [Fourman], [Coste], [Boileau].

d) Remarques.

1) Pour tout topos élémentaire $\underline{E}$ possédant un OEN, il existe un unique (à isomorphisme prés) foncteur logique $\mathcal{C}(HA_\omega) \longrightarrow \underline{E}$. Ce foncteur fait correspondre

- à l'objet $(A;\tau_1,\dots,\tau_n)$ "le" sous objet de $|\tau_1| \times \dots \times |\tau_n|$ de flèche caractéristique $|A;x_1,\dots,x_n|$ (dans $\underline{E}$).

- à la flèche de $(A;\tau_1,\dots,\tau_n)$ dans $(B;\sigma_1,\dots,\sigma_p)$ représentée par I la flèche de $\underline{E}$ dont le graphe, en tant que sous objet de $|\tau_1| \times \dots \times |\tau_n| \times |\sigma_1| \times \dots \times |\sigma_p|$ a pour flèche caractéristique $|I;x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p|$.

$\mathcal{C}(HA_\omega)$ est donc le topos avec OEN 2-initial.

2) Des résultats classiques sur HA_ω [Girard] se traduisent immédiatement dans $\mathcal{C}(HA_\omega)$:

- La propriété de la disjonction : Si $\vdash_{HA_\omega} A \vee B$ où A et B sont des formules closes, alors $\vdash_{HA_\omega} A$ ou $\vdash_{HA_\omega} B$.
Traduction : Si U et V sont des sous objets de 1 tels que $U \vee V$ est isomorphe à 1, alors soit U, soit V est isomorphe à 1.

- La propriété de la définissabilité explicite : Si $\vdash_{HA_\omega} \exists x A(x)$ où $\exists x A(x)$ est une formule close, x de type 0, il existe un entier n tel que $\vdash_{HA_\omega} A(\bar{n})$ où $\bar{n}$ est le terme $S^n 0$.
Traduction : Si A est une partie de N de support 1, A possède un point standard (de la forme $S^n 0$). Ceci entraine que N n'a que des points standards.

-La règle de Markov (cas clos) : Si $\vdash_{HA_\omega} A \vee \neg A$ et $\vdash_{HA_\omega} \neg\neg \exists x A$ où x de type 0 est la seule variable libre de A, alors $\vdash_{HA_\omega} \exists x A$. Traduction : Si A est un sous objet de N qui admet un complémentaire , et dont le support est dense pour la topologie de la double négation , son support est 1 .

) Fonctions primitives récursives .

Proposition : Soit N un OEN . Pour toute fonction primitive récursive f n-aire , il existe une unique flèche de N^n dans N qui vérifie les axiomes de définition de f . (On notera encore cette flèche f .)

Ceci est clair puisque l'addition de symboles pour dénoter des fonctions primitives récursives et de leurs axiomes de définition ne constitue qu'une extension par définition de HA_ω (voir I,g) .

Pour savoir comment construire ces flèches , il suffit de considérer le cas d'une fonction h définie par récursion puisqu'il n'y a aucun problème pour les fonctions de base et la composition . Les axiomes de définition de h sont :

$$h(0,x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n)$$

$$h(Sy,x_1,\dots,x_n) = g(h(y,x_1,\dots,x_n),y,x_1,\dots,x_n) \ .$$

On connait déja $N^n \xrightarrow{f} N$ et $N^{n+1} \xrightarrow{g} N$.

Soit $1 \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} N^{N^n}$ la flèche obtenue par adjonction cartésienne à partir de f . Soit ev : $N^{N^n} \times N^n \longrightarrow N$ la flèche d'évaluation , π : $N^{N^n} \times N^n \longrightarrow N^n$ la projection canonique . La flèche $N^{N^n} \times N^n \xrightarrow{(ev,\pi)} N \times N^n \xrightarrow{g} N$ donne par adjonction $N^{N^n} \xrightarrow{\hat{g}} N^{N^n}$.

Soit $\hat{h}$ l'unique flèche qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "\ulcorner f \urcorner"'] & N \arrow[r, "S"] \arrow[d, dashed, "\hat{h}"'] & N \arrow[d, "\hat{h}"'] \\ & N^{N^n} \arrow[r, "\hat{g}"] & N^{N^n} \end{tikzcd}$$

Alors $h : N \times N^n \longrightarrow N$ est la flèche obtenue par adjonction cartésienne à partir de $\hat{h}$. (Pour la construction de flèches primitives récursives voir aussi [Freyd] ou [Bénabou] .)

Il faut signaler que la manière usuelle de construire $<$ et $K_<$ est la suivante ([Bénabou]) : $<$ est la flèche caractéristique du mono $N \times N \xrightarrow{(\pi_0,+)} N \times N$ où π_0 est la première projection . Cette flèche $N \times N \xrightarrow{<} \Omega$ factorise par $1 \amalg 1 \xrightarrow{\binom{v}{f}} \Omega$ puisque $\vdash_{HA_\omega} x<y \vee \neg\, x<y$. $K_<$ est alors la flèche : $N \times N \longrightarrow 1 \amalg 1 \xrightarrow{\binom{0}{S0}} N$.

$$\begin{tikzcd} N \times N \arrow[r] \arrow[dr, "<"'] & 1 \amalg 1 \arrow[r, "\binom{0}{S0}"] \arrow[d, "\binom{v}{f}"] & N \\ & \Omega & \end{tikzcd}$$

DEUXIEME PARTIE

FONCTIONS RECURSIVES PARTIELLES ET RECURSIVES DANS LES TOPOS

I)DEFINITIONS

$\underline{E}$ désignera toujours un topos avec OEN.

L'OEN de $\underline{E}$ sera noté N, l'OEN de Ens $\mathbb{N}$.

Une fonction partielle de N^p dans N est un sous-objet $f \rightarrowtail N^p \times N$ vérifiant

$$\models_{\underline{E}} \forall \vec{x}\ \forall y\ \forall y'\ (\vec{x},y) \in f \wedge (\vec{x},y') \in f \to y=y'$$

(la notation $\vec{x}$ désigne un p-uplet $x_1,\dots,x_p$ de variables d'entier et sera constamment utilisé par la suite)

Une fonction récursive partielle du topos $\underline{E}$ est un élément du plus petit sous-ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions partielles des N^p dans N

1)contenant les graphes de $0, S, +, \times, K_{<}$ et des projections

2)clos par composition:

si $g \rightarrowtail N^n \times N, f_1 \rightarrowtail N^{p_1} \times N, \dots, f_n \rightarrowtail N^{p_n} \times N$ sont dans $\mathcal{F}$,

$h = \{(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,y) \mid \exists y_1 \dots \exists y_n \bigwedge_{i=1}^{n} (\vec{x}_i, y_i) \in f_i \wedge (y_1,\dots,y_n,z) \in g\}$ est dans $\mathcal{F}$

3)clos par μ-opération:

si $f \rightarrowtail N^{p+1} \times N$ est dans $\mathcal{F}$

$g = \{(\vec{x},y) \mid (\vec{x},y,0) \in f \wedge \forall z<y\ \exists t\ \ (\vec{x},y,St) \in f\}$

est dans $\mathcal{F}$

Les fonctions récursives partielles sont donc obtenues "de la même manière" dans tous les topos: par un nombre fini de compositions et de μ-opérations à partir des fonctions récursives partielles de base.

Plus précisément on va définir un ensemble $\mathcal{A}$ de formules de HA.

1) $y=0$, $y=Sx_1$, $y=x_1+x_2$, $y=x_1 \times x_2$, $(x_1<x_2 \wedge y=0) \vee (\neg x_1<x_2 \wedge y=1)$, $\bigwedge_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i=x_i \; x_j=y$
sont dans $\mathcal{A}$

2) si $A_1(\vec{x}_1, y), \dots, A_n(\vec{x}_n, y), B(y_1, \dots, y_n, y)$ sont dans $\mathcal{A}$

$\exists z_1 \dots z_n \bigwedge_{i=1}^{n} A_i(\vec{x}_i, z_i) \wedge B(z_1, \dots, z_n, y)$ est dans $\mathcal{A}$

3) si $A(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, y)$ est dans $\mathcal{A}$

$A(x_1, \dots x_n, y, 0) \wedge \forall z < y \, \exists t \; A(x_1, \dots, x_n, z, St)$ est dans $\mathcal{A}$

4) est le plus petit sous-ensemble des formules de HA vérifiant 1),2),3).

Une fonction récursive partielle du topos $\underline{E}$ est donc l'interprétation dans $\underline{E}$ d'une formule de $\mathcal{A}$.

Il est clair que deux formules différentes de $\mathcal{A}$ peuvent s'interpréter par des fonctions partielles égales dans certains topos et différentes dans certains autres(on en verra d'ailleurs des exemples).

Quand on dira "soit f une fonction récursive partielle" on supposera que l'on connait"l'algorithme de définition" de f,c'est-à-dire la formule,que l'on notera A_f,dont f est l'interprétation dans tous les topos.

D'après le théorème de représentabilité des fonctions récursives(voir par exemple [Shoenfield])on a dans $\underline{Ens}$

$(*)$ $\forall a_1 \dots \forall a_n \forall b \qquad (a_1, \dots, a_n, b) \in f \iff \vdash_{HA} A_f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{b})$

(si n est un entier on note le terme $\underbrace{S\dots S0}_{n \text{ fois}}$ $\bar{n}$,et la flèche $\underbrace{S\dots S0}_{n \text{ fois}}$ de tout topos $\underline{E}$ n)

D'après $(*)$ on a donc:

Si une fonction récursive partielle f est définie en a et vaut b dans $\underline{Ens}$,elle est définie en a et vaut b dans tout topos $\underline{E}$.

Une <u>fonction E-récursive</u> est une fonction récursive partielle f partout définie dans le topos $\underline{E}$:telle que $\vdash_{\underline{E}} \forall \vec{x} \, \exists y \; (\vec{x}, y) \in f$.
Une fonction $\underline{Ens}$-récursive est donc une fonction récursive.
L'ensemble des fonctions $\underline{E}$-récursives varie avec le topos $\underline{E}$.

Proposition:

$$A(y,0), \forall z<y\ \exists t\ A(z,t) \underset{\substack{HA \\ (HA_\omega)}}{\vdash} \exists y'\leq y\ (A(y',0) \wedge \forall z<y'\ \exists t'\ A(z,St'))$$

démonstration: par induction sur y.

Corollaire 1:

$$A \vee \neg A, \exists y\ A(y) \underset{\substack{HA \\ (HA_\omega)}}{\vdash} \exists ! y' (A(y') \wedge \forall z<y\ \neg A(z))$$

démonstration: onapplique la proposition à

$(A(y) \wedge t=0) \vee (\neg A(y) \wedge t=1)$

Corollaire 2 (existence du μ-opérateur dans un topos)

soit f une fonction E-récursivé telle que $\models_{E} \forall \vec{x}\ \exists y\ (\vec{x},y) \in f$

$g=\{(\vec{x},y) \mid (\vec{x},y,0) \in f \wedge \forall z<y\ \exists t, (\vec{x},y,St) \in f\}$ est E-récursive et vérifie

$g=\{(\vec{x},y) \mid (\vec{x},y,0) \in f \wedge \forall z<y\ (\vec{x},z,0) \notin f\}$

On peut donc également définir les fonctions E-récursives de la façon suivante (en identifiant les fonctions et leurs graphes):

une fonction E- récursive est un élément du plus petit sous-ensemble $\mathcal{F}'$ des flèches des N^p dans N

1) contenant $0, S, +, \times, K_<$ et les projections

2) clos par composition

3.) clos par μ-opération:

si $f: N^{p+1} \longrightarrow N$ est une flèche de $\mathcal{F}'$ telle que $\models_{E} \forall \vec{x}\ \exists y\ f(\vec{x},y)=0$

$g: N^p \longrightarrow N$ définie par $\models_{E} \forall \vec{x} \forall y \left[g(\vec{x})=y \longleftrightarrow f(\vec{x},y)=0 \wedge \forall z<y\ f(\vec{x},z) \neq 0\right]$

est une flèche de $\mathcal{F}'$.

Proposition

Les fonctions primitives récursives sont E-récursives dans tous les topos E.

démonstration: se baser sur l'exercice 1 de [Shoenfield] (chapitre 6).

II) THEOREME DE FORME NORMALE DANS UN TOPOS

Cette généralisation aux topos du théorème de forme normale de Kleene(voir par exemple [Shcenfield])nous permettra de caractériser les fonctions récursives partielle $\underline{E}$-récursives pour tout topos $\underline{E}$.

Il nous faut pour cela introduire quelques notions de numérotation de Gödel.

Soit H une des théories HA, HA_ω ...

On définit des fonctions primitives récursives $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $(\ )_0$ et $(\ )_1\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que $((\ )_0,(\ )_1)$ et $\langle\ ,\ \rangle$ soient inverses l'une de l'autre.

On associe à chaque symbole fonctionnel et à chaque variable un entier, appelé son numéro, puis on numérote les termes. (Par exemple $\ulcorner St \urcorner = \langle \ulcorner S \urcorner, \ulcorner t \urcorner \rangle$) ...

De la même façon en associant un entier à chaque symbole relationnel et logique on numérote les formules. (Par exemple $\ulcorner A \wedge B \urcorner = \langle \ulcorner \wedge \urcorner, \langle \ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner \rangle\rangle$).

On numérote également les séquents puis les démonstrations

On prend seulement garde à ce que la façon de numéroter permette de reconstituer sans ambigüté le terme, la démonstration la formule à partir de son numéro.

On définit ensuite

-les fonctions primitives récursives

- ν telle que $\nu(0)=\ulcorner 0 \urcorner$ et $\nu(Sx)=\langle \ulcorner S \urcorner, \nu(x)\rangle$

(pour tout entier n on a donc $\nu(n)=\ulcorner \bar{n} \urcorner$)

-Sub telle que $Sub(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner t \urcorner)=\ulcorner A(t) \urcorner$, où A est une formule x une variable et t un terme

-le prédicat primitif récursif Dem_H tel que $Dem_H(n, \ulcorner A \urcorner)$ si et seulement si n est le numéro d'une démonstration de la formule A dans H.

$\mathrm{Prouv}_H(x)$ est la formule $\exists y\ \mathrm{Dem}_H(y,x)$ où Dem_H est la formule de HA représentant le prédicat primitif Dem_H(les fonctions primitives récursives sont récursives,donc représentables [Shoenfield]).

$\mathrm{Coh}(H)$ est la formule $\forall y \neg \mathrm{Dem}_H(y, \overline{\ulcorner \perp \urcorner})$.

Si $a_1,\ldots,a_n$ sont des entiers et $\tilde{A}(x_1,\ldots,x_n)$ une formule de H,$\mathrm{Prouv}_H(\ulcorner A(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n)\urcorner)$ est un formule close de HA.

On va donner un sens à l'expression $\mathrm{Prouv}_H(\ulcorner A(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\urcorner)$, qui sera une formule de HA avec $x_1,\ldots,x_n$ comme variables libres telle qu'en substituant $a_1,\ldots,a_n$ à $x_1,\ldots,x_n$ on obtienne $\mathrm{Prouv}_H(\ulcorner A(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n)\urcorner)$.

Soit $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)$.On définit la fonction primitive récursive $S_{\vec{x}}$ par:

$$S_{\vec{x}}(a,b_1,\ldots,b_n)=\mathrm{Sub}(\ldots(\mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(a,\ulcorner x_1\urcorner,\nu(b_1)),\ulcorner x_2\urcorner,\nu(b_2))\ldots,\ulcorner x_n\urcorner,\nu(b_n)).$$

On a donc:

$$S_x(\ulcorner A(x_1,\ldots,x_n)\urcorner,a_1,\ldots,a_n)=\ulcorner A(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n)\urcorner.$$

$\mathrm{Prouv}_H(\ulcorner A(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\urcorner)$ est alors par définition

$$\exists z\ \mathrm{Prouv}_H(z)\wedge S_{\vec{x}}(\ulcorner A(x_1,\ldots,x_n)\urcorner,x_1,\ldots,x_n)=z$$

<u>Théorème de forme normale dans les topos</u>

Il existe une fonction primitive récursive U et des prédicats primitifs récursifs T_n tels que pour toute fonction récursive partielle $f \rightarrowtail \mathbb{N}^{n+1}$ il existe un entier e,appelé indice de f,tel que dans tout topos $\underline{E}$

$$(1)\ f=\{(\vec{x},y) \mid \exists z\ U(z)=y\wedge T_n(e,\vec{x},z)\wedge\forall z'<z\ \neg T_n(e,\vec{x},z')\}$$

démonstration:

Dans $\underline{\mathrm{Ens}}$ $(a,b)\in f \Leftrightarrow \mathrm{HA}\vdash A_f(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n,\bar{b})$

Donc $\models_{\underline{\mathrm{Ens}}} \forall \vec{x}\forall y\ (\vec{x},y)\in f \Leftrightarrow \mathrm{Prouv}_{HA}(\ulcorner A_f(\vec{\bar{x}},\bar{y})\urcorner)$, c'est-à-dire

$\models_{\underline{\mathrm{Ens}}} \forall \vec{x}\forall y\ (\vec{x},y)\in f \Leftrightarrow \exists y'\ \mathrm{Dem}_{HA}(y',S_{\vec{x},y}(\ulcorner A_f\urcorner,\vec{x},y))$ ou encore

$\models_{\underline{\mathrm{Ens}}} \forall x\forall y\ (x,y)\in f \Leftrightarrow \exists z\ (z)_1=y\wedge \mathrm{Dem}_H((z)_0,S_{\vec{x},y}(\ulcorner A_f\urcorner,\vec{x},(z)_1)$

d'où le résultat en définissant

$U(z)=(z)_1$

$T_n(u,\vec{x},z)=\mathrm{Dem}_{HA}((z)_0,S_{\vec{x},y}(u,\vec{x},(z)_1))$

$e=\ulcorner A_f \urcorner$

Dans le cas d'un topos $\underline{E}$ quelconque il suffit donc de montrer:

(2) $\models_{\underline{E}} \forall \vec{x} \forall y\ (\vec{x},y) \in f \longleftrightarrow \mathrm{Prouv}_{HA}(\ulcorner A_f(\bar{\vec{x}},\bar{y})\urcorner)$.

Or $HA \vdash \forall \vec{x}\ \forall y\ A_f(\vec{x},y) \longrightarrow \mathrm{Prouv}_{HA}(\ulcorner A_f(\bar{\vec{x}},\bar{y})\urcorner)$: la démonstration du théorème de représentabilité des fonctions récursives partielles se formalise dans HA. Pour s'en convaincre examiner en détails la démonstration dans [Shoenfield].

D'autre part $HA_2 \vdash \forall \vec{x} \forall y\ \mathrm{Prouv}_{HA}(\ulcorner A_f(\bar{\vec{x}},\bar{y})\urcorner) \longrightarrow A_f(\vec{x},y)$: le fait qu'un théorème prouvable est vrai se formalise dans HA_2. La démonstration qui se trouve dans [Takeuti] pour PA_2 se généralise sans difficulté au cas HA_2.

Tout CEN étant modèle de HA_ω on a (2), donc également (1) dans tout topos $\underline{E}$.

<u>Corollaire</u>

Soit e l'indice d'une fonction récursive partielle f.
f est $\underline{E}$-récursive si et seulement $\models_{\underline{E}} \forall \vec{x}\ \exists z\ T_n(e,\vec{x},z)$

démonstration: immédiate à partir de (1).

On peut donc définir à l'aide des prédicats T_n les fonctions $\underline{E}$-récursives parmi les fonctions récursives partielles.

<u>Définition</u>

Une fonction récursive partielle est PA_ω-récursive-prouvable ssi $PA_\omega \vdash \forall \vec{x}\ \exists z\ T_n(e,\vec{x},z)$ (où e est l'indice de la fonction récursive partielle considérée).

<u>Proposition</u>

Une fonction récursive partielle est $\underline{E}$-récursive dans tout topos $\underline{E}$ si et seulement elle est PA_ω-récursive-prouvable.

démonstration:

D'après le théorème de complétude et le corollaire du théorème de forme normale une fonction récursive partielle est partout définie dans tout topos si et seulement si elle est HA_ω-récursive-prouvable, c'est-à-dire d'après la règle de Markov ([Girard]) si et seulement si elle est PA_ω-récursive prouvable.

Les fonctions récursives étant plus nombreuses que les PA_ω-récursive-prouvables, il existe des fonctions récursives non $\underline{E}$-récursives dans certains topos .

III) RECURSIVITE ET $\underline{E}$-RECURSIVITE

On va maintenant s'intéresser à la situation inverse: des fonctions définies partout dans certains topos et non dans <u>Ens</u>.

<u>Proposition</u>:

Il existe une fonction primitive récursive f nulle dans les ensembles et non nulle dans un topos $\underline{E}$ (telle que $\models_{\underline{E}} \exists x\ f(x) \neq 0$ soit valide dans $\underline{E}$).

démonstration:

$Coh(HA_\omega)$ est vraie dans <u>Ens</u>.

$Coh(HA_\omega)$ est vraie si et seulement si la fonction primitive récursive f, fonction caractéristique de $Dem_{HA_\omega}(x, \ulcorner\bot\urcorner)$ est toujours nulle (dans <u>Ens</u>).

$\not\vdash_{HA_\omega} Coh(HA_\omega)$ (théorème d'incomplétude de Gödel).

Dans le topos $\mathcal{C}(HA_\omega)$ la valeur de $\exists x\ f(x) \neq 0$ n'est pas nulle sinon $\forall x\ f(x)=0$ serait valide, donc $Coh(HA_\omega)$ démontrable.

En localisant $\mathcal{C}(HA_\omega)$ par la valeur de $\exists x\ f(x) \neq 0$ on obtient un topos $\underline{E}$ dans lequel $\exists x\ f(x) \neq 0$ est valide.

<u>Proposition</u>:

Il existe une fonction récursive particlle g jamais définie dans <u>Ens</u> et <u>E</u>-récursive(<u>E</u> désigne le même topos que dans la proposition précédente).

démonstration:

Soit $g=\left\{(x,y)\middle|\ \mathrm{Dem}_{HA_\omega}(y,\ulcorner\bot\urcorner)\wedge\forall z<y\ \neg\mathrm{Dem}_{HA_\omega}(z,\ulcorner\bot\urcorner)\right.$

g est vide dans <u>Ens</u> et partout définie dans <u>E</u>.

<u>Remarque</u>:

On note $h:1\longrightarrow N$ la valeur constante de la fonction g dans <u>E</u>.h est plus grand que tous les entiers standards(il vérifie $\models_{\underline{E}} h>n$ pour tout n de $\mathbb{N}$).

En effet $\vdash_{HA} \mathrm{Dem}_{HA_\omega}(\bar{n},\overline{\ulcorner\bot\urcorner})$ (théorème de représentabilité)

Donc $\models_{\underline{E}} \mathrm{Dem}_{HA_\omega}(n,\ulcorner\bot\urcorner)$,donc $\models_{\underline{E}} h\neq n$.

Par ailleurs $HA\vdash\forall x(x>\bar{n}\longleftrightarrow \widetilde{\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i\leq n}}\ x\neq\bar{i})$

Donc $\models_{\underline{E}} h>n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Cette remarque se généralise de la manière suivante

<u>Proposition</u>:

Soit A une formule décidable de HA telle que $\not\vdash_{HA_\omega} x\ A(x)$ et$\forall x\ A(x)$ vraie dans <u>Ens</u>.Il existe un topos <u>E</u> et un point $h: 1\longrightarrow N$,plus grand que tous les entiers standards,tel que $\models_{\underline{E}}\neg A(h)$.De plus dans tout topos <u>E</u>' tout point $h':1\longrightarrow N'$ vérifiant $\models_{\underline{E}'}\neg A(h')$ est plus grand que tous les standards.

Dans le cas d'une fonction récursive ,f,A_f n'est pas en général décidable mais du fait du théorème de représentabilité on a la

<u>Proposition</u>:

Soit f une fonction récursive telle qu'il existe $\vec{a}$ dans$\mathbb{N}^n$ tels que $\models_{\underline{Ens}}\forall y\ f(\vec{a},y)\neq 0$.Soit

Soit $g=\left\{(\vec{x},y)\middle|\ f(x,y)=0\wedge\forall z<y\ \exists t\ f(x,z)=St\right\}$

S'il existe un topos <u>E</u> et un point $h:1\longrightarrow N$ tel que $\models_{\underline{E}}(\vec{a},h)\in g$,h est plus grand que tous les standards.

IV ENSEMBLES E-RECURSIVEMENT-ENUMERABLES

Définition

Un sous-objet A de N^n est $\underline{E}$-récursivement-énumérable ($\underline{E}$-r.e.) si et seulement si il existe une fonction $\underline{E}$-récursive g telle que

$$\models_{\underline{E}} (\vec{x},y)\in A \leftrightarrow \exists y\ g(\vec{x},y)=0$$

Le rapport entre les ensembles ($\underline{E}$-)r.e. et les fonctions récursives partielles et ($\underline{E}$-)récursives est le même que dans les ensembles.

Proposition

1)Soit $A \rightarrowtail N^n \times N$ une fonction partielle du topos $\underline{E}$.

A est $\underline{E}$-r.e. si et seulement si A est récursive partielle

2)Soit f une flèche de N^n dans N.

f est $\underline{E}$-récursive si et seulement si $\{(\vec{x},y) / f(\vec{x})=y\}$ et $\{(\vec{x},y) / f(\vec{x})\neq y\}$ sont $\underline{E}$-r.e.

démonstration:

1)Supposons A $\underline{E}$-r.e..Il existe une fonction $\underline{E}$-récursive g telle que $\models_{\underline{E}} (\vec{x},y)\in A \leftrightarrow \exists t\ g(\vec{x},y,t)=0$

i.e. $\models_{\underline{E}} (\vec{x},y)\in A \leftrightarrow \exists z\left[(z)_0=y \wedge g(\vec{x},(z)_0,(z)_1)=0\right]$

A est une fonction partielle donc

$$\models_{\underline{E}} \left[\exists t\ g(\vec{x},y,t)=0 \wedge \exists t'\ g(\vec{x},y,t')=0\right] \rightarrow y=y'$$

$$\text{donc} \models_{\underline{E}} (\vec{x},y)\in A \leftrightarrow \exists z\left[(z)_0=y \wedge g(\vec{x},(z)_0,(z)_1)=0 \wedge \forall z'<z\ g(x,(z')_0,(z')_1)\neq 0\right]$$

A est donc bien le graphe d'une fonction récursive partielle.

Réciproquement d'après le théorème de forme normale on peut trouver un entier standard e tel que

$$\models_{\underline{E}} (\vec{x},y)\in A \leftrightarrow \exists z\left[U(z)=y \wedge T_n(e,\vec{x},z) \wedge \forall z'<z\, \neg T_n(e,x,z')\right]$$

2) Supposons f $\underline{E}$-récursive.

Soient E et D les fonctions primitives récursives définies

par $E(x,x')=0 \leftrightarrow x=x'$, $E(x,x')=0 \leftrightarrow x\neq x'$

$D(x,x')=0 \leftrightarrow x\neq x'$, $D(x,x')=0 \leftrightarrow x=x'$.

On a $\models_{\underline{E}} f(\vec{x})=y \leftrightarrow \exists t\ E(f(\vec{x}),y)=0$

$\models_{\underline{E}} f(\vec{x})\neq y \leftrightarrow \exists t\ D(f(\vec{x}),y)=0$

Réciproquement

$\models_{\underline{E}} f(\vec{x})=y \leftrightarrow \exists t\ g(\vec{x},y,t)=0$, $\models_{\underline{E}} f(\vec{x})\neq y \leftrightarrow \exists t'\ g'(\vec{x},y,t')=0$

On a donc $\models_{\underline{E}} \exists t\ g(\vec{x},y,t)=0 \vee \exists t'\ g'(\vec{x},y,t')=0$

i.e. $\models_{\underline{E}} \exists t\ [g(\vec{x},y,t)\times g'(\vec{x},y,t')=0]$

d'où $\models_{\underline{E}} f(\vec{x})=y \leftrightarrow g(\vec{x},y,\mu t\ [g(\vec{x},y,t)\times g'(\vec{x},y,t)=0])=0$

f est bien récursive .

V RECURSIVITE E-RELATIVE

A tout entier standard e on associe une fonction récursive partielle f définie par:

$$(\vec{x},y)\in f \leftrightarrow \exists z\ U(z)=y \wedge T_n(e,\vec{x},z) \wedge \forall z' < z\ \neg T_n(e,\vec{x},z')$$

ce qu'on abrégera en $f(x) \simeq U(\mu z\ T_n(e,\vec{x},z))$.

Quelles fonctions partielles obtient-on si on part d'entiers non-standards du topos $\underline{E}$?

Définition

Une *fonction récursive partielle E-relative* est un élément du plus petit sous-ensemble des fonctions partielles des N^p dans N

1)contenant les graphes de $+,\times,K_<$,des projections et de toutes les fonctions constantes(même celles qui correspondent à un entier non-standard)

2)clos par composition

3)clos par μ-opération

Une fonction *récursive E-relative* est une fonction récursive partielle $\underline{E}$-relative f telle que

$$\underline{E} \models \forall \vec{x}\ \exists y\ (\vec{x},y)\in f$$

Proposition

Une fonction récursive partielle $\underline{E}$-relative est obtenue en substituant un nombre fini d'entiers non-standards aux variables d'une fonction récursive partielle.

démonstration:par induction sur la complexité de la définition de la fonction récursive partielle $\underline{E}$-relative.

Proposition

A une fonction récursive partielle $\underline{E}$-relative $f \rightarrowtail N^n \times N$ on peut associer un entier non-standard e appelé son indice tel que $f(\vec{x}) \simeq U(\mu z\ T_n(e,\vec{x},z))$

démonstration:

D'après la proposition ci-dessus on peut trouver une fonction g récursive partielle et un p-uple $(a_1,\ldots,a_p)$ d'entiers non-standards de $\underline{E}$ tels que

$$\models_{\underline{E}} (\vec{x},y)\in f \quad (\vec{x},a_1,\ldots,a_p,y)\in g$$

D'après la démonstration du théorème de forme normale

$$\vdash_{\underline{E}} (x_1,\ldots,x_{n+p},y)\in g \longleftrightarrow \mathrm{Prouv}_{HA}(\ulcorner A_f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{n+p},\bar{y})\urcorner)$$

Donc en substituant $(a_1,\ldots,a_p)$ à $(x_{n+1},\ldots,x_{n+p})$

$$\vdash_{\underline{E}} (x_1,\ldots,x_n,y)\in g \longleftrightarrow \mathrm{Prouv}_{HA}(\ulcorner A_f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n,\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_p,\bar{y})\urcorner)$$

d'où le résultat en posant

$e=\mathrm{Sub}(\ldots(\mathrm{Sub}(\ulcorner A_f\urcorner,\ulcorner x_{n+1}\urcorner,\nu(a_1))\ldots,\ulcorner x_{n+p}\urcorner,\nu(a_p))$, vu la définition de T_n et U.

<u>Proposition</u>

A un entier non-standard e on peut associer une fonction récursive partielle $\underline{E}$-relative f

démonstration: prendre $f(\vec{x}) \simeq U(\mu z\ T_n(e,\vec{x},z))$.

Les fonctions récursives partielles E-relatives et les fonctions d'indice non-standard coincident donc.

<u>Proposition</u>

Une fonction récursive partielle $\underline{E}$-relative f, dindice e, est une fonction récursive $\underline{E}$-relative ssi $\models_{\underline{E}} \forall\vec{x}\,\exists z\ T_n(e,\vec{x},z)$.

TROISIEME PARTIE

UNE ETUDE DE L'OBJET DES ENTIERS NATURELS

D'UN TOPOS ELEMENTAIRE D'UN POINT DE VUE EXTERNE

1. DEFINITIONS

On notera de manière générale N l'O.E.N. d'un topos E.

A

. Un point de N ou un Entier de E (avec un E majuscule) est simplement une flèche $1 \xrightarrow{x} N$. On sait que les objets d'un topos peuvent ne pas avoir de points et être non nuls ; l'O.E.N. d'un topos par contre en a toujours une infinité au moins dénombrable, à savoir ceux qui sont de la forme $\overbrace{ss\ldots s}^{n}(0)$,

. Pour $n \in \mathbb{N}$ (O.E.N. de Ens) et qu'on appellera Entiers standards, et qu'on pourra noter encore n.

. On dira qu'un Entier x est non-standard, s'il est plus grand que tous les Entiers standards du topos (il ne suffit donc pas de dire qu'il n'est pas standard).

. On appellera borné un Entier $1 \xrightarrow{x} N$ tel qu'il existe un entier n vérifiant $x \leq n$.

. Les sous-objets de l'objet final seront appelés comme d'habitude ouverts, et un point local est alors une flèche $U \xrightarrow{x} N$ où U est un ouvert. Les points locaux peuvent être bornés, standards, non-standards...

B

. Un mono $X' \rightarrowtail X$ sera dit complémenté si $X' \vee \neg X' = X$, et

. l'objet X sera dit booléen, si toutes ses parties sont complémentées, i.e. que (X,Ω) est une algèbre de Boole.

. On utilisera aussi la notion habituelle d'objet flasque X : pour tout ouvert $U \rightarrowtail 1$, $(1,X) \longrightarrow (U,X)$ est surjective.

C

. Parmi les propriétés des O.E.N. qui décrivent une partie des rapports existant entre eux-mêmes d'une part, et $\mathbb{N}$ d'autre part, on va considérer les suivantes :

. N est standard : La famille des points standards est épimorphique (le vocabulaire est emprunté à [FREYD]). On verra plus loin qu'on peut en donner d'autres définitions équivalentes, mais on peut voir immédiatement que ça signifie que la flèche

$$(N,X) \longrightarrow \prod_{\mathbb{N}} (1,X)$$

$$f \longmapsto (f\underline{n})_{n \in \mathbb{N}}$$

est injective pour tout l'objet X.

. N est faiblement standard : C'est la notion obtenue en remplaçant X par N lui-même dans la définition ci-dessus. Lorsqu'on s'intéresse aux fonctions récursives, on n'utilise que des endomorphismes (ou des flèches $N^p \longrightarrow N^q$), et c'est cette notion qui a donc une incidence.

. N est bien pointé si la famille de tous ses points est épimorphique, faiblement bien pointé si cette famille sépare les endomorphismes de N.

Le principe de Markov est l'assertion suivante :

$$(A \vee \neg A) \wedge \neg\neg\exists\, x\, Ax \longrightarrow \exists\, x\, Ax.$$

Ce principe est indépendant de HA_ω, on en donnera une nouvelle démonstration plus loin. Il divise donc les topos en deux classes : ceux qui le vérifient, ceux qui ne le vérifient pas.

Mais il n'est pas très commode de traduire dans un topos la validité de cette formule du second ordre, et il est par contre beaucoup plus facile de parler de la validité pour toute partie $A \subset N$ complémentée, de la formule close

$$\neg\neg\exists\, x\, Ax \longrightarrow \exists\, x\, Ax,$$

validité qui s'exprime simplement en diant que le support des parties complémentées de N sont $\neg\neg$-fermées.

. On appellera méta-markovien un topos où ces formules closes sont valides. Cette notion apparaît naturellement lorsqu'on exprime dans $\mathcal{C}(HA_\omega)$: dire que $\mathcal{C}(HA_\omega)$ est méta-markovien, revient à dire que la règle de Markov (cas clos) est valide dans HA_ω.

. N est bien ordonné si évidemment la formule du second ordre

$$\exists x\, A(x) \longrightarrow \exists y\, (A(y) \wedge \forall z < y\ \neg A(z))$$

est valide dans $\underline{E}$. On verra plus loin que ceci se traduit par la booléanité de $\underline{E}$; on considèrera la "méta-notion" correspondante :

. N est méta-bien ordonné si pour toute partie $A \subset N$ (ou de N^p) la formule close

$$\exists x\, Ax \longrightarrow \exists y\, (A(y) \wedge \forall z < y\ \neg A(z))$$

est valide dans $\underline{E}$.

2. QUELQUES LEMMES ET THEOREMES

Nous allons énoncer quelques propositions qui vont nous permettre de mettre à leurs places respectives les propriétés que nous avons énoncées au 1.

Pour cela, nous aurons tout d'abord besoin d'un petit lemme technique, tout à fait fondamental pour la suite.

Lemme 1 : *Si $A \subset N$ (ou N^p) est une partie complémentée, la flèche $A \twoheadrightarrow S$ où $S \rightarrowtail 1$ est le support de A, est scindée.*

Preuve : Supposons que $A \subset N$ soit complémentée et de support $A \twoheadrightarrow S$; dans $\underline{E}/S$ $A = A \times S \twoheadrightarrow S$ est complémentée et de support 1, i.e. $\vdash_{\underline{E}/S} \exists x\, A(x)$.

D'après le chapitre II, proposition 1, corollaire 1,

$$\vdash_{\underline{E}/S} \exists!\, y\, (A(y) \wedge \forall z < y\ \neg A(z)),$$

et l'existence unique implique l'existence d'un point $y : S \longrightarrow A$.

Un deuxième lemme montre l'équivalence de définitions pour les notions de standard, faiblement standard, bien pointé, faiblement bien pointé :

Lemme 2 : *les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) N *est standard (resp. faiblement standard).*

ii) *Toute partie (resp. partie complémentée) de* N *contenant les points standards est* N.

Ainsi que les suivantes :

i') N *est bien pointé (resp. faiblement).*

ii') *Toute partie (resp. complémentée) de* N *contenant les points est* N.

Ceci permet de dire, en corollaire, que N est standard ssi il vérifie la " ω-règle" qui est la suivante : si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A(n)$, alors on a $\forall x\, A(x)$; alors que faiblement standard correspond à la ω-règle pour les prédicats complémentés.

Preuve : Traitons le cas i) $\Longleftrightarrow$ ii), le cas i') $\Longleftrightarrow$ ii') se faisant en remplaçant "point standard" par "point".

i) $\Longrightarrow$ ii) (resp.)

Soit $A \subset N$ complémentée ; sa fonction caractéristique $N \xrightarrow[\chi_A]{} \Omega$ factorise par $1 \amalg 1 \xrightarrow{\binom{v}{f}} \Omega$, qu'on peut identifier aussi au sous-objet $\{0,1\} \rightarrowtail N$. A est donc le noyau du couple de flèches

$$N \underset{\chi_A}{\overset{0}{\rightrightarrows}} \{0,1\} \rightarrowtail N.$$

Si A contient les points standards, on a $\chi_A(n) = 1$ pour tout point standard n. Si N est faiblement standard, on a $\chi_A = 1$ et donc $A = N$.

ii) $\Longrightarrow$ i) (resp.)

Soient $N \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$ deux flèches telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $f(n) = g(n)$. Notons $A = Ker(f,g)$; A s'écrit comme le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrowtail & N \\ \downarrow & P.F. & \downarrow \Delta \\ N & \xrightarrow{(f,g)} & N\times N \end{array}$$

Or, on sait que $N \xrightarrow{\Delta} N\times N$ est complémentée puisque $\models_{E} (x=y) \vee (x>y) \vee (x<y)$. Il en est donc de même de $A \rightarrowtail N$. De plus A contient les points standards et donc $A = N$, $f = g$.

Pour les cas standard et bien pointé, le résultat est évident.

Remarque : Les notions "standard" et "bien pointé" sont stables par localisation : si

$$\begin{array}{ccc} N\times S & \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} & X \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & S & \end{array}$$

sont égales en tout point (resp. standard), par adjonction cartésienne $N \overset{\bar f}{\underset{\bar g}{\rightrightarrows}} X^S$ sont égales en tout point (resp. standard), et si N est bien pointé (resp. standard), en en déduit $\bar f = \bar g$ et donc $f = g$.

La propriété "faiblement standard" peut être développée à l'aide des deux propositions suivantes :

Proposition 1 : *Si N n'a pas de point local non-standard, N est faiblement standard.*

Preuve : En effet, si N n'est pas faiblement standard, on peut trouver une partie complémentée $A \rightarrowtail N$ qui contient tous les points standards. $\neg A$ a donc un support non nul S, et d'après le lemme 1, il y a une section $g : S \longrightarrow A \rightarrowtail N$.

On montre que g est un point local non-standard :

soit $n : S \rightarrowtail N\times S$ un point local standard. Puisque n factorise par $A\times S$, on a $\models_{E/S} g \neq n$ (sinon $S = 0$).

On en déduit que $\vdash_{E/S} g \geq n$ puisque $\vdash_{HA} \forall x\ (x \geq n \longleftrightarrow \bigwedge_{i=o}^{n-1} x \neq i)$, et que N est un modèle de HA.

<u>Proposition 2</u> : *Si* N *a un point local non-standard, il existe une partie stricte* $\neg\neg$*-fermée de* N *qui contient tous les points standards.*

<u>Preuve</u> : Soit $S \xrightarrow{g} N$ un point local non-standard, la partie $[0,g] \subset N\mathrm{x}S$ contient les points standards de NxS. Notons $U = S \vee \neg S$, on définit une partie stricte $A \subset N\mathrm{x}U$, $\neg\neg$-fermée et contenant les points standards de NxU en posant :

$$A = [0,g] \vee (N \times \neg S).$$

Or $U \rightarrowtail 1$ est $\neg\neg$-dense, il en est donc de même de l'inclusion $N\mathrm{x}U \overset{d}{\rightarrowtail} N$. Notons A' la fermeture dans N de $A \rightarrowtail N\mathrm{x}U \rightarrowtail N$; A' contient les points standards de N : en effet $A' = \prod_\alpha A$ et d^* conserve les points standards. A' est une partie stricte, car son complémentaire contient $\prod_\alpha \neg A$ qui n'est pas nul puisque $\neg A = [g+1,+\infty[$ qui n'est pas nul.

<u>Remarque</u> : La propriété suivante pour N : "toute partie contenant les points standards est $\neg\neg$-dense" correspond à une forme faible de la ω-règle : si pour tout n $A(n)$ alors $\neg\neg\ \forall x\ A(x)$. Si l'on note $\neg\neg$-standard, cette propriété a donc la place suivante :

standard $\longrightarrow$ $\neg\neg$standard $\longrightarrow$ pas de points locaux non-standards $\longrightarrow$ faiblement standard $\longrightarrow$ les points globaux sont standards.

<u>Proposition 3</u> : *Si* N *est flasque, il est faiblement bien pointé.*

<u>Preuve</u> : Soit $A \subset N$ une partie complémentée ; d'après le lemme 1, la flèche $\neg A \twoheadrightarrow S$ où S est le support de $\neg A$, est scindée. Puisque N est flasque, cette section $s : S \longrightarrow \neg A \rightarrowtail N$ se prolonge à une section globale $\bar{s} : 1 \longrightarrow N$. Si A contient tous les points, $\bar{s}$ factorise par A :

$$\begin{tikzcd}
\neg A \arrow[rr, tail] \arrow[dd] & & N \\
& A \arrow[ur] & \\
S \arrow[uu, bend right, "s"'] \arrow[rr] & & 1 \arrow[uu, "\bar{s}"'] \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

s factorise donc par A et $\neg A$ à la fois : on en déduit $S=0$, $\neg A = 0$ et $A=N$ puisque A est complémentée.

Le théorème suivant donne une caractérisation agréable des O.E.N. méta-bien ordonnés.

Théorème 1 : N *est méta-bien ordonné si et seulement si l'objet final* 1 *est booléen.*

Preuve : Il est bien connu que :

$$\vdash_{PA_2} \exists x\, P(x) \longrightarrow \exists y (P(y) \wedge \forall z < y\ \neg P(z))$$

pour P variable de prédicat de type $[\bullet]$. Ceci signifie que si l'on a la récurrence du second ordre et le principe du tiers exclus, on sait démontrer le bon ordre.

En utilisant la $\neg\neg$-traduction décrite par exemple dans [TROELSTRA], on en déduit :

$$\vdash_{HA_2} \neg\neg \exists x\, \neg\neg P(x) \longrightarrow \neg\neg \exists y\, (\neg\neg P(y) \wedge \forall z < y\ \neg P(z)).$$

Soit alors $A \subset N$ une partie quelconque de N dans le topos $\underline{E}$.

On a

$$\models_{\underline{E}} \neg\neg\exists x\, \neg\neg A(x) \longrightarrow \neg\neg\, \exists y\, (\neg\neg A(y) \wedge \forall z < y\ \neg A(z)).$$

On en déduit

$$\models_{\underline{E}} \exists x\, A(x) \longrightarrow \neg\neg\, \exists y\, (\neg\neg A(y) \wedge \forall z < y\ \neg A(z))$$

et donc, comme 1 est booléen

$$\models_{\underline{E}} \exists x\, A(x) \longrightarrow \exists y\, (\neg\neg A(y) \wedge \forall z < y\ \neg A(z)).$$

Ceci veut dire que si $U \rightarrowtail \underline{1}$ est le support de A, il existe une flèche $U \xrightarrow{y} \neg\neg A$ qui vérifie

$$\models_{\underline{E}} \exists x\, A(x) \longrightarrow \neg\neg A(y) \wedge \forall z < y\ \neg A(z).$$

Considérons le produit fibré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] & \neg\neg A \\ S \arrow[u] \arrow[r, tail] & U \arrow[u, "y"'] \end{tikzcd}$$

S est $\neg\neg$-dense dans U, donc $S \xrightarrow{\sim} U$. Ainsi y factorise par A, ce qui montre

$$\models_{\underline{E}} \exists x\, A(x) \longrightarrow \exists y\, A(y) \wedge \forall z < y\ \neg A(z).$$

Réciproquement, si 1 n'est pas booléen, il possède une partie stricte S telle que $\neg S = 0$, et la partie $A \rightarrowtail N$ définie par $S+1 \xrightarrow{\binom{0}{1}} N$ a un élément (on a $\models_{\underline{E}} \exists x\, Ax$), mais n'en a pas de plus petit. En effet, soit $y : 1 \longrightarrow A$ un tel plus petit élément : pour tout ouvert $T \rightarrowtail 1$, la restriction $y\times T : T \longrightarrow A\times T$ est le plus petit élément de $A\times T$. En particulier pour $T=S$, on remarque que le plus petit élément de $A\times S$ est 0 : l'Entier y coïncide donc avec 0 en restriction à S ; comme N est $\neg\neg$-séparé (puisque sa diagonale est complémentée et donc $\neg\neg$-fermée), on en déduit $y = 0$: ce qui est impossible car $0 : 1 \longrightarrow N$ n'est pas dans A.

Ce théorème nous fait remarquer que le méta-bon ordre n'est pas stable par localisation et n'est pas une propriété "logique". Il a pour corollaire le théorème suivant qui a aussi été démontré par [SOLS]:

Théorème 1': N *est bien ordonné si et seulement si* $\underline{E}$ *est booléen.*

Il est évident que si $\underline{E}$ est booléen, N est bien ordonné puisque les topos booléens avec O.E.N. sont des modèles de l'arithmétique classique d'ordre supérieur.

Réciproquement, le bon ordre est une formule de HA et sa validité est stable par foncteurs logiques et en particulier par localisation ; si N est bien ordonné dans $\underline{E}$, $N\times\Omega$ est bien ordonné dans $\underline{E}/_{\Omega}$ et donc méta-bien ordonné : d'après le théorème 1, Ω est booléen et donc aussi le topos $\underline{E}$.

<u>Proposition 4</u> : *On a les assertions suivantes :*

i) *Si* N *est méta-bien ordonné, il est flasque.*

ii) *Si* N *est flasque, il est méta-markovien.*

iii) *Si* N *est booléen, il est bien pointé.*

<u>Preuve</u> :

i) Si N est méta-bien ordonné, l est booléen d'après le théorème 1 : toute flèche $S \xrightarrow{s} N$ où S est un ouvert se prolonge donc en un point global à l'aide par exemple de $\neg S \xrightarrow{0} N$.

ii) Soit $A \rightarrowtail N$ une partie complémentée de support S. D'après le lemme 1, la flèche $A \twoheadrightarrow S$ est scindée par un point local $s : S \to A \rightarrowtail N$; si N est flasque, s se prolonge en $\bar{s} : \neg\neg S \to N$.

Considérons le diagramme commutatif :

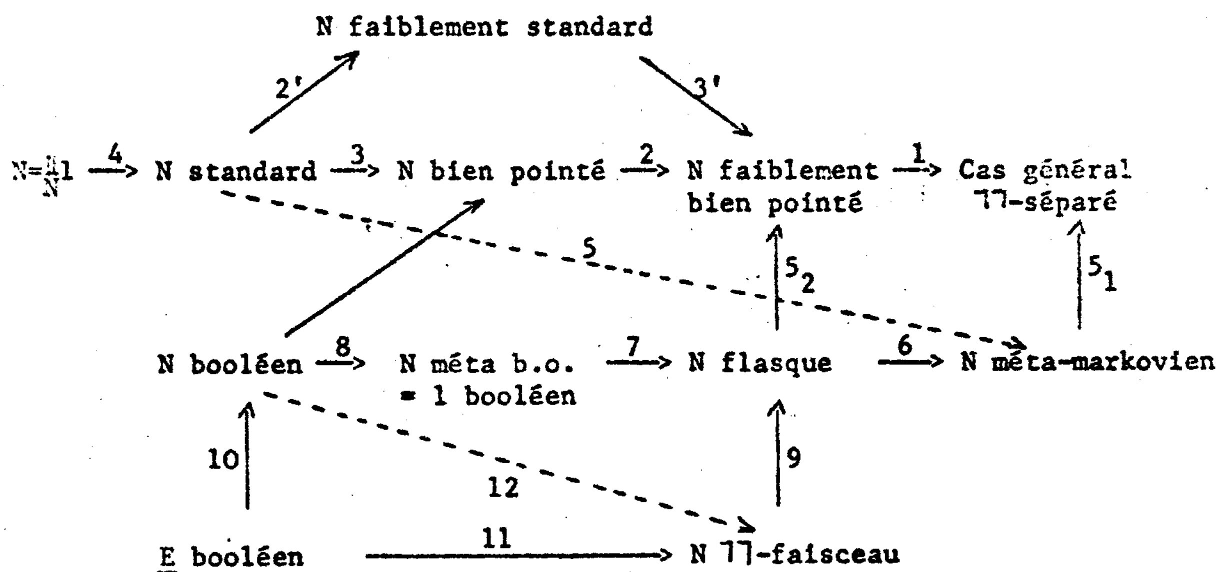
$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, tail, "i"] & N \\
 & A\times\neg\neg S \arrow[u, tail] \arrow[r, tail, "t"] \arrow[ur, phantom, "\text{P.F.}"] & \neg\neg S \arrow[u, tail, "\bar{s}"'] \\
S \arrow[uur, "s"] \arrow[ur] \arrow[urr, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

- la flèche t est $\neg\neg$-dense puisqu'elle contient j qui l'est
- t est $\neg\neg$-fermée comme image réciproque de i.

t est donc un isomorphisme et $\bar{s}$ factorise donc par A : ce qui implique que $\neg\neg S$ est aussi le support de A et donc $S = \neg\neg S$. Comme on l'a vu au début du chapitre, ceci signifie que N est méta-markovien.

iii) Si N est booléen, 1 est booléen et d'après i), N est flasque et finalement faiblement bien pointé en appliquant la proposition 3'; mais si N est booléen, les notions de faiblement bien pointé et de bien pointé coïncident.

<u>Classification</u> : On a vu plus haut que dans le cas le plus général N est Π-séparé ; le classement illustré par le diagramme ci-dessous tiendra compte aussi de la notion de Π-faisceau, ce qui est plus fort que le fait d'être flasque.



Les flèches pleines du diagramme correpondent à des implications dont on va prouver par un contre-exemple que la réciproque est fausse.

Les flèches pointillées correspondent à des implications fausses, et les exemples qui servent à le montrer sont en quelque sorte maximaux : 5 vaut pour 5_1, 5_2, 5_3, et exprime en outre qu'aucune des propriétés de la première ligne ne peut entraîner une des propriétés des lignes 2 et 3.

L'exemple 12 sert bien sur de contre-exemple pour 9 et 10, mais comme on n'a pas réussi à trouver un exemple n'utilisant pas de formes trop fortes d'axiome du choix, on donne quand même des contre-exemples spécifiques plus simples pour 9 et 10.

Pour construire bon nombre de ces exemples, on est amené à utiliser fréquemment la notion de topos de fractions dont je vais préciser quelques points particuliers.

Soit $\mathfrak{F}$ une "base de filtre" de sous-objets de 1, c'est-à-dire une famille (au sens externe) d'ouverts stables par intersections deux à deux et ne contenant pas O. On définit un calcul de fractions Σ dans $\underline{E}$ en considérant les flèches $X \xrightarrow{\sigma} Y$ telles qu'il existe U dans $\mathfrak{F}$ tel que σxU soit un isomorphisme. On démontre aisément que la catégorie de fractions $\underline{E}[\Sigma^{-1}]$ est encore un topos qu'on notera aussi $\underline{E}[\mathfrak{F}^{-1}]$. Si l'on note $\underline{E} \xrightarrow{P_{\mathfrak{F}}} \underline{E}[\mathfrak{F}^{-1}]$ le foncteur canonique, ce foncteur est logique, et on a le lemme suivant :

<u>Lemme 3</u> :

a) *Si* N *est l'O.E.N. de* $\underline{E}$, $P_{\mathfrak{F}}$(N) *est l'O.E.N. de* $\underline{E}[\mathfrak{F}^{-1}]$.

b) *Si* N *est un* $\neg\neg$*-faisceau,* $P_{\mathfrak{F}}$(N) *aussi.*

c) *Si* N *est flasque,* $P_{\mathfrak{F}}$(N) *aussi.*

<u>Preuve</u> :

a) Il suffit de voir que tout endomorphisme X ⟶ X de $\underline{E}[\mathfrak{F}^{-1}]$ se relève en un endomorphisme de la forme XxU ⟶ XxU de $\underline{E}$. La suite est évidente. [De manière plus générale, on sait que l'O.E.N. se conserve par foncteurs logiques].

b) Une flèche $\neg\neg$-dense X' ⟶ X de $\underline{E}[\mathfrak{F}^{-1}]$ se relève en une flèche dense X'xU ⟶ XxU de $\underline{E}/_U$ (et donc de $\underline{E}$) ; en effet, le complémentaire de X' ↣ X dans $\underline{E}[\mathfrak{F}^{-1}]$ est fait de la façon suivante :

c'est la classe des sous-objets

$$\begin{tikzcd} \neg(X'xV) \arrow[rr, tail] \arrow[dr] & & XxV \arrow[dl] \\ & V & \end{tikzcd}$$

pour la relation d'équivalence déduite de $\mathcal{F}$. Le complémentaire de X' $\rightarrowtail$ X sera nul dans $\underline{E}[\mathcal{F}^{-1}]$ si et seulement si un des objets $\neg(X' \times V)$ est nul dans $\underline{E}/_V$.

c) La propriété constatée en b) démontre aussi c).

Proposition 5 : *Etant donné un topos* $\underline{E}$*, on construit un morphisme logique* $\underline{E} \xrightarrow{f} \underline{E}'$ *où* $\underline{E}'$ *a son objet final booléen, universel pour les morphismes logiques* $\underline{E} \longrightarrow \underline{F}$ *où* $1_{\underline{F}}$ *est booléen.*

Démonstration : Soient $\mathcal{F}$ le filtre des ouverts $\neg\neg$-denses de $\underline{E}$ et $\underline{E}'$ le topos $\underline{E}[\mathcal{F}^{-1}]$ du lemme ci-dessus ; on prend évidemment $f = P_{\mathcal{F}}$.

. L'objet final de $\underline{E}'$ est booléen : soit $S \rightarrowtail 1$ un ouvert de $\underline{E}'$, et représentons le encore par $S \rightarrowtail 1$ dans $\underline{E}$. L'ouvert $U = S \vee \neg S$ est $\neg\neg$-dense et donc $P_{\mathcal{F}}(U) = 1$, c'est-à-dire que $P_{\mathcal{F}}(S) \vee P_{\mathcal{F}}(\neg S) = 1$.

. Soit $\underline{E} \xrightarrow{g} \underline{F}$ un morphisme logique où $\underline{F}$ a son objet final booléen : si $S \rightarrowtail 1$ est $\neg\neg$-dense dans $\underline{E}$, $g(S) \rightarrowtail 1$ est $\neg\neg$-dense (g conserve la négation) et donc un isomorphisme. Soit $t : X \longrightarrow Y$ une flèche du calcul de fractions associé à $\mathcal{F}$, on peut trouver $U \in \mathcal{F}$ tel que $X \times U \xrightarrow{t \times U} Y \times U$ soit un isomorphisme et donc aussi $f(t \times U) = f(t) \times f(U)$. Comme $f(U) = 1$, on en déduit que $f(t)$ est un isomorphisme : d'après la propriété universelle des catégories de fractions, f factorise par $\underline{E}'$.

Nous avons maintenant en main tous les outils pour entamer la construction des exemples annoncés.

3 EXEMPLES

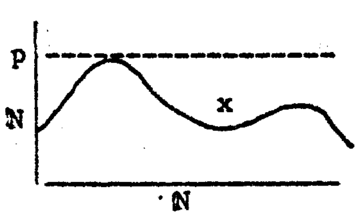
La numérotation des exemples est celle du diagramme de classification.

Le topos $\underline{E}_{1,4}$

On considère la catégorie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ et de leurs inclusions ; on note $\mathcal{P}(\hat{\mathbb{N}})$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, et l'on munit $\widehat{\mathcal{T}}(\mathbb{N})$ de la topologie de Grothendieck associée aux partitions finies de $\mathbb{N}$. Précisément, on prend comme cribles couvrants de base de l'objet final, les foncteurs $R \rightarrowtail 1$ définis par $R = \coprod_{i=1}^{n} h_{U_i}$ où h_{U_i} est le foncteur représenté par la partie U_i de $\mathbb{N}$, et où

$(U_i)_{i=1}^{n}$ est une partition finie de $\mathbb{N}$. On étend la définition à $\mathcal{T}(\hat{\mathbb{N}})$ de la manière habituelle pour en faire une topologie.

Si l'on note $\mathcal{T}(\tilde{\mathbb{N}})$ le topos des faisceaux pour cette topologie et N son O.E.N., N est $\coprod_{\mathbb{N}} 1$ comme dans tous les topos de Grothendieck. Cherchons à savoir ce qu'est un point de N, $x : 1 \longrightarrow N$. Par définition, c'est la donnée d'une flèche $R \longrightarrow N$ dans $\mathcal{T}(\hat{\mathbb{N}})$ où $R \rightarrowtail 1$ est un crible dense, c'est-à-dire correspondant à une partition finie de $\mathbb{N}$ $(U_i)_{i=1}^{n}$. C'est donc la donnée de n entiers x_i, chacun défini au-dessus de U_i, et la manière la plus simple de le voir, est donc de le considérer comme une fonction bornée de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:



la borne étant $p = \sup_{i=1\ldots n} \{n_i\}$

Considérons alors la base de filtre de Fréchet sur $\mathbb{N}$ constituée par les parties $([n,+\infty[)_{n \in \mathbb{N}}$. Notons $\underline{E}_{1,a}$ le topos des fractions pour cette base de filtre. <u>$N_{1,a}$ l'O.E.N. de $\underline{E}_{1,a}$ n'a que des points bornés</u> puiqu'il en est de même de N, et que tout point de N_{1a} se relève en un point de N.

On va construire une flèche $O' : N_{1,a} \longrightarrow N_{1a}$ qui prendra la valeur 0 sur tous les entiers de N_{1a} et sera cependant différente de 0. Pour ce faire, on commence par la construire dans $\mathcal{T}(\tilde{\mathbb{N}})$, où il suffit de la définir sur les Entiers standards (puisque $N = \coprod_{\mathbb{N}} 1$).

On pose :

$$O'(n) = (\underbrace{1,1,\ldots 1,}_{n}0,0\ldots).$$

Si $x : 1 \longrightarrow N$ est un Entier quelconque de N, il est défini par un nombre fini d'entiers $(n_i)_{i=1}^{p}$, et on a donc :

$$O'(x)_q = 0 \quad \text{si} \quad q \geq \sup_{i=1\dots p} \{n_i\}$$

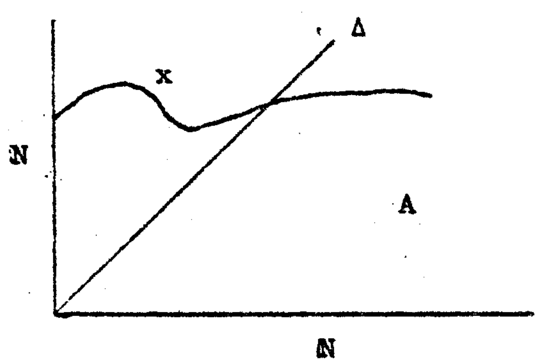
$O'(x)$ est donc nul dans $N_{1,a}$, et ceci pour tout $x : 1 \longrightarrow N_{1,a}$.

Par contre O' est non nulle : si cela était, on pourrait trouver un entier n tel que $O'/_{[n,+\infty[} = 0$ dans $\mathcal{T}(\tilde{\mathbb{N}})/_{[n+\infty[}$. Or, pour tout n :

$$O'/_{[n+\infty[}\ (n+1) = (\underset{n}{1}, \underset{n+1\dots}{0\dots})$$

et n'est donc pas nulle.

$N_{1,a}$ n'est donc pas faiblement bien pointé, et la partie complémentée $A \rightarrowtail N_{1,a}$ telle que $A = \mathrm{Ker}(0,O')$ est agréablement représentée par la partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ "au-dessous de la diagonale" :



et l'on imagine bien qu'une fonction bornée finit par être toute entière en-dessous de Δ à partir d'un certain rang.

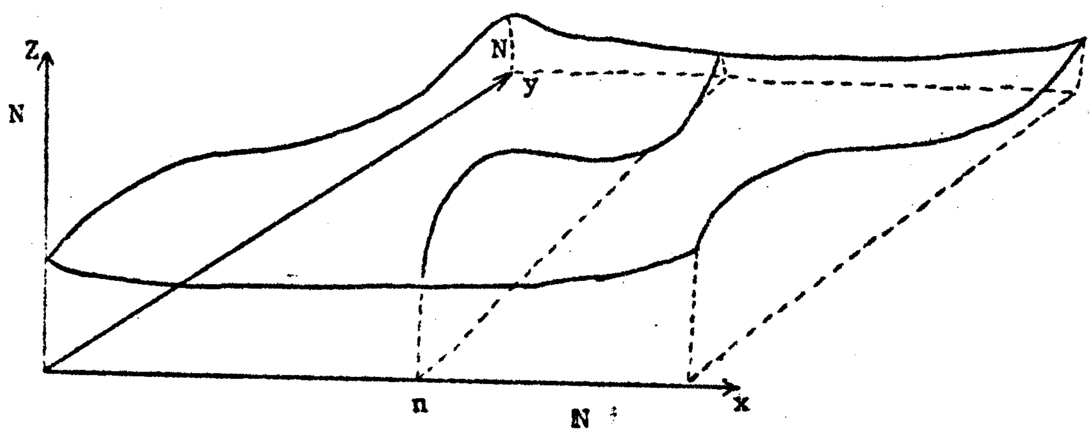
Le topos $\underline{E}_{1,b}$

On s'assure de ce que le fait de n'être pas bien pointé n'est pas lié à celui que les points soient bornés ou non en donnant un second exemple où les points ne sont pas bornés.

On considère dans $\hat{\mathcal{T}}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ la topologie de Grothendieck qui admet pour base l'ensemble des cribles

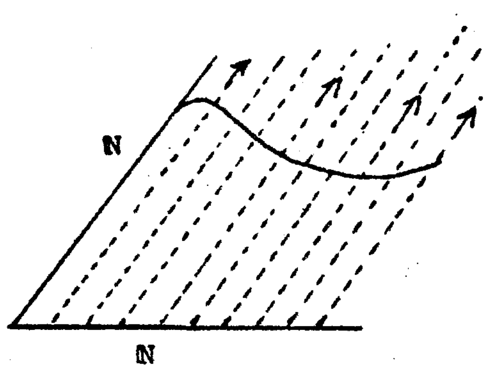
$$R = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \coprod_{i=1}^{p_n} hU_i' \quad \text{où } (U_i)_{i=1}^{p_n} \text{ est une partition finie de } \{n\} \times \mathbb{N}.$$

La représentation géométrique des points de l'O.E.N. N de $\tilde{\mathcal{T}}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ (faisceaux pour la topologie indiquée) est alors la suivante :



Ce sont des surfaces gauches telles que toute coupe suivant un plan vertical x=n soit le graphe d'une fonction bornée de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

On considère dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ la base de filtre des parties saturées vers le haut pour l'ordre déduit du second facteur :



Si l'on note $\underline{E}_{1,b}$ le topos des fractions pour cette base de filtre et $N_{1,b}$ l'O.E.N. de $\underline{E}_{1,b}$, la partie $A \rightarrowtail N_{1,b}$ située "en-dessous du plan bissecteur y=z, contient les points de N_{1b} sans être N_{1b} : puisque les coupes sont bornées dans la direction Oy, elles se retrouvent au dessous du plan bissecteur pour une certaine ordonnée ; A n'est pas N_{1b} puisque la fibre en tout point en est différente ; le complémentaire de A est ce qui se trouve au-dessus du plan y=z. On peut sans difficulté construire, comme pour N_{1a}, une flèche $N_{1b} \xrightarrow{t} [0,1]$ telle que A = Ker(t,0), en posant, au niveau $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$:

$$t(n) = (n_{p,q})_{N\times N} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_{p,q} = 1 & \text{si} \quad q < n \\ n_{p,q} = 0 & \text{si} \quad q \geq n \end{cases}$$

Enfin cet O.E.N. n'a pas que des points bornés : il suffit de considérer celui qui est défini par $n_{p,q} = p$.

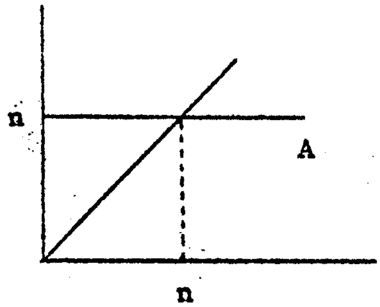
<u>Le topos $\underline{E}_2 = \underline{E}_2$,</u>

Soit $\underline{\mathrm{Ens}}^{N}$ le topos des foncteurs covariants sur l'ensemble ordonné N. Dans ce topos les sous-objets de 1 sont, ou bien 0, ou bien une partie saturée pour l'ordre c'est-à-dire un segment $[n,+\infty[$. Les ouverts $[n,+\infty[$ sont $\neg\neg$-denses puisque leur complémentaire ensembliste ne contient pas de parties saturées pour l'ordre.

Si l'on quotiente ce topos par le filtre des ouverts $\neg\neg$-denses, l'objet final devient booléen (prop. 5) ; mieux, il n'a plus d'ouverts non triviaux. Etant donnés les implications 7 et 5_2, on en déduit que cet O.E.N. N_2 est faiblement bien pointé.

On peut aussi remarquer que tous les points de N_2, même locaux, sont standards, ce qui nous permet d'affirmer (prop. 1) que N_2 est faiblement standard.

Pour montrer qu'il n'est pas bien pointé (et donc non standard), il suffit d'exhiber une partie stricte $A \rightarrowtail N_2$ contenant tous les points. Encore une fois on prend la partie située "au-dessous de la diagonale", c'est-à-dire l'objet défini au niveau $\underline{\mathrm{Ens}}^{N}$ par $A(p) = [0,p]$, les morphismes de transition étant bien sur les inclusions évidentes ; A contient tous les points de N_2 : ils sont tous standards et se retrouvent donc "au-dessous de la diagonale" à partir d'un certain rang



précisément $n/_{[n,+\infty[} \in A/_{[n+\infty[}$.

Il est clair que pour cet exemple, A n'est pas complémenté : aucun point local ne peut rester au-dessus de la diagonale et donc $\neg A = 0$.

Le topos $\underline{E}_3 = \underline{E}_3'$

Prenons un topos booléen $\underline{E}$ avec O.E.N. N (e.g. $\underline{\text{Ens}}$) et quotientons $\underline{E}/_{\mathbb{N}}$ par la base de Fréchet : $([n,+\infty[)_{n \in \mathbb{N}}$. Le topos quotient est booléen puisque le passage aux fractions conserve cette propriété. L'O.E.N. N_3 de ce topos $\underline{E}_3$ est donc bien pointé (prop. 4), et il n'est pas faiblement standard, car l'Entier générique $N \xrightarrow{\Delta} N\text{x}N$ est plus grand que n en restriction à $[n,+\infty[$. $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\Delta)$ est donc plus grand que tout entier standard. $[0,\Delta] \rightarrowtail N_3$ est donc une partie stricte complémentée contenant les points standards.

Le topos E_4

Exprimer qu'un O.E.N. est standard, (bien pointé), se fait en disant qu'un certain morphisme fonctoriel T (T') est injectif :

$$T : (N,.) \longrightarrow (1,.)^{\dot{\mathbb{N}}} \qquad T' : (N,.) \longrightarrow (1,.)^{(1,N)}$$
$$f \rightsquigarrow (f(n))_n \qquad\qquad f \rightsquigarrow (f(x))_x$$

les notions de faiblement standard (f. bien pointé) se remenant alors à l'injectivité de $T_N(T'_N)$.

Trouver des contre-exemples à ces situations procède donc de la même technique globable : on prend un honnête topos de Grothendieck que l'on quotiente par un filtre de manière à grossir les ensembles de flèches tout en conservant le nombre de points, ce qui conserve la surjectivité de T(T') sans conserver son injectivité.

Or, la situation que l'on cherche à obtenir, est celle où T est un monomorphisme sans être épimorphique : il ne faut donc pas s'étonner si la technique de construction est autre.

Prenons pour $\underline{E}_4$ la sous-catégorie de $\underline{Ens}/_{\mathbb{N}}$ constituée des suites stationnaires d'ensembles et de flèches : les objets sont les suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles telles qu'il existe n_o vérifiant $\left[n \geq n_o \Longrightarrow X_n = X_{n_o}\right]$; les flèches $(X_n)_n \xrightarrow{(f_n)} (Y_n)_n$ sont telles qu'il existe p_o vérifiant $\left[p \geq p_o \Longrightarrow f_p = f_{p_o}\right]$(ce qui entraîne $p_o \geq n_o$).

Cette catégorie est un topos : toutes les constructions finies existant dans $\underline{Ens}/_{\mathbb{N}}$ peuvent se faire dans $\underline{E}_4$. D'autre part, les suites constantes $(\mathbb{N}_n) \xrightarrow{(s_n)} (\mathbb{N}_n)$ et $(1_n) \xrightarrow{(0_n)} (\mathbb{N}_n)$ sont dans $\underline{E}_4$, et la propriété universelle de l'O.E.N. s'exprime par des diagrammes finis. $\underline{E}_4$ a donc un O.E.N. N_4 (qui est aussi celui de $\underline{Ens}/_{\mathbb{N}}$ puisque l'inclusion $\underline{E}_4 \longrightarrow \underline{Ens}/_{\mathbb{N}}$ est logique).

Celui-ci est évidemment standard puisqu'il en est ainsi dans $\underline{Ens}/_{\mathbb{N}}$ et que les flèches $N \longrightarrow X$ de $\underline{E}_4$ sont aussi dans $\underline{Ens}/_{\mathbb{N}}$.

Par contre $\underline{E}_4$ n'a pas de somme directe dénombrable ; soit $(1 \xrightarrow{x^n} N_4)$ la suite d'Entiers de N_4 définie par $x_p^n = \mathrm{Inf}(n,p)$; cette suite induit une flèche $N \xrightarrow{f} N$ de $\underline{Ens}/_{\mathbb{N}}$ qui se calcule de la manière suivante :

$f_n : \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}_n$ est définie par $f_n(p) = \mathrm{Inf}(n,p)$,

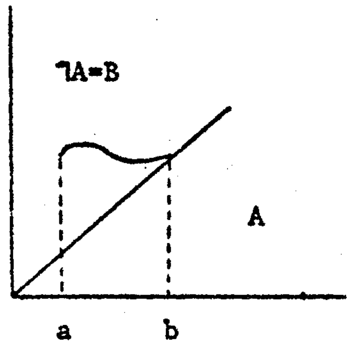
et cette suite de flèches (f_n) n'est pas stationnaire, et ne définit donc pas une flèche $N_4 \longrightarrow N_4$.

<u>Remarque</u> : Le résultat reste valable si l'on part d'un topos où N est $\coprod_N 1$.

<u>Le topos $\underline{E}_5$</u>

On prendra pour $\underline{E}_5$ le topos des faisceaux sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ pour la topologie des partitions finies, que l'on a eu l'occasion de considérer pour la construction de $\underline{E}_{1,a}$. $\underline{E}_5$ est un topos de Grothendieck et l'O.E.N. est donc somme dénombrable de 1. Montrons qu'il n'est pas méta-markovien.

Pour cela, il nous suffit d'exhiber une partie complémentée de N_5, dont le support n'est pas $\neg\neg$-fermé ; considérons le complémentaire de la partie $A \rightarrowtail N_5$ introduite en $\underline{E}_{1a}$, c'est-à-dire le sous-faisceau B de N_5 dont la fibre en n est $[n+1,+\infty[$: géométriquement, la partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ au-dessus de la bissectrice.



B n'a de sections qu'au-dessus des parties finies de N, puisqu'une section bornée n'est au-dessus de la bissectrice que sur une partie finie de $\mathbb{N}$.

Autrement dit, le support de B est le crible D des parties finies de N défini par

$$D(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

(c'est le faisceau associé au crible "discret"

$$D(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \text{ est un singleton} \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases} \quad)$$

Or $D \rightarrowtail 1$ est $\neg\neg$-dense puisque si $X \subset \mathbb{N}$ est non vide et tel que $\neg D(X) \neq \phi$ et si $n \in X$, on a $\neg D(n) = 1$ et $D(n) = 1$, ce qui est impossible.

Cet exemple nous permet de donner une démonstration sémantique du théorème suivant :

<u>Théorème 2</u> : *Le principe de Markov est indépendant de* HA_ω.

En effet, $\underline{E}_5$ n'est pas méta-markovien, et ne peut donc vérifier le principe de Markov et donc $HA_\omega \nvdash$ P.M. (et on sait aussi que $HA_\omega \nvdash \neg$P.M. en calculant dans Ens).

Le topos $\underline{E}_6$

Il est "facile" pour un O.E.N. d'être méta-markovien sans être flasque : prenons le topos $\underline{E}_6$ des faisceaux sur l'espace topologique habituel $\mathbb{R}$; donnons-nous une partie $A \rightarrowtail N_6$, A se décompose en $A = \coprod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ où les A_n sont des ouverts. Pour que A soit complémentée, il faut et il suffit que tous les A_n le soient, c'est-à-dire soient $\emptyset$ ou $\mathbb{R}$ (0 ou 1). Si A est complémentée, son support est 0 ou 1, et donc $\neg\neg$-fermé.

Chacun sait d'autre part que N n'est pas flasque : une section non constante d'un ouvert non connexe n'induit pas une section globale.

Le topos $\underline{E}_7$

Pour cette situation (flasque et non méta-bien ordonné), on peut choisir le topos des faisceaux sur la catégorie des parties $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ pour la topologie des partitions dénombrables. Les cribles couvrants de base $S \rightarrowtail 1$ seront ceux qui peuvent s'écrire $S = \coprod_{i \in \mathbb{N}} h_{X_i}$ où $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une partition au plus dénombrable de $\mathbb{R}$.

. L'O.E.N. N_7 de ce topos est flasque : toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$ définit une partition dénombrable de $\mathbb{R}$, et à ce titre, une section globale $1 \longrightarrow N_7$; à un point local $S \longrightarrow N_7$ correspond une fonction partielle $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$ (le domaine étant $\{x / S(\{x\}) = 1\}$) qui peut elle-même se prolonger en une fonction globale définissant un point global.

. 1 n'est pas booléen : puisque $\mathbb{R}$ n'est pas réunion dénombrable d'ensembles dénombrables (utilisation d'un "petit" axiome du choix), le crible discret $D = \coprod_{x \in \mathbb{R}} h\{x\}$ qui est aussi le crible des parties dénombrables de $\mathbb{R}$, est évidemment $\neg\neg$-dense, et ne peut être égal à $\mathbb{R}$.

Le topos $\underline{E}_8$

Il peut se faire que l'objet final d'un topos soit booléen sans que l'O.E.N. le soit. La preuve en est donnée par l'exemple 2 : l'objet final est booléen, et comme N_2 n'est pas bien pointé, il ne peut être booléen.

Le topos $\underline{E}_9$

Si N est un $\neg\neg$-faisceau, toute flèche $X' \longrightarrow N$ où $X' \rightarrowtail X$ est $\neg\neg$-dense se prolonge à X de manière unique.

Dire que N est flasque, c'est dire que l'on a cette propriété lorsque X est un ouvert : si N est flasque, $X' \longrightarrow N$ se prolonge à $1 \longrightarrow N$, donc à X par restriction, l'unicité provenant de ce que N est $\neg\neg$-séparé. Réciproquement, soit $X \xrightarrow{x} N$ un point local, notons $U = S \vee \neg S$ et définissons $x' : U \longrightarrow N$ par $x' = \binom{x}{o} : S \vee \neg S \longrightarrow N : U \longrightarrow 1$ est $\neg\neg$-dense, et par hypothèse, x' se prolonge à $1 \longrightarrow N$.

Il n'y a donc pas de raison pour que ces notions coïncident si le topos n'est pas engendré par les ouverts. L'exemple suivant les distingue.

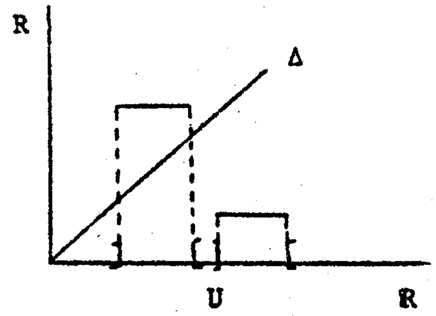
Associons à $\underline{E}_6$ le topos $\underline{E}_6'$ de la proposition 5 et prenons $\underline{E}_9 = \underline{E}_6'$. 1 est booléen par construction et N_9 est donc flasque.

Pour montrer que ce n'est pas un $\neg\neg$-faisceau, on va construire un sous-objet $\neg\neg$-dense $R' \longrightarrow C_{\mathbb{R}} = P_{\mathfrak{J}}(\coprod_{\mathbb{R}} 1)$ ("faisceau constant" $\mathbb{R}$), et une flèche $R' \longrightarrow N_9$ n'admettant pas de prolongement à $C_{\mathbb{R}}$ [$P_{\mathfrak{J}}$: foncteur canonique $\underline{E}_6 \longrightarrow \underline{E}_6'$].

Comme d'habitude, on va définir R' au niveau des faisceaux sur $\mathbb{R}$ en posant, si U est un ouvert de $\mathbb{R}$:

$$R'(U) = \{s : U \longrightarrow C_{\mathbb{R}} \;/\; \forall x \in U \quad s(x) \neq x\}.$$

L'interprétation géométrique est la suivante :



s est une fonction localement constante $U \longrightarrow \mathbb{R}$ ne coupant pas la diagonale Δ : R' est donc en quelque sorte "le complémentaire de la diagonale".

La flèche $f : R' \longrightarrow N$ est définie de la façon suivante : on a $R' = \coprod_{x \in \mathbb{R}} 1 - \{x\}$ où $1 - \{x\}$ est le foncteur représenté par l'ouvert dense complémentaire du point x. Pour définir f, il suffit donc de le faire sur chaque facteur $1 - \{x\}$, et comme $1 - \{x\} = h_{]-\infty,x[} \amalg h_{]x,+\infty[}$, on posera

$$f_x = \begin{cases} 0 & \text{sur } h_{]-\infty,x[} \\ 1 & \text{sur } h_{]x,+\infty[} \end{cases}$$

Plaçons-nous maintenant dans $\underline{E}_9$; f ne se prolonge pas à $C_{\mathbb{R}}$: si cela était, d'après la construction de $\underline{E}_9$, on pourrait trouver un ouvert dense U et une flèche $\overline{f} : \coprod_{\mathbb{R}} 1 \longrightarrow N$ de $\underline{E}_6$ tels que $\overline{f} \times U$ prolonge $f \times U$. Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert de U, $\overline{f} \times]a,b[$ prolonge $f \times]a,b[$: pour tout x de $\mathbb{R}$, $\overline{f}_x : h_{]a,b[} \longrightarrow N$ prolonge donc $f_x : h_{]a,b[-\{x\}} \longrightarrow N$. Or, si $x \in]a,b[$, f_x n'est pas constant sur $]a,b[- \{x\}$ alors que $\overline{f}_x$ est constant sur $]a,b[$ puisque $]a,b[$ est connexe.

Le topos $\underline{E}_{10}$

On va construire un topos non booléen dans lequel l'O.E.N. est booléen. Pour cela, on munit R de la topologie pour laquelle les fermés sont les parties au plus dénombrables de $\mathbb{R}$. Dans cette topologie, les ouverts non vides sont denses puisqu'un ouvert est soit vide, soit non dénombrable. De plus, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est un ouvert dense.

Si l'on note $\underline{E}$ le topos des faisceaux pour cette topologie, le topos associé $\underline{E}' = \underline{E}_{10}$ (prop. 5) est solution du problème ;

• N_{10} est booléen ; soit $A \rightarrowtail N_{10}$ une partie de N_{10} ; dans $\underline{E}$, A s'écrit $A = \coprod_{n \in \mathbb{N}} A_n$, où les A_n sont des ouverts. Pour tout n, $A_n \vee \neg A_n$ est un ouvert dense et donc aussi $S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \vee \neg A_n$ d'après ce que l'on a vu plus haut.

On a donc :

$$(A \vee \neg A) \times S = (\coprod_{\mathbb{N}} A_n \vee \coprod_{\mathbb{N}} \neg A_n) \times S = \coprod_{\mathbb{N}} (A_n \vee \neg A_n) \times S = \coprod_{\mathbb{N}} S = N \times S$$

puisque pour tout n, $S \subset A_n \vee \neg A_n$.

A en restriction à S est donc complémenté : complémenté dans N_{10}.

• $\underline{E}_{10}$ n'est pas booléen : notons $1_x = \mathbb{R} - \{x\}$, la flèche induite dans $\underline{E}_{10}$ par $f : \coprod_{x \in \mathbb{R}} 1_x \rightarrowtail \coprod_{\mathbb{R}} 1$ est $\neg\neg$-dense puisque f est $\neg\neg$-dense, et que le passage aux fractions conserve la $\neg\neg$-densité. Si ces objets étaient isomorphes dans $\underline{E}_{10}$, on pourrait trouver un ouvert dense $S \subset \mathbb{R}$ tel que $\coprod_{\mathbb{R}} 1_x \times S \simeq \coprod_{\mathbb{R}} S$, ce qui signifie $S \times 1_x = S$ pour tout x, et donc que $S \subset 1_x$ pour tout x, ce qui veut dire : $\forall x \quad x \notin S$.

On ne peut donc trouver un tel S, et la partie construite est stricte.

<u>Exemple 11</u> : N peut être un $\neg\neg$-faisceau sans que le topos soit booléen : par exemple dans le topos $\underline{E}_2$.

<u>Le topos $\underline{E}_{12}$</u>

Remarquons d'abord que $\underline{E}_{10}$ ne résout pas le problème 12, car N_{10} est un $\neg\neg$-faisceau. En effet, dans $\underline{E}$, tous les points locaux sont standards (tous les ouverts sont connexes) et admettent donc des prolongements évidents. Comme $\underline{E}$ est engendré par ses ouverts, on en déduit que N est un $\neg\neg$-faisceau et donc aussi N_{10} (Lemme 3).

Les constructions qu'on a faites jusque là ont pu être faites à l'aide d'une forme dénombrable d'axiome du choix (un produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide), de façon à pouvoir affirmer qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Nous n'avons pu trouver de topos simples où l'O.E.N. est booléen sans être un Π-faisceau ; on se donne pour cela un axiome du choix qui nous assure de l'existence d'ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$.

Donnons-nous donc un ultrafiltre non trivial D sur $\mathbb{N}$, et notons $\mathbb{R}_1$ l'ultrapuissance $\mathbb{R}^{\mathbb{N}/D}$. On sait [KEISLER] que $\mathbb{R}_1$ est un modèle ω^+-saturé de la théorie des ensembles densément ordonnés, c'est-à-dire que tout ensemble dénombrable de formules qui y est finitement satisfaisable, y est satisfaisable.

Considérons $\mathbb{R}_1$ muni de la topologie engendrée par les intervalles ouverts $]a,b[$; nous allons montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est un ouvert dense.

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses.

a) $\underline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \text{ est dense}}$

Soient $y_o \in \mathbb{R}_1$ et I un intervalle ouvert contenant y_o, nous allons construire par récurrence une suite décroissante d'intervalles $(]a_n,b_n[)_{n \in \mathbb{N}}$ contenus dans I, tels que pour tout n, $]a_n,b_n[\subset \bigcap_{i \leq n} B_i$:

. Puisque B_1 est un ouvert dense, $I \cap B_1$ contient un intervalle $]a_1,b_1[$.

. Supposons construit $]a_n,b_n[\subset \bigcap_{i \leq n} B_i$, $]a_n,b_n[\cap B_{n+1}$ contient un intervalle $]a_{n+1},b_{n+1}[$.

Or l'intersection d'une suite décroissante d'intervalle contient un intervalle. Considérons en effet l'ensemble dénombrable de formules :

$$\{a_n < x < y < b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

il est finitement satisfaisable donc satisfaisable : il existe a, b tels que $]a,b[\subset \bigcap_n]a_n,b_n[\subset \bigcap_n B_n$ et $(\bigcap_n B_n) \cap I \neq \phi$.

b) $\underline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \text{ est ouvert}}$

Soit $y_o \in \bigcap_n B_n$; puisque B_n est ouvert et contient y_o, on peut trouver $]a_n,b_n[\subset B_n$ contenant y_o.

L'ensemble de formules :

$$\{a_n < x < y_o < y < b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

étant finitement satisfaisable, est satisfaisable, et on peut trouver a et b tels que :

$$y_o \in]a,b[\subset \bigcap_n]a_n,b_n[\subset \bigcap_n B_n.$$

Notons $\underline{E}$ le topos des faisceaux sur $\mathbb{R}_1$ et $\underline{E}_{12} = \underline{E}'$.

Comme pour l'exemple 10, N_{12} devient booléen puisque l'intersection dénombrable d'ouverts denses est un ouvert dense, mais N_{12} n'est pas un Π-faisceau (bien qu'il soit flasque).

En effet, notons $1_x = \mathbb{R}_1 - \{x\}$ pour $x \in \mathbb{R}_1$, comme pour N_{10} $P_{\mathcal{F}}(\coprod_{x \in \mathbb{R}_1} 1_x) \rightarrowtail P_{\mathcal{F}}(\coprod_{\mathbb{R}_1} 1)$ est Π-dense, et la flèche $f : P_{\mathcal{F}}(\coprod_{\mathbb{R}_1} 1_x) \longrightarrow N_{12}$ définie dans $\underline{E}$ par

$$f_x = \begin{cases} 0 \text{ sur }]-\infty,x[\\ 1 \text{ sur }]x,+\infty[\end{cases}$$

ne se prolonge pas en une flèche $\overline{f} : C_{\mathbb{R}_1} \longrightarrow N_{12}$ pour les mêmes raisons que pour N_9.

APPENDICE (Janvier 78) par L. MAHE : application du théorème I, 3e partie.

<u>Proposition</u> : *Si l'objet final du topos $\underline{E}$ est booléen, tous les ensembles finis du topos sont booléens.*

<u>Preuve</u> : Par "ensemble fini" on entend un objet du topos isomorphe à un segment $[0,x]$ de N où $x : 1 \longrightarrow N$ est un point de N (éventuellement non-standard).

Pour x entier standard, cette proposition est triviale puisqu'elle se démontre par une récurrence externe. Par contre, pour x quelconque, elle ne peut se démontrer par récurrence interne puisqu'elle n'exprime pas la validité d'une formule interne.

Soit alors $A \subset N$ et $x : 1 \longrightarrow N$, il faut montrer que $A \cap [0,x]$ a un vrai complémentaire dans $[0,x]$, c'est-à-dire :

$\forall\, i\ (i \leq x \longrightarrow A(i) \vee \neg A(i))$.

Notons B l'interprétation de la formule $(i \leq x \longrightarrow A(i) \vee \neg A(i))$ et $\tilde{B}$ celle de $\forall\, z\ (z \geq n \longrightarrow B(z))$. Si 1 est booléen, N est méta bien ordonné (théorème I, 3e partie). Or on a $\tilde{B}(x+1)$ car $\underset{\underline{E}}{\models} z > x \longrightarrow B(z)$.

$\tilde{B}$ a donc un plus petit élément $y_o : 1 \longrightarrow \tilde{B}$, et on a

$\underset{\underline{E}}{\models} y_o = 0 \vee y_o = sp(y_o)$ (s = successeur, p = prédécesseur tronqué à 0).

Soit U le sous-objet de 1 interprétant $y_o = 0$:

Dans $\underline{E}/U$ on a $y_o = 0$ et donc $\forall\, n\ \tilde{B}(n)$, c'est-à-dire $\tilde{B} \times U = N \times U$.

Soit $V = \neg U$, dans $\underline{E}/V$ on a $y_o = sp(y_o)$.

Comme on a $A \vee \neg A \subset B \subset N$ et que $A \vee \neg A$ est $\neg\neg$-dense dans N, il en est de même de B. Soit alors $\begin{tikzcd} T \arrow[r, "u"] \arrow[d] & N \\ 1 & \end{tikzcd}$ un point local, dans le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail] & N & \\
T' \arrow[u, "u'"] \arrow[r, tail] \arrow[ur, phantom, "\text{P.F.}"] & T \arrow[u, "u"'] \arrow[r, tail] & 1
\end{tikzcd}$$

$T' \rightarrowtail T$ est $\neg\neg$-dense et donc un isomorphisme puisque 1 est booléen : tout point local de N se retrouve dans B et en particulier $p(y_o) \in \tilde{B} \times V$. Mais alors, comme $y_o \in \tilde{B} \times V$ on en déduit que $p(y_o) \in \tilde{B} \times V$, ce qui contredit le fait que y_o soit minimal dans $\tilde{B} \times V$: on a donc $V = 0$ et $\tilde{B} = N$.

La formule $\forall\, n\, \forall\, z\, (z \geq n \longrightarrow (z \leq x \longrightarrow A(z) \vee \neg A(z)))$ est donc valide dans $\underline{E}$, et en prenant $n=0$, on en déduit la validité de $\forall\, i\, (i \leq x \longrightarrow A(i) \vee \neg A(i))$, qui est le résultat cherché.

REFERENCES

[BENABOU] Problèmes dans les topos. Rapport n° 34, mars 1973. Séminaire de Mathématiques pures, Louvain-la-Neuve.

[BOILEAU] Types vs topos Université de Montréal Juin 1975.

[COSTE] Logique d'ordre supérieur dans les topos élémentaires. Séminaire de théorie des catégories dirigé par J. Bénabou. Novembre 1974.

[FOURMAN] Connections between category theory and logic, Thesis, University of Oxford, Novembre 1974.

[FREYD] Aspects of topos Bulletin of Australian Math. Soc. Vol. 17 (1972).

[GIRARD] Interprétation fonctionnelle et élimination des coupures de l'arithmétique d'ordre supérieur. Thèse, Université Paris VII, Juin 1972.

[KEISLER] Good ideals in fields of set, Ann. Math. 79 (1964).

[SHOENFIELD] Mathematical logic. Addison Wesley.

[SOLS] Bon ordre dans l'objet des entiers naturels d'un topos booléen C.R.A.S. Tome 281 n° 15.

[TAKAHASHI] Cut elimination theorem and Brouwerian-valueds models for intuitionnistic type theory. Comment. Math. Univ. Sancti Pauli XIX (1970).

[TAKEUTI] Proof theory. North-Holland.

[TROELSTRA] Mathematical investigation... Springer Lecture Notes n° 344.

[VAN DE VAUW - DE KINDER] Propriétés de l'arithmétique et des ensembles finis généralisables aux topos. Séminaire de théorie des catégories dirigé par J. Bénabou, 1975.

[VOLGER] Logical categories, semantical categories and topoi. Novembre 1972.