EMILE LE PAGE

Théorèmes des grands écarts sur les groupes nilpotents simplement connexes

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___1_A8_0>

THEOREMES DES GRANDS ECARTS

SUR LES GROUPES NILPOTENTS SIMPLEMENT CONNEXES

Emile LE PAGE

Résumé :

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{R}$, et si l'on pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, la loi (faible) des grands nombres dit que : pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|\frac{S_n}{n} - EX_1| \geq \varepsilon)$ tend vers 0 ; si l'on fait des hypothèses supplémentaires sur le comportement de $P(X_1 \geqslant x)$ pour $x \to \infty$, on peut obtenir des résultats (dits de grands écarts à la loi des grands nombres) sur la vitesse de convergence de $P(|\frac{S_n}{n} - EX_1| \geq \varepsilon)$ quand $n \to \infty$. (cf. autre article dans ce même volume).

Supposons maintenant que les (X_n) soient des v.a. indépendantes et de même loi à valeurs dans un groupe localement compact G. En notant $S_n = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$ les produits partiels de v.a., on peut se demander si les résultats ci-dessus ont une extension. En particulier Y. Guivarc'h, dans [1], a résolu la question de la loi des grands nombres. D'autres théorèmes limites divers ont aussi été (de manière plus ou moins complète) étendus à ce cadre. Il est donc naturel de se demander si l'on peut obtenir des lois des grands écarts sur les groupes.

L'article qui suit est un pas dans cette direction ; il traite du cas particulier important des groupes nilpotents : on se limite à l'obtention d'inégalités pour des v.a. bornées.

D'autres rédactions dans des contextes plus larges (v.a. vérifiant certaines conditions de moments, groupes de type rigide) sont en cours.

I.- Introduction

Nous commençons par rappeler quelques notions définies dans [1]. Soit G un groupe localement compact à génération compacte. Une application borélienne δ de G dans $\mathbb{R}_+$ est appelée jauge si elle vérifie

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \delta(g_1 g_2) \leq \delta(g_1) + \delta(g_2) + c$$

où c est une constante positive.

Une jauge δ est dite principale s'il existe un voisinage compact V de e engendrant G tel que $B_n = \{x \mid \delta(x) \leq n\} \subset V^n$. On sait qu'il existe des jauges principales et, si δ_0 est l'une d'elle, pour toute autre jauge δ nous avons :

$$\forall g \in G \qquad \delta(g) \leq c_1\, \delta_0(g) + c_2$$

où c_1 et c_2 sont des constantes positives.

Dans la suite $G = N$ sera un groupe nilpotent simplement connexe. Nous pouvons identifier ce groupe à son algèbre de Lie $\mathcal{N}$ muni du produit o défini par la formule de Campbell Hausdorff

$$x o y = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \ldots \qquad x,y \in \mathcal{N}$$

Nous supposons désormais cette identification réalisée.

Soit $N^1 = N \supset N^2 = [N,N^1] \supset \ldots \supset N^i = [N,N^{i-1}] \supset \ldots \supset N^r \supset$
$\supset N^{r+1} = \{e\}$

la suite centrale descendante de N.

Soit p une probabilité sur N à support compact ; soit m un supplémentaire de $N^2 = [N,N]$ dans N. Si pour $u \in N$ on désigne par $\bar{u}$ la composante de u sur m, on note

$$\bar{X} = \int_N \bar{u}\, p(du)$$

$\bar{X}$ est un élément de m.

Nous désignons par $(X_i)_{1 \leq i}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans N, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et de même loi p. Nous noterons

$$S_n = X_1\, X_2 \ldots X_n$$

Nous nous proposons d'établir les deux théorèmes suivants.

<u>Théorème 1</u>

Si p est une probabilité à support compact sur un groupe nilpotent simplement connexe N. Avec les notations précédentes pour jauge principale δ sur N

1) La suite de variables aléatoires $\left(\frac{\delta(S_n o(X^{-1})^n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge presque surement vers 0 .

2) Il existe des constantes $M(\delta,p)$, $A(p,\delta)$, $B(p,\delta)$ strictement positives telles que pour tout $1 > \varepsilon > 0$, on ait pour

$$n \geq \frac{N(p,\delta)}{\varepsilon^r} \qquad P\left(\frac{\delta(S_n o(X^{-1})^n)}{n} > \varepsilon\right)$$

$$\leq A(p,\delta)\ e^{-B(p,\delta)\ n\ \varepsilon^{2r}}$$

Théorème 2

Si p est une probabilité à support compact sur un groupe nilpotent simplement connexe N . Avec les notations précédentes pour toute jauge principale δ sur N

1) La suite de variables aléatoires $\left(\frac{\delta(S_n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge p s vers

$$\gamma = \lim_n \frac{\delta(\overline{X})^n}{n}$$

2) Il existe des constantes $A'(p,\delta)$, $B'(p,\delta)$ strictement positives telles que pour tout $1 > \varepsilon > 0$ on ait pour n supérieur à une constante $M'(p,\delta,\varepsilon)$

$$P\left(\left|\frac{\delta(S_n)}{n} - \gamma\right| > \varepsilon\right) \leq A'(p,\delta)\ e^{-B'(p,\delta)n\varepsilon^{2r}}$$

II.- Dans ce paragraphe, nous allons établir le théorème 1. Pour cela introduisons quelques notations.

Munissons l'espace vectoriel N d'une base $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ adaptée à la suite centrale descendante, c'est-à-dire telle que pour tout $s \leq r$ les vecteurs (e_i) appartenant à N^p en forment une base.

Désignons par $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions polynômes sur l'espace vectoriel N et par $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ le système de fonctions coordonnées associé à la base $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$.

On définit une notion de degré sur cette algèbre en attribuant un dégré à chaque générateur x_i. Le degré de x_i note $d(x_i)$ est par définition égal au plus grand entier s tel que e_i appartienne à N^s. Il est facile de voir que cette notion est indépendante du choix de la base adaptée.

Le produit $\circ$ sur N défini par la formule de Campbell Hausdorff est polynomial. Plus précisément, nous avons

$x_k(u \circ v) = x_k(u) + x_k(v) + P_k(u,v) \quad k \in \{1,2,\ldots,p\}$ où P_k est une fonction polynôme sur $N \times N$ $(\simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p)$ telle que

1) $P_k(u,v)$ ne dépend que des $p_{d(x_k)-1}$ premières coordonnées de u et de v où $p_i = \dim(N_{N^{i+1}})$

2) le degré de P_k est inférieur ou égal à $d(x_k)$.

3) le degré partiel de P_k par rapport à la première (resp. la deuxième) variable note deg ${}^{P_k}/_u$ (resp deg ${}^{P_k}/_v$) est inférieur ou égal à $d(x_k)-1$.

4) la valuation partielle de P_k par rapport à la première (resp la 2ème) variable notée val ${}^{P_k}/_u$ (resp val ${}^{P_k}/_v$) est supérieure ou est égale à 1.

Pour tout $i \in \{1,2,\ldots,r\}$ désignons par m^i un supplémentaire de N^{i+1} dans N^i. Nous avons $N = \bigoplus_{i=1}^{r} m^i$, si $u \in N$; notons $u^{(i)}$ sa composante sur m^i. Supposons les sous-espaces m^i, i $i \in \{1,2,\ldots,r\}$ de N normés par $\| \ \|_i$, on définit une fonction Φ

sur N par

$$\Phi(u) = \sup_{1 \leq i \leq r} \| u^{(i)} \|_i^{1/i} \qquad u \in N$$

On sait [2] que quitte à remplacer les normes $\| \ \|_i$ données par des normes homothétiques Φ est une jauge principal sur N . Comme il suffit d'établir le théorème 1 par une jauge principale particulière (ici nous utiliserons Φ) nous voyons que le théorème 1 résultera immédiatement de la

Proposition 1.

Sous les hypothèses du théorème 1, pour tout $x \in \mathcal{A}$ de valuation ≥ 1

1) la suite de variables aléatoires $\dfrac{x(S_n o(X^{-1})^n)}{n^{\deg x}}$ converge presque sûrement vers 0.

2) Il existe des constantes $M(x,p) > 0$ $A(x,p) > 0$ $B(p,x) > 0$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$ n ait pour $n \geq \frac{M}{\varepsilon}$

$$P\left(\left|\frac{x(S_n o(X^{-1})^n)}{n^{\deg x}}\right| > \varepsilon\right) < A \quad e^{-n B \varepsilon^{2r}}$$

Avant de prouver la proposition 1 établissons deux lemmes

Notant $p_i = \dim {}^{N}_{N^{i+1}}$ on a le

lemme 1 :

Pour toute fonction polynôme x de $\mathcal{A}$ de valuation $n \geq 1$ il existe une fonction polynôme P sur N x N telle que $\deg P \leq \deg x$, $P(u,v)$ ne dépende que des $p_{d(x)-1}$ premières coordonnées de u et v , $\deg P/_u \leq \deg x-1$ $\deg P/_v \leq \deg x-1$, $\operatorname{val} P/_u \geq 1$ $\operatorname{val} P/_v \geq 1$ et telle que

$\forall u,v \in N \quad x(uov) = x(u) + x(v) + P(u,v).$

Preuve du lemme 1

Soit $\mathcal{B}$ le sous - ensemble des polynômes de $\mathcal{A}$ de valuation ≥ 1 qui satisfont au lemme 1.

1) $\mathcal{B}$ contient les polynomes $(x_i)_{1\leq i\leq p}$

2) Il est immédiat que $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$

3) $\mathcal{B}$ est stable pour le produit, en effet soient x et y deux éléments de $\mathcal{B}$

$x(uov) = x(u) + x(v) + p(u,v) \qquad u,v \in N$

$y(uov) = y(u) + y(v) + 2(u,v) \qquad u,v \in N$

où P,Q sont des polynômes sur $N\mathrm{x}N$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé du lemme 1.

On a alors

$(xy)(uov) = x(uov)\ y(uov) = (x(u) + x(v) + P(u,v)(y(u)+y(v) + Q(u,v))$

soit $(xy)(uov) = (xy)(u) + (xy)(v) + R(u,v)$

où $R(u,v) = x(u)\ y(v) + x(v)\ y(u) + [x(u) + x(v)]\ Q(u,v) +$

$(y(u) + y(v))\ P(u,v) + P(u,v)\ Q(u,v)$.

R est un polynôme de degré inférieur ou égal à deg x + deg y = $dy(xy)$ de plus val $R_{/u} \geq 1$ et val $R/_v \geq 1$ et R ne dépend que des $P_{d(x)vd(y)} \leq P_{d(x)+d(y)-1}$ premières coordonnées.

Autrement dit $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$ contenant les polynomes $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ et par conséquent $\mathcal{B}$ contient tous les polynomes de $\mathcal{A}$ de valuation ≥ 1 .

lemme 2

Sous les hypothèses du théorème 1 pour tout $x \in \mathcal{A}$ de valuation ≥ 1 il existe une constante $c_x > 0$ telle que

1) $\forall \omega \in \Omega \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{|x(S_n(\omega))|}{n^{\deg x}} \leq c_x$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{|x(\overline{X}^{-1})^n|}{n^{\deg x}} \leq c_x \quad \text{et} \quad \frac{|x\ (\bar{X})^n|}{n^{\deg x}} \leq c_x$$

<u>Preuve du lemme 2</u>

Vérifions tout d'abord la première propriété en raisonnant par récurrence sur le degré de x .

a) si $x \in \mathcal{X}$ est de degré 1 on a

$$x(S_n) = \sum_{i=1}^{n} x\ (x_1)\ .$$

Notons S_p le support de p ; si $A_x = \sup_{u \in S_p} |x(u)|$ il est clair que

$$\frac{|x(S_n)|}{n} \leq A_x$$

b) Supposons le résultat établi pour les polynômes de degré inférieur ou égal à $q \geq 1$ et soit x un polynôme de degré $q + 1$.

D'après le lemme 1 on a

$x(uov) = x(u) + x(v) + P(u,v)$

avec $\deg P \leq \deg x$ $\operatorname{val} P_{/u} \geq 1$ $\operatorname{val} P_{/v} \geq 1$, $P(u,v)$ ne dépendant que des p_q premières coordonnées de u et v .

Pour établir le résultat cherché, il nous suffit de considérer le cas où $P(u,v) = y(u)\ z(v)$ le cas général s'en déduisant à l'aide de l'inégalité triangulaire, puisque P est alors une somme finie de tels monômes. Les propriétés de P entraînent que

$\text{val } y \geq 1$, $\text{val } z \geq 1$, $\deg y \leq \deg x - 1$, $\deg z \leq \deg x - 1$

On a

$$x(S_n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(X_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n-1} y(S_k)\ z(X_{k+1})$$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence et en notant $A_z = \sup_{u \in S_p} |z(u)|$

on a

$$|x(S_n)| \leq n\ A_x + \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^{\deg y}\right) C_y\ A_z$$

Il en résulte que

$$\frac{|x(S_n)|}{n^{\deg x}} \leq \frac{A_x}{n^{\deg x - 1}} + \frac{1}{n^{\deg x}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\deg y}\right) C_y\ A_z$$

et le second membre de cette inégalité est borné car $\deg x \geq 1$

et car $\displaystyle \frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n} k^{\deg y} \sim \frac{n^{\deg y + 1 - \deg x}}{\deg y + 1} \leq \frac{1}{\deg y + 1}$

Nous avons ainsi établi la première propriété du lemme 2.

La seconde propriété se démontre de façon analogue.

Remarquons maintenant que la proposition 1 résulte de la proposition 1'.

<u>Proposition 1'</u>

Sous les hypothèses du théorème 1 pour tout $x \in \mathcal{A}$ de valuation ≥ 1

1) La suite de variables aléatoires

$$\frac{x(S_n) - x(\bar{X})^n}{n^{\deg x}} \qquad \text{converge presque surement vers } 0 .$$

2) Il existe des constantes $M'(x,p) > 0$, $A'(x,p) > 0$ $B'(p,x) > 0$ telles que pour tout $\varepsilon>0$ on ait pour

$$x \geq \frac{M'}{\varepsilon} \quad P\left(\left| \frac{x(S_n) - x(\bar{X})^n}{n^{\deg x}} \right| > \varepsilon \right) \leq A' e^{-nB'\varepsilon^2}$$

En effet, soit $x \in$ de valuation ≥ 1. On a d'après le lemme 1

$$x(uov) = x(u) + x(v) + \sum_{p=1}^{p_o} y_p(u)\, z_p(v) \qquad u, v \in N$$

où val $y_p \geq 1$, val $z_p \geq 1$ $\qquad \deg y_p + \deg z_p \leq \deg x$

Par conséquent on a

$$x(S_n o(\bar{X}^{-1})^n) = x(S_n) + x(\bar{X}^{-1})^n + \sum_{p=1}^{p_o} y_p(S_n)\, z_p(\bar{X}^{-1})^n \quad \text{et}$$

$$o = x(\bar{X})^n o(\bar{X}^{-1})^n = x(\bar{X})^n + x(\bar{X}^{-1})^n + \sum_{p=1}^{p_o} y_p(\bar{X})^n\, z_p(\bar{X}^{-1})^n$$

d'où par différence

$$x(S_n o(\bar{X}^{-1})^n) = (S_n) - x(\bar{X})^n + \sum_{p=1}^{p_o} z_p(\bar{X}^{-1})^n \,(y_p(S_n) - y_p(\bar{X})^n)$$

Du fait que $\left| \dfrac{z_p(\bar{X}^{-1})^n}{n^{\deg z_p}} \right| \leq C_{z_p}$ (lemme 2) et que

$\deg z_p + \deg y_p \leq \deg x$ que $p \in \{1, \ldots, p_o\}$ on en déduit immédiatement que la proposition 1 est une conséquence de la proposition 1'.

<u>Démonstration de la proposition 1'</u>

1) Vérifions tout d'abord la première propriété de la proposition 1' en raisonnant par récurrence sur le degré de x

-a) si deg x = 1

$$\frac{1}{n}(x(S_n) - x(\bar{X})^n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x(X_k) - x(\bar{X})|$$

et on obtient le résultat cherché par application de la loi forte des grands nombres pour une suite de variables aléatoires réelles centrées de même loi.

-b) si deg $x \geq 2$, supposons le résultat établi pour les polynômes de degré inférieur ou égal à deg(x)-1.

On a $x(u_o v) = x(u) + x(v) + \sum_{p=1}^{po} y_p(u)\, z_p(v) \quad u,v \in N$

où val $y_p \geq 1$, val $z_p \geq 1$, deg y_p + deg $z_p <$ deg x

On en déduit que

$$x(S_n) = \sum_{k=1}^{n} x(X_k) + \sum_{p=1}^{po} \sum_{k=1}^{n-1} y_p\,(S_k)\; z_p(X_{k+1})$$

$$x(\,(\bar{X})^n) = n\; x(\bar{X}) + \sum_{p=1}^{po} \sum_{k=1}^{n1} y_p(\bar{X})^k \quad z_p(\bar{X})$$

D'où il résulte, en notant $I_{p_o} = \{ 1 \leq p \leq p_o \;/\; \deg z_p = 1 \}$ et

$I'_{p_o} = \{1, 2, \ldots, p_o\} \setminus I_{p_o}$ que

$$\frac{x(S_n) - x(\bar{X})^n}{n^{\deg x}} - \frac{1}{n^{\deg x}} \left[x(X_1) = x(X_2) + \ldots + x(X_n)\right]$$

$$+ \frac{1}{n^{\deg x-1}}\, x(\bar{X}) + \sum_{p \in I'_{p_o}} \frac{1}{n^{\deg x}} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \left[y_p(S_k) z_p(X_{k+1}) - y_p(\bar{X})^k z_p(\bar{X})\right] \right\}$$

$$+ \sum_{p \in I_{p_o}} \frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n-1} y_p(S_k) \left[z_p(X_{k+1}) - z_p(\bar{X})\right]$$

$$+ \sum_{p \in I_{p_o}} \frac{z_p(\bar{X})}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n-1} \left(y_p(S_k) - y_p(\bar{X})^k\right) \qquad (1)$$

Examinons successivement les termes du second membre de cette égalité.

α) comme $\deg x \geq 2$ la suite $\left(\frac{1}{n^{\deg x}}\,[x(X_1)+\ldots+x(X_n)]\right)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers o par application de la loi forte des grands nombres pour une somme de variables aléatoires indépendantes réelles, de même loi.

β) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\deg x-1}}\, x(\bar{X}) = 0$

γ) pour $p\in I'_{p_o}$ on a d'après le lemme 2 en notant

$$A_{z_p} = \sup_{u\in S_p\cup\bar{X}} |z_p(u)|$$

$$\left|\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n-1} [y_p(S_k)\, z_p(X_{k+1}) - y_p(\bar{X})^k\, z_p(\bar{X})]\right| \leq \frac{2A_{z_p}}{n^{\deg x}}\, C_{y_p} \sum_{k=1}^{n=1} k^{\deg y_p}$$

ou si $p\in I'_{p_o}$ $\deg y_p \leq \deg x-2$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n-1} k^{\deg y_p} = 0$

Il en résulte que presque sûrement

$$\lim_n \sum_{p\in I'_{p_o}} \frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n-1} |y_p(S_k)z_p(X_{k+1})-y_p(\bar{X})^k\, z_p(\bar{X})| = 0$$

δ) Pour $p\in I_{po}$ posons $\sigma_n(z_p) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (z_p(X_k)-z_p(\bar{X}))$

D'après la loi forte des grands nombres pour une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, centrées de même loi on sait que la suite $(\sigma_n(z_p))_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

$$\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n-1} y_p(S_k)\ \left[z_p(X_{k+1}) - z_p(\overline{X})\right] =$$

$$\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=2}^{n-2} k\sigma_k(z_p)\left[y_p(S_{k-1}) - y_p(S_k)\right] - \frac{1}{n^{\deg x}}\ \sigma_1(z_p)y_p(S_1) + \frac{1}{n^{\deg x}}\ \sigma_n(z_p)y_p(S_{n-1})$$

La suite de variables aléatoires $\dfrac{|y_p(S_{k-1}) - y_p(S_k)|}{k^{\deg y_p - 1}}$

est bornée (conséquence des lemmes 1 et 2). Il en résulte puisque

$\deg x \geq \deg y_p + 1$ et puisque $(\sigma_n(z_p))_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0

que la suite

$$\left(\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=2}^{n-2} k\ \sigma_k(z_p)\ \left[y_p(S_{k-1}) - y_p(S_k)\right]\right)_{n\geq 1}$$

converge presque sûrement vers 0.

Il est clair, de plus, que les suites

$$\left(\frac{1}{n^{\deg x}}\ \sigma_1(z_p)y_p(S_1)\right)_{n\geq 1} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{n^{\deg x}}\ \sigma_n(z_p)y_p(S_{n-1})\right)_{n\geq 1}$$

convergent presque sûrement vers 0 ; donc pour tout $p \in I_p$ la suite

$\dfrac{1}{n^{\deg x}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} y_p(S_k)\ \left[z_p(X_{k+1}) - z_p(\overline{X})\right]$ converge presque sûrement

vers 0.

Il en est de même pour la suite

$$\sum_{p \in I_{p_o}} \left(\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n-1} y_p(S_k)\ \left[z_p(X_{k+1}) - z_p(\overline{X})\right]\right)$$

η) Considérons maintenant la suite

$$\left(\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n} \left[y_p(S_k) - y_p(\bar{X})^k\right]\right)_{n\geq 1}$$

On a $\deg y_p \leq \deg x-1$ et donc par hypothèse de récurrence la suite

$$\left(\frac{y_p(S_x)-y_p(\bar{X})^n}{n^{\deg y_p}}\right)_{n\geq 1}$$ converge presque sûrement vers 0.

On en déduit immédiatement puisque $\deg x \geq \deg y_p+1$ que la suite

$$\left(\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n} (y_p(S_k) - y_p(\bar{X})^k)\right)_{n\geq 1}$$ converge presque surement vers 0

et donc aussi la suite

$$\left(\sum_{p \in I_{p_o}} \frac{z_p(\bar{X})}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n-1} (y_p(S_k) - y_p(\bar{X})^k)\right)_{n\geq 1}$$

Les paragraphes α), β), γ), δ), η) établissent la première assertion de la proposition 1'.

2) Démontrons maintenant la 2ème affirmation de la proposition 1'. Pour cela nous utiliserons plusieurs lemmes.

<u>Lemme 3</u>

> Pour tout $x \in \mathcal{A}$ de valuation ≥ 1
>
> $$\frac{x(S_n) - x(\bar{X})^n}{n^{\deg x}} = T_{n,1}(x) + T_{n,2}(x) + T_{n,3}(x)$$
>
> où
>
> .a) $T_{n,1}(x)$ est une variable aléatoire telle que
>
> $|T_{n,1}(x)| \leq K_{x,p}\; n^{-1}$ où $K_{x,p}$ est une constante.

.b) $T_{n,2}(x)$ est une variable aléatoire qui est une combinaison linéaire finie de termes de la forme

$$\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-1} y(S_{k_p}) \left(z(X_{k_p+1}) - z(\bar{X})\right)$$

où $z, y, \in \mathcal{A}$ avec $\deg z = \operatorname{val} z = 1$, $\operatorname{val} y \geq 1$ et $\deg x \geq \deg y + p$

.c) $T_{n,3}(x)$ est une variable aléatoire qui est une combinaison linéaire finie de termes de la forme

$$\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-1} \left[y(S_{k_p}) - y(\bar{X})^{k_p}\right]$$

où $y \in \mathcal{A}$ $\deg y = \operatorname{val} y = 1$ et $\deg y + p \leq \deg X$.

preuve du lemme 3.

La preuve du Lemme 3 est immédiate par récurrence sur le degré de x en utilisant l'expression (1) et le lemme 2 et en appliquant l'hypothèse de récurrence à y_p $p \in I_{p_o}$

Notons $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$. On a le lemme 4.

Lemme 4

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles telles que pour tout $n \geq 1$ Y_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable et telles que $|Y_n| \leq A n^q$ où A est une constante et q un entier positif. Alors si $x \in \mathcal{A}$ est un polynome tel que $\deg x = \operatorname{val} x = 1$ et si

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(n) \quad Y_k \quad [x(X_{k+1}) - x(\overline{X})]$$

où les $(a_k(n))_{1 \leq k \leq n}$ sont des nombres réels tels que

$$\sum_{k=1}^{n} [a_k(n)]^2 \; k^{2q} = 0\,(n^{\alpha}) \qquad \alpha > 0$$

Il existe une constante B telle que pour tout $\varepsilon > 0$

$$P\,(|Z_n| > \varepsilon) \leq 2\, e^{-\frac{B\,\varepsilon^2}{n^{\alpha}}}$$

Preuve du lemme 4

La variable aléatoire $x(X_{k+1}) - x(\overline{X})$ est pour tout $k \geq 1$, centrée et bornée par une constante A_x. Il en résulte que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \geq 0$

$$E\,(e^{t\,(x(X_{k+1}) - x(\overline{X}))}) \leq e^{t^2 A_x^2}$$

et donc aussi que

$$E\,(e^{t\; a_k(n)\; Y_k\; |x(X_{k+1}) - x(\overline{X})|} \,|\, \mathcal{F}_k) \leq e^{t^2 A_x^2 A^2 a_k^2(n)\; n^{2q}}$$

on a donc pour tout $t \in R$ et $n \geq 1$

$$E\,(e^{tZ_n}) = E\,(e^{t\; a_n(n)\; Y_n\; |x(X_{n+1}) - x(X)} \,\mathcal{F}_n) \leq e^{t^2 A_n^2 A^2 a_n^2(n)\; n^{2q}}\; E(e^{tZ_{n-1}})$$

On en déduit par récurrence sur n que pour tout $t \in R$ et $n \geq 1$

$$E(e^{tZ_n}) \leq e^{t^2 A_x^2 A^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2(n)\; k^{2q}}$$

D'après l'inégalité de Bernstein on a $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \forall\ t > 0$

$$P(Z_n > \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon}\; E(e^{tZ_n}) \leq e^{-t\varepsilon}\; e^{t^2 A_x^2 A^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2(n)\; k^{2q}}$$

Or le minimum du second nombre est atteint pour t

$$t = \frac{\varepsilon}{2A_x^2\, A^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2(n)\, k^{2q}}$$ et vaut

$$\exp\left[- \frac{\varepsilon^2}{4A_x^2\, A^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2(n)\, k^{2q}} \right]$$

De même $P(Z_n < -\varepsilon) \leq \exp\left[- \frac{\varepsilon^2}{4\, A_x^2\, A^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2(n)\, k^{2q}} \right]$

donc $$P(|Z_n| \geqslant \varepsilon) \leq 2\exp\left[- \frac{\varepsilon^2}{4\, A_x^2\, A^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2(n)\, k^{2q}} \right]$$

Or par hypothèse $\sum_{k=1}^{n} a_k^2(n)\, k^{2q} \leq c\, n^{\alpha}$

par conséquent $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, n \geq 1$ on a

$$P(|Z_n| > \varepsilon) \leq 2\, e^{- \frac{\varepsilon^2}{4A_x^2\, A^2\, c\, n^{\alpha}}}$$

Etudions maintenant pour $x \in A$ de valuation ≥ 1

$$P\left(\frac{|x(S_n) - x(\bar{X})^n|}{n^{\deg x}} > \varepsilon \right)$$

D'après l'inégalité triangulaire et le lemme 3 on a

$$P\left(\frac{|x(S_n) - x(\bar{X})^n|}{n^{\deg x}} > \varepsilon \right) \leq P\left(|T_{n,1}(x)| > \varepsilon/3 \right) + P\left(|T_{n,2}(x)| > \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

$$+ P\left(|T_{n,3}(x)| > \varepsilon/3 \right)$$

Examinons successivement chacun des termes du second membre de cette inégalité.

1) on a

$$P(|T_{n,1}(x)| > \varepsilon/3) = 0 \quad \text{dès que} \quad n > \frac{3K_{x,p}}{\varepsilon}$$

2) Pour étudier $P(|T_{n,2}(x)| > \varepsilon/3)$ il nous suffit de considérer

$$P\left(\left|\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-1} y(S_{k_p}) \left[z(X_{k_p+1}) - z(\overline{X})\right]\right| > \frac{\varepsilon}{c_1}\right)$$

avec $z, y \in \mathcal{A}$ $\deg z = \operatorname{val} z = 1$, $\operatorname{val} y \geq 1$, $\deg x \geq \deg y + p$

et où c_1 est une constante choisie pour que $P(|T_{n,2}(x)| > \varepsilon/3)$ soit majorée par une somme finie de tels termes

$$\sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-1} y(S_{k_p}) \left[z(X_{k_p+1}) - z(\overline{X})\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-p} a'_j(n)\, y(S_j) \left[z(X_{j+1}) - z(\overline{X})\right]$$

où $a'_j(n) = \sum_{j_1=j+1}^{n-1} \sum_{j_2=j_1+1}^{x-1} \cdots \sum_{j_{p-1}=j_{p-2}+1}^{n-1} 1$

on a $\sum_{j=1}^{n-p} [a'_j(n)]^2 \, j^{2\deg y} = 0(n^{2\deg y + 2p-1})$, comme d'après le lemme 2 on a $|y(s_j)| \leq c_y \, j^{\deg y}$ par application du lemme 4 nous obtenons

$$P\left(\left|\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{h_1-1} \cdots \sum_{k_p=1}^{h_{p-1}-1} y(S_{k_p}) \left[z(X_{k_{p+1}}) - z(\overline{X})\right]\right| > \frac{\varepsilon}{c_1}\right)$$

$$\leq 2 \exp\left[-B_1 \frac{\varepsilon^2 \, n^{2\deg x}}{n^{2\deg y + 2p-1}}\right] \leq 2 \exp\left[-B_1 \, \varepsilon^2 \, x\right]$$

où B_1 est une constante > 0.

3) Pour étudier $P(|T_{n,3}(x)| > \frac{\varepsilon}{3})$ il nous suffit de considérer

$$P\left(\left|\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-1} (y(S_{k_p}) - y(\overline{X})^{k_p})\right| > \frac{\varepsilon}{c_2}\right) \quad \text{où} \quad y$$

où $y \in \mathcal{A}$ $\deg y = \operatorname{val} y = 1$ et $\deg y + p \leq \deg x$

et où c_2 est une constante choisie pour que $P(|T_{n,3}(x)| > \varepsilon/3)$ soit majorée par une somme finie de tels termes.

$$\sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-1} (y(S_{k_p}) - y(\overline{X})^{k_p}) = \sum_{j=1}^{n-P} a''_j(n) \left[y(X_j) - y(\overline{X})\right]$$

où $a''_j(n) = \sum_{j_1=j}^{n-1} \sum_{j_2=j+1}^{n-1} \sum_{j_p=j_{p-1}+1}^{n-1} 1$

On a $\sum_{j=1}^{n} \left[a''_j(x)\right]^2 = 0(n^{2p+1})$

Par application du lemme 4, nous obtenons

$$P\left(\frac{1}{n^{\deg x}} \left|\sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-1} (y(S_{k_p}) - y(\overline{X})^{k_p})\right| > \frac{\varepsilon}{c_2}\right)$$

$$\leq 2\exp\left[-B_2\, \varepsilon^2 \frac{n^{2\deg x}}{n^{2p+1}}\right] \leq 2\exp\left[-B_2\, n\, \varepsilon^2\right]$$

où B_2 est une constante > 0 .

Les résultats des paragraphes 1) 2) et 3) précédents établissent la 2ème assertion de la proposition 1'.

III.- Dans ce paragraphe, nous établissons le théorème 2

1) La suite $(\delta(\overline{X})^n)_{n\geq 1}$ est une suite sous additive et donc $\left(\frac{\delta(\overline{X})^n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers une limite γ. D'autre part la suite de variables aléatoires $\left(\frac{\delta(S_n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement ainsi qu'il l'est établi dans [1].

Compte tenu de ces remarques, la première assertion du théorème est une conséquence de la deuxième assertion.

2) Etablissons la 2ème assertion. On a :

$$(2) \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\delta(S_n)}{n} - \gamma\right| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{\delta(S_n)}{n} - \frac{\delta(\overline{X})^n}{n}\right| > \varepsilon/_2\right)$$

$$+ \mathbb{P}\left(\left|\frac{\delta(\overline{X})^n}{n} - \gamma\right| > \varepsilon/_2\right)$$

D'autre part, comme

$$\delta(S_n) - \delta(\overline{X})^n \leq \delta(S_n \circ (\overline{X})^{-1+n})$$

et

$$\delta(\overline{X})^n - \delta(S_n) \leq \delta(S_n^{-1} \circ (\overline{X})^n)$$

on a

$$(3) \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\delta(S_n)}{n} - \frac{\delta(\overline{X})^n}{n}\right| > \varepsilon/_2\right) \leq \mathbb{P}\left(\delta(S_n \circ (\overline{X}^{-1})^n) > \varepsilon/_2\right)$$

$$+ \mathbb{P}\left(\delta(S_n^{-1} \circ (\overline{X})^n) > \varepsilon/_2\right)$$

En tenant compte des inégalités (1) et (2) et en appliquant le résultat 2) du théorème 1 à p et à sa symétrique $\check{p}$ on obtient immédiatement le 2) du théorème 2.

REFERENCES

[1] Y. GUIVARC'H : "Une loi des grands nombres pour les groupes de Lie". Séminaires de probabilités I. Université de Rennes (1976).

[2] A. RAUGI : "Théorème de la limite centrale sur les groupes nilpotents". Zeit für Wahr. 43 (1978) p. 149-172